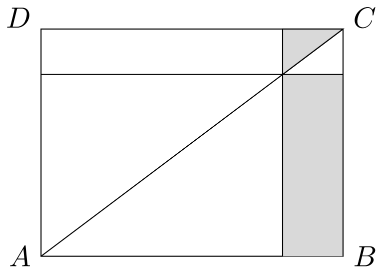
PROFMAT/SEDUC
Avaliação de Conhecimentos Básicos

13 de março de 2021

1

Na figura seguinte, a área do triângulo retângulo pintado de cinza é igual a 1,5 cm^2 e a área do retângulo pintado de cinza é igual a 12 cm^2.



Qual é a área do retângulo $ABCD$?

(A) 70 cm^2

(B) 75 cm^2

(C) 80 cm^2

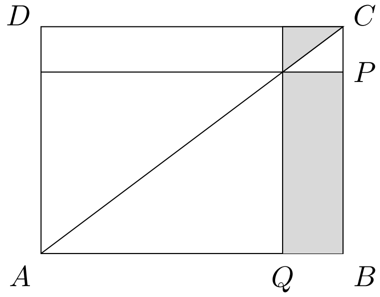
(D) 85 cm^2

(E) 90 cm^2

Gabarito

Alternativa (B)

Solução



Com os dados sobre as áreas, concluímos que a razão entre as alturas $h = CP$ e $H = PB$ é dada por

$$\frac{H}{h} = \frac{12}{3} = 4.$$

Portanto,
$$\frac{H+h}{h} = 5.$$
Por relações de semelhança, deduzimos que as bases $AB = L$ e $QB = \ell$ satisfazem a mesma razão, isto é,
$$\frac{L}{\ell} = 5.$$
Portanto, a área do retângulo é dada por
$$L(H+h) = 25\ell h = 25 \times 3 = 75 \text{ cm}^2.$$

2

Arnaldo planejara incrementar a sua criação de ovinos, em sua fazenda em Quixadá, utilizando 12 mil reais para comprar alguns desses animais, cada um deles com um mesmo preço. Entretanto, no dia da compra, Arnaldo foi informado de que o preço de cada animal tinha aumentado em 25%, o que diminuiu a quantidade de animais comprados, com os 12 mil reais, em 6 unidades. Quantos animais Arnaldo teria comprado se o preço de cada animal tivesse diminuído 25% em vez de aumentado?

(A) 24

(B) 30

(C) 36

(D) 40

(E) 42

Gabarito

Alternativa (D)

Solução

Se o preço inicial de cada animal é denotado por p, teríamos
$$\frac{12000}{p(1+\frac{1}{4})} = \frac{12000}{p} - 6.$$
Portanto,
$$6p = \frac{12000}{5},$$
ou seja, $p = 400$ reais. Uma diminuição de 25% neste preço inicial permitiria comprar
$$\frac{12000}{400 \times (1-\frac{1}{4})} = 40 \text{ carneiros.}$$

3

Ezequiel comprou um terreno, em forma retangular, para construir uma casa de veraneio. Ao medir o terreno, Ezequiel descobriu que cada um dos lados tinha medida 20% maior que o informado no anúncio de venda. Sendo assim, Ezequiel teve de pagar um valor maior ao antigo proprietário, mantendo o mesmo valor pago por metro quadrado. Qual foi o aumento percentual do preço final pago pelo terreno em relação ao valor do anúncio?

(A) 20%

(B) 40%

(C) 44%

(D) 48%

(E) 400%

Gabarito

Alternativa (C)

Solução

Um aumento de 20% em cada dimensão linear representa uma área

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)^2 = 1 + 2\times\frac{20}{100} + \left(\frac{20}{100}\right)^2 = 1,44$$

maior que a inicial, isto é, um acréscimo de 44%.

4

Um motorista fez uma viagem de carro em duas etapas. Na primeira etapa, ele percorreu um terço do percurso, com uma velocidade média de 90 km/h e, na segunda etapa, percorreu o que restava para completar a viagem, com uma velocidade média de 120 km/h. Qual a velocidade média com que o motorista realizou o percurso total?

