MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2021

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO

SISEDU

Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO

FUNCAP

CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Todos os direitos reservados à
Secretaria da Educação do Estado do Ceará – Centro Administrativo Virgílio Távora
Av. General Afonso Albuquerque Lima, s/n – Cambeba. Fortaleza/CE – CEP: 60.822-325

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretária Executiva de Ensino Médio e da Educação Profissional	Maria Jucineide da Costa Fernandes
Assessora Especial de Gabinete	Maria Elizabete de Araújo
Coordenadora de Educação em Tempo Integral	Ana Gardennya Linard Sírio Oliveira
Coordenadora de Protagonismo Estudantil	Gilgleane Silva do Carmo
Coordenadora de Gestão Pedagógica do Ensino Médio	Ideigiane Terceiro Nobre
Coordenadora de Avaliação e Desenvolvimento Escolar para Resultados de Aprendizagem	Kelem Carla Santos de Freitas
Coordenadora de Diversidade e Inclusão Educacional	Nohemy Rezende Ibanez
Coordenador da Educação Profissional	Rodolfo Sena da Penha
Coordenadora Estadual da Formação Docente e Educação a Distância	Vagna Brito de Lima
Cientista-Chefe da Educação	Jorge Herbert Soares de Lira
Elaboração e revisão de texto	Jorge Herbert Soares de Lira Annelise Maymone Gleilson Barbosa da Silva Leitão Keila Maria Pereira Leitão Pauliane Ibiapina Fernandes Girão
Transposição didática	Maria Marcigleide Araújo Soares

Funções Afins, Quadráticas e Exponenciais, Médias

Caro(a) estudante, esta parte do material envolve assuntos e habilidades essenciais para a aprendizagem da Matemática e para sua preparação para o ENEM e para o SAEB. Iniciamos nosso estudo retomando os conceitos de frações equivalentes e suas representações como números decimais para, gradativamente, passarmos a exercícios envolvendo proporcionalidade, equações lineares e funções afins.

Tente resolver as questões você mesmo, antes de consultar a solução. Não desista na primeira tentativa e use nossa solução para estudar ou revisar os conceitos e técnicas que usamos.

Questão 1 — Equivalência de frações - Descritor SAEB D23 Nono Ano. Calcule o valor de x para o qual a seguinte *equivalência* de frações é válida:

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{6}.$$

Solução. Inicialmente, observemos que 18 é, ao mesmo tempo, um múltiplo de 6 e de 9. Portanto, multiplicamos cada um dos dois lados da igualdade por 18, preservando a igualdade e obtendo

$$18\times\frac{x}{9} = 18\times\frac{4}{6}.$$

Uma vez que

$$\frac{18}{9} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{18}{6} = 3,$$

concluímos que

$$2x = 12.$$

Agora, dividindo cada um dos dois lados desta equação por 2, obtemos

$$x = 6.$$

Assim, deduzimos que as frações $\frac{6}{9}$ e $\frac{4}{6}$ são *equivalentes*, isto é,

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{6}.$$

■

Outra possível solução é a seguinte: multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{6}$ por 3, obtendo

$$\frac{4\times3}{6\times3} = \frac{12}{18}.$$

Em seguida, dividimos o numerador e o denominador desta última fração por 2, o que resulta em

$$\frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}.$$

Vejamos uma explicação geométrica para esta solução: a fração $\frac{4}{6}$ está representada na figura seguinte, em que cada um dos retângulos menores representa $\frac{1}{6}$ do retângulo maior.

Dividindo cada um dos retângulos menores em 3 partes iguais, obtemos 18 retângulos, dos quais 12 estão coloridos, representando a mesma fração da figura anterior.

Logo, deduzimos que $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$. Agora, agrupando os retângulos menores na figura anterior em grupos de 2, obtemos

Portanto, demonstramos geometricamente que

$$\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9}.$$

Questão 2 — Frações e números decimais - Descritores SAEB D21 e D24 Nono Ano. O número decimal 0,75 equivale a qual das seguintes frações?

A) $\frac{6}{4}$
B) $\frac{4}{6}$
C) $\frac{3}{6}$
D) $\frac{3}{4}$

Solução. Observe, inicialmente que as frações $\frac{1}{10}$ e $\frac{10}{100}$ são equivalentes, uma vez que

$$\frac{1\times 10}{10\times 10} = \frac{10}{100}.$$

Usando essa equivalência, vemos que o número decimal 0,75 é expandido da seguinte forma

$$0{,}75 = 0{,}7 + 0{,}05 = 7\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100} = 7\times\frac{10}{100} + 5\times\frac{1}{100} = \frac{7\times 10 + 5}{100} = \frac{75}{100}.$$

Em resumo, o número decimal 0,75 **equivale** à fração $\frac{75}{100}$. Todavia, esta fração pode ser *simplificada* da seguinte forma:

$$\frac{75\div 25}{100\div 25} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, o número decimal 0,75 é equivalente à fração $\frac{75}{100}$ que, por sua vez, é equivalente à fração $\frac{3}{4}$. Logo, a alternativa correta é a de letra D). ■

Observação 0.1 — Localização de números racionais na reta - Descritor SAEB D17 Nono Ano. Estudemos as demais alternativas do exercício anterior. Temos as seguintes equivalências de frações:

$$\frac{3}{6} = \frac{3\div 3}{6\div 3} = \frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4}.$$

Além disso,

$$\frac{6}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{2}{4} > 1.$$

Podemos ver, também, que

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2\times\frac{3}{4}.$$

Deduzimos, assim, a seguinte *comparação* de frações

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < 2\times\frac{3}{4} = \frac{6}{4}.$$

Resta, agora, compararmos a fração $\frac{4}{6}$ com as outras três frações que aparecem nas alternativas. Observamos que

$$\frac{4\times2}{6\times2} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}.$$

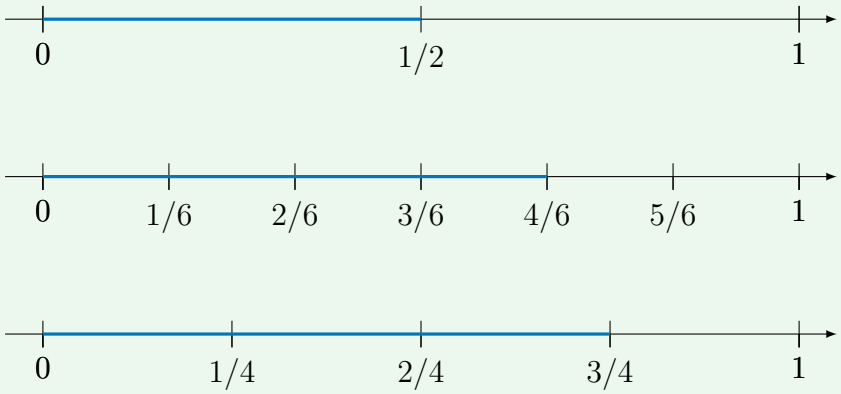
Assim,

$$\frac{4}{6} < \frac{3}{4}.$$

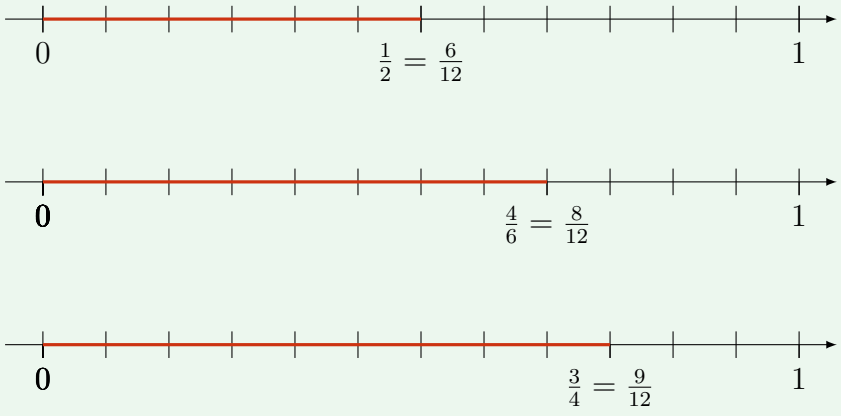
Por fim, dado que, como vimos acima, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, concluímos que

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{6} < \frac{3}{4}.$$

Podemos representar esses cálculos e desigualdades usando a *reta numérica*: as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{4}$ estão respectivamente representadas nas retas numéricas



Dividindo cada um dos segmentos de reta de mesmo comprimento, do ponto 0 ao ponto 1, em 6, 2 e 3 partes iguais, respectivamente, obtemos 12 segmentos, do ponto 0 ao ponto 1, em cada uma das três retas numéricas:



Questão 3 — Variáveis diretamente proporcionais - Descritor SAEB D15. Sabendo que duas variáveis, x e y, são diretamente proporcionais, complete a tabela com os valores adequados destas variáveis:

Valores de x	6	15	18	24	?
Valores de y	4	10	!	16	20

Qual a razão entre os valores das variáveis x e y?

