

Progressões e crescimento geométricos, potências e logaritmos

Cara(o) estudante, este material é um convite para que você reforce sua preparação em Matemática para o ENEM. Iniciaremos estudando um tema de grande importância nas aplicações da Matemática: potências e logaritmos. Abordaremos também assuntos relacionados, como os juros compostos e as progressões geométricas. Começemos com uma questão que envolve Matemática Financeira.

Questão 1 (ENEM 2019, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 154) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado. O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

- A) 398,02.
- B) 400,00.
- C) 401,94.
- D) 404,00.
- E) 406,02.

Solução. Antes de mais nada, precisamos entender o conceito de *juros*: se o cliente da loja optasse pelo pagamento *à vista*, ou seja, na hora da compra, os valores a serem pagos seriam *menores*. Portanto, haveria um *desconto* na compra à vista. Isto significa que há um *acréscimo* na compra *à prazo*, isto é, se o cliente optar por pagamentos futuros na forma de parcelas. O enunciado informa que a taxa de *juros compostos* é de 1% ao mês, ou seja, $\frac{1}{100}$ a cada mês depois da data da compra. Isto quer dizer que, se o cliente optar por pagar uma dívida

MATEMÁTICA

para o Enem

de 200 reais apenas depois de um mês, pagará, na ocasião,

$$200 + 200 \times \frac{1}{100},$$

ou seja,

$$200 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 202 \text{ reais}$$

Logo, o *valor futuro* de 200 reais, em um mês, será 202 reais. Se, no entanto, o cliente resolver adiar o pagamento em um mês a mais, ou seja, pagar a dívida apenas *dois* meses depois da data da compra, o valor futuro a ser pago será igual a

$$202 + 202 \times \frac{1}{100},$$

ou seja,

$$202 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 202 + 2,02 = 204,02$$

Note que este segundo cálculo já foi feito sobre o valor de 202 reais e não sobre os 200 reais iniciais! Por isso, temos, neste caso, os juros compostos, ou *juros sobre juros*.

Concluimos que o pagamento à prazo feito pelo cliente, no valor de R\$ 202 reais, poderia ter sido feito à vista com o valor descontado de R\$ 200,00. Haveria também desconto para o pagamento que ele realizaria à prazo, no valor de R\$ 204,02, que poderia ser pago à vista por R\$ 200,00. Portanto, o total que teria sido pago à vista pelo cliente seria R\$ 200 + R\$ 200,00 = R\$ 400,00. A alternativa correta é B). ■

Vamos treinar um pouco mais esta ideia de taxas compostas!

Questão 2 (ENEM 2019, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 157) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R\$ 1 250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal

MATEMÁTICA

para o Enem

dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. **Censo 2010**. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

- A) R\$ 1 340,00.
- B) R\$ 1 349,00.
- C) R\$ 1 375,00.
- D) R\$ 1 465,00.
- E) R\$ 1 474,00.

Solução. No período de 2000 a 2010, o rendimento médio mensal aumentou 7,2%, a partir de um valor inicial de R\$ 1.250,00 em 2000. Assim, em 2010, o valor do rendimento médio mensal passou a ser

$$1.250 + 1.250 \times \frac{7,2}{100} = 1.250 \times \left(1 + \frac{7,2}{100}\right).$$

O aumento esperado (projetado) de 2010 para 2020 é de 10%, a partir do valor de 2010. Portanto, o rendimento mensal médio esperado em 2020 é igual a

$$1.250 \times \left(1 + \frac{7,2}{100}\right) \times \left(1 + \frac{10}{100}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1.250 \times \left(1 + \frac{17,2}{100} + \frac{72}{10.000}\right) &= 1.250 \times \left(1 + \frac{17,2}{100} + \frac{0,72}{100}\right) \\ &= 1.250 \times \frac{117,92}{100} = 1.474 \text{ reais.} \end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é E). ■

MATEMÁTICA

para o Enem

Questão 3 (UNICAMP 2018, Primeira Fase, Prova Q, Questão 18) Dois anos atrás, certo carro valia R\$ 50.000,00 e atualmente vale R\$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

- A) R\$ 25.600,00.
- B) R\$ 24.400,00.
- C) R\$ 23.000,00.
- D) R\$ 18.000,00.