(A) 100 km/h

(B) 105 km/h

(C) 108 km/h

(D) 112 km/h

(E) 115 km/h

Gabarito

Alternativa (C)

Solução

Dada a distância d percorrida por inteiro, o tempo necessário, em horas, para a primeira etapa do percurso é igual a

$$\frac{d/3}{90} = \frac{d}{270},$$

ao passo que o tempo total da segunda etapa, em horas, é

$$\frac{2d/3}{120} = \frac{d}{180}.$$

Portanto, a velocidade média desempenhada no percurso total é

$$\frac{d}{\frac{d}{270}+\frac{d}{180}} = \frac{1}{\frac{2}{540}+\frac{3}{540}} = 108\,\text{km/h}.$$

5

Em um jogo de perguntas e respostas, um jogador ganha 8 pontos por cada resposta correta e perde 3 pontos por cada resposta incorreta. Joaquim respondeu a 45 perguntas e obteve um total de 206 pontos. Qual a diferença entre as quantidades de perguntas respondidas correta e incorretamente por Joaquim?

(A) 13

(B) 14

(C) 15

(D) 16

(E) 17

Gabarito

Alternativa (E)

Solução

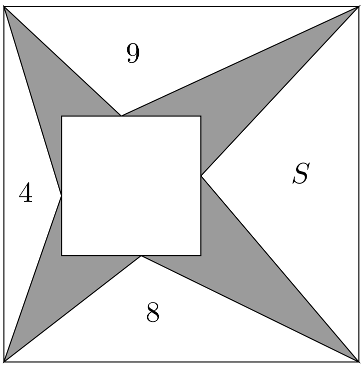
Denotando por a e e o número de respostas corretas e o número de respostas incorretas, respectivamente, temos $a + e = 45$ e o total de pontos obtidos é

$$206 = 8a - 3 \times (45 - a) = 11a - 135.$$

Logo $a = 31$ e $e = 14$. Portanto, $a - e = 17$.

6

A figura a seguir é formada por dois quadrados com lados paralelos e quatro triângulos destacados em branco. As medidas das áreas de três dos triângulos já estão apresentadas na figura.



A área S do quarto triângulo é igual a

(A) $4\sqrt{6}$.

(B) 13.

(C) 18.

(D) $10 + \sqrt{2}$.

(E) $5\sqrt{2}$.

Gabarito

Alternativa (B)

Solução

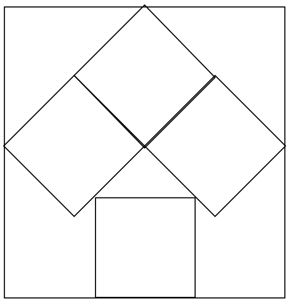
Sejam x, y, z, w as alturas, respectivamente, dos triângulos de áreas $9, 4, 8$ e S, relativas às bases que são lados do quadrado maior. Sejam k o lado do quadrado menor e L o lado do quadrado maior. Temos, portanto,

$$x + z + k = y + w + k = L.$$

Ou seja, $x + z = y + w$. Multiplicando essa última igualdade por $\frac{L}{2}$, obtemos: $9 + 8 = 4 + S$. Logo, $S = 13$.

7

A figura a seguir é composta por quatro quadrados com lado medindo 1 centímetro e um retângulo circunscrito a esse conjunto de quadrados.



A área desse retângulo, em centímetros quadrados, é igual a

(A) $4 + 3\sqrt{3}$.

(B) $4 + 3\sqrt{2}$.

(C) $4 + 2\sqrt{2}$.

(D) $3 + 4\sqrt{3}$.

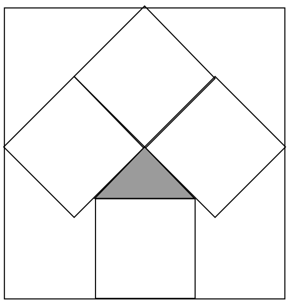
(E) $3 + 4\sqrt{2}$.

Gabarito

Alternativa (B)

Solução

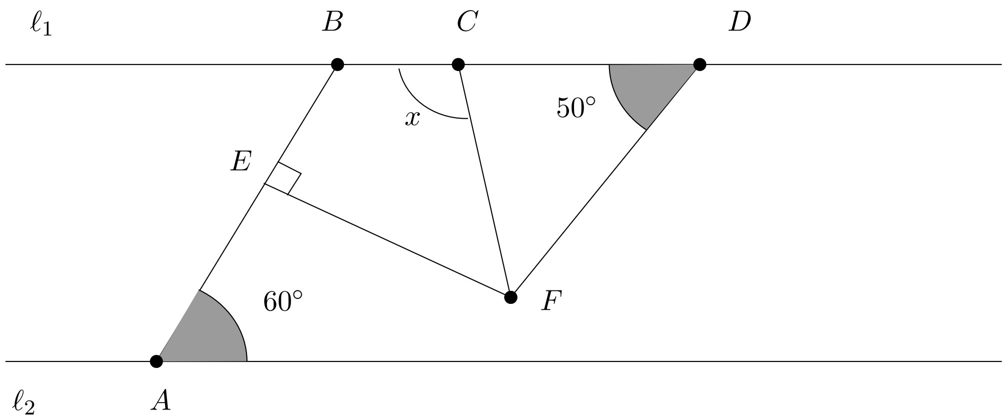
Usando o teorema de Pitágoras no triângulo cinza (ver figura a seguir), verificamos que seus catetos possuem medida igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Além disso, a altura relativa à sua hipotenusa tem medida igual a $\frac{1}{2}$.