Solução. O fato de que x e y são *diretamente* proporcionais significa que

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{!}{18} = \frac{16}{24} = \frac{20}{?},$$

ou seja, que as frações nesta expressão são equivalentes umas às outras. Em particular,

$$\frac{4}{6} = \frac{!}{18}.$$

Multiplicando cada um dos dois lados desta igualdade por 18, obtemos

$$18\times\frac{4}{6} = !,$$

donde concluímos que

$$! = 3\times 4 = 12.$$

Agora, observe que, multiplicando o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{6}$ por 5, obtemos

$$\frac{4\times 5}{6\times 5} = \frac{20}{30}.$$

Portanto, as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{20}{30}$ são equivalentes. Concluímos que $? = 30$. Por fim, deduzimos que a razão entre os valores das variáveis x e y é igual a $\frac{2}{3}$, uma vez que

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{16}{24} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Note que

$$\frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6} \qquad \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{2\times 6}{3\times 6} = \frac{12}{18},$$

e assim por diante. Essas frações são *equivalentes* umas às outras. Isto significa que os valores de x e y estão relacionados da seguinte forma

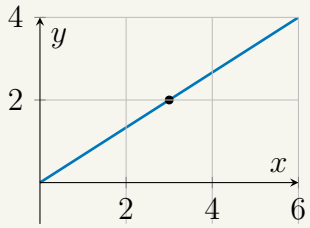
$$y = \frac{2}{3}x.$$

De fato, de acordo com os valores na tabela acima, temos

$$\text{se } x = 6, \text{ então } y = \frac{2}{3}\times 6 = 4, \qquad \text{se } x = 15, \text{ então } y = \frac{2}{3}\times 15 = 10,$$
$$\text{se } x = 18, \text{ então } y = \frac{2}{3}\times 18 = 12, \qquad \text{se } x = 24, \text{ então } y = \frac{2}{3}\times 24 = 16,$$
$$\text{se } x = 30, \text{ então } y = \frac{2}{3}\times 30 = 20.$$

■

Questão 4 — Proporcionalidade e retas no plano - Descritor SAEB D24. A reta abaixo representa o gráfico de uma função da forma $y = ax$, onde a é uma constante positiva.



Determine o valor da constante a e a razão entre as coordenadas do ponto destacado no gráfico.

Solução. Observamos que a razão entre os valores correspondentes da variável x e da variável y é sempre igual a a. De fato, uma vez que $y = ax$, temos

$$\frac{y}{x} = a,$$

caso $x \neq 0$. O ponto com coordenadas $x = 6$ e $y = 4$ pertence ao gráfico. Portanto, calculando a razão entre as coordenadas, temos

$$a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Logo, o valor da constante a é $\frac{2}{3}$. Concluímos que a função é dada por $y = \frac{2}{3}x$.

Agora, observemos que o ponto tem a segunda coordenada (ordenada) dada por $y = 2$. Como este ponto pertence ao gráfico da função, sua primeira coordenada (abscissa) satisfaz a equação

$$\frac{2}{3}x = 2.$$

Logo, $x = 3$. Portanto, as coordenadas do ponto destacado são (3,2), isto é, $x = 3$ e $y = 2$. ■

Questão 5 — Comparando taxas de variação - Descritor SAEB D19. Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas simultaneamente. Observou-se que o comprimento restante de uma era o dobro do comprimento restante da outra. Por quanto tempo ficaram acesas?

Solução. Indiquemos a vela que queima mais lentamente como vela A e a que queima mais rapidamente por vela B. Na tabela abaixo, registramos as frações restantes das duas velas a cada hora, durante as primeiras quatro horas após terem sido acesas:

	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas
Vela A	5/6	4/6	3/6	2/6
Vela B	3/4	2/4	1/4	0

Uma vez que

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 2\times\frac{1}{4},$$

concluímos que a parte restante da vela A é igual ao dobro da parte restante da vela B, após 3 horas do instante em que ambas foram acesas. ■

Supondo que o comprimento das velas é igual a 24 centímetros (essa hipótese em nada afeta a solução), deduzimos que, x horas após o instante inicial, a vela A fica com comprimento restante igual a

$$24 - \frac{24}{6}x$$

enquanto o comprimento restante da vela B, decorridas x horas após o instante inicial, é igual a

$$24 - \frac{24}{4}x.$$

Como o primeiro comprimento é, pelo enunciado da questão, igual ao dobro do segundo, temos

$$24 - \frac{24}{6}x = 2\times\left(24 - \frac{24}{4}x\right)$$

Rearrajados os termos, obtemos

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{2x}{6} = 1,$$

o que resulta em $x = 3$ horas.

Observação 0.2 Nos exercícios anteriores, trabalhamos com os conceitos de proporcionalidade e iniciamos o estudo das *funções afins*. Uma variável y é dada como função afim de uma variável x quando as *variações* de x e de y são diretamente proporcionais, isto é, dados dois valores x_0 e x_1 da variável x e os valores correspondentes y_0 e y_1 da variável y, temos

$$\frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a,$$

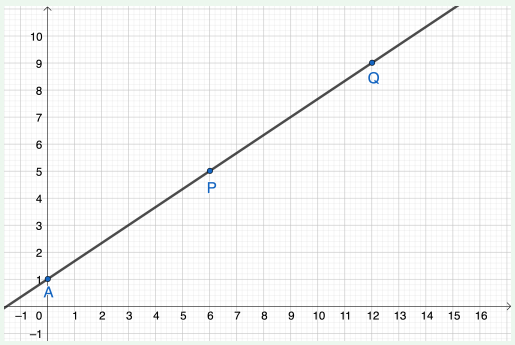
onde a é uma constante, chamada **taxa de variação** ou **coeficiente angular** da função afim. Dada esta taxa de variação, a função afim tem a seguinte forma

$$y = ax + b,$$

onde b é também uma constante, dada pelo valor da função quando $x = 0$. Vejamos o exemplo da função afim cujos **coeficientes** são $a = \frac{2}{3}$ e $b = 1$:

$$y = \frac{2}{3}x + 1.$$

O gráfico desta função afim é a reta que passa pelo ponto $A = (0,1)$ no eixo vertical e tem coeficiente angular dado por $a = \frac{2}{3}$ como pode ser visto na figura seguinte:



Expliquemos essa afirmações: o ponto A tem coordenada vertical (ordenada) igual a 1, que é, exatamente, o valor do coeficiente b da função afim. Para verificarmos que o coeficiente

angular a é igual a $\frac{2}{3}$, vejamos as *variações* das coordenadas: do ponto $P = (6,5)$ para o ponto $Q = (12,9)$, temos as seguintes variações das coordenadas

$$\text{variação de } x = 12 - 6 = 6 \quad \text{e} \quad \text{variação de } y = 9 - 5 = 4.$$

Logo,

$$a = \frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Você pode verificar que esta *taxa de variação* é a mesma entre os pontos A e P e entre os pontos A e Q, por exemplo.

Em geral, o gráfico da função afim $y = ax + b$ é uma reta que passa pelo ponto $(0,b)$ no eixo vertical e tem coeficiente angular a. O coeficiente angular é uma medida da **inclinação** ou **declividade** desta reta. Esse coeficiente mede também a **taxa de variação** da função, isto é, a razão entre as variações correspondentes de y e de x.

Questão 6 — Expressão algébrica de uma função afim, dadas informações em uma tabela - Descritor SAEB D18. A tabela seguinte mostra dois planos de pacotes de dados, em megabytes (MB), de uma empresa de telefonia celular.

Plano	Quantidade inicial de dados	Assinatura mensal	Valor por MB adicional
Plano A	10 MB	R$ 10,00	R$ 0,50
Plano B	50 MB	R$ 60,00	R$ 0,30

Baseando-se nestas informações, podemos afirmar que

A) o plano A é mais vantajoso que o plano B para quantidade total de dados superior a 200 MB.
B) o plano A é mais vantajoso que o plano B para quantidade total de dados inferior a 200 MB.
C) o plano A é mais vantajoso que o plano B para qualquer quantidade total de dados.
D) o plano A é menos vantajoso que o plano B para qualquer quantidade total de dados.

Solução. No plano A, o custo total (assinatura mais megabytes adicionais) para o assinante de x MB (com $x > 10$) é dado por

$$C_A(x) = 10 + 0{,}5\times(x - 10) = 10 + 0{,}5x - 0{,}5\times 10 = 10 - 5 + 0{,}5x,$$

ou seja, é dado pela função afim

$$C_A(x) = 0{,}5x + 5, \tag{1}$$

onde $x > 10$. Já o custo total de x MB, com $x > 50$, para o assinante do plano B é representado por

$$C_B(x) = 60 + 0{,}3(x - 50) = 60 + 0{,}3x - 0{,}3\times 50 = 60 - 15 + 0{,}3x,$$

uma função afim que pode ser reescrita como

$$C_B(x) = 0{,}3x + 45, \tag{2}$$

onde $x > 50$. Observe que o custo total do plano A passa a ser maior do que o custo total do plano B quando $C_A(x) > C_B(x)$, isto é, quando

$$0{,}5x + 5 > 0{,}3x + 45,$$

com $x > 50$. Subtraindo $0{,}3x + 5$ dos dois lados desta desigualdade, obtemos

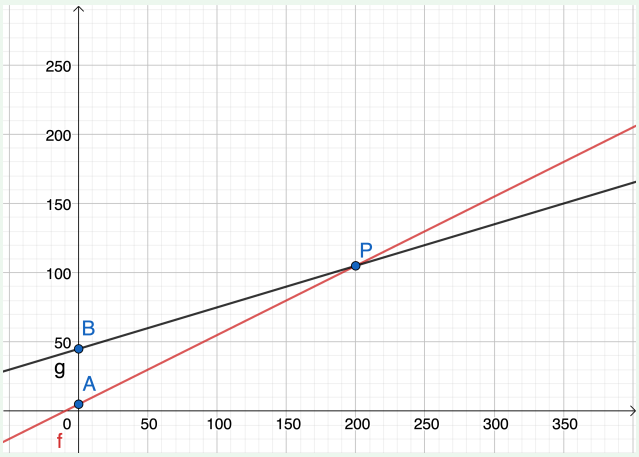
$$0{,}2x > 40$$

Dividindo os dois lados desta desigualdade por 0,2, concluímos que

$$x > \frac{40}{0{,}2} = \frac{40\times 10}{0{,}2\times 10} = \frac{400}{2} = 200 \text{ MB}.$$