Solução. O valor do carro decresce a uma taxa anual constante dada por, digamos, $r\%$. Logo, em um ano, o valor do carro passou de R\$ 50.000,00 para

$$50.000,00 - 50.000,00 \times \frac{r}{100} = 50.000 \times \left(1 - \frac{r}{100}\right),$$

um valor menor. Após mais um ano, este valor reduz ainda mais, passando a ser

$$50.000 \times \left(1 - \frac{r}{100}\right) \times \left(1 - \frac{r}{100}\right) = 32.000.$$

Portanto, a taxa $r\%$ é dada ao resolvermos a equação

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right) \times \left(1 - \frac{r}{100}\right) = \frac{32.000}{50.000},$$

ou seja, a equação

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Calculando a raiz quadrada em ambos os lados da equação, obtemos

$$1 - \frac{r}{100} = \frac{4}{5}.$$

Logo, em um ano a mais, o valor do carro passa de R\$ 32.000,00 para

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right) \times 32.000 = \frac{4}{5} \times 32.000 = 25.600 \text{ reais.}$$

Assim, a alternativa correta é A). ■

MATEMÁTICA

para o Enem

Questão 4 (INSPER 2019-1, Caderno 1, Questão 36) Considere a seguinte tabela:

x	$\frac{28}{1000}$	$\frac{30}{1000}$	$\frac{35}{1000}$	$\frac{38}{1000}$	$\frac{40}{1000}$	$\frac{3}{10}$
10^x	1,067	1,071	1,084	1,091	1,096	2

Investimentos de taxa fixa são uma opção mais conservadora para quem busca aplicar seu dinheiro em tempos de instabilidade do mercado. Para aqueles que procuram essa linha de investimento, a investidora M&B oferece um plano de investimento para seus clientes com taxa anual fixa na qual o dinheiro aplicado duplica em um período de 10 anos. Com base nos valores da tabela, é correto afirmar que a taxa anual atrelada ao plano oferecido por essa investidora é de

- A) 7,1%
- B) 9,1%.
- C) 9,6%.
- D) 8,4%.
- E) 6,7%.

Solução. De acordo com o enunciado, um cliente que invista R\$ 100,00 no plano com esta taxa anual fixa receberá, em 10 anos, o dobro deste valor, isto é, R\$ 200,00. Se $r\%$ é taxa anual fixa, temos

$$\underbrace{\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)}_{10 \text{ vezes}} \times 100 = 200.$$

Portanto, a taxa $r\%$ é dada pela seguinte equação

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 2.$$

Portanto

$$1 + \frac{r}{100} = 2^{\frac{1}{10}}.$$

MATEMÁTICA

para o Enem

No entanto, de acordo com a última coluna da tabela $2 = 10^{\frac{3}{10}}$. Substituindo na equação anterior, temos

$$1 + \frac{r}{100} = (10^{\frac{3}{10}})^{\frac{1}{10}} = 10^{\frac{3}{100}} = 1,071,$$

onde, na última igualdade, usamos a segunda coluna da tabela. Portanto, $r\% = 7,1\%$. Assim, a alternativa correta é A). ■

Materiais e Roteiros para Estudo

Se você quer revisar alguns assuntos ou técnicas que usamos aqui, recomendamos que os seguintes vídeos e materiais (Khan Academy, Portal da Matemática, vídeos do PAPMEM):

- <https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-exp-and-log>
- <https://www.youtube.com/watch?v=t5hDp2ZkeZw>
- https://www.youtube.com/watch?v=G5-A8P_Cb0o

Por fim, sugerimos algumas atitudes para o estudo deste material:

- Registre suas principais dúvidas e dificuldades.
- Observe atentamente os erros que possa ter cometido.
- Revise os materiais teóricos para sanar estes erros e dúvidas.
- Forme grupos de estudo (em suas redes sociais) para compartilhar dúvidas, ideais e progressos com seus colegas.
- Consulte sua professora ou professor.