Assim, a altura do retângulo é $\sqrt{2} + \frac{1}{2} + 1 = \sqrt{2} + \frac{3}{2}$. A largura é $2\sqrt{2}$. Portanto, sua área é $4 + 3\sqrt{2}$.

8

Na figura a seguir, as retas ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas, o ângulo $B\widehat{E}F$ é reto e CF é bissetriz do ângulo $E\widehat{F}D$. Além disso, os ângulos destacados na figura, com vértices em A e em D, medem, respectivamente, $60°$ e $50°$.



A medida do ângulo $B\widehat{C}F$ é dada por

(A) $90°$.

(B) $100°$.

(C) $105°$.

(D) $110°$.

(E) $120°$.

Gabarito

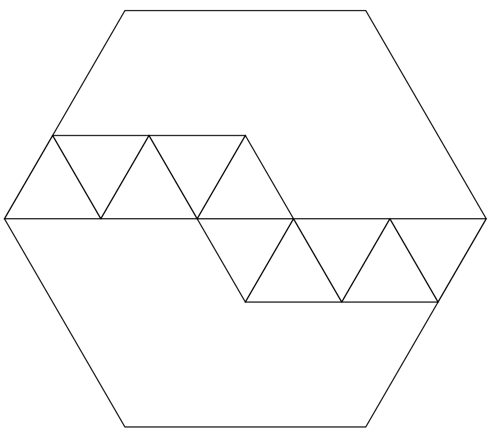
Alternativa (B)

Solução

Note que $C\widehat{B}E = 120°$. No quadrilátero $BEFD$, temos $E\widehat{F}D = 360° - 90° - 50° - 120° = 100°$. Como FC é bissetriz desse ângulo, $C\widehat{F}D = 50°$. Pelo teorema do ângulo externo, $B\widehat{C}F = 100°$.

9

Na figura a seguir, temos 10 triângulos equiláteros e um hexágono regular.



Qual é a razão entre a área do hexágono e a soma das áreas dos triângulos?

(A) $\dfrac{16}{5}$

(B) $\dfrac{18}{5}$

(C) $\dfrac{15}{6}$

(D) $\dfrac{10}{6}$

(E) $\dfrac{15}{4}$

Gabarito

Alternativa (E)

Solução

Note que o hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros maiores de lado $\frac{5}{2}$. Por semelhança, a área do triângulo equilátero maior será $\frac{25}{4}$ vezes maior do que a área dos triângulos equiláteros menores. Assim, a razão procurada é

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{25}{4} = \frac{15}{4}.$$

10

Em um triângulo ABC, temos $AB = AC = 18$. Seja P um ponto sobre o lado BC tal que $AP = 15$. Assim, o produto $PB \cdot PC$ é igual a

(A) 100.

(B) 99.

(C) $30\sqrt{11}$.

(D) $33\sqrt{10}$.

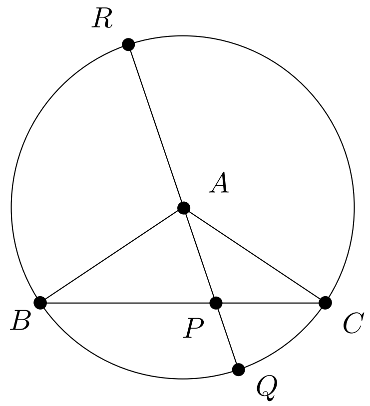
(E) 102.

Gabarito

Alternativa (B)

Solução

Considere o círculo de centro A e raio AB, como na figura a seguir. Suponha que a reta AP corta esse círculo nos pontos Q e R. Por potência de ponto, temos que $PB \cdot PC = PR \cdot PQ = (18 + 15)(18 - 15) = 99$.