Concluímos que o plano A passa a ser menos vantajoso que o plano B para uma quantidade total de dados superior a 200 MB. Para uma quantidade inferior a 200 MB, o plano A é a opção mais vantajosa, ou seja, de menor custo total. No caso em que a quantidade total de dados é exatamente igual a 200 MB, os dois planos representam o mesmo custo total. A alternativa correta é a de letra B). ■

Observação 0.3 — Expressão algébrica, coeficientes, gráfico e crescimento de uma função afim - Descritores SAEB D20, D23 e D24. A função afim $f(x) = 0{,}5x + 5$ tem coeficiente angular $a = 0{,}5$ e coeficiente linear $b = 5$, o que significa que seu gráfico é uma linha reta que intersecta o eixo vertical no ponto $(0{,}5)$ e tem **declividade** 0,5 em relação ao eixo horizontal. A função afim $g(x) = 0{,}3x + 45$ tem coeficiente angular $a = 0{,}3$ e coeficiente linear $b = 45$, o que significa que seu gráfico é uma linha reta que intersecta o eixo vertical no ponto $(0{,}45)$ e tem **declividade** 0,3 em relação ao eixo horizontal. Portanto, o gráfico da função afim g é uma linha reta *menos inclinada* que a reta dada pelo gráfico da função afim f, como na figura seguinte:



Geometricamente, isto significa que o gráfico de g está "inicialmente" acima do gráfico da função f, para valores da variável x tais que $x < 200$. No entanto, o fato de ter menor inclinação faz com que, para valores de x com $x > 200$, o gráfico de g "passe" a ficar abaixo do gráfico de f.

Note que os pontos $A = (0{,}5)$ e $P = (200, 105)$ pertencem ao gráfico de f. O coeficiente angular $a = 0{,}5$ de f é, portanto, dado pela **taxa de variação**

$$a = \frac{105 - 5}{200 - 0} = \frac{100}{200} = \frac{5}{10} = 0{,}5,$$

ao passo que o coeficiente angular $a = 0{,}3$ de g é dado pela taxa de variação calculada a partir dos pontos $B = (0{,}45)$ e $P = (200{,}105)$ que pertencem ao gráfico de g:

$$a = \frac{105 - 45}{200 - 0} = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Na sequência, vejamos alguns exercícios sobre **razões** e **proporções**. Esse tópico aparece, de forma explícita ou não, em todas as edições do ENEM, não apenas na prova de Matemática, mas também em questões de Física, Química e Geografia.

Questão 7 — ENEM 2011, Caderno 6, Questão 143, adaptada. Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 quilômetros. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, representadas no mapa, era 8 centímetros.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

A) 1:250.
B) 1:2 500.
C) 1:25 000.
D) 1:250 000.
E) 1:25 000 000.

Solução. A questão trata de *escala*, isto é, a *razão* entre pontos no mapa e as distâncias reais entre as cidades representadas por esses pontos. Portanto

$$\text{escala} = \frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}}.$$

Um detalhe importante no cálculo da escala: as distâncias tem que ser *ambas* medidas na mesma unidade de comprimento. Portanto, temos que converter a distância real, dada em quilômetros, para centímetros. Como 1 quilômetro = 1000 metros e 1 metro = 100 centímetros, temos

$$\begin{aligned} 2.000 \text{ quilômetros} &= 2.000 \times 1.000 \text{ metros} \\ &= 2.000 \times 1.000 \times 100 \text{ centímetros}. \end{aligned}$$

Portanto, a escala é dada por

$$\text{escala} = \frac{8 \text{ centímetros}}{2.000 \times 1.000 \times 100 \text{ centímetros}}.$$

Dividindo tanto o numerador quanto o denominador por 8, obtemos

$$\text{escala} = \frac{1}{250 \times 1.000 \times 100} = \frac{1}{25.000.000},$$

ou seja, a escala é dada por $1 : 25\,000\,000$, o que corresponde à alternativa E). ■

Questão 8 — ENEM 2011, Caderno 6, Questão 146, adaptada. Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 metros de comprimento por 12 metros de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1:250.

Que medidas de comprimento e largura, em centímetros, o aluno utilizará na construção da maquete?

A) 4,8 e 11,2
B) 7,0 e 3,0
C) 11,2 e 4,8
D) 28,0 e 12,0
E) 30,0 e 70,0

Solução. Esta questão também trata de *escala* que, agora, é a *razão* entre os comprimentos na maquete e os comprimentos reais na quadra de esportes:

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento na maquete}}{\text{comprimento real na quadra}}.$$

Desta vez, o enunciado da questão nos informa a escala, que é igual a $1 : 250$, ou seja,

$$\frac{1}{250} = \frac{1 \text{ centímetro}}{250 \text{ centímetros}}.$$

Logo, 250 centímetros na quadra real correspondem a apenas 1 centímetro na maquete. Como 1 metro são 100 centímetros concluímos que 28 metros equivalem a

$$\begin{aligned} 28{\times}100 \text{ centímetros} &= 2.800 \text{ centímetros} \\ &= 2{,}8{\times}1.000 \text{ centímetros} \\ &= 2{,}8{\times}4{\times}250 \text{ centímetros} \\ &= 11{,}2{\times}250 \text{ centímetros}. \end{aligned}$$

Portanto, na maquete, o comprimento real de 28 metros é representado por um comprimento de 11,2 centímetros. Da mesma forma, a largura real de 12 metros da quadra equivalem a

$$\begin{aligned} 12{\times}100 \text{ centímetros} &= 1200 \text{ centímetros} \\ &= 1{,}2{\times}1.000 \text{ centímetros} \\ &= 1{,}2{\times}4{\times}250 \text{ centímetros} \\ &= 4{,}8{\times}250 \text{ centímetros}, \end{aligned}$$

ou seja, a largura real da quadra é representada por uma largura de 4,8 centímetros na maquete. Concluímos que a alternativa correta é C). ■

Vamos treinar um pouco a respeito de razões e proporções em outros contextos.

Questão 9 — ENEM 2011, Caderno 6, Questão 162, adaptada. Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil quilômetros quadrados de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por quilômetro quadrado, é de

A) 250.
B) 25.
C) 2,5.
D) 0,25.
E) 0,025.

Solução. *Densidade demográfica* é também um exemplo de **razão**. De fato, densidade demográfica é definida como

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{população}}{\text{área}},$$

onde a população é medida pelo número de habitantes de uma região e a área desta região é medida em metros quadrados. De acordo com os dados, temos

$$\text{densidade demográfica} = \frac{20.000.000 \text{ habitantes}}{800.000 \text{ quilômetros quadrados}}$$
$$= \frac{200}{8} = 25 \text{ habitantes por quilômetro quadrado.}$$

Logo, a alternativa correta é B). ■

Observação 0.4 Nesses 3 últimos exercícios, temos exemplos de funções afins. Vejamos: no primeiro, a variável *distância no mapa* (y) é uma função afim da variável *distância real* (x), sendo que a taxa de variação ou coeficiente angular é dado pela escala, isto é,

$$y = \frac{1}{25.000.000}x \quad \text{ou} \quad x = 25.000.000y.$$

No segundo exercício, o comprimento na maquete (y) é uma função afim do comprimento real (x), cujo coeficiente angular ou taxa de variação é, novamente, a escala: $y = \frac{1}{250}x$. Por fim, a densidade demográfica no terceiro exercício é a taxa de variação ou coeficiente angular da função afim que define a população y em função da área x, ou seja, $y = 25x$.

Agora, seguimos com uma questão para que você possa exercitar a noção de razão como uma *taxa de variação*. Este exercício envolve, além disso, as chamadas **progressões aritméticas**.

Questão 10 — ENEM 2011, Caderno 6, Questão 159, adaptada. O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

A) 38 000
B) 40 500
C) 41 000
D) 42 000
E) 48 000

Solução. Observe que o *aumento* do número de passagens de janeiro para fevereiro foi de $34.500 - 33.000 = 1.500$ passagens. Já o *aumento* do número de passagens de fevereiro para março foi de $36.000 - 34.500 = 1.500$ passagens. O fato de que o padrão de crescimento se manteve constante significa que o aumento do número de passagens de um mês para o seguinte foi sempre igual a 1.500. De março a julho, temos 4 meses. A cada mês, foram vendidas 1.500 passagens *a mais*. Logo, nos quatro meses, foram vendidas $4 \times 1.500 = 6.000$ passagens a mais. Portanto, em julho, foram vendidas $36.000 + 6.000 = 42.000$ passagens. A alternativa correta é letra D). ■

Observação 0.5 No exercício anterior, a variável tempo é *discreta*, pois são os meses do ano, e podemos identificá-la por uma variável n, que varia de 1 a 12. O número de passagens no mês n é simbolizado por a_n. Assim, temos

$$a_n = 33.000 + 1500 \cdot (n - 1)$$

Em março, por exemplo, que corresponde ao mês $n = 3$, temos

$$a_3 = 33.000 + 1500 \cdot (3 - 1) = 33.000 + 3.000 = 36.000 \text{ passagens vendidas.}$$

Este é um exemplo de uma **progressão aritmética** em que o valor da variável em n é dado por

$$a_n = a_1 + r \cdot (n-1),$$

onde a_1 é o valor da variável em 1 e r é uma constante chamada **razão**.

