

MATEMÁTICA

para o Enem

Potências e Logaritmos

Cara(o) estudante, este material é um convite para ajudá-lo em sua preparação em Matemática para o ENEM. Continuamos estudando um tema de grande importância nas aplicações da Matemática: potências e logaritmos.

As próximas questões introduzem conceitos e cálculos envolvendo *logaritmos*. Mesmo que você não compreenda inteiramente todos os passos de uma só vez (trata-se de uma questão de maior complexidade), perceba que o logaritmo é o expoente correto para expressar um dado número, no caso 2, como uma potência de 10, por exemplo. Portanto, quando escrevemos

$$\log_{10} 2 \approx 0,30,$$

(o logaritmo de 2 na base 10 é aproximadamente igual a 0,30), temos

$$10^{0,30} \approx 2.$$

Questão 1 (ENEM 2016, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 174, adaptada) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2 ?

(A) $E_1 = E_2 + 2$

MATEMÁTICA

para o Enem

(B) $E_1 = 10^2 E_2$

(C) $E_1 = 10^3 E_2$

(D) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} E_2$

(E) $E_1 = \frac{9}{7} E_2$

 **Solução.** Observe que, no caso do terremoto no Japão, em 2011, a magnitude registrada foi $M = 9$. Assim,

$$9 = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_0} \right),$$

onde E_1 foi a energia liberada neste terremoto. Logo

$$\log_{10} \left(\frac{E_1}{E_0} \right) = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{E_1}{E_0} = 10^{\frac{27}{2}}.$$

Da mesma forma, no terremoto de 2013, na China, a magnitude medida foi $M = 7$, ou seja,

$$7 = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_2}{E_0} \right),$$

onde E_2 foi a energia liberada neste terremoto. Logo

$$\log_{10} \left(\frac{E_2}{E_0} \right) = 7 \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{E_2}{E_0} = 10^{\frac{21}{2}}.$$

Deste modo, obtemos $E_1 = 10^{\frac{27}{2}} E_0$ e $E_2 = 10^{\frac{21}{2}} E_0$. Dividindo estes dois resultados um pelo outro, obtemos

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{\frac{27}{2}} E_0}{10^{\frac{21}{2}} E_0} = 10^{\frac{27}{2} - \frac{21}{2}} = 10^{\frac{6}{2}} = 10^3.$$

Logo,

$$E_2 = 10^3 E_1,$$

o que corresponde à alternativa C). ■

MATEMÁTICA

para o Enem

Questão 2 (ENEM 2013, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 162, adaptada) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de céσιο-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do céσιο-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do céσιο-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

- A) 27
- B) 36
- C) 50
- D) 54
- E) 100

 **Solução.** A massa inicial de céσιο-137 é dada pela constante A , cujo valor não precisamos conhecer. Porém, precisamos determinar a constante k . Para isso, usamos o fato de que, após 30 anos, a quantidade de massa de céσιο-137 passa de A para a metade, ou seja, para $\frac{A}{2}$. Assim,

$$\frac{1}{2}A = A \cdot (2,7)^{30k}.$$

Portanto

$$(2,7)^{30k} = \frac{1}{2}.$$

O que se pede na questão é a quantidade de anos após a qual a massa de céσιο-137 será *um décimo* da massa inicial, ou seja, será igual a

$$\frac{1}{10}A.$$

MATEMÁTICA

para o Enem

Isto significa que, após estes t anos, teremos $M(t) = \frac{1}{10}A$. Portanto,

$$A \cdot (2,7)^{kt} = \frac{1}{10}A,$$

o que resulta em

$$(2,7)^{kt} = \frac{1}{10},$$

ou seja $(2,7)^{kt} = 10^{-1}$. Portanto, elevando ambos os lados à potência 30, obtemos

$$(2,7)^{30kt} = 10^{-30}$$

Assim,

$$((2,7)^{30k})^t = 10^{-30}$$

Como vimos acima, $(2,7)^{30k} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$. Deste modo, calculamos

$$(2^{-1})^t = 10^{-30}$$

Finalmente, usamos o fato de que $\log_{10} 2 \approx 0,3$, ou seja, $2 \approx 10^{0,3}$. Concluimos que

$$(10^{-0,3})^t = 10^{-30},$$

donde segue que

$$10^{-0,3t} = 10^{-30}.$$

Isto implica que

$$t = \frac{30}{0,3} = 100 \text{ anos,}$$

resposta que corresponde à alternativa E). ■

Materiais e Roteiros para Estudo

Se você quer revisar alguns assuntos ou técnicas que usamos aqui, recomendamos que os seguintes vídeos e materiais (Khan Academy, Portal da Matemática, vídeos do PAPMEM):

- <https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-exp-and-log>
- <https://www.youtube.com/watch?v=t5hDp2ZkeZw>

MATEMÁTICA

para o Enem

- https://www.youtube.com/watch?v=G5-A8P_Cb0o

Por fim, sugerimos algumas atitudes para o estudo deste material:

- Registre suas principais dúvidas e dificuldades.
- Observe atentamente os erros que possa ter cometido.
- Revise os materiais teóricos para sanar estes erros e dúvidas.
- Forme grupos de estudo (em suas redes sociais) para compartilhar dúvidas, ideais e progressos com seus colegas.
- Consulte sua professora ou professor.