11

Um triângulo ABC, de lados $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, é tal que $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$. Sabendo que ABC é semelhante ao triângulo cujos lados são os comprimentos de suas alturas, pode-se afirmar que, necessariamente,

(A) $ac = b^2$.

(B) $ab = c^2$.

(C) $bc = a^2$.

(D) $\widehat{B} = 60°$.

(E) $\widehat{A} = 90°$.

Gabarito

Alternativa (A)

Solução

Como $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$, temos $a > b > c$. Sendo h_a, h_b e h_c os comprimentos das alturas relativas aos lados de comprimentos a, b e c, respectivamente, temos $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, em que S é a área do triângulo. Portanto, $h_a < h_b < h_c$, e a condição de semelhança dá $\frac{a}{h_c} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_a}$. Então, $\frac{a}{b} = \frac{h_c}{h_b} = \frac{b}{c}$, de forma que $ac = b^2$.

12

Ao traçarmos todas as diagonais de um decágono regular, formamos vários polígonos convexos cujos vértices são também vértices do decágono. Dentre tais polígonos, quantos têm pelo menos sete lados?

(A) 11

(B) 45

(C) 56

(D) 120

(E) 176

Gabarito

Alternativa (E)

Solução

Há tantos polígonos convexos de k lados cujos vértices também são vértices do decágono quantas sejam as maneiras de escolher k dos 10 vértices do decágono. Portanto, há $\binom{10}{k}$ de tais polígonos. Como queremos que $k \geq 7$, concluímos que o número desejado de polígonos é

$$\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 120 + 45 + 10 + 1 = 176.$$

13

Seja ABC um triângulo retângulo em B com hipotenusa AC medindo 1. Um ponto D é marcado em seu interior de modo que $AD = 1/2$ e os ângulos $A\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}D$ têm, ambos, medidas iguais a α. Sabendo que os triângulos ABD e ACD têm áreas iguais, pode-se afirmar que

(A) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$.

(B) $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

(C) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

(D) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$.

(E) $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

Gabarito

Alternativa (B)

Solução

Uma vez que $AC = 1$, temos $AB = AC \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha$. Portanto,

$$\text{área}(ABD) = \frac{1}{2} AD \cdot AB \operatorname{sen} B\widehat{A}D = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{4}.$$

Por outro lado, $C\widehat{A}D = B\widehat{A}C - B\widehat{A}D = (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$. Assim,

$$\text{área}(ACD) = \frac{1}{2} AC \cdot AD \operatorname{sen} C\widehat{A}D = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - 2\alpha)}{4} = \frac{\cos 2\alpha}{4}.$$

Igualando essas duas expressões, obtemos $\operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$, de sorte que $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

14

Para resolver a equação

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 3,$$

uma estratégia útil é aplicar a substituição de variável $y = x + \dfrac{1}{x}$. Assim fazendo, obtemos a equação em y dada por

(A) $y^3 - 3y^2 - 3y - 9 = 0$.

(B) $y^3 + 3y^2 + 3y - 9 = 0$.

(C) $y^3 + 3y^2 - 3y - 9 = 0$.

(D) $y^3 + 3y^2 - 3y + 9 = 0$.

(E) $y^3 - 3y^2 + 3y - 9 = 0$.

Gabarito

Alternativa (C)

Solução

A substituição de variável $y = x + \frac{1}{x}$ dá

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

e

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y.$$

Portanto,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad \text{e} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

de forma que a equação do enunciado equivale a $y^3 - 3y + 3(y^2 - 2) = 3$ ou, ainda,

$$y^3 + 3y^2 - 3y - 9 = 0.$$

15

Uma antena vertical é vista de um ângulo de 45º a uma distância de 150 metros, medida no plano horizontal da base da antena. Aproximadamente a que distância, neste mesmo plano, pode ser vista a um ângulo de 30º?

(A) 110 metros

(B) 150 metros

(C) 173 metros

(D) 260 metros

(E) 300 metros

Gabarito

Alternativa (D)

Solução

Seja h a altura da antena, medida desde o plano horizontal de sua base. Assim

$$\frac{h}{150} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

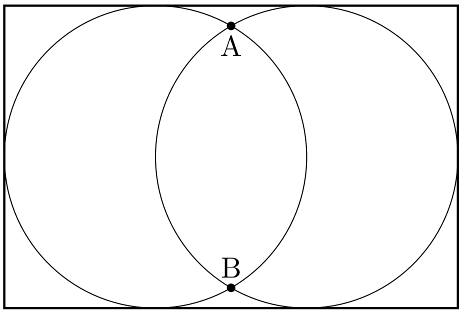
Logo $h = 150$ metros. Portanto, a distância d correspondente ao ângulo de 30° é dada por

$$\frac{150}{d} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$$

Concluímos que $d = \sqrt{3} \times 150 \approx 260$ metros.