Finalizando esta primeira parte de nossos estudos, discutiremos alguns exercícios sobre *porcentagens* e *divisões em partes proporcionais*.

Questão 11 — ENEM 2015, Caderno 7, Questão 158, adaptada - Descritor SAEB D16. Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para as suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade. A produtividade é dada pela razão entre a produção, em tonelada, e a área cultivada. Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes a da outra. Esse fazendeiro pretende aumentar sua produção total em 15% aumentando o tamanho de sua propriedade. Para tanto, pretende comprar uma parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras.

Qual é a área mínima, em hectare, que o produtor precisará comprar?

A) 36

B) 33

C) 27

D) 24

E) 21

Solução. A área total é dividida em duas partes: a primeira de 40 hectares e a segunda de 120 hectares, ou seja, 3 vezes maior que a primeira. Porém, cada hectare da primeira parte rende 2,5 vezes mais do que cada hectare da segunda parte. Assim, se um hectare da segunda parte produz 1 tonelada, um hectare da primeira parte produz 2,5 toneladas. Sendo assim, a produção da área total seria

$$40{\times}2{,}5 + 120{\times}1 = 100 + 120 = 220 \text{ toneladas.}$$

Um aumento de 15% nesta produção corresponde a

$$\frac{15}{100}{\times}220 = 33 \text{ toneladas}$$

a mais. Como um hectare da segunda parte produz, digamos, 1 tonelada, bastaria que o fazendeiro comprasse mais 33 *hectares* da parte da fazenda vizinha que também tem esta produtividade. Portanto, a alternativa correta é B). ■

Questão 12 — Descritor D15 - SAEB. Dois irmãos, donos de um carrinho de cachorro-quente, devem repartir 7.200 reais, obtidos nas vendas, de modo **diretamente proporcional** aos números de dias que cada um trabalhou no carrinho. Sabendo que um deles trabalhou 12 dias e o outro, 18 dias, quais quantias, respectivamente, cada um receberá?

Solução. O número total de dias que os dois trabalharam é igual a $12 + 18 = 30$ dias. Logo, o valor média das vendas por dia é igual a

$$\frac{7.200}{30} = \frac{7200 : 10}{30 : 10} = \frac{720}{3} = \frac{600 + 120}{3} = 200 + 40 = 240 \text{ reais.}$$

Portanto, a quantia proporcional a ser recebida pelo que trabalhou 12 dias é

$$12{\times}240 = 12{\times}12{\times}20 = 144{\times}20 = 2.880 \text{ reais}$$

e a quantia proporcional a ser recebida pelo irmão que trabalhou 18 dias é o valor restante, isto é,

$$18\times240 = 18\times24\times10 = 4{,}320 \text{ reais.}$$

■

Questão 13 — ENEM 2019, Caderno 7, Questão 151, adaptada. Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R$ 1.000.000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial.

Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800.000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1.800.000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

A) 26,90 e 11,11

B) 28,70 e 13,89

C) 25,00 e 25,00

D) 18,52 e 11,11

E) 12,96 e 13,89

Solução. O total investido, ao longo do tempo, foi de R$ 1.800.000,00. Cada um dos três primeiros sócios investiu o seguinte valor

$$\frac{1}{3}\times1.000.000 + \frac{1}{4}\times800.000,$$

enquanto que o quarto sócio investiu apenas

$$\frac{1}{4}\times800.000,$$

ou seja, 200.000 reais. Logo, a *proporção* entre o que este quarto sócio investiu e o total de investimentos é igual a

$$\frac{200.000}{1.800.000} = \frac{1}{9}.$$

Portanto, proporcionalmente, o quarto sócio deve ter recebido apenas $\frac{1}{9}$ do dinheiro total investido, enquanto que os três primeiros sócios, *juntos*, devem ter recebido os outros $\frac{8}{9}$ do dinheiro total investido. Portanto, o quarto sócio recebeu

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots \approx 11{,}11\%$$

enquanto *cada um* dos três primeiros sócios recebeu

$$\frac{1}{3}\times\frac{8}{9} = \frac{8}{3}\times\frac{1}{9} \approx 2{,}6666\times0{,}1111 = 0{,}2962 = 29{,}62\%.$$

A alternativa é a da letra A). ■

Questão 14 — ENEM 2019, Caderno 7 - Azul, Segundo Dia, Questão 152, adaptada. Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

- cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;
- o total de recursos destinados para contratar o conjunto de três máquinas é de R$ 31.000,00;
- o valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.

Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

A) R$ 3.100,00

B) R$ 6.000,00

C) R$ 6.200,00

D) R$ 15.000,00

E) R$ 15.500,00

Solução. De acordo com a terceira regra do edital, as partes a serem recebidas pelas empresas são proporcionais ao *inverso* do tempo de uso de suas máquinas, isto é, são proporcionais a

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\ \text{e}\ \frac{1}{5},$$

já que os tempos de uso são 2 anos, 3 anos e 5 anos, respectivamente. Portanto, o valor total de R$ 31.000,00 será dividido entre as três empresas em partes proporcionais a

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\ \text{e}\ \frac{1}{5}.$$

ou, calculando um denominador comum às três frações, em partes proporcionais a

$$\frac{15}{30},\ \frac{10}{30}\ \text{e}\ \frac{6}{30}.$$

Logo, as três partes somam

$$\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{6}{30}=\frac{31}{30}.$$

Essa soma corresponde ao valor total de 31.000 reais:

$$\frac{31}{30}\longrightarrow 31.000\ \text{reais}$$

Portanto, dividindo ambos os termos por 31, temos

$$\frac{1}{30}\longrightarrow 1.000\ \text{reais}$$

Agora, multiplicando ambos os termos por 6, obtemos

$$\frac{6}{30}\longrightarrow 6.000\ \text{reais}.$$

Esta é a parte a ser paga à empresa que cadastrou a máquina de maior tempo de uso. Portanto, a alternativa correta é a da letra B). ■

Observação 0.6 — Descritor SAEB D19. Solução alternativa. O tempo de uso da segunda máquina, na ordem crescente de tempo de uso, é

$$\frac{3}{2}$$

vezes maior do que o tempo de uso da primeira máquina. Da mesma forma, o tempo de uso da terceira máquina é

$$\frac{5}{2}$$

vezes maior do que o tempo de uso da primeira máquina. Assim, se a empresa que cadastrou a primeira máquina receber x reais do valor total, a empresa que cadastrou a segunda máquina receberá apenas $\frac{2}{3}$ desse valor e a empresa que cadastrou a terceira máquina receberá apenas $\frac{2}{5}$ desse valor. Logo, as três juntas receberão

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}x = 31.000 \text{ reais.}$$

Multiplicando os dois lados desta equação por 15, obtemos

$$15x + 10x + 6x = 15{\times}31.000.$$

Logo, obtemos

$$31x = 15{\times}31.000.$$

Portanto, o valor a ser recebido pela empresa que cadastrou a primeira máquina é

$$x = 15{\times}1.000 = 15.000 \text{ reais.}$$

Assim, a empresa que cadastrou a *terceira* máquina (de maior tempo de uso) receberá

$$\frac{2}{5}x = \frac{2}{5}{\times}15.000 = 2{\times}3.000 = 6.000 \text{ reais.}$$

Questão 15 — INSPER 2020, Caderno 1, Questão 33. Alguns benefícios que o plástico oferece à sociedade são difíceis de serem substituídos. Na produção de carros, por exemplo, cada 150 quilos a menos no peso de um automóvel faz com que ele rode 1 quilômetro (km) a mais por litro de combustível. Os carros de hoje têm, em média, 200 quilos de plástico em sua estrutura, que substituem 1 tonelada de metal.

https://revistapesquisa.fapesp.br, julho de 2019. Adaptado.

De acordo com as informações apresentadas, a substituição de metal por plástico na produção de carros implica em um aumento na rodagem por litro de combustível de

A) $\frac{4}{3}$ km
B) $\frac{17}{3}$ km
C) $\frac{16}{3}$ km
D) $\frac{19}{3}$ km
E) $\frac{20}{3}$ km

Solução. Uma tonelada de metal (ou seja, 1.000 quilos de metal) é substituída nos carros de hoje, por 200 quilos de plástico. Esta substituição diminui

$$1.000 - 200 = 800 \text{ quilos}$$

no peso total do automóvel. No entanto, de acordo com a pesquisa mencionada, 150 quilos a menos no peso equivalem a 1 quilômetro rodado a mais para cada litro de combustível. Logo, 300 quilos a menos equivalem a 2 quilômetros rodados a mais para cada litro de combustível, e assim por diante. Portanto, os 800 quilos a menos equivalem a

$$\frac{800}{150} = \frac{16}{3}$$

quilômetros rodados a mais por litro de combustível. A alternativa correta é a da letra C). ■

Observação 0.7 Nos próximos exercícios, discutiremos equações lineares em duas variáveis (x e y, digamos) da forma

$$\alpha x + \beta y = \varepsilon,$$

onde α, β e ε são números dados, isto é, são *coeficientes* constantes. Note que, se $\beta \neq 0$, podemos reescrever a equação acima pondo y *em função* de x:

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\varepsilon}{\beta},$$

uma função afim com coeficiente angular $a = -\frac{\alpha}{\beta}$. Se $\beta = 0$ (e $\alpha \neq 0$), a equação reduz-se a $x = \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Nos dois casos, as soluções (x, y) da equação definem uma reta no plano, cuja declividade é, exatamente, $a = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Questão 16 — Descritor SAEB D9. Determine a solução do *sistema* de equações lineares

$$\begin{cases} -2x + 3y = 3 \\ 3x + 4y = 36 \end{cases}$$

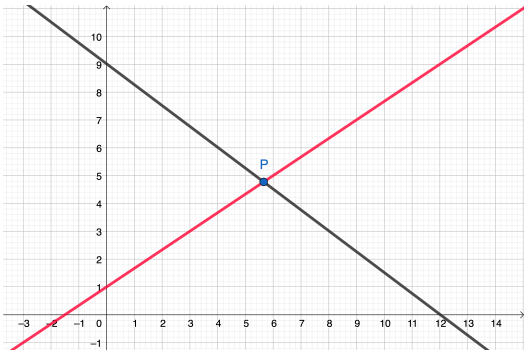
Solução. A primeira equação do sistema define a função afim

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

que estudamos anteriormente, cujo coeficiente angular é positivo e igual a $\frac{2}{3}$. A segunda equação, por sua vez, define a função afim

$$y = -\frac{3}{4}x + 9,$$

cujo coeficiente angular é negativo e igual a $-\frac{3}{4}$. Os gráficos dessas funções estão ilustrados na seguinte figura: note como a inclinação da reta com coeficiente angular positivo é dada por um ângulo *agudo* com relação à horizontal ao passo que a inclinação da reta com coeficiente angular negativo é dada por um ângulo *obtuso* com relação à horizontal.



