

COLEÇÃO COMPONENTES ELETIVOS FUNDANTES



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA - GEOMETRIA I

Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral do Ceará – EEMTI

Camilo Sobreira de Santana

Governador

Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Vice-Governadora

Eliana Nunes Estrela

Secretária da Educação

Maria Jucineide da Costa Fernandes

Secretária Executiva de Ensino Médio e Profissional

Ana Gardennya Linard Sírio Oliveira

Coordenadora da Educação em Tempo Integral

Denylson da Silva Prado Ribeiro

Articulador da Coordenadoria da Educação em Tempo Integral

Gezenira Rodrigues da Silva

Orientadora da Célula de Desenvolvimento da Educação em Tempo Integral

Elaboração e Acompanhamento

Equipe Técnica CEDTI:

Anna Karina Pacífico Barros

Daniela Bezerra de Menezes Gomes

Ellen Oliveira Lima Sandes

Jefrei Almeida Rocha

Maria Nahir BatistaFerreira Torres

Maria Socorro Braga Silva

Teresa Márcia Almeida da Silveira

Revisão: Ellen Oliveira Lima Sandes

Ilustrações e Capa: MRDezigner

Direito autoral do desenho e infografia: Freepik

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C691 Coleção componentes eletivos fundantes das EEMTI do Ceará: Matemática e suas tecnologias [recurso eletrônico] / Ana Gardennya Linard Sírio Oliveira, Jorge Herbert Soares de Lira, Denylson da Silva Prado Ribeiro (orgs.). - Fortaleza: SEDUC, 2021.

(Coleção componentes eletivos fundantes das EEMTI do Ceará v.2)

Livro eletrônico

ISBN 978-65-89549-05-5(E-book)

1. Matemática. 2. Tecnologia. I.Oliveira, Ana Gardennya Linard Sírio, org. II. Lira, Jorge Herbert Soares de, org. III.Ribeiro, Denylson da Silva Prado, org. IV. Título.

CDD: 510.07

APRESENTAÇÃO INSTITUCIONAL

A Secretaria da Educação do estado do Ceará, por meio da Coordenadoria de Educação em Tempo Integral e Educação Complementar (COETI), apresenta às Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral - EEMTI essa coleção de fascículos que abordam componentes eletivos que compõem a parte flexível do currículo.

A disponibilização desse material para as EEMTI tem como objetivos: I. Oferecer apoio pedagógico e didático aos professores que lecionam esses componentes eletivos. II. Oportunizar aos estudantes subsídios para o desenvolvimento de competências e habilidades nos itinerários escolhidos, a partir de seu Projeto de Vida, favorecendo a aquisição de novos conhecimentos, a ampliação da aprendizagem e o seu crescimento cognitivo e socioemocional.

A elaboração desses fascículos está vinculada às ementas do Catálogo dos Componentes Eletivos de 2021. Nessa primeira tiragem, foram selecionados alguns componentes eletivos fundantes, ou seja, que apresentam assuntos essenciais e contextualizados, capazes de gerar interesses de aprofundamento nos jovens, a partir das temáticas abordadas. Esses componentes estão relacionados às quatro áreas de conhecimento da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e a uma unidade curricular de Formação Profissional.

Volume 1: Linguagens e suas tecnologias

Volume 2: Matemática e suas tecnologias

Volume 3: Ciências da Natureza e suas tecnologias

Volume 4: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Volume 5: Formação Profissional



MENSAGEM AO PROFESSOR

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), dez competências gerais devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo do Ensino Médio. Na área de Matemática e suas Tecnologias, espera-se que todos possam conhecer e utilizar a linguagem matemática, bem como fazer uso dos seus códigos, símbolos, nomenclaturas e dos processos de desenvolvimento de pesquisas científicas e tecnológicas.

A Eletiva de GEOMETRIA I tem como objetivo o estudo da Geometria Plana que estuda as figuras planas, iniciando-se nos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, e, com base neles, desenvolvendo-se até a construção das figuras planas, com o cálculo de suas respectivas áreas e perímetros, essenciais para o uso no dia a dia, para uma aprendizagem **interdisciplinar**.

O fascículo está organizado da seguinte maneira: em primeiro lugar, uma explicação (OBSERVAÇÕES) a respeito do conteúdo abordado; logo após vêm os EXERCÍCIOS e, para finalizar, a SOLUÇÃO, de acordo com uma ou mais habilidades selecionadas da BNCC, ENEM e do SPAECE.

O fascículo apresenta uma proposta de simulado (PROBLEMAS PROPOSTOS) para ser realizado pelos alunos, a fim de que os conteúdos sejam amplamente revisados na eletiva. Esperamos, pois, que este fascículo contribua para enriquecer a sua prática pedagógica, auxiliando-o no planejamento das suas aulas e fortalecendo os processos de ensino e de aprendizagem.

Sucesso e boas aulas!



MENSAGEM AO ESTUDANTE

Parabéns por ter escolhido esta Eletiva para o seu currículo, pois ela fará diferença em sua vida ao lhe ajudar a ampliar seus conhecimentos sobre Geometria I. Este conhecimento fez diferença para a Humanidade e pode fazer diferença em sua vida ajudando, entre outras coisas, a ampliar o domínio das operações básicas, das frações e a resolver problemas do cotidiano que utilizem esses conteúdos.

Ressalta-se que para a escolha de uma eletiva, faz-se necessário se autoconhecer, identificar os valores nos quais se sustentam o seu Projeto de Vida e como esses valores podem contribuir para o seu sucesso como pessoa e como cidadão.

Prepare-se para a viagem do conhecimento que, por meio da Matemática, fará você aprender a aplicar métodos e a desenvolver procedimentos científicos e práticos, para além da teoria. Algumas das experiências que você vai realizar aqui foram desenvolvidas por grandes escritores, cientistas, matemáticos e suas descobertas podem abrir muitas portas para sua formação profissional.

O fascículo apresenta uma proposta de simulado (PROBLEMAS PROPOSTOS) para ser realizado pelos alunos, a fim de que os conteúdos sejam amplamente revisados na eletiva.

O objetivo é que este material o/a auxilie a exercer o protagonismo de modo que você identifique seus potenciais, interesses e paixões e estabeleça estratégias e metas para alcançar seus próprios objetivos em todas as dimensões. Logo, o presente material deve servir de apoio para se atingir esse objetivo.

Sucesso e boas aulas!

SUMÁRIO

UNIDADE 1

Geometria plana	7
Introdução	7
Semirreta e segmentos de reta	8
Ângulos	9
O quinto axioma de Euclides	14
Triângulos	15
Desigualdades no triângulo	19
Quadriláteros	21
Polígonos	24
Problemas propostos	29
Folha de cálculos	34

HABILIDADES DESENVOLVIDAS

Ao longo dessa Eletiva você terá oportunidade de desenvolver, mesmo que parcialmente, as habilidades do campo aritmético da **BNCC**, do **ENEM** e do **SPAECE**.

BNCC

(EF07MA08). Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

ENEM

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos em espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos em espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

SPAECE

D49 - Resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas.

D50 - Resolver situação problema aplicando o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.

D51 - Resolver problemas usando as propriedades dos polígonos (soma dos ângulos internos, número de diagonais e cálculo do ângulo interno de polígonos regulares).

9 | Geometria Plana

9.1 – Introdução



A Geometria Euclidiana Plana baseia-se nos conceitos de *ponto*, *reta* e *plano*, os quais são o que chamamos de *noções primitivas* (em Geometria). Por serem conceitos tão básicos, eles são alguns dos raros objetos matemáticos para os quais não é possível dar uma definição precisa. Devemos simplesmente aceitar que eles existem.

Por outro lado, não é difícil imaginar situações que podem ser modeladas através desses conceitos básicos. Considere, por exemplo, um técnico de futebol que deseja explicar suas estratégias a um grupo de jogadores: Ele pode utilizar uma folha de papel na qual está desenhado um retângulo com 22 pontos em seu interior, cada ponto representado um jogador. Nesse desenho, há também segmentos de retas representando as linhas do campo. Há, por fim, a própria folha de papel, que, se considerada infinita, representa o plano.

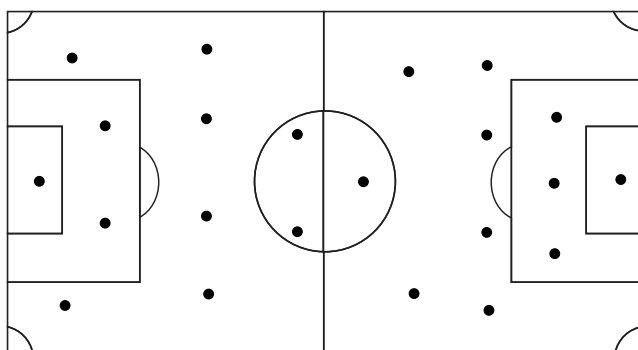


Figura 9.1: Ao fazermos um esboço de um campo de futebol, utilizamos diversas noções primitivas da Geometria.

Além das noções primitivas, precisamos estabelecer um conjunto de *propriedades fundamentais* que todos os pontos, retas e planos devem satisfazer. Abaixo, vemos *algumas* dessas propriedades, que são chamadas de *axiomas* e que foram fixadas pelo matemático grego Euclides em sua milenar *Os Elementos*:

- (A1) Por dois pontos distintos passa uma única reta.
- (A2) Por três pontos não colineares passa um único plano.
- (A3) Para qualquer reta, existem pontos pertencentes a ela e pontos não pertencentes a ela.
- (A4) Para qualquer plano, existem uma reta contida neste plano, um ponto que pertence ao plano mas não pertence a tal reta e um ponto que não pertence ao plano.

Estas afirmações recebem o nome de *axiomas* pois suas validades devem ser aceitas como evidentes, não podendo ser demonstradas (isto é, justificadas) através de um conjunto de verdades mais elementar. Em outras palavras, os axiomas são proposições consideradas como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

A seguir, derivaremos outros conceitos importantes da Geometria, utilizando como base as noções primitivas e os axiomas de Euclides.