16

A figura seguinte representa dois círculos de raio 1 contidos em um retângulo. Os dois círculos se intersectam de modo que os arcos de circunferência na intersecção, determinados pelos pontos A e B, correspondem, cada um, a um terço do comprimento de cada uma das circunferências.



A área da região do retângulo, exterior aos círculos, é igual a

(A) $6 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $6 - \dfrac{4}{3}\pi$.

(C) $2\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $6 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\pi$.

(E) $6 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{4}{3}\pi$.

Gabarito

Alternativa (E)

Solução

Observamos que o quadrilátero determinado pelos pontos A e B e pelos centros dos círculos tem área igual a $\sqrt{3}/2$. Por outro lado, as áreas das partes dos círculos externas a este quadrilátero somam $\frac{4}{3}\pi$. Como a área do retângulo é igual a 6, concluímos que a área desejada é

$$6 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\pi.$$

17

A instabilidade financeira em 2020 aumentou o interesse por investimentos em ouro e dólar, ativos que tiveram rendimentos reais aproximados, no ano, de 45% e 30% do valor investido, respectivamente.

Fonte: Valor Investe. Disponível em `https://valorinveste.globo.com/objetivo/hora-de-investir/noticia/2020/04/01/os-melhores-investimentos-em-2020.ghtml` Acesso em 01 de fevereiro de 2021

Investindo-se parte de uma dada quantia em ouro e a outra parte em dólar, obtém-se rendimento real, no ano, de R$ 3.600,00. Permutando-se as partes investidas em ouro e dólar, obtém-se rendimento real, no ano, de R$ 3.900,00. Qual a quantia total investida?

(A) R$ 2.500,00

(B) R$ 4.000,00

(C) R$ 6.000,00

(D) R$ 7.500,00

(E) R$ 10.000,00

Gabarito

Alternativa (E)

Solução

Basta montarmos um sistema da forma

$$\begin{cases} \frac{45}{100}x + \frac{30}{100}y = 3.600, \\ \frac{30}{100}x + \frac{45}{100}y = 3.900, \end{cases}$$

en que x e y são as partes da quantia total investida. Determina-se, resolvendo este sistema, que $x + y = 4.000 + 6.000 = 10.000$ reais.

18

Maria lança dois dados honestos, um branco e um vermelho. Qual a probabilidade de a soma dos números das faces superiores ser maior ou igual a 9?

(A) 1/9

(B) 2/7

(C) 1/3

(D) 5/18

(E) 1/2

Gabarito

Alternativa (D)

Solução

Como os dados são diferentes, há $6 \cdot 6 = 36$ resultados possíveis para os números das faces de cima. Destes, 10 resultados dão somas maiores ou iguais a 9, quais sejam: 3 e 6, 6 e 3, 4 e 5, 5 e 4, 5 e 5, 4 e 6, 6 e 4, 5 e 6, 6 e 5, 6 e 6. Como os dados são honestos, todos esses resultados são equiprováveis. Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

19

Sabe-se que o produto de dois números reais positivos é igual a 3 e que a soma de um deles com o dobro do outro é a menor possível. Sob tais circunstâncias, pode-se afirmar que

(A) Os dois números são iguais.

(B) O maior número é o triplo do menor.

(C) A soma vale $\sqrt{18}$.

(D) A soma vale $\sqrt{24}$.

(E) A soma vale $\sqrt{36}$.

Gabarito

Alternativa (D)

Solução

Sendo a e b os dois números, temos $ab = 3$ e a soma $S := a + 2b$ a menor possível. Como $b = \frac{3}{a}$, temos $S = a + \frac{6}{a}$, logo,

$$a^2 - Sa + 6 = 0.$$

Uma vez que a equação de segundo grau acima tem raízes reais, devemos ter $\Delta \geq 0$, isto é, $S^2 - 24 \geq 0$. Portanto, $S \geq \sqrt{24}$, de sorte que o valor mínimo de S é $\sqrt{24}$. Nesse caso, temos

$$a = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad b = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

de sorte que a é o dobro de b.