As coordenadas do ponto $P = (x, y)$ na intersecção das duas retas são a solução do sistema: igualando as duas expressões para y acima, obtemos

$$\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{3}{4}x + 9$$

Multiplicando os dois lados por 12, temos

$$8x + 12 = -9x + 108,$$

ou seja, $17x = 96$ e, portanto, $x = \frac{96}{17}$. Concluímos que a coordenada y do ponto P é dada por

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{96}{17} + 1 = \frac{81}{17}.$$

Logo, a solução do sistema são as coordenadas $x = \frac{96}{17}$ e $y = \frac{81}{17}$ do ponto P dado pela intersecção das duas retas definidas pelas equações do sistema. ■

Questão 17 — INSPER 2020, Caderno 1, Questão 37, adaptada. O ouro é um metal utilizado na confecção de diversos produtos e costuma ser misturado com outros metais, gerando ligas de ouro. Por exemplo, uma liga de ouro 800 indica que de cada 1.000 partes da liga de ouro, 800 são de ouro puro e 200 são de outros metais.

Um artesão precisa de 10 gramas de liga de ouro 585 para confeccionar um produto, porém, em seu estoque, há apenas ligas de ouro 750 e 375. Ele dispõe de quantidade suficiente dessas duas ligas para fundí-las e obter a quantidade de liga de ouro 585 de que necessita.

Para obter exatamente 10 gramas de liga de ouro 585, a quantidade de liga de ouro 750 utilizada na fundição deverá superar a quantidade da liga de ouro 375 em

A) 1,20 g.

B) 2,35 g.

C) 4,60 g.

D) 0.80 g.

E) 5,60 g.

Solução. Segundo o enunciado, cada 1.000 gramas da liga de ouro 750 é composta de 750 gramas de ouro puro e 250 de outros metais. Assim, a *proporção* de ouro puro na liga de ouro 750 é igual a

$$\frac{750}{1.000} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

Da mesma forma, a proporção de ouro puro na liga de ouro 375 é 0,375.

Digamos que o artesão usará x gramas de ouro 750 e y gramas de ouro 375 para obter as 10 gramas de ouro 585. Portanto, teremos

$$x + y = 10. \tag{3}$$

A quantidade de ouro puro nos x gramas da liga 750 é igual a $0{,}75x$ enquanto que a quantidade de ouro puro nos y gramas da liga 375 é $0{,}375y$. Logo, a quantidade total de ouro ao fundir as duas ligas é dada por $0{,}75x + 0{,}375y$.

A liga obtida com essa fundição das duas deve ser 585. Portanto, deve apresentar uma proporção de 0,585 de ouro puro. Assim, em 10 gramas desta liga deve haver

$$0{,}585 \times 10 = 5{,}85 \text{ gramas}$$

de ouro puro. Assim,

$$0{,}75x + 0{,}375y = 5{,}85. \tag{4}$$

Portanto, obtemos um *sistema* de equações lineares com as equações (3) e (4):

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0{,}75x + 0{,}375y = 5{,}85 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos a informação de que $y = 10 - x$. *Substituindo* esta informação na segunda equação, temos

$$0{,}75x + 0{,}375(10 - x) = 5{,}85$$

Logo

$$0{,}75x - 0{,}375x + 3{,}75 = 5{,}85.$$

Assim

$$0{,}375x = 2{,}1.$$

Concluímos que

$$x = \frac{2{,}1}{0{,}375} = 5{,}6 \text{ gramas}$$

enquanto

$$y = 10 - 5{,}6 = 4{,}4 \text{ gramas}$$

Portanto, nesta liga fundida, a quantidade da liga de ouro 750 supera a quantidade da liga de ouro 375 em $5{,}6 - 4{,}4 = 1{,}2$ grama. A alternativa correta é a da letra A). ■

Solução alternativa. O sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0{,}75x + 0{,}375y = 5{,}85 \end{cases}$$

pode ser resolvido também segundo a seguinte estratégia. Dividimos a segunda equação por 0,375, obtendo uma equação *equivalente* (pois contém a mesma informação sobre as incógnitas x e y):

$$2x + y = 15{,}6.$$

Assim, temos um sistema *equivalente* ao anterior

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 15{,}6 \end{cases}$$

A vantagem é que podemos subtrair a primeira equação da segunda, obtendo uma nova equação, a saber:

$$2x + y - (x + y) = 15{,}6 - 10 = 5{,}6.$$

Com isto, obtemos um novo sistema que contém ainda a mesma informação que o anterior, mas é bem mais simples:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \quad\quad = 5{,}6 \end{cases}$$

Logo, concluímos trivialmente, que

$$x = 5{,}6 \quad \text{e} \quad y = 10 - 5{,}6 = 4{,}4,$$

como antes.

Questão 18 — ENEM 2013, Caderno 7 - Azul, Questão 136, adaptada. Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não ê dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A) 20

B) 24

C) 29

D) 40

E) 58

Solução. O enunciado não nos informa o valor total do financiamento e o valor da parcela. Todavia, como este valor é financiado em N parcelas iguais a P reais, será representado pelo produto $N{\times}P$. Se o cliente optar por 5 parcelas a mais, o valor de cada parcela *reduz* de P para $P - 200$ reais. Se, porém, decidir diminuir o número de parcelas de N para $N - 4$ (isto é, 4 parcelas a menos), o valor de cada parcela passa de P para $P + 232$ reais. De um modo ou de outro, o valor *total* a ser pago é o mesmo. Ou seja,

$$(N + 5){\times}(P - 200) = N{\times}P$$

e

$$(N - 4){\times}(P + 232) = N{\times}P.$$

Expandindo o produto no lado esquerdo da primeira equação, obtemos

$$N{\times}P - 200{\times}N + 5{\times}P - 5{\times}200 = N{\times}P,$$

ou seja,

$$5P - 200N = 1.000.$$

Fazendo o mesmo com a segunda equação, temos

$$N{\times}P + 232{\times}N - 4{\times}P - 4{\times}232 = N{\times}P,$$

ou seja,

$$-4P + 232N = 928.$$

Divindindo os dois lados da primeira equação por 5 e os dois lados da segunda equação por 4, obtemos um *sistema* de equações lineares da forma

$$\begin{cases} P - 40N = 200 \\ -P + 58N = 232 \end{cases}$$

Somando os lados esquerdos e os lados direitos dessas duas equações, obtemos

$$18N = 432,$$

ou seja, $N = 24$ parcelas. o que corresponde à letra B). Se quiséssemos também determinar o valor P da parcela, bastaria *substituir* o valor encontrado $N = 24$ na primeira equação do sistema, obtendo

$$P - 40{\times}24 = 200,$$

ou seja, $P = 200 + 40{\times}24 = 1.160$ reais. Logo, o valor total financiado é dado por $NP = 24{\times}1.160 = 27.840$ reais. ■

Observação 0.8 — Descritor SAEB D31. Esse problema envolveu um *sistema* de duas equações lineares. Cada uma dessas equações, por sua vez, envolvia duas *incógnitas*, o valor P da parcela e o número N de parcelas. Em geral, um sistema de 2 equações lineares a 2 incógnitas x e y pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} ax + by = E \\ cx + dy = F \end{cases}$$

onde a, b, c, d, E e F são números (*constantes*) dados. Multiplicando a primeira equação por d e a segunda equação por $-b$, obtemos um novo sistema, *equivalente* ao primeiro:

$$\begin{cases} adx + bdy = dE \\ -bcx - bdy = -bF \end{cases}$$

No entanto, somando os lados esquerdo e direito dessas duas novas equações, obtemos

$$(ad - bc)x = dE - bF,$$

ou seja (caso $ad - bc \neq 0$)

$$x = \frac{dE - bF}{ad - bc}, \tag{5}$$

o valor da incógnita x. Voltando ao sistema original e, desta vez, multiplicando a primeira equação por $-c$ e a segunda equação por a, obtemos um novo sistema, *equivalente* ao primeiro

$$\begin{cases} -acx - bcy = -cE \\ acx + ady = aF \end{cases}$$

No entanto, somando os lados esquerdo e direito dessas duas novas equações, obtemos

$$(ad - bc)y = aF - cE,$$

ou seja (caso $ad - bc \neq 0$)

$$y = \frac{aF - cE}{ad - bc}. \tag{6}$$

As expressões (5) e (6) resolvem o sistema. Acabamos de demonstrar a chamada "regra de Cramer".

Solução alternativa. O sistema de equações da questão, como vimos, é dado por

$$\begin{cases} P - 40N = 200 \\ -P + 58N = 232 \end{cases}$$

Ou seja, as incógnitas são P e N (em vez de x e y, o que não importa muito, já que essas são apenas notações). A informação relevante diz respeito aos *coeficientes*, ou seja, as constantes dadas. Nesse caso, temos

$$a = 1, \quad b = -40, \quad E = 200$$

e

$$c = -1, \quad d = 58, \quad F = 232.$$

Assim, as expressões (5) e (6) nos fornecem a solução do sistema

$$P = \frac{58\times200 - (-40)\times232}{1\times58 - (-40)\times(-1)} = \frac{20.880}{18} = 1.160 \text{ reais}$$

e

$$N = \frac{1\times232 - (-1)\times200}{1\times58 - (-40)\times(-1)} = \frac{432}{18} = 24 \text{ parcelas},$$

como já havíamos demonstrado.

Observação 0.9 No que segue, começamos discutindo um problema em que uma variável depende linearmente da outra, ou seja, em que as variações das duas variáveis são diretamente proporcionais. Apresentamos, para que você possa comparar e diferenciar as situações, outro problema em que uma variável depende *quadraticamente* da outra. Neste caso, as variações das variáveis não são diretamente proporcionais.

Questão 19 — ENEM 2013, Caderno 7 - Azul, Segundo Dia, Questão 155, adaptada. Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser

A) 2.
B) 4.
C) 5.
D) 8.
E) 9.

Solução. Trata-se de um problema que envolve proporcionalidade: com 6 ralos, são necessárias 6 horas para que os 900 metros cúbicos do reservatório totalmente cheio possam escoar. Assim, em 1 hora, apenas, os seis ralos escoam

$$\frac{900}{6} = 150 \text{ metros cúbicos por hora.}$$

Portanto, por hora, *cada um* dos ralos permite escoar

$$\frac{150}{6} = 25 \text{ metros cúbicos por hora, por ralo.}$$

Assim, em 4 horas, um ralo, apenas, permite escoar $4\times25 = 100$ metros cúbicos. Logo, são necessários 5 ralos para escoar $500 = 5\times100$ metros cúbicos de água em 4 horas. Deste modo, a alternativa correta é C). ■

Solução alternativa. A quantidade Q de água escoada é *diretamente* proporcional ao tempo t de escoamento e ao *número* n de ralos. Isto quer dizer que a *razão*

$$\frac{Q}{t \times n}$$

é constante. Para o primeiro reservatório, temos

$$\frac{900}{6 \times 6} = \frac{900}{36} = 25 \text{ metros cúbicos por hora, por ralo.}$$

No caso do segundo reservatório, temos $Q = 500$, $t = 4$ horas. Resta determinarmos o número n de ralos necessário para manter a mesma razão, isto é,

$$\frac{500}{4 \times n} = 25.$$

Logo

$$\frac{500}{25} = 4 \times n.$$

Resolvendo esta equação, temos

$$n = \frac{500}{25 \times 4} = \frac{500}{100} = 5 \text{ horas.}$$

Questão 20 — ENEM 2011, Caderno 6 - Cinza, Segundo Dia, Questão 166, adaptada. Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuní-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada. A quantidade X, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

A) $\frac{N}{9}$

B) $\frac{N}{6}$

C) $\frac{N}{3}$

D) $3N$

E) $9N$

Solução. Se a área S a ser coberta é a mesma, mas as placas quadradas aumentam de tamanho, o número de placas deve ser menor. A questão é saber *quantas vezes* menor. O aumento de tamanho das placas quadradas significa, precisamente, que a medida do lado passa de y metros para $3y$ metros, isto é, a medida do lado triplica. Assim, a *área* de cada placa passa de

$$y \times y = y^2 \text{ centímetros quadrados}$$

para

$$3y \times 3y = 9y^2 \text{ centímetros quadrados.}$$

Portanto, a área de cada placa quadrada aumenta 9 vezes e não apenas 3 vezes, como poderíamos pensar inicialmente. Logo, se a área S a ser coberta pelas placas é a mesma de antes, teremos 9

vezes menos placas cobrindo esta área. Ou seja, o número total de placas passa de N para $\frac{N}{9}$. A alternativa é a da letra A). ■

No primeiro exercício, as variáveis são *proporcionais* umas as outras: a quantidade Q de água escoada por um ralo é proporcional ao tempo t de escoamento, segundo uma *relação linear* da forma

$$Q = 25t.$$

Já no segundo exercício, a área S coberta por N placas quadradas cujos lados tem medida igual a y centímetros é dada por

$$S = Ny^2,$$

ou seja, a área S não é proporcional à medida y do lado, mas ao *quadrado* y^2 desta medida.

Após esta primeira comparação entre variação linear e variação quadrática, passamos ao estudo de problemas, de vários contextos, que envolvem equações ou funções quadráticas ou de segundo grau.

Questão 21 — ENEM 2016, Caderno 7 - Azul, Questão 157, adaptada - Descritor SAEB D25. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1.600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A) 19º dia.

B) 20º dia.

C) 29º dia.

D) 30º dia.

E) 60º dia.

Solução. Devemos encontrar o dia t em que o número de infectados, ou seja, $f(t)$, é igual a 1.600 pessoas. Isto significa que t é solução da equação *quadrática*

$$f(t) = 1.600$$

ou

$$-2t^2 + 120t = 1.600.$$

Subtraindo 1.600 dos dois lados da equação, temos

$$-2t^2 + 120t - 1.600 = 0.$$

Dividindo os dois lados desta equação por -2, temos

$$t^2 - 60t + 800 = 0.$$

Ora, a expressão quadrática do lado esquerdo da equação pode ser *fatorada*, ou seja, escrita na forma de um produto como

$$(t - 20)(t - 40) = 0.$$

Uma vez que o produto é igual a zero, pelo menos um de seus fatores deve ser também igual a zero. Logo, ou

$$t - 20 = 0 \quad \text{ou} \quad t - 40 = 0,$$

o que implica que ou $t = 20$ ou $t = 40$. Isto significa que o número de infectados chega a 1.600 no vigésimo (20º) dia e *volta* a ser igual a 1.600 no quadragésimo (40º) dia. A resposta correta é a da alternativa B). ■

A equação quadrática (ou de segundo grau)

$$t^2 - 60t + 800 = 0$$

poderia ser também resolvida por *completamento de quadrados*: lembrando que $60 = 2{\times}30$, teríamos

$$t^2 - 2{\times}30t + 800 = 0.$$

Lembremos também da expressão da *diferença de quadrados*:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

onde a, b são números ou variáveis reais. Em nosso caso, $a = t$ e $b = 30$. Assim

$$\begin{aligned} 0 = t^2 - 2{\times}30t + 800 &= t^2 - 2{\times}30t + 800 + 30^2 - 30^2 \\ &= t^2 - 2{\times}30t + 30^2 + 800 - 30^2 \\ &= (t - 30)^2 + 800 - 900 \\ &= (t - 30)^2 - 100 \end{aligned}$$

Logo, a equação quadrática pode ser reescrita como

$$(t - 30)^2 - 100 = 0,$$

uma equação bem mais simples, cuja solução segue da seguinte forma: somamos 100 dos dois lados da equação, obtendo

$$(t - 30)^2 = 100.$$

Calculamos as raízes quadrados dos dois lados, o que resulta em

$$t - 30 = -10 \quad \text{ou} \quad t - 30 = 10,$$

donde segue que

$$t = -10 + 30 = 20 \quad \text{ou} \quad t = 10 + 30 = 40,$$

como antes.

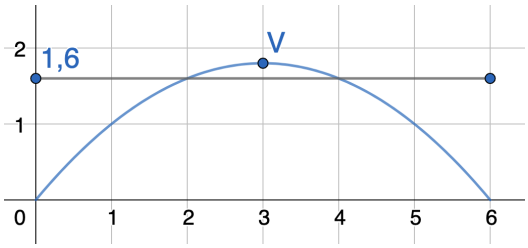
Observamos, de um modo ou de outro, que há *dois* dias em que o número de infectados é de 1.600 pessoas: o dia $t = 20$ e o dia $t = 40$. O fato é que, no dia $t = 0$, temos $f(0) = 0$ infectados. A partir daí, o número de infectados cresce, chega a 1.600 no dia $t = 20$ e segue aumentando até atingir um valor *máximo*. Em seguida, começa a diminuir, reduzindo para 1.600 infectados novamente no dia $t = 40$. Segue nesta diminuição até o dia $t = 60$, quando o número volta a ser $f(60) = 0$. O valor máximo é atingido exatamente no meio do intervalo entre o dia $t = 20$ e o dia $t = 40$, isto é, no dia

$$t = \frac{20 + 40}{2} = 30.$$

Neste dia, o número (máximo) de infectados é dado por

$$\begin{aligned} f(30) &= -2{\times}30^2 + 120{\times}30 \\ &= 30{\times}(-2{\times}30 + 120) \\ &= 30{\times}60 \\ &= 1.800 \text{ pessoas infectadas.} \end{aligned}$$

O gráfico na figura seguinte ilustra isto que discutimos:



No eixo horizontal temos a quantidade (em dezenas) de dias e no eixo vertical a quantidade (em milhares) de pessoas infectadas. O ponto V, chamado vértice, corresponde ao número máximo de pessoas infectadas. Este ponto determina o eixo de simetria do gráfico. De um lado e de outro deste eixo, estão os pontos na intersecção da reta horizontal com o gráfico: estes pontos correspondem aos dias em que o número de infectados é de 1.600 pessoas.

Na forma rotineira de resolver uma equação quadrática como

$$t^2 - 60t + 800 = 0,$$

empregamos a chamada "fórmula de Bhaskara":

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4{\times}1{\times}800}}{2{\times}1} \\ &= \frac{60 \pm \sqrt{3.600 - 3.200}}{2} \\ &= \frac{60 \pm 20}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $t = 20$ ou $t = 40$ são as soluções ou *raízes* da equação. Na verdade, esta fórmula é uma mera consequência da técnica de completamento de quadrados que vimos acima. De fato, uma equação quadrática geral da forma

$$at^2 + bt + c = 0$$

com $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac \geq 0$, pode ser reescrita como

$$a\left(t^2 + 2\frac{b}{2a}t + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0$$

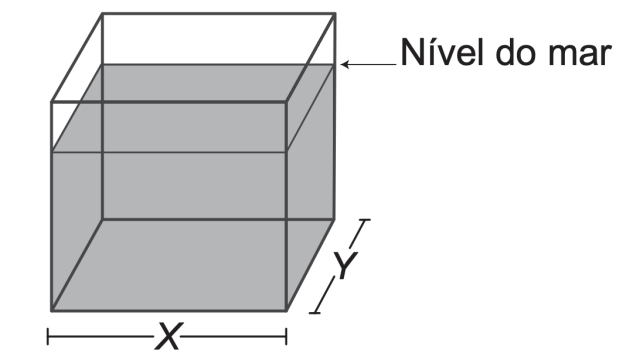
Portanto, temos

$$\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Logo,

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

Questão 22 — ENEM 2017, Caderno 7 - Azul, Questão 161, adaptada - Descritor SAEB D26. Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído , a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A) 1 e 49

B) 1 e 99

C) 10 e 10

D) 25 e 25

E) 50 e 50

Solução. A base do viveiro é um retângulo com dimensões lineares (comprimento e largura, digamos) dadas por X e Y. Portanto, seu perímetro é dado por

$$2X + 2Y = 100.$$

Logo,

$$X + Y = 50.$$

Por sua vez, a área A da base é dada pelo produto dessas dimensões, ou seja,

$$A = XY.$$

Uma vez que

$$Y = 50 - X,$$

concluímos que a área pode ser escrita como uma função quadrática de X:

$$A = X(50 - X).$$

Se $X = 0$ ou $X = 50$, a área se anula. Logo, $X = 0$ e $X = 50$ são as raízes da equação

$$X(50 - X) = 0.$$

O valor máximo da área ocorre quando X é a média aritmética das raízes, isto é, quando

$$X = \frac{0+50}{2} = 25 \text{ metros.}$$

Sendo assim, o valor correspondente de Y é dado por $Y = 50 - 25 = 25$ metros. Portanto, a alternativa correta é da letra D). A área máxima da base, assim, é dada por

$$A = 25{\times}25 = 625 \text{ metros quadrados.}$$

■

Se quisermos determinar as dimensões para as quais á área da base é $A = 400$ metros quadrados, devemos resolver a equação quadrática

$$X(50 - X) = 400,$$

ou seja,

$$X^2 - 50X + 400 = 0$$

A média aritmética das raízes é igual a 25, valor de X em que a função A atinge seu valor máximo.

Observação 0.10 — Descritores SAEB D25 e D26. Dados três constantes a, r e r', com $r < r'$, a expressão

$$f(x) = a(x - r)(x - r')$$

define uma função quadrática na *forma fatorada*. Note que $f(r) = f(r') = 0$. Logo, r e r' são os zeros ou raízes da função f. Se $a > 0$ (respectivamente $a < 0$), o valor mínimo (respectivamente, máximo) da função f ocorre quando

$$x = \frac{r + r'}{2},$$

ou seja, no ponto médio entre as raízes. "Abrindo" a expressão fatorada, obtemos

$$f(x) = ax^2 - \underbrace{a(r + r')}_{=b} x + \underbrace{arr'}_{=c}.$$

Logo, a *soma* das raízes é dado por $-\frac{b}{a}$ e o produto das raízes é dado por $\frac{c}{a}$.

Em resumo, uma função quadrática (ou de segundo grau) é uma relação entre duas variáveis, que podemos simbolizar como x e y, da seguinte forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

onde a, b e c são constantes dadas, chamadas *coeficientes*, sendo que a é diferente de zero. Note que, caso $a = 0$, teríamos uma função afim, apenas. Como vimos, na observação acima, funções quadráticas podem ser escritas na seguinte *forma fatorada*

$$y = a(x - r)(x - r'),$$

onde r e r' são os *zeros* da função quadrática, isto é, os valores da variável x para os quais $y = 0$. Estes zeros existem no caso em que os coeficientes a, b e c satisfazem a relação

$$b^2 \geq 4ac.$$

Questão 23 — ENEM 2013, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 165, adaptada. A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A) 19,0
B) 19,8
C) 20,0
D) 38,0.
E) 39,0.

Solução. O tempo mínimo t, necessário para abrir-se o forno, é aquele em que a temperatura diminui do valor inicial, quando o forno é desligado, para 39°C. Assim

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400,$$

ou seja

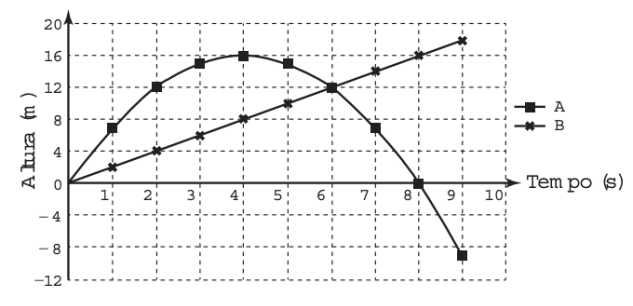
$$\frac{t^2}{4} = 361.$$

Logo

$$\frac{t}{2} = 19,$$

ou seja $t = 19{\times}2 = 38$ minutos após o desligamento do forno, o que corresponde à alternativa D). ■

Questão 24 — ENEM 2016, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 136, adaptada. Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

A) diminuir em 2 unidades.
B) diminuir em 4 unidades.

C) aumentar em 2 unidades.
D) aumentar em 4 unidades.
E) aumentar em 8 unidades.

Solução. O coeficiente angular da reta na figura é dado pela razão entre a altura, em metros, e o tempo, em segundos. Por exemplo, a 8 segundos após o lançamento, a altura atingida é de 12 metros. Assim, o coeficiente angular é dado por

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ metros por segundo.}$$

Agora, observando o gráfico parabólico, constatamos que a altura máxima atingida pelo projétil A é igual a 16 metros, o que ocorre 4 segundos após o lançamento. Para que o projétil B atingisse esta mesma altura neste mesmo instante, o coeficiente angular de sua nova trajetória deveria ser igual a

$$\frac{16}{4} = 4 \text{ metros por segundo.}$$

Portanto, deveríamos aumentar o coeficiente angular em 2 unidades. Concluímos que a alternativa correta é C). ■

Observemos que o gráfico parabólico intersecta o eixo horizontal (que representa a variável tempo) nos instantes $s = 0$ e $s = 8$ segundos. Portanto, a altura h atingida pelo projétil é uma função quadrática do tempo s após o lançamento com a seguinte forma fatorada

$$h = as(s - 8).$$

onde a deve ser determinado pelos dados no gráfico. Observe que, quando $s = 4$ segundos, temos $h = 16$ metros. Logo,

$$16 = a{\times}4{\times}(4 - 8).$$

Portanto $a = -1$ e a função fica completamente determinada:

$$h = -s(s - 8)$$

ou seja,

$$h = -s^2 + 8s.$$

Vamos treinar um pouco a respeito de razões e proporções em outros contextos.

Questão 25 — ENEM 2015, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 157, adaptada. Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente na padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

A) $\text{R\$}\,0{,}50 \leq p < \text{R\$}\,1{,}50$.

B) R$ 1,50 $\leq p <$ R$ 2,50.
C) R$ 2,50 $\leq p <$ R$ 3,50.
D) R$ 3,50 $\leq p <$ R$ 4,50.
E) R$ 4,50 $\leq p <$ R$ 5,50.

Solução. O gerente pretende manter a média de arrecadação, isto é, de *receita* diária na venda de pães especiais. Esta receita média é igual a R$ 300,00. Se o preço de um pão especial, em reais, é simbolizado pela variável p, e a quantidade de pães especiais vendida por dia é q, a receita diária é dada pelo produto

$$y = pq,$$

ou seja quantidade × preço. O enunciado nos diz que esta quantidade q é *função* do preço, da seguinte forma:

$$q = 400 - 100p.$$

Logo a receita é dada por uma *função quadrática* na forma fatorada

$$y = p(400 - 100p).$$

Como queremos manter a receita y igual a 300 reais, devemos ter

$$300 = p(400 - 100p).$$

Uma das soluções para esta *equação quadrática* é $p = 1$ real. De fato

$$300 = 1\times(400 - 100).$$

A outra solução é dada por $p = 3$ reais. Logo, o preço mínimo do pão especial, que permite manter a receita igual a R$ 300,00, é igual a R$ 1,00. Sendo assim, a alternativa correta é A). ■

No caso em que os coeficientes da função quadrática $y = ax^2+bx+c$ satisfazem $\Delta = b^2-4ac \geq 0$, os zeros da função são dados por

$$r = \frac{1}{2a}\Big(-b - \sqrt{\Delta}\Big) \quad \text{e} \quad r' = \frac{1}{2a}\Big(-b + \sqrt{\Delta}\Big)$$

O ponto médio entre os zeros corresponde ao valor da variável x para a qual a função assume valor mínimo (respectivamente, máximo) quando $a > 0$ (respectivamente, quando $a < 0$). No gráfico desta função, o ponto de menor (respectivamente, maior) ordenada é chamado *vértice* da parábola. Suas coordenadas são dadas por

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y = \frac{-\Delta^2}{4a}$$

Potências e logaritmos

Dando sequência aos nossos estudos, abordamos, agora, alguns problemas envolvendo potências e logaritmos, que são notações muito úteis em cálculos aritméticos, especialmente quando envolvem medidas de experimentos científicos, na chamada *notação científica*. Para começar, relembremos que potências de expoente *natural* indicam, simplesmente, que estamos multiplicando um mesmo número uma dada quantidade de vezes. Por exemplo, em

$$10^5,$$

estamos escrevendo, de forma bem sucinta, o seguinte produto:

$$10\times10\times10\times10\times10,$$

em que o número 10 (chamado base) aparece multiplicado por ele mesmo 5 vezes. Neste caso, o número 5 é chamado *expoente*. Da mesma forma

$$10^7 = 10\times10\times10\times10\times10\times10\times10 = 10.000.000,$$

dez milhões. Desta vez, o expoente é o número 7 e a base continua a ser o número 10. Observe que

$$\begin{aligned} &10^5\times10^7 = \\ &= 10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10 \\ &= 10^{12}, \end{aligned}$$

uma vez que a base 10 aparece multiplicada por ela mesma 12 vezes. Ou seja, o expoente final, 12, é a *soma* dos dois expoentes iniciais, 5 e 7, já que esta soma é igual ao total de fatores iguais a 10 que aparece no produto final. De modo geral, dados dois números naturais m e n, não nulos, temos

$$10^m\times10^n = 10^{m+n},$$

ou seja, multiplicando m fatores iguais a 10 e n fatores iguais a 10, obtemos o produto de $m+n$ fatores iguais a 10.

Agora, definimos potências com expoentes inteiros *negativos*. Por exemplo, definimos

$$10^{-5} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10},$$

ou seja,

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5}.$$

Da mesma forma,

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10.000.000} = 0{,}0000001,$$

um décimo milionésimo. Assim como antes, observe que

$$10^{-5}\times10^{-7} = 10^{-12}.$$

Observe, além disso, que

$$10^5\times10^{-5} = 10^5\times\frac{1}{10^5} = 1.$$

Portanto, em geral, dado um número natural não nulo m, temos

$$10^m\times10^{-m} = 1,$$

o que nos leva a definir

$$10^0 = 1.$$

Em resumo, temos $10^0 = 1$, $10^1 = 10$ e

$$\begin{aligned} 10^m &= \underbrace{10\times\ldots\times10}_{m \text{ vezes}}, \\ 10^{-m} &= \underbrace{\frac{1}{10}\times\ldots\times\frac{1}{10}}_{m \text{ vezes}} = \frac{1}{10^m}, \end{aligned}$$

onde m é um número natural não-nulo. Concluímos, também que,

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

para dois números inteiros m e n **quaisquer**, sejam eles negativos, positivos ou nulos.

Prosseguindo com exemplos de potências na base 10, vemos que

$$\begin{aligned} \ldots \quad & 10^{-5} = 0{,}00001 \quad 10^{-4} = 0{,}0001 \quad 10^{-3} = 0{,}001 \\ & 10^{-2} = 0{,}01 \quad 10^{-1} = 0{,}1 \\ & 10^0 = 1 \\ & 10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1.000 \\ & 10^4 = 10.000 \quad 10^5 = 100.000 \quad \ldots \end{aligned}$$

Estas são algumas das potências de base 10. Passamos, agora, à definição de *logaritmos* de base 10. Estes nada mais são do que os *expoentes* que aparecem na lista de potências acima, ou seja

$$\begin{aligned} \ldots \quad & \log_{10} 0{,}00001 = -5 \quad \log_{10} 0{,}0001 = -4 \quad \log_{10} 0{,}001 = -3 \\ & \log_{10} 0{,}01 = -2 \quad \log_{10} 0{,}1 = -1 \\ & \log_{10} 1 = 0 \\ & \log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 100 = 2 \quad \log_{10} 1.000 = 3 \\ & \log_{10} 10.000 = 4 \quad \log_{10} 100.000 = 5 \quad \ldots \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned} \log_{10} 10.000 = 5 \quad &\text{significa que} \quad 10^5 = 10.000 \\ \log_{10} 0{,}00001 = -5 \quad &\text{significa que} \quad 10^{-5} = 0{,}00001 \end{aligned}$$

e assim por diante. Observamos, além disso, que

$$\log_{10}(10^m \times 10^n) = \log_{10} 10^m + \log_{10} 10^n,$$

ou seja, o logaritmo "transforma" produtos em somas. De fato

$$\begin{aligned} \log_{10}(10^m \times 10^n) &= \log_{10} 10^{m+n} \\ &= m + n \\ &= \log_{10} 10^m + \log_{10} 10^n. \end{aligned}$$

Consideremos, agora, a seguinte pergunta, que é bem mais sutil: qual o logaritmo de 30 na base 10, ou seja, qual seria o número x tal que

$$\log_{10} 30 = x.$$

Ora,

$$\log_{10} 30 = x \quad \text{significa que} \quad 10^x = 30.$$

Observe que, se tomássemos $x = 1$ teríamos $10^x = 10^1 = 10$ enquanto que, se fixássemos $x = 2$, obteríamos $10^x = 10^2 = 100$. No entanto

$$10 < 30 < 100.$$

Portanto, o expoente x correto deve ser um número entre 1 e 2:

$$1 < x < 2,$$

ou seja,

$$1 < \log_{10} 30 < 2.$$

Em particular, $\log_{10} 30$ não é um número inteiro! Como proceder, então? Primeiro, observemos que

$$3{\times}3 = 9 \approx 10.$$

O símbolo $\approx$ significa "aproximadamente". Logo, podemos considerar 3 como uma *aproximação* da raiz quadrada de 10, isto é,

$$\sqrt{10} \approx 3.$$

Neste ponto, devemos definir potências com expoentes *racionais* ou fracionários. Por exemplo, definimos

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

Em geral, dada um número natural não-nulo, definimos a potência com base 10 e expoente $\frac{1}{m}$ da seguinte forma

$$10^{\frac{1}{m}} = a \quad \text{significa que} \quad a^m = 10.$$

Nem sempre é possível calcularmos, à mão, valores exatos para estas potências, mas apenas aproximações. Por exemplo, como já vimos

$$10^{\frac{1}{2}} \approx 3 \quad \text{uma vez que} \quad 3^2 = 9 \approx 10.$$

Note que 3,2 seria uma aproximação melhor para $10^{\frac{1}{2}}$, visto que

$$(3{,}2)^2 = 3{,}2{\times}3{,}2 = 10{,}24 \approx 10.$$

Da mesma forma, perceba que 2 é uma aproximação para a potência $10^{\frac{1}{3}}$ visto que

$$2^3 = 2{\times}2{\times}2 = 8 \approx 10,$$

mas 2,15 é uma aproximação bastante melhor visto que

$$(2{,}15)^3 = 2{,}15{\times}2{,}15{\times}2{,}15 = 9{,}938375 \approx 10.$$

Logo

$$10^{\frac{1}{3}} \approx 2{,}15.$$

Voltando ao cálculo do logaritmo de 30 na base 10, observamos que, como

$$3 \approx 10^{\frac{1}{2}},$$

temos

$$\log_{10} 30 = \log_{10}(3{\times}10) = \log_{10}(10^{\frac{1}{2}}{\times}10^1)$$
$$= \log_{10} 10^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5$$

Isto significa que

$$10^{1{,}5} = 10^{\frac{3}{2}} \approx 30.$$

Para fixar ideias, calculemos (na verdade, estimemos), agora, o logaritmo de 2.150 na base 10. Como vimos, o número 2,15 é uma aproximação da potência $10^{\frac{1}{3}}$. Logo

$$\log_{10} 2.150 = \log_{10}(2{,}15{\times}1000) = \log_{10}(10^{\frac{1}{3}}{\times}10^3)$$
$$= \log_{10} 10^{\frac{1}{3}+3} = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$

Isto significa que

$$10^{3,33} \approx 2.150.$$

De fato, observe que

$$10^3 = 1.000 < 2.150 < 10^4 = 10.000$$

e, portanto, o expoente correto, ou seja, o logaritmo, deve estar entre 3 e 4, mas *mais próximo* de 3 do que de 4.

Em resumo, o cálculo de logaritmos pode envolver aproximações. As calculadoras eletrônicas e os computadores efetuam essas aproximações com dezenas de casas decimais. Outra ferramenta para esses cálculos, menos usada hoje em dia e cuja construção demandou gigantescos esforços de matemáticos no passado, é a *tábua de logaritmos*.

Para finalizar esta primeira revisão, veremos que, para calcular logaritmos em uma base *qualquer*, basta conhecermos os logaritmos em uma *dada* base, por exemplo, na base 10. De fato, tentemos responder a seguinte questão: qual o logaritmo de 2.150 na base 30, ou seja, qual o número x tal que

$$\log_{30} 2.150 = x,$$

ou seja, tal que

$$30^x = 2.150 \quad ?$$

Inicialmente, observe que x deve estar entre 2 e 3, visto que

$$30^2 = 900 < 2.150 < 27.000 = 30^3$$

e, de acordo com estas desigualdades, deve estar bem mais próximo de 2 do que de 3. Para obtermos