9.1.1 – Semirretas e segmentos de reta

Um ponto O pertencente a uma reta r a divide em duas partes, chamadas *semirretas* de origem O . Se $A \in r$ e $A \neq O$, a semirreta de r que contém o ponto A é denotada por \overrightarrow{OA} .

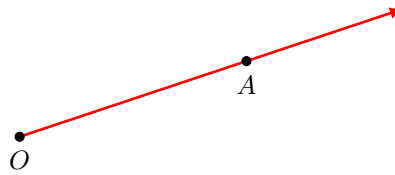


Figura 9.2: semirreta de origem O e passando por A .

Se A e B são dois pontos distintos pertencentes a uma reta r , os pontos que pertencem às semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} formam uma parte da reta chamada de *segmento de reta*. Nesse caso, dizemos que os pontos A e B são as extremidades desse segmento. Denotamos o segmento com extremidades A e B escrevendo AB .

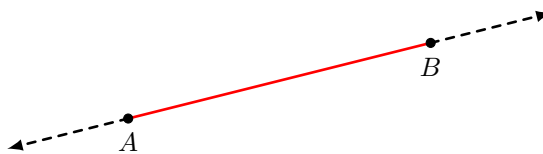


Figura 9.3: segmento de reta AB (em vermelho sólido), como interseção das semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} .

Uma vez que AB é a interseção das semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} , escrevemos $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Também, dizemos que os pontos pertencentes ao segmento AB e distintos de A e de B *estão entre* A e B .



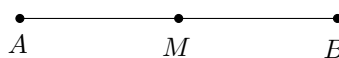
Por vezes, também escreveremos AB para denotar a reta determinada por dois pontos distintos A e B . A possibilidade de confusão com o *segmento* AB será mínima, pois o contexto sempre deixará claro se estaremos nos referindo à reta AB ou ao segmento AB .

A **distância** entre os pontos A e B é, por definição, a **medida do comprimento** do segmento de reta AB . Frequentemente, o comprimento do segmento AB é representado por \overline{AB} . Porém, por vezes também utilizaremos a notação simplificada AB para representar essa medida.

O comprimento de um segmento AB pode ser calculado de diversas formas. A maneira mais comum é medir o segmento AB utilizando alguma ferramenta (como uma régua pautada), comparando-o com alguma unidade de comprimento pré-estabelecida, como o centímetro, o metro ou o quilômetro. Assim, a figura abaixo mostra um segmento AB de 3 centímetros de comprimento.



O **ponto médio** de um segmento AB é o único ponto que está entre A e B e divide o segmento AB em duas partes de comprimentos iguais, isto é, tal que $AM = MB$.



Exercício 9.1 Se A, B e C são pontos colineares, calcule AC , sendo $AB = 20$ cm e $BC = 12$ cm.

Solução. Como $BC < BA$, o ponto A não pode estar entre os pontos B e C . Logo, temos apenas duas opções:

- (i) Se C estiver entre A e B , teremos que $AC = AB - BC = 20 - 12 = 8$ cm.
- (ii) Se B estiver entre A e C , teremos que $AC = AB + BC = 20 + 12 = 32$ cm.

Exercício 9.2 Consideremos sobre uma reta r um segmento fixo AB e um ponto móvel P . Seja M o ponto médio de AP e N o ponto médio de BP . O que podemos dizer a respeito do comprimento do segmento MN ?

Solução. Seja ℓ o comprimento do segmento AB .

Consideremos inicialmente o caso em que o ponto P está no interior do segmento AB . Seja x a medida (variável) do segmento AP . Nesse caso, $BP = \ell - x$. Como M e N são os pontos médios dos segmentos AP e PB , temos que $MP = \frac{x}{2}$ e $NP = \frac{\ell - x}{2}$. Como P também está no interior do segmento MN , temos que

$$MN = MP + NP = \frac{x}{2} + \frac{\ell - x}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Agora, consideremos o caso em que P está fora do segmento AB , com $PA < PB$. Sendo novamente x a medida (variável) do segmento AP , temos nesse caso que $BP = \ell + x$. Como M e N são os pontos médios dos segmentos AP e PB , temos que $MP = \frac{x}{2}$ e $NP = \frac{\ell + x}{2}$. Como $PM = \frac{1}{2}AP < \frac{1}{2}PB = PN$, temos que

$$MN = \frac{\ell + x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Por fim, resta analisar o caso em que P está fora do segmento AB , com $PA > PB$. Essa situação é análoga à situação anterior, de forma que a deixamos a seu cargo. Logo, a medida do segmento MN é constante quando variamos x . ■

9.1.2 – Ângulos

Duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , com uma mesma origem O , dividem o plano em duas regiões, cada uma das quais é chamada de *ângulo*. As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os *lados* do ângulo.

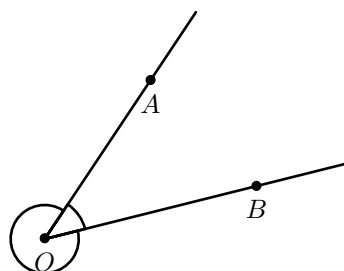


Figura 9.4: um ângulo convexo e seu suplementar côncavo.

Um ângulo é chamado *convexo* se é uma região convexa do plano. Caso contrário, o ângulo é chamado *côncavo*. Usaremos a notação $\angle AOB$ para denotar cada um desses ângulos; em cada caso, o contexto deixará claro a qual dos dois ângulos de lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} estamos nos referindo.

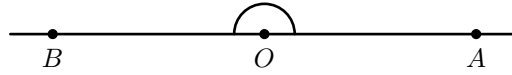


Figura 9.5: um ângulo raso.

Se os pontos A , O e B são colineares, o ângulo $\angle AOB$ é chamado *ângulo raso* (veja a Figura 9.5). Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são ditos *iguais* ou *congruentes*, se for possível mover $\angle A'O'B'$ no espaço até que ele possa ser posicionado exatamente sobre $\angle AOB$.

Se $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são ângulos rasos, é imediato que podemos mover um deles no espaço até fazê-lo coincidir com o outro, de sorte que dois ângulos rasos quaisquer são iguais. Em particular, o ângulo raso marcado na Figura 9.5 é igual àquele não marcado, situado na parte “de baixo” da reta que passa por A e B . Portanto, *uma volta completa em torno do ponto O corresponde a dois ângulos rasos*.

Se os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ estão situados em um mesmo plano e compartilham um lado (no caso, o lado \overrightarrow{OB}) mas não têm pontos interiores comuns, nos referiremos ao ângulo $\angle AOC$ que contém a semirreta \overrightarrow{OB} como a *justaposição* de $\angle AOB$ e $\angle BOC$ (veja a Figura 9.6). Para medir ângulos, devemos escolher um padrão, ou unidade. A

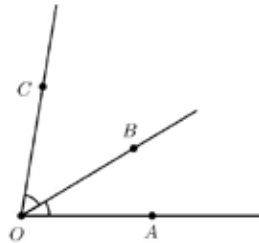
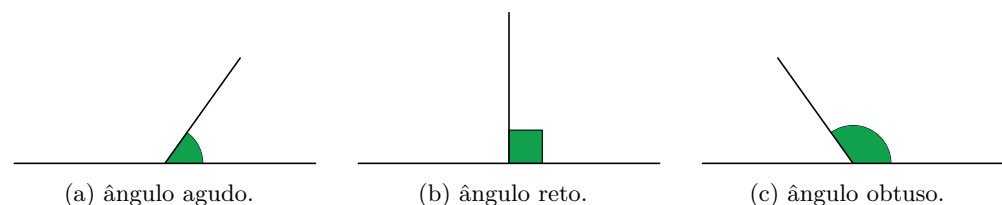


Figura 9.6: a justaposição de dois ângulos.

unidade de medida de ângulos mais usada, e a mais antiga, é o *grau*.

Dizemos (por convenção) que um ângulo $\angle AOB$ mede *um grau* (1° , em símbolos) quando o ângulo formado pela justaposição de 180 ângulos iguais a $\angle AOB$ resultar em um ângulo raso. Assim, um ângulo raso mede 180° e uma volta completa em torno de um ponto, correspondendo a dois ângulos rasos, mede 360° .

Um ângulo cuja medida é 90° é chamado *ângulo reto*, e corresponde à metade de um ângulo raso. Se a medida de um ângulo for menor que 90° , diremos que esse ângulo é *agudo*. Se a medida de um ângulo for maior que 90° e menor que 180° , diremos que esse ângulo é *obtusos* (veja a figura a seguir).



Uma forma simples de visualizarmos e medirmos ângulos é através do uso de um *transferidor*, fazendo o centro do transferidor coincidir com o vértice do ângulo e a marcação zero coincidir com um dos extremos do ângulo.

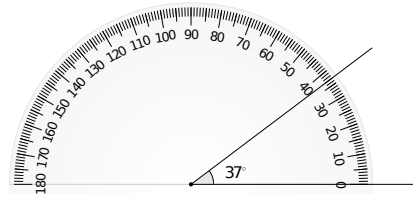


Figura 9.8: um transferidor medindo um ângulo de 37° . Muitos transferidores são transparentes, para poderem ser utilizados de ambos os lados.

Em Geometria, é costume confundir um ângulo, $\angle AOB$ digamos (visto como região do plano), com sua medida, isto é, usar $\angle AOB$ também para denotar a medida do ângulo $\angle AOB$. Isso não causa confusão, porque o contexto sempre vai deixar claro se, ao escrevermos $\angle AOB$, estaremos nos referindo ao ângulo como região do plano ou à sua medida.

Voltando à Figura 9.6, olhemos novamente o ângulo $\angle AOC$, formado pela justaposição dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$. O uso de um transferidor deixa claro que há uma relação bastante simples entre as medidas desses ângulos:

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC.$$

(Observe que, na igualdade acima, $\angle AOC$, $\angle AOB$ e $\angle BOC$ denotam as *medidas* dos ângulos correspondentes.)

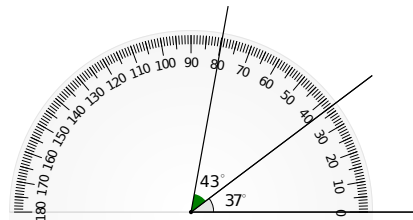


Figura 9.9: soma de ângulos com um transferidor.

Consideremos, agora, duas retas r e s *concorrentes*, ou seja, que se intersectam em um único ponto. Nesse caso, elas determinam quatro ângulos, dois dos quais estão marcados em verde na figura abaixo (os outros dois correspondem às regiões que não foram marcadas):

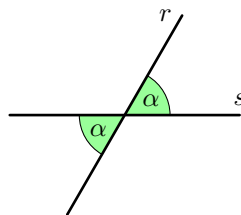


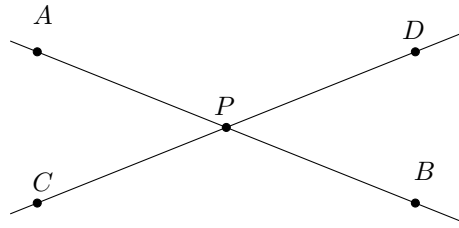
Figura 9.10: ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos que possuem um mesmo vértice e cujos lados estão alinhados de modo a determinar apenas duas retas, como na Figura 9.10, são chamados de *ângulos opostos pelo vértice* (abreviamos **OPV**).

Ângulos opostos pelo vértice possuem uma mesma medida (em graus), ou seja, são congruentes. Esse fato pode ser *demonstrado* (isto é, explicado) com os conhecimentos adquiridos até o momento.

Teorema 9.1.1 — Ângulos OPV. Sejam AB e CD duas retas concorrentes no ponto P , situado no interior dos segmentos AB e CD . Então, $\angle APD = \angle BPC$ e

$$\angle APC = \angle BPD.$$



Demonstração. Já sabemos que ângulos rasos medem 180° e a medida da justaposição de dois ângulos é igual à soma das medidas dos mesmos. Assim, temos $\angle APD + \angle DPB = 180^\circ$ e $\angle DPB + \angle BPC = 180^\circ$. Portanto,

$$\angle APD + \angle DPB = \angle DPB + \angle BPC$$

e, cancelando a parcela comum $\angle DPB$, obtemos

$$\angle APD = \angle BPC.$$

De modo análogo, $\angle APC = \angle BPD$. ■

Nesse ponto, é conveniente dispormos de mais um pouco de terminologia: se P é um ponto em um ângulo $\angle AOB$ tal que $\angle AOP$ e $\angle POB$ são iguais, dizemos que a semirreta \overrightarrow{OP} é a **bissetriz** do ângulo $\angle AOB$.

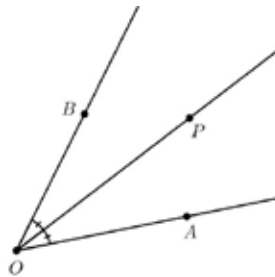
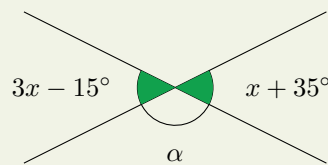


Figura 9.11: a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

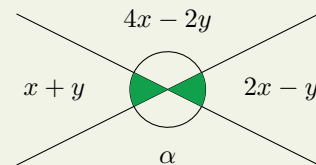
Exercitemos o material discutido até aqui em alguns exercícios simples.

Exercício 9.3 Calcule o valor de α nos casos abaixo:

(a)



(b)



Solução.

(a) Pelo teorema 9.1.1, temos que

$$3x - 15 = x + 35 \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25^\circ.$$

Logo, os ângulos verdes medem $x + 35^\circ = 60^\circ$, de sorte que $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

(b) Novamente pelo teorema 9.1.1, temos

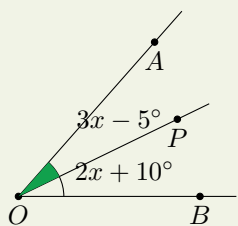
$$x + y = 2x - y \Rightarrow x = 2y.$$

Então, $x + y = 3y$, de forma que cada ângulo verde mede $3y$, e (uma vez mais pelo teorema 9.1.1) $\alpha = 4x - 2y = 4 \cdot 2y = 2y = 6y$. Por fim, usando o fato de que $\alpha + (x + y) = 180^\circ$, temos $6y + 3y = 180^\circ$, logo $y = 20^\circ$. Com isso, $\alpha = 6y = 120^\circ$.

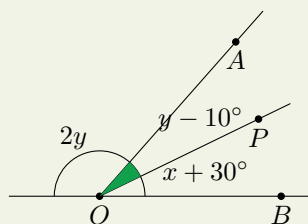
■

Exercício 9.4 Em cada uma das figuras a seguir, \overrightarrow{OP} é a bissetriz de $\angle AOB$. Calcule x em cada caso:

(a)



(b)



Solução.

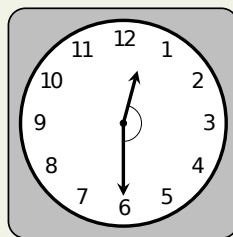
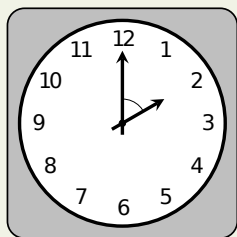
(a) Como OP é bissetriz, temos $3x - 5^\circ = 2x + 10^\circ$. Logo, $x = 15^\circ$.

(b) Novamente pelo fato de OP ser bissetriz, temos $x + 30^\circ = y - 10^\circ$, logo, $y = x + 40^\circ$. Por outro lado, como $2y + (y - 10) + (x + 30) = 180^\circ$, temos

$$\begin{aligned} 2y + (y - 10) + (x + 30) &= 180 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(x + 40) + (x + 30) + (x + 30) &= 180 \\ \Rightarrow 4x + 140 &= 180 \Rightarrow x = 10^\circ. \end{aligned}$$

■

Exercício 9.5 — OBMEP 2006. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? E qual é este menor ângulo quando o relógio marca 12 horas e 30 minutos?



Solução. Observe que o ponteiro menor leva 12 horas para dar uma volta completa, que corresponde a 360° . Logo, em uma hora, este ponteiro terá percorrido $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Portanto, o ângulo destacado no relógio da esquerda corresponde a dois intervalos de 30° , logo, mede 60° .

No relógio da direita, a posição do ponteiro maior indica que já se passou meia hora após uma hora cheia. Neste intervalo de tempo, o ponteiro menor percorreu $\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Logo, o ângulo destacado no relógio da direita mede $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$. ■

9.2 – O quinto axioma de Euclides



Como vimos anteriormente, quando duas retas são concorrentes, elas se encontram em um único ponto e formam dois pares de ângulos (opostos pelo vértice) que são congruentes. Por outro lado, em sua construção da Geometria, Euclides permitiu a possibilidade de duas retas não se encontrarem. Nesse caso, dizemos que tais retas são **paralelas**.

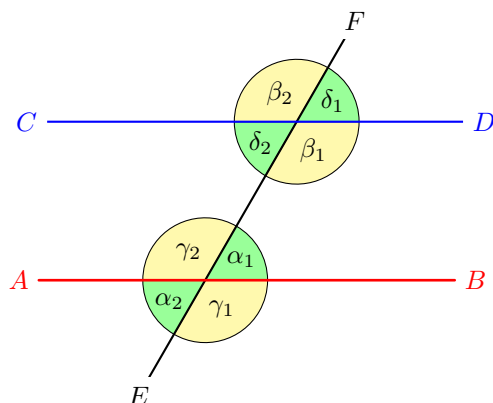
No caso de retas paralelas, Euclides postulou a seguinte afirmação que hoje é conhecida como o seu quinto axioma.

Quinto Axioma de Euclides

Se duas retas r e s são cortadas por uma terceira reta, então r e s são paralelas se, e somente se, os ângulos marcados na figura (que são chamados de *alternos internos*) são iguais. Ou seja,

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Suponha, agora, que temos duas retas paralelas, digamos AB e CD . Uma terceira reta que intersecta as duas primeiras é chamada de reta *transversal*. Na Figura 9.12 a reta EF é uma transversal.



Se AB e CD são paralelas, então $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$.

Consequentemente:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \delta_1 = \delta_2 \text{ e} \\ \beta_1 &= \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2. \end{aligned}$$

Figura 9.12: duas retas paralelas e uma transversal.

Pelo Quinto Axioma, temos que $\alpha_1 = \delta_1$, logo,

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + (180^\circ - \delta_1) = 180^\circ.$$

Por outro lado, $\alpha_1 + \gamma_2 = 180^\circ$, pois AB é uma reta. Logo, $\gamma_2 = 180^\circ - \alpha_1 = \beta_1$. Como $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ (pois são pares de ângulos OPV), concluímos que os quatro ângulos em amarelo da Figura 9.12 são congruentes. Da mesma forma, os quatro ângulos em verde são congruentes entre si, de forma que, dentre os oito ângulos que a reta EF forma com AB e CD , há apenas (no máximo) dois valores distintos.

As letras gregas que usamos aqui foram escolhidas arbitrariamente, ou seja, nem sempre o ângulo α_1 estará na posição indicada na figura. Por isso, para melhor falar sobre estes ângulos, nos usamos o seguinte vocabulário.

Ângulos que estão de um mesmo lado da reta transversal EF são chamados de *colaterais* (o prefixo *co* indica *mesmo*). Por exemplo, $\alpha_1, \gamma_1, \beta_1$ e δ_1 são colaterais uns aos outros. Assim como os $\alpha_2, \gamma_2, \beta_2$ e δ_2 são colaterais uns aos outros. Os ângulos que estão entre as retas paralelas são chamados de *internos*; em nosso caso, estes são $\alpha_1, \beta_1, \gamma_2$ e δ_2 . Por sua vez, os ângulos que não estão entre as paralelas são chamados de *externos*. Por fim, ângulos que estão em lados diferentes da reta EF são chamados de *alternos*, enquanto os ângulos que estão em uma mesma posição relativa às retas AB e CD são chamados *correspondentes*. Combinando esse vocabulário, podemos nos referir como segue a vários dos pares de ângulos da Figura 9.12:

Nomenclaturas de *alguns* dos pares de ângulos da Figura 9.12:

- α_1 e β_1 são *colaterais internos*.
- α_1 e δ_2 são *alternos internos*.
- α_1 e δ_1 são *correspondentes*.
- α_2 e δ_1 são *alternos externos*.
- α_2 e β_2 são *colaterais externos*.

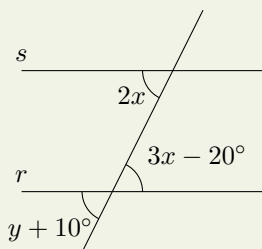
Organizando as ideias, chegamos à seguinte conclusão.

Em relação a duas retas paralelas cortadas por uma transversal:

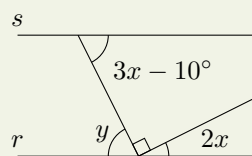
- Ângulos *colaterais* de um mesmo tipo (ambos internos ou ambos externos) somam 180° .
- Ângulos *alternos* de um mesmo tipo são congruentes.
- Ângulos *correspondentes* são congruentes.

Exercício 9.6 Em cada uma das figuras abaixo, as retas r e s são paralelas. Calcule x e y .

(a)



(b)



Solução.

- (a) Os ângulos de medidas $2x$ e $3x - 20^\circ$ são alternos internos, logo, congruentes. Portanto,

$$2x = 3x - 20^\circ \Rightarrow x = 20^\circ.$$

Além disso, os ângulos de medidas $y + 10^\circ$ e $2x$ são correspondentes, logo, também congruentes. Então, $y + 10^\circ = 2x = 40^\circ \Rightarrow y = 30^\circ$.

- (b) Os ângulos de medidas y e $3x - 10^\circ$ são alternos internos, logo, congruentes. Somando todos os ângulos que estão sobre a reta r , temos:

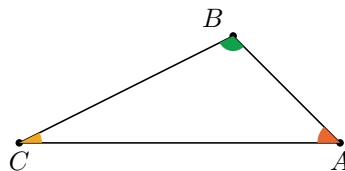
$$\begin{aligned} y + 90^\circ + 2x &= 180^\circ \Rightarrow (3x - 10^\circ) + 90^\circ + 2x = 180^\circ \\ &\Rightarrow 5x = 100^\circ \Rightarrow x = 20^\circ. \end{aligned}$$

Assim, $y = 3x - 10^\circ = 50^\circ$.

9.3 – Triângulos

Definimos um **triângulo** como um conjunto de três pontos não colineares A , B , C (que são chamados de **vértices** do triângulo) juntamente com os segmentos AB , BC e CA (que são chamados de **lados** do triângulo). Esse triângulo é representado simbolicamente como $\triangle ABC$ e possui **ângulos internos** $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$. A região limitada delimitada pelos lados do triângulo será chamada de interior do triângulo.



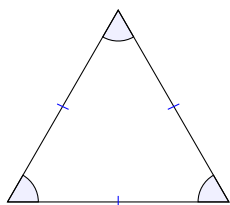


Um triângulo pode ser classificado de duas formas: De acordo com a quantidade de lados de medidas iguais que possui ou de acordo com as medidas de seus ângulos internos.

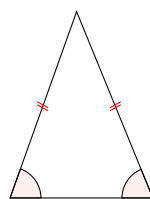
Classificação de triângulos de acordo com o número de lados iguais

Um triângulo que possui:

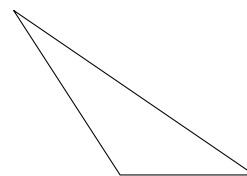
- três lados de medidas iguais é **equilátero**.
- dois lados de medidas iguais é **isósceles**.
- os três lados de medidas diferentes é **escaleno**.



(a) Equilátero.



(b) Isósceles.



(c) Escaleno.

Observe que, pela definição acima, triângulos equiláteros são isósceles e triângulos isósceles *podem ser ou não* equiláteros. Também, veremos mais adiante que os ângulos marcados na figura (a) são iguais, assim como também são iguais os ângulos marcados na figura (b).

Uma nomenclatura importante relativa a triângulos isósceles é que o terceiro lado de um triângulo isósceles (o lado que não é nenhum dos dois que sabemos serem iguais) é chamado de **base**.

Antes de discutirmos a classificação dos triângulos quanto ao tipos de ângulos que possuem, é conveniente fazermos mais alguns comentários sobre o Quinto Axioma e provarmos um resultado muito importante. Primeiramente, pode ser mostrado que uma maneira equivalente de formular o Quinto Axioma é a seguinte:

Axioma das Paralelas

Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.

O Axioma das Paralelas é a ferramenta de que precisamos para demonstrar o teorema a seguir, o qual é um dos mais importantes resultados da Geometria Euclidiana.

Teorema 9.3.1 A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é (sempre) igual a 180° .

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Utilizando o Axioma das Paralelas, tracemos a (única) reta r paralela ao lado AB e passando pelo ponto C (cf. Figura 9.13). Marque pontos D e E sobre a reta r , situados em semirretas distintas em relação a C conforme também mostrado na Figura 9.13.

O lado AC é uma transversal que corta duas retas paralelas e, conseqüentemente, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DCA$ (destacados em verde) são congruentes, pois são alternos internos. Do mesmo modo, o lado BC corta duas retas paralelas e os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCE$ (destacados em amarelo) são congruentes, por também são alternos internos.

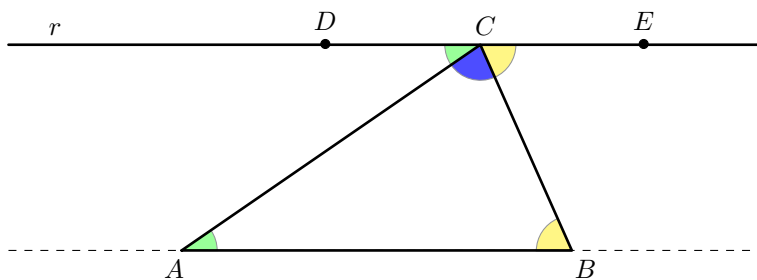


Figura 9.13: demonstração do Teorema 9.3.1.

Logo,

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = \angle DCA + \angle BCE + \angle ACB = \angle DCE = 180^\circ.$$

A última igualdade é válida pelo fato do ângulo $\angle DCE$ ser um ângulo raso, já que os pontos D , C e E estão sobre uma mesma reta (a reta r). ■

Uma consequência importante do teorema anterior é o fato de que, se em um triângulo ABC tivermos $\angle A \geq 90^\circ$, então

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \leq 90^\circ.$$

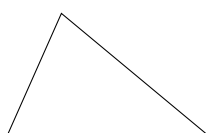
Consequentemente, $\angle B, \angle C < 90^\circ$. Em palavras, todo triângulo tem *no máximo um* ângulo reto ou obtuso.

Podemos finalmente enunciar a classificação dos triângulos quanto a seus ângulos internos.

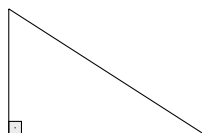
Classificação de triângulos quanto ao tipos de ângulos

Um triângulo em que:

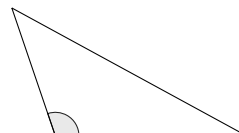
- todos os seus ângulos são agudos é chamado de **acutângulo**.
- um de seus ângulos é reto é chamado de **(triângulo) retângulo**. (O lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados de *catetos*).
- um de seus ângulos é obtuso é chamado de **obtusângulo**.



(a) Acutângulo.

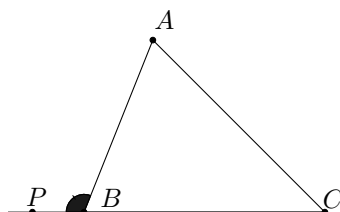


(b) Retângulo.



(c) Obtusângulo.

Em um triângulo, um **ângulo externo** é um ângulo formado entre o prolongamento de um dos lados do triângulo e com um dos seus lados adjacentes. Nas notações da figura a seguir, $\angle ABP$ é um ângulo externo de ABC , *adjacente* ao ângulo interno $\angle ABC$.



O Teorema 9.3.1 tem uma consequência muito útil para a medida dos ângulos externos de um triângulo, conhecida como o **Teorema do Ângulo Externo**.

Teorema 9.3.2 — do Ângulo Externo. Em um triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração. Nas notações da figura anterior, veja que $\angle ABP = 180^\circ - \angle ABC$. Por outro lado, uma vez que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° , temos $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$, logo, $180^\circ - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB$. Então,

$$\angle ABP = 180^\circ - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB.$$

■

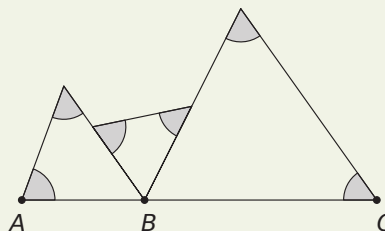
O próximo resultado pode ser visto como uma ligação entre as classificações de triângulos quanto a seus lados e ângulos. Ele será apresentado sem sua respectiva demonstração, por tratar-se de um fato que será muito importante para a resolução de diversos exercícios deste módulo. Assim, resolvemos antecipar sua exposição, deixando sua demonstração para o módulo seguinte de Geometria Plana, quando abordaremos o conceito de *congruência de triângulos*.

Teorema 9.3.3 — do triângulo isósceles. Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos adjacentes à base são iguais. Em símbolos, no $\triangle ABC$, temos:

$$AB = AC \Leftrightarrow \angle ABC = \angle ACB.$$

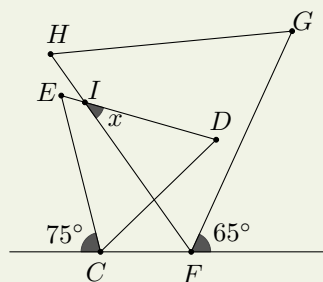
Como consequência desse resultado, podemos verificar que cada ângulo de um triângulo equilátero é igual a 60° . De fato, todos os ângulos um triângulo equilátero são iguais, pois todos os lados podem ser interpretados como base de um triângulo isósceles. Além disso, a soma dos três ângulos é 180° . Consequentemente, todos eles são iguais a 60° .

Exercício 9.7 — OBMEP 2014. Na figura, os pontos A , B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



Solução. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Por outro lado, os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam 180° , já que A , B e C estão alinhados. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180^\circ \cdot 3) - 180^\circ = 360^\circ$. ■

Exercício 9.8 — OBM 2004. Na figura a seguir temos dois triângulos equiláteros. Calcule o valor de x .



Solução. Seja P o ponto de encontro entre os lados CD e HF . Note que

$$\angle PCF = 180^\circ - 75^\circ - \angle CDE = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$$

e que

$$\angle PFC = 180^\circ - 65^\circ - \angle GFH = 115^\circ - 60^\circ = 55^\circ.$$

Como $\angle DPF$ é externo do triângulo PCF , temos que $\angle DPF = 45^\circ + 55^\circ = 100^\circ$. Por outro lado, $\angle DPF$ também é externo do triângulo IPD . Logo,

$$x + 60^\circ = \angle DPF \Rightarrow x + 60^\circ = 100^\circ \Rightarrow x = 40^\circ.$$

■

Exercício 9.9 O triângulo ABC é isósceles com $AB = AC$. Sobre o lado AB há um ponto P tal que $AP = PC = BC$. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABC .

Solução. Seja $\alpha = \angle BAC$. Como o triângulo APC é isósceles de base AC , o Teorema 9.3.3 dá $\angle PCA = \alpha$. Daí, $\angle BPC = 2\alpha$, pois é ângulo externo do triângulo APC . Como BPC é isósceles de base BP , novamente pelo Teorema 9.3.3 temos $\angle PBC = 2\alpha$. Como $\triangle ABC$ é isósceles de base BC , apelando uma vez mais para o Teorema 9.3.3 obtemos $\angle BCA = 2\alpha$. Por fim, somando todos os ângulos do triângulo ABC , temos que

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ.$$

Portanto, os ângulos do triângulo são 36° , 72° e 72° .

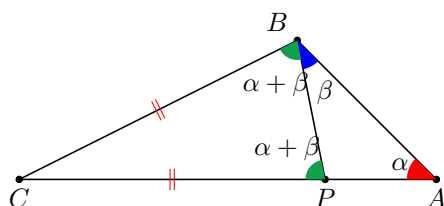
■

9.3.1 – Desigualdades no triângulo

Nesta seção, utilizaremos o material discutido até aqui para estabelecer algumas desigualdades importantes envolvendo os comprimentos dos lados de um triângulo. Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 9.3.4 Em qualquer triângulo, a ordem entre dois lados coincide com a ordem entre os ângulos opostos a esses lados. Em particular, o maior lado é oposto ao maior ângulo, e vice-versa.

Demonstração. Assuma que, no triângulo ABC , tenhamos $BC < AC$. Temos de provar que $\angle BAC < \angle ABC$. Para tanto (acompanhe na figura), usando o fato de que $BC < AC$, podemos marcar um ponto P sobre o lado AC tal que $CP = CB$.



Agora, se $\angle PAB = \alpha$ e $\angle ABP = \beta$, Teorema do Ângulo Externo dá $\angle CPB = \alpha + \beta$. Mas, como $\triangle BCP$ é isósceles de base BP , segue do Teorema 9.3.3 que $\angle CBP = \alpha + \beta$. Portanto,

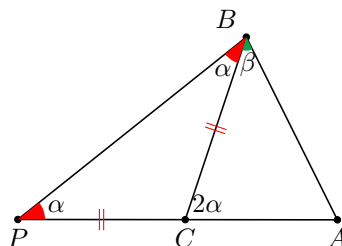
$$\angle ABC = \alpha + 2\beta > \alpha = \angle CAB.$$

■

O próximo resultado confirma nossa intuição, construída no dia-a-dia, de que para ir de um ponto a outro a melhor trajetória possível é seguir *em linha reta*. Talvez você ache um tanto surpreendente o fato de que isso é um teorema, e não meramente uma manifestação de nossa intuição.

Teorema 9.3.5 — Desigualdade Triangular. Em todo triângulo, o maior lado é menor do que a soma dos outros dois.

Demonstração. Se AB é o maior lado do triângulo ABC , temos de mostrar que $AB < AC + BC$. Para tanto (acompanhe o raciocínio na próxima figura), marque P um ponto sobre a semirreta \overrightarrow{AC} tal que $CP = CB$ e o ponto C esteja entre A e P .



Uma vez que o triângulo $\triangle PCB$ é isósceles de base BP , temos $\angle CPB = \angle CBP$. Denotando tais ângulos por α e sendo $\beta = \angle ABP$, temos

$$\angle ABP = \alpha + \beta > \alpha = \angle APB.$$

Portanto, aplicando o Teorema 9.3.4 ao triângulo APB , concluímos que $AP > AB$. Mas $AP = AC + CP = AC + BC$, de sorte que $AC + BC > AB$. ■



Note que esse resultado também pode ser declarado da seguinte forma: *Em qualquer triângulo, a medida de um dos lados será menor do que a soma das medidas dos outros dois.*

Exercício 9.10 Três segmentos, medindo 5, 7 e x centímetros, são os lados de um triângulo. Quais são os possíveis valores que x pode assumir?

Solução. Pela desigualdade triangular, devemos ter $x < 5 + 7 = 12$. Por outro lado, $7 < x + 5$, de sorte que $2 < x$. Juntando essas duas desigualdades, temos que

$$2 < x < 12.$$

■

Exercício 9.11 Encontre o intervalo de variação de x , sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

Solução. Pela desigualdade triangular, temos:

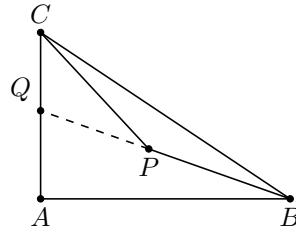
$$(x + 10) + (2x + 4) > 20 - 2x \Rightarrow 3x + 14 > 20 - 2x \Rightarrow 5x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{5}.$$

$$(x + 10) + (20 - 2x) > 2x + 4 \Rightarrow 30 - x > 2x + 4 \Rightarrow 26 > 3x \Rightarrow \frac{26}{3} > x.$$

$$(2x + 4) + (20 - 2x) > x + 10 \Rightarrow 24 > x + 10 \Rightarrow 14 > x.$$

Como $14 > \frac{26}{3}$, os valores que satisfazem simultaneamente a todas essas desigualdades são $\frac{26}{3} > x > \frac{6}{5}$. ■

Exercício 9.12 Se P é um ponto no interior de um triângulo ABC , mostre que $BP + PC < AB + AC$.



Solução. Prolongue \overrightarrow{BP} até ela encontrar AC em um ponto Q . Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos ABQ e QPC , temos que:

$$BQ < AB + AQ \quad \text{e} \quad PC < PQ + QC.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos

$$BQ + PC < AB + AQ + PQ + QC$$

Por outro lado, $BQ = BP + PQ$ e $AQ + QC = AC$. Portanto,

$$(BP + PQ) + PC < AB + AC + PQ.$$

Então, cancelando a parcela PQ que aparece dos dois lados, ficamos com

$$BP + PC < AB + AC.$$

■

9.4 – Quadriláteros

Um **quadrilátero** $ABCD$ é o conjunto formado por quatro pontos A , B , C e D (seus **vértices**), tal que não há três deles colineares, e pelos segmentos AB , BC , CD e DA (os **lados** do quadrilátero).

Um quadrilátero é dito **convexo** quando a reta definida por cada um de seus lados deixa os outros dois vértices de um mesmo lado (veja a Figura 9.14). Nesta seção, vamos considerar apenas quadriláteros convexos, de forma que, daqui em diante, omitiremos a palavra *convexo*.

Se $ABCD$ é um quadrilátero, seu **interior** é a interseção dos quatro semiplanos definidos por cada lado e que contêm os outros dois vértices. Dizemos também que \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} são os **ângulos internos** de $ABCD$ e os segmentos AD e BC são suas **diagonais**. Note que elas estão contidas na união dos lados com o interior de $ABCD$.

Por vezes, dizemos que AB e CD são **lados opostos** de $ABCD$. De modo equivalente, BD e AC também são lados opostos.

Assim como ocorre com os triângulos, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é invariante, ou seja, é igual em todos os quadriláteros. Mas, no caso de quadriláteros, o valor obtido é 360° .



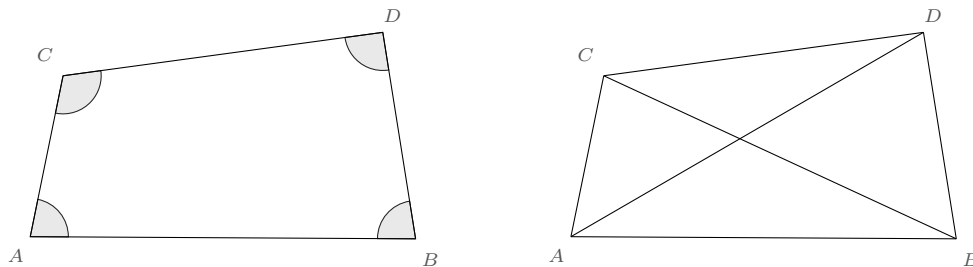


Figura 9.14: um quadrilátero (à esquerda) e suas diagonais (à direita).

Teorema 9.4.1 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

Demonstração. Desenhando apenas uma das diagonais, dividimos o quadrilátero em dois triângulos. Podemos observar facilmente que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual à soma dos ângulos internos desses dois triângulos. Logo, a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a $2 \cdot 180^\circ$, ou seja, 360° . ■

Vamos, agora, definir alguns tipos especiais de quadriláteros, segundo seus ângulos e lados. À medida que você ler as definições, observe os vários tipos especiais de quadriláteros na figura 9.15.

- **Retângulo** é um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos.
- **Losango** é um quadrilátero que possui todos os seus lados iguais.
- **Quadrado** é um quadrilátero que possui todos os ângulos retos e todos os lados iguais. Portanto, um quadrilátero é um quadrado se, e somente se, for simultaneamente um retângulo e um losango.
- **Paralelogramo** é um quadrilátero que possui seus dois pares de lados opostos paralelos.
- **Trapézio** é um quadrilátero que possui um par de lados (opostos) paralelos (que são chamados de **bases**).

Observe que todo paralelogramo também é trapézio. Por outro lado, em um trapézio, seus outros dois lados podem ou não ser paralelos. Contudo, a fim de ter uma nomenclatura que funcione em todos os casos, se $ABCD$ for um trapézio de bases AB e CD , diremos que AD e BC são os **lados não paralelos** do trapézio, lembrando que eles *podem vir a ser* paralelos. A nomenclatura é um tanto infeliz, mas está consagrada pelo uso e não gerará confusões, pois o contexto sempre deixará cada situação bastante clara.

Uma última definição: se $ABCD$ for um trapézio de bases AB e CD , diremos que $ABCD$ é **isósceles** se $\angle BAD = \angle ABC$. Nesse caso, é possível usar o Teorema 9.3.3 para mostrar que $AD = BC$.

Analisaremos mais algumas propriedades dos tipos especiais de quadriláteros listados acima no próximo módulo de Geometria, quando formalizarmos o conceito de congruência de triângulos.

Exercício 9.13 Na figura a seguir, $ABCD$ é um trapézio de bases AB e CD . Encontre x e y .

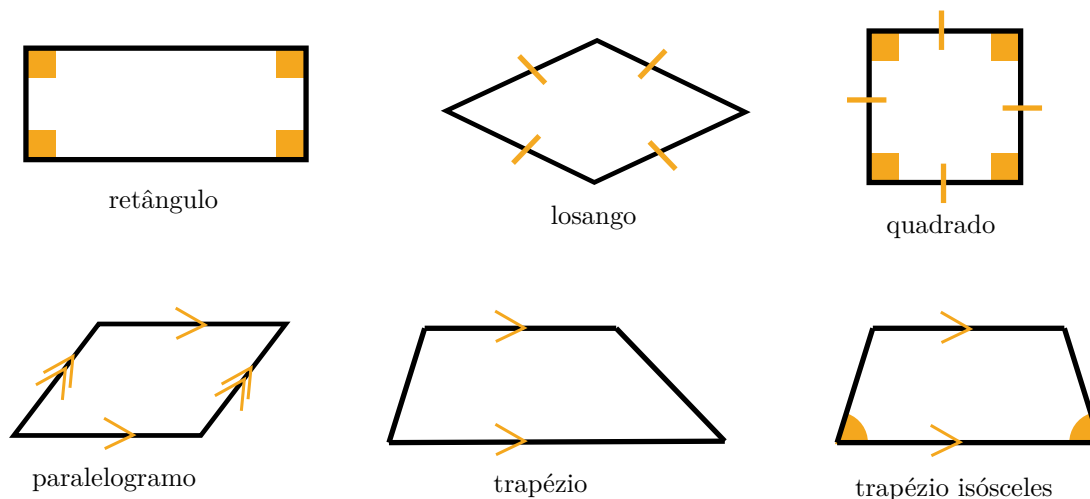
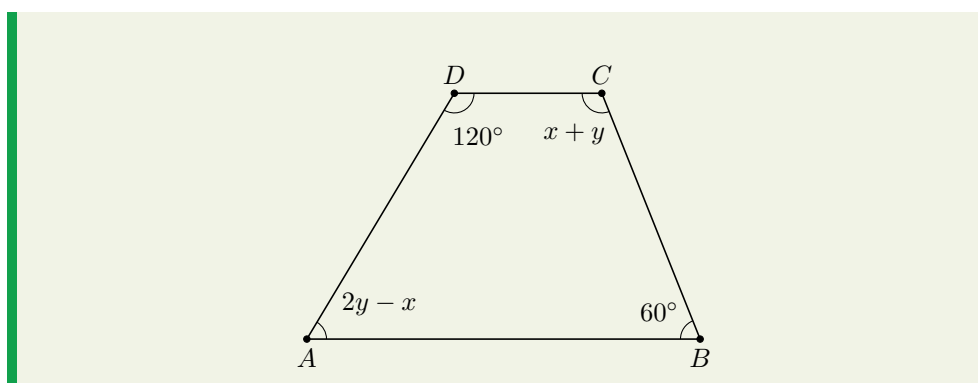


Figura 9.15: Tipos de quadriláteros.

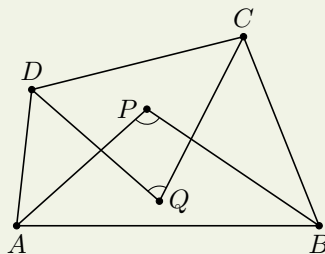


Solução. Por paralelismo, temos $2y - x + 120^\circ = 180^\circ$ e $60^\circ + x + y = 180^\circ$ ou, ainda,

$$2y - x = 60^\circ \quad \text{e} \quad x + y = 120^\circ.$$

Somando estas duas equações, chegamos a $3y = 180^\circ$. Logo, $y = 60^\circ$ e, conseqüentemente, $x = 60^\circ$. (Observe que, graças a esses valores, $ABCD$ é um trapézio isósceles.) ■

Exercício 9.14 Na figura a seguir, P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$, enquanto que Q é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$. Ache o valor de $\angle APB + \angle CQD$.



Solução. Sejam $2\alpha = \angle DAB$, $2\beta = \angle ABC$, $2\theta = \angle BCD$ e $2\delta = \angle CDA$ as medidas dos ângulos do quadrilátero $ABCD$. Note que

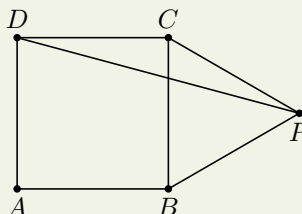
$$\angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta \quad \text{e} \quad \angle CQD = 180^\circ - \theta - \delta.$$

Somando essas duas equações, temos que

$$\angle APB + \angle CQD = 360^\circ - (\alpha + \beta + \theta + \delta).$$

Por outro lado, 2α , 2β , 2θ e 2δ são as medidas dos ângulos de um quadrilátero, conseqüentemente, a soma desses ângulos é 360° . Assim, $\alpha + \beta + \theta + \delta = 180^\circ$ e, daí, $\angle APB + \angle CQD = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. ■

Exercício 9.15 A figura a seguir é formada por um quadrado e um triângulo equilátero. Calcule a medida do ângulo $\angle PDC$.



Solução. Como $CD = BC$ e $BC = CP$, temos que $CD = CP$. Assim, $\triangle CDP$ é um triângulo isósceles, o Teorema 9.3.3 garante que $\angle CDP = \angle CPD = x$. Por outro lado, sendo $ABCD$ um quadrado e CBP um triângulo equilátero, temos $\angle BCD = 90^\circ$ e $\angle BCP = 60^\circ$. Logo, $\angle DCP = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Por fim, calculando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle CDP$, obtemos

$$2x + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 30^\circ \Rightarrow x = 15^\circ.$$

9.5 – Polígonos

Generalizando triângulos e quadriláteros, definimos um **polígono de n lados** $A_1A_2 \dots A_n$ como o conjunto formado por n pontos A_1, A_2, \dots, A_n (seus **vértices**), tal que não há três deles colineares, e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 (os **lados** do polígono).

Um polígono de n -lados também é chamado de **n -ágono**. No entanto, em geral usamos palavras específicas quando n varia de 3 a 10. Já conhecemos esses nomes quando $n = 3$ (triângulos) e $n = 4$ (quadriláteros). A seguir, listamos os nomes usados para $5 \leq n \leq 10$, os quais são formados pela contração do prefixo grego correspondente a n (sublinhado) com a terminação *ágono*:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| i. $n = 5$: <u>pent</u> ágono. | iv. $n = 8$: <u>oct</u> ógono. |
| ii. $n = 6$: <u>hex</u> ágono. | v. $n = 9$: <u>ene</u> ágono. |
| iii. $n = 7$: <u>hept</u> ágono. | vi. $n = 10$: <u>dec</u> ágono. |

Da mesma forma, nesses casos podemos nomear os vértices do polígono usando as primeiras letras maiúsculas do alfabeto, a partir de A . Assim, podemos falar do pentágono $ABCDE$, do octógono $ABCDEFGH$, etc.

Um polígono de n lados é **convexo** quando a reta definida por cada um de seus lados deixa os outros $n - 2$ vértices de um mesmo lado do plano. As Figuras 9.16 mostram dois exemplos de polígonos, um pentágono não convexo (à esquerda) e um hexágono convexo (à direita). Nesta seção, vamos considerar apenas polígonos convexos, de forma que, daqui em diante, omitiremos a palavra *convexo*.

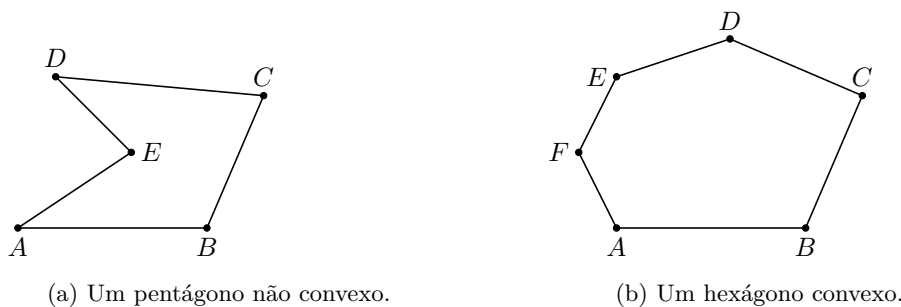


Figura 9.16: dois exemplos de polígonos.

Se $A_1A_2 \dots A_n$ é um n -ágono, seu **interior** é a interseção dos n semiplanos definidos por cada lado e que contêm os outros $n - 2$ vértices. Dizemos também que $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ são os **ângulos internos** do polígono.

Definição 9.5.1 Um **polígono regular** é um polígono em que todos os lados têm um mesmo comprimento e todos os ângulos internos são congruentes.

Na Figura 9.17, ilustramos o pentágono regular (5 lados) e o hexágono regular (6 lados).

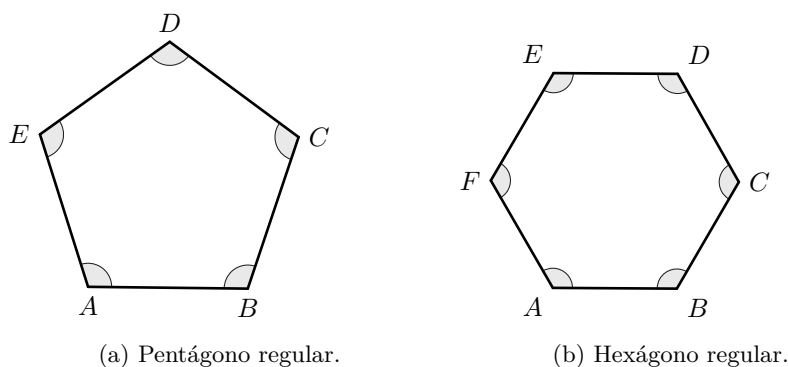


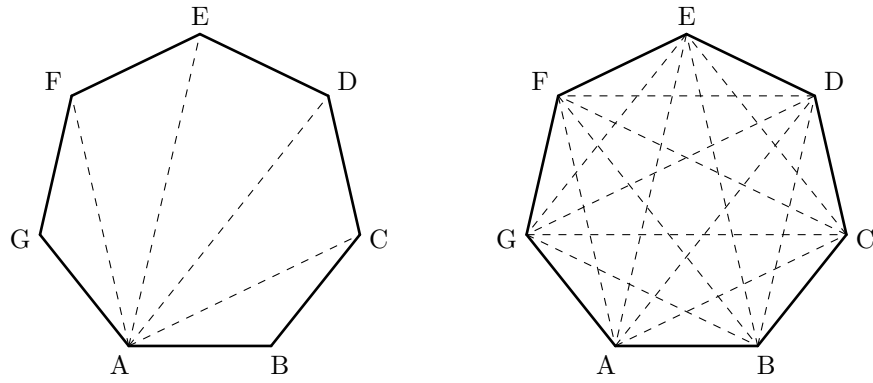
Figura 9.17

Triângulos equiláteros e quadrados são polígonos regulares. No caso dos triângulos equiláteros, recorde que (graças ao Teorema 9.3.3) a igualdade dos lados implicava a igualdade dos ângulos. Entretanto, já no caso dos quadrados, tivemos de exigir as igualdades dos lados e dos ângulos internos (pois há retângulos que não são quadrados).

De maneira similar, para todo $n \geq 4$ não é difícil esboçarmos exemplos de n -âgonos *equiláteros* (isto é, com todos os lados iguais) ou *equiângulos* (isto é, com todos os ângulos iguais) mas que não são regulares. Por exemplo, imaginando que os lados do pentágono regular da figura acima são barras de ferro conectadas por pinos nos vértices, vemos que o conjunto das barras não é *rígido*; podemos achatá-lo ou alongá-lo e, assim fazendo, obter outros pentágonos, equiláteros mas não equiângulos. Da mesma forma, escolha um ponto qualquer A' no interior do pentágono (faça uma figura para acompanhar) e, em seguida, marque os pontos B' sobre BC e E' sobre DE tais que $A'B'$ seja paralela a AB e $A'E'$ seja paralela a AE ; então, $A'B'CDE'$ é um pentágono equiângulo, mas não equilátero (pois $B'C < BC = CD$).

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento que une dois vértices não adjacentes (ou seja, que não são extremidades de um mesmo lado). Já sabemos que o quadrado possui duas diagonais e, na Figura 9.18(b), ilustramos as diagonais de um heptágono que partem de um vértice (à esquerda), bem como todas as diagonais (à direita).

Vamos, agora, calcular a quantidade de diagonais em um polígono convexo qualquer, em função do número de lados.



(a) Diagonais em um heptágono partindo de um vértice.

(b) Um heptágono tem 14 diagonais.

Figura 9.18

Teorema 9.5.1 Um polígono convexo de n lados possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Demonstração. Ao fixar um vértice qualquer do polígono, note que o número de diagonais que partem dele é igual a $n - 3$ (por exemplo, na Figura 9.18(a), temos $n = 7$ e $7 - 3 = 4$ diagonais partindo de A). Assim, podemos contabilizar todas as diagonais somando as contribuições de diagonais que partem de cada vértice, o que dá

$$\underbrace{(n - 3) + (n - 3) + \dots + (n - 3)}_{n \text{ parcelas}} = n(n - 3)$$

diagonais. Contudo, o cálculo acima tem uma *redundância*: cada diagonal foi contada duas vezes, pois liga dois vértices (e, assim, foi contada uma vez a partir de cada um desses dois vértices). Portanto, o total de diagonais, sem repetições, é $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

Vimos anteriormente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , enquanto que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360° . O próximo resultado generaliza esses dois, calculando a soma dos ângulos internos em qualquer n -ágono convexo.

Teorema 9.5.2 A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180^\circ(n - 2)$.

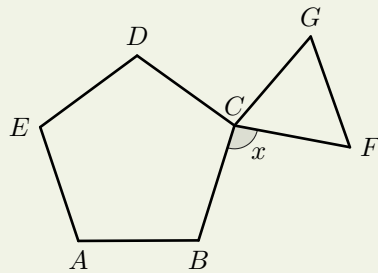
Demonstração. Escolha um vértice do polígono e trace todas as $n - 3$ diagonais que partem dele (veja a Figura 9.18(a) para o caso $n = 7$). Desse modo, subdividimos o polígono em $n - 2$ triângulos ($7 - 2 = 5$ triângulos, na Figura 9.18(a)). Observe, agora, que a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de todos esses $n - 2$ triângulos. Logo, a soma total é $180^\circ(n - 2)$. ■

Como consequência imediata do resultado anterior, obtemos o

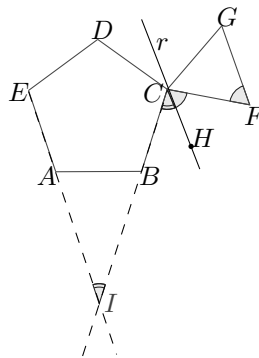
Corolário 9.5.3 Em um polígono regular de n lados, cada ângulo interno mede $\frac{180^\circ(n - 2)}{n}$.

Demonstração. Como a soma dos ângulos é $180^\circ(n - 2)$ e há n ângulos, todos de mesma medida, cada um deles deve medir $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. ■

Exercício 9.16 Na figura a seguir, vemos um pentágono regular $ABCDE$ e um triângulo equilátero CFG , unidos pelo vértice comum C . Calcule a medida do ângulo $x = \angle BCF$ para que os lados AE e FG estejam contidos em retas paralelas.



Solução. Seja r a reta paralela a FG e AE passando por C , seja I o ponto de interseção dos prolongamentos dos lados CB e AE do pentágono e marque um ponto H sobre a reta r , conforme mostrado na figura a seguir.



Os ângulos $\angle HCF$ e $\angle CFG$ são iguais, por serem alternos internos para as retas paralelas CH e FG , em relação à transversal CF . Como o triângulo CFG é equilátero, temos $\angle HCF = 60^\circ$.

Os ângulos $\angle IAB$ e $\angle IBA$ são os suplementos dos ângulos internos $\angle EAB$ e $\angle ABC$, respectivamente. Como o pentágono é regular, temos

$$\angle EAB = \angle ABC = \frac{(5-3)180^\circ}{5} = 108^\circ;$$

assim,

$$\angle IAB = \angle IBA = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Calculando a soma dos ângulos do triângulo AIB , segue que

$$\angle AIB + 72^\circ + 72^\circ = 180^\circ \implies \angle AIB = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Os ângulos $\angle AIB$ e $\angle BCH$ são iguais, pois são alternos internos para as retas paralelas AE e CH , em relação à transversal CI . Logo, $\angle BCH = 36^\circ$.

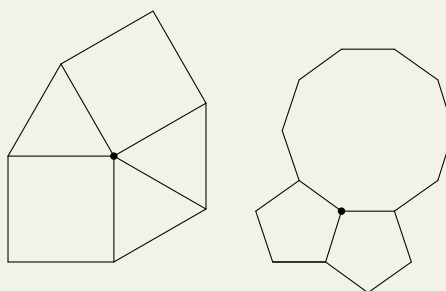
Por fim, $x = \angle BCH + \angle HCF = 36^\circ + 60^\circ = 96^\circ$. ■

Exercício 9.17 — OBMEP 2007.

- (a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos é de um polígono regular de n lados é $(n-2) \cdot 180^\circ$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5		
6		
8		

Dizemos que três ou mais polígonos regulares *se encaixam* se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



- (b) Um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam? Justifique sua resposta.
 (c) Um triângulo equilátero, um heptágono regular e um outro polígono regular se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

Solução.

(a) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5, 6$ e 8 na fórmula $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Para completar a segunda coluna, basta (conforme visto no Corolário 9.5.3) dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n , ou seja, calcular $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$. A tabela completa é dada abaixo.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°

(b) O ângulo interno de um quadrado é 90° e o de um octógono regular é 135° . Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360° . Como $90^\circ + 135^\circ + 135^\circ = 360^\circ$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares realmente se encaixam.

(c) O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60° e o de um heptágono regular é $\frac{(7-2) \cdot 180^\circ}{7} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{7}$. Seja n o número de lados do terceiro polígono. O ângulo interno desse polígono é $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$. Como os três polígonos se encaixam, devemos ter

$$60^\circ + \frac{5 \cdot 180^\circ}{7} + \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ,$$

ou ainda, dividindo os dois lados por 60° ,

$$1 + \frac{5 \cdot 3}{7} + \frac{(n-2) \cdot 3}{n} = 6.$$

Multiplicando ambos os membros por $7n$, obtemos

$$7n + 15n + 21(n - 2) = 42n$$

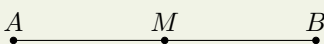
de sorte que $n = 42$. ■

9.6 – Problemas Propostos

9.6.1 – Nível 1

Exercício 9.18 Em cada uma das figuras a seguir, calcule \overline{AB} , sendo M ponto médio de AB :

(a) $AM = 3x - 7$ e $MB = x + 1$.

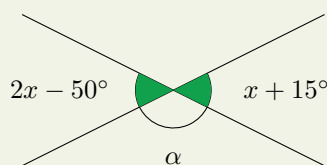


(b) $AM = x$, $AP = 5x - 6$ e $BP = x + 3$.

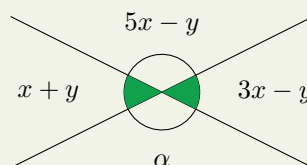


Exercício 9.19 Calcule o valor de α em cada um dos itens a seguir:

(a)



(b)

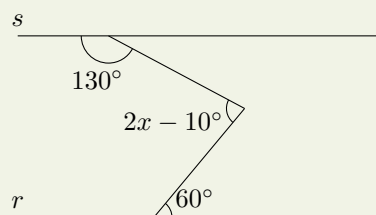


Exercício 9.20 Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando este indica 3 horas e 40 minutos.

Exercício 9.21 Calcule as medidas dos ângulos de um triângulo, sabendo que, quando as expressamos em graus, elas são proporcionais a 1, 2 e 3.

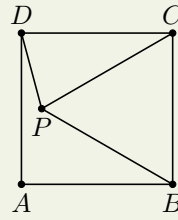
Exercício 9.22 Obtenha o intervalo de variação de x , sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 20$, $3x + 5$ e $25 - 2x$.

Exercício 9.23 As retas r e s da figura são paralelas. Encontre x .



Exercício 9.24 Os ângulos internos de um quadrilátero convexo valem $2x + 50^\circ$, $150^\circ - 4x$, $x + 40^\circ$ e $4x + 90^\circ$. Calcule o valor de x .

Exercício 9.25 A figura a seguir é formada a partir de um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero BCP . Calcule a medida do ângulo $\angle ADP$.



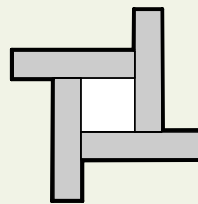
Exercício 9.26 Seja $ABCDE$ um pentágono regular. Calcule a medida do ângulo $\angle BEC$.

Exercício 9.27 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ACE .

Exercício 9.28 — UFMG 1992. Os pontos A, B, C, D são colineares e tais que $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 8$ cm e $BD = 7$ cm. Nessas condições, uma possível disposição desses pontos é:

- (a) $A D B C$.
- (b) $A B C D$.
- (c) $A C B D$.
- (d) $B A C D$.
- (e) $B C D A$.

Exercício 9.29 — OBMEP 2014. Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



Exercício 9.30 — PUC SP 1983. Duas retas concorrentes são *perpendiculares* se se encontram formando um ângulo de 90° . A esse respeito, considere a seguinte sentença:

“Num plano, se duas retas são então toda reta a uma delas é à outra.”

A alternativa que preenche corretamente as lacunas:

- (a) paralelas - perpendicular - paralela.
- (b) perpendiculares - paralela - paralela.

- (c) perpendiculares - perpendicular - perpendicular.
- (d) paralelas - paralela - perpendicular.
- (e) perpendiculares - paralela - perpendicular.

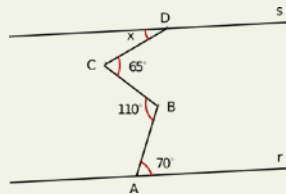
Exercício 9.31 — PUC SP 1984. Em um triângulo isósceles, a média aritmética das medidas de dois de seus ângulos é 50° . A medida de um dos ângulos do triângulo pode ser:

- (a) 100° .
- (b) 90° .
- (c) 60° .
- (d) 30° .
- (e) 20° .

Exercício 9.32 Mostre que todas as diagonais de um pentágono regular têm a mesma medida.

Exercício 9.33 Seja P um ponto no interior do triângulo ABC . Explique por que $\angle BPC > \angle BAC$.

Exercício 9.34 Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule a medida do ângulo x .



Exercício 9.35 — UFMG 1992. Sobre figuras planas, é correto afirmar que:

- (a) um quadrilátero convexo é um retângulo se os lados opostos têm comprimentos iguais.
- (b) um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.
- (c) um trapézio que tem dois ângulos consecutivos congruentes é isósceles.
- (d) um triângulo equilátero é também isósceles.
- (e) um triângulo retângulo é aquele cujos ângulos são retos.

Exercício 9.36 — ENEM 2004. Um fabricante planeja colocar no mercado duas linhas de cerâmicas para revestimento de pisos. Diversas formas possíveis para as cerâmicas foram apresentadas e decidiu-se que o conjunto P de formas possíveis seria composto apenas por figuras poligonais regulares.

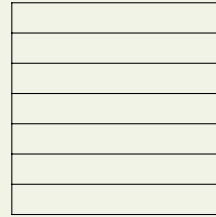
Duas formas geométricas que podem fazer parte de P são:

- (a) triângulo e pentágono.
- (b) triângulo e hexágono.
- (c) triângulo e octógono.
- (d) hexágono e heptágono.
- (e) hexágono e octógono.

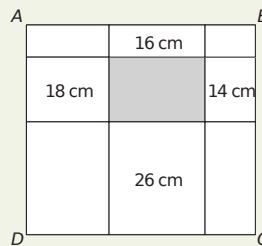
Exercício 9.37 — UNICAMP 1987. O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos mede 1440° tem, exatamente:

- (a) 15 diagonais.
- (b) 20 diagonais.
- (c) 25 diagonais.
- (d) 30 diagonais.
- (e) 35 diagonais.

Exercício 9.38 Um quadrado é dividido em sete retângulos, como mostrado na figura abaixo. Se o perímetro de cada um desses retângulos é 32cm, qual o perímetro do quadrado?

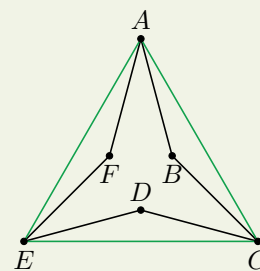


Exercício 9.39 — OBMEP 2016. O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. Se o perímetro do retângulo $ABCD$ é 54cm, qual o perímetro do retângulo cinza?

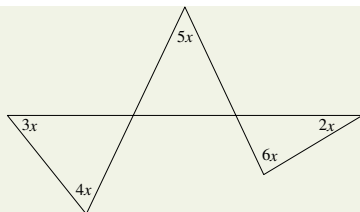


Exercício 9.40 — UERJ 2019. No desenho a seguir, está ilustrada uma estrela de três pontas iguais, com lados $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, inscrita no triângulo equilátero ACE . Se $\angle ABC = 150^\circ$, os ângulos $\angle FAB$, $\angle BCD$ e $\angle DEF$ medem:

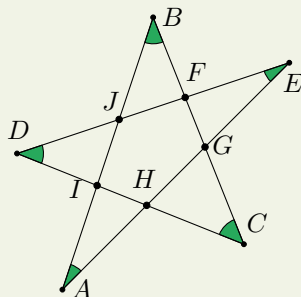
- (a) 15° .
- (b) 20° .
- (c) 25° .
- (d) 30° .



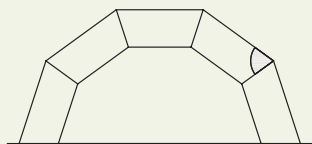
Exercício 9.41 — OBM 2004. Na figura, quanto vale x ?



Exercício 9.42 Calcule a soma dos cinco ângulos da estrela $ABCDE$.



Exercício 9.43 — OBMEP 2009. A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?



Exercício 9.44 Seja $ABCDEFGH$ um heptágono regular. Qual é a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e DE ?

Exercício 9.45 Em um polígono convexo, A , B e C são três vértices consecutivos. O **ângulo externo** do polígono em B é o ângulo formado entre o prolongamento do lado AB (prolongado de A para B) e o lado BC (faça uma figura para garantir que entendeu a definição). Graças ao Teorema 9.1.1, poderíamos ter definido o ângulo externo do polígono em B como o ângulo formado entre o prolongamento do lado BC (prolongado de C para B) e o lado AB . Prove que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer (um ângulo externo por vértice) é sempre igual a 360° .

Exercício 9.46 Qual é o número máximo de regiões em que três retas podem dividir o plano? E se forem 10 retas?

 FOLHA DE CÁLCULOS

 FOLHA DE CÁLCULOS

 FOLHA DE CÁLCULOS