20

Sejam a e b números naturais tais que $a < b$ e $a \times b = 2160$. Sabe-se que 12 é o máximo divisor comum de a e b. Qual é o menor resto possível da divisão da diferença $b - a$ por 11?

(A) 2

(B) 3

(C) 5

(D) 8

(E) 9

Gabarito

Alternativa (A)

Solução

Observe que $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$. Assim, nas condições do enunciado, para que a e b, com $b > a$, sejam ambos múltiplos de 12, devemos ter $b = 15 \times 12$ e $a = 12$ ou $b = 5 \times 12$ e $a = 3 \times 12$.

No primeiro caso $b - a = 14 \times 12 = 168$ e o resto da divisão de $b - a$ por 11 é 3, pois $168 = 15 \times 11 + 3$. No outro caso $b - a = 24$, número cujo resto da divisão por 11 é 9 ($24 = 2 \times 11 + 2$). Logo, 2 é o valor do menor resto possível da divisão de $b - a$ por 11.

21

Indique a alternativa que corresponde ao maior número real.

(A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt[3]{10}}{3}$

(D) $\frac{3}{7}$

(E) $\dfrac{2}{\pi}$

Gabarito

Alternativa (A)

Solução

Observe que

$$(3\sqrt{3})^2 = 27 < 28 = (2\sqrt{7})^2.$$

Portanto

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Da mesma forma,

$$(\sqrt[3]{10})^6 = 100 < 343 = (\sqrt{7})^6.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt[3]{10}}{3} < \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Além disso,

$$(3 \cdot 3)^2 = 81 < 343 = (7\sqrt{7})^2,$$

donde segue que

$$\frac{3}{7} < \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Finalmente,

$$(3 \cdot 2)^2 = 36 < 63 = 7 \cdot 9 < (\sqrt{7}\pi)^2$$

Logo

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Uma solução alternativa é considerar as aproximações, grosseiras mas efetivas neste caso,

$$\sqrt{3} \approx \frac{17}{10}, \quad \sqrt{7} \approx \frac{27}{10}, \quad \sqrt[3]{10} \approx 2, \quad \pi \approx 3.$$

22

Qual a probabilidade de que um par de lados de um octógono regular, escolhidos aleatoriamente, seja um par de lados paralelos um ao outro?

(A) 2/8

(B) 1/7

(C) 1/8

(D) 1/28

(E) 4/56

Gabarito

Alternativa (B)

Solução

Há 4 possibilidade de pares de lados paralelos em um octógono regular, dentre os $\binom{8}{2} = 28$ pares de lados.

23

O retorno de um ativo financeiro pode ser definido como a variação percentual entre o valor presente V_P e o valor futuro V_F deste ativo. Qual das seguintes fórmulas expressa corretamente o retorno?

(A) $\left(\frac{V_F}{V_P}\right) \times 100\,\%$

(B) $\left(\frac{V_P}{V_F}\right) \times 100\,\%$

(C) $\left(\frac{V_P}{V_P+V_F}\right) \times 100\,\%$

(D) $\left(\frac{V_F}{V_P+V_F}\right) \times 100\,\%$

(E) $\left(\frac{V_F-V_P}{V_P}\right) \times 100\,\%$

Gabarito

Alternativa (E)

Solução

Pela definição, o retorno é dado pela variação percentual do valor do ativo, tomado em dois momentos, presente e futuro, isto é,

$$\frac{V_F - V_P}{V_P}.$$

Note que esta expressão decorre da proporção em que V_P está para 100 assim como a variação do valor, $V_F - V_P$, está para a variação percentual. Para expressarmos esta fração como porcentagem multiplicamos por $1 = 100\%$.

24

Considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x = b + k(y-a)^2 \\ y = \dfrac{x}{k}, \end{cases}$$

onde a, b e k são constantes dadas com $k \neq 0$ e $a \neq -\dfrac{1}{4}$. Qual o valor de k, em termos de a e b, para o qual o sistema tem uma única solução?

(A) $k = \dfrac{1}{(1+4a)^2}$

(B) $k = \dfrac{1}{1+4a}$

(C) $k = -\dfrac{1}{1+4a}$

(D) $k = \dfrac{4b}{1+4a}$

(E) $k = -\dfrac{4b}{1+4a}$

Gabarito

Alternativa (D)

Solução

Uma possibilidade de solução é combinarmos as duas equações, obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= k(y-a)^2 - ky + b \\ &= k(y-a)^2 - k(y-a) + b - ka. \end{aligned}$$

Esta equação quadrática tem uma única solução (e, portanto, o sistema tem uma única solução, visto que y determina x) se e somente se

$$0 = k - 4(b - ka) = k(1 + 4a) - 4b,$$

ou seja, se

$$k = \frac{4b}{1+4a}\cdot$$

25

Uma população de 100.000 indivíduos é testada para verificar infecção pelo vírus X. Sabe-se que a taxa de falsos negativos do teste (isto é, a razão entre o número de falsos resultados negativos e o número de indivíduos infectados) para o virus X é de 25% e que sua taxa de falsos positivos (isto é, a razão entre o número de falsos resultados positivos e o número de indivíduos não infectados) é de $0,5\%$.

Supondo que, nessa população, haja 1.000 indivíduos infectados, qual seria o número total de resultados falsos, tanto positivos quanto negativos?

(A) 250

(B) 495

(C) 745

(D) 1.245

(E) 98.505

Gabarito

Alternativa (C)

Solução

Sejam VN e FN a quantidade de resultados negativos verdadeiros e falsos, respectivamente. Sejam, ainda, VP e FP as quantidades de resultados positivos verdadeiros e falsos, respectivamente. Observe que a quantidade de infectados é igual a $FN + VP = 1.000$, ao passo que $FP + VN = 99.000$ é o total de não infectados. Assim, a taxa de falsos negativos é

$$\frac{25}{100} = \frac{FN}{FN+VP} = \frac{FN}{1.000}$$

Logo, $FN = 250$. Por outro lado, a taxa de falsos positivos é

$$\frac{5}{1.000} = \frac{FP}{FP+VN} = \frac{FP}{99.000}$$

Portanto, o número total de resultados falsos, tanto positivos quanto negativos, é

$$FP + FN = 250 + 495 = 745.$$

26

A tabela seguinte registra, aproximadamente, as quantidades anuais de chuva observadas em duas regiões do Ceará, ao longo dos últimos três anos passados.

Regiões/Anos	2018	2019	2020
Ibiapaba	890 mm	990 mm	970 mm
Cariri	1010 mm	780 mm	1150 mm

Em qual das duas regiões houve maior variância das quantidades de chuvas anuais, segundo esses dados? Justifique sua resposta.

Gabarito

Item de resposta construída

Solução

As médias aritméticas das quantidades anuais de chuvas registradas nas regiões da Ibiapaba e Cariri são, respectivamente, iguais a

$$\frac{1}{3}(890 + 990 + 970) = 950 \text{ mm}$$

e

$$\frac{1}{3}(1010 + 780 + 1150) = 980 \text{ mm}.$$

Os desvios absolutos em relação às médias são dados por

Regiões/Anos	2018	2019	2020
Ibiapaba	60 mm	40 mm	20 mm
Cariri	30 mm	200 mm	170 mm

Claramente, a maior variância ocorre na região do Cariri. De fato, a variância na Ibiapaba é dada por

$$60^2 + 40^2 + 20^2 = 5600,$$

ao passo que a variância no Cariri é igual a

$$30^2 + 200^2 + 170^2 = 69800.$$

27

Um erro muito comum dos alunos, ao somarem frações de denominadores distintos, consiste em calcular a soma como segue:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Uma possível explicação para a adoção desse procedimento errôneo é a associação equivocada com a regra para a multiplicação de frações, que é mais simples. De fato, trocando os sinais $+$ por $\times$, a fórmula acima fica correta. É possível que, para certos inteiros positivos a, b, c e d, a igualdade acima forneça o resultado correto? Justifique sua resposta.

Gabarito

Item de resposta construída.

Solução

A fim de analisar a pergunta, uma possibilidade é a seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow \frac{ad+bc}{bd}&=\frac{a+c}{b+d}\\ \Leftrightarrow (b+d)(ad+bc)&=(a+c)bd\\ \Leftrightarrow abd+b^2c+ad^2+bcd&=abd+bcd\\ \Leftrightarrow b^2c+ad^2&=0.\end{aligned}$$

Entretanto, o primeiro membro não pode valer 0, uma vez que a, b, c e d são positivos. Logo, a igualdade do enunciado nunca fornece o resultado correto.

Outra maneira é perceber que, como $a, b, c, d > 0$, sempre se tem

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}>\frac{a}{b+d}+\frac{c}{b+d}=\frac{a+c}{b+d}.$$

28

As faces de um dado trazem os números de 1 a 6, sendo que os pares 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4 aparecem em pares de faces opostas. Um jogo muito antigo entre dois apostadores consiste em lançar três dados simultaneamente e observar a soma dos números das faces de cima. Se tal soma for maior que 10, a pessoa que lançou os dados ganha; se for menor ou igual a 10, o outro apostador ganha. Explique, com justificativa, quem tem mais chances de ganhar.

Gabarito

Item de resposta construída.

Solução

As chances são iguais para ambos. A soma dos números das faces de cima, juntamente com os números das faces de baixo, dá $3 \times 7 = 21$. Assim, se a soma dos números das faces de cima for pelo menos 11, a soma dos números das faces de baixo será no máximo 10, e vice versa. Então, para cada resultado ganhador, há um resultado perdedor e vice-versa, de forma que ambos os jogadores têm 50% de chances de ganhar.

29

Luís perguntou ao frentista quanto estava a diferença entre um litro de gasolina aditivada e um litro de gasolina comum. O frentista respondeu que, se ele abastecesse o carro com 100 reais de gasolina comum, compraria 5 litros a mais do que se abastecesse com 100 reais de gasolina aditivada. Então, Luís perguntou quanto ele gastaria se comprasse 10 litros de comum e 20 litros de aditivada, ao que o frentista respondeu que ele gastaria 140 reais. Calcule, com justificativa, quanto custa o litro de gasolina aditivada.

Gabarito

Item de resposta construída.

Solução

Sendo a e c os preços por litro da gasolina aditivada e da comum, temos

$$\frac{100}{c}-\frac{100}{a}=5 \quad \text{e} \quad 20a+10c=140.$$

A segunda equação é o mesmo que $2a+c=14$, de forma que $c=14-2a$. Então,

$$\frac{20}{14-2a}-\frac{20}{a}=1$$

ou, ainda, $a^2+23a-140=0$. O discriminante da equação é $\Delta = 23^2+4\cdot 140 = 1089 = 33^2$, de forma que $a=\frac{-23\pm 33}{2}=5$ ou -28. Mas, como $a>0$, devemos ter $a=5$.

30

Responda os itens abaixo sobre a representação racional de dízimas periódicas.

a) Como justificar para estudantes do nível médio que $0,999... = 1$?

b) Todo número racional tem uma representação como dízima periódica? Justifique sua resposta.

Gabarito

Item de resposta construída.

Solução

a) O(a) professor(a) pode iniciar considerando o número racional

$$x = 1/3 = 0,333\ldots$$

Assim, por um lado, deduz que $3x = 1$. Por outro lado, obtém

$$3x = 3 \times 0,333\cdots = 0,999\ldots$$

Igualando as expressões de $3x$, chega ao resultado desejado, ou seja, conclui que

$$1 = 0,999\ldots$$

Uma abordagem alternativa é tomar

$$x = 0,999\ldots$$

Logo,

$$10x = 9,999\ldots$$

e

$$9x = 10x - x = 9,999\cdots - 0,999\cdots = 9.$$

De $9x = 9$, obtém $x = 1$. O fato subjacente a esses cálculos é o de que dízimas como $0,999\ldots$ são somas de uma progressão geométrica com infinitos termos.

Mesmo tendo compreendido o que é exposto acima, o estudante pode ainda ter dúvidas, dado que a representação $0,999\ldots$ sugere que essa dízima periódica é *o maior número menor* que 1. O(a) professor(a) pode dirimir essa dúvida ao mostrar que o maior número menor que 1 não existe, apresentando argumentações da seguinte forma: se x é o maior número menor que 1, seja $y = (x+1)/2$. Logo, $1 > y$, uma vez que $1 - y = 1 - (x+1)/2 = (1-x)/2 > 0$, pois $1 > x$. E $y > 1$, posto que $(y - x) = (1 - x)/2 > 0$. Logo $x < y < 1$, o que contradiz a definição de x. Assim, não existe o maior número menor que 1.

b) Sim. Em consequência do algoritmo da divisão, a representação decimal de um número racional ou é finita ou é uma dízima periódica. Mas, mesmo números cuja representação decimal é finita podem ser expressos por uma dízima periódica. Para tal, basta subtrair 1 do último (da esquerda para a direita) algarismo não nulo da representação decimal finita para a seguir completá-la colocando noves à direita do último algarismo. Por exemplo, temos

- $1 = 0,999\ldots$
- $20 = 19,999\ldots$
- $0,4732 = 0,4731999\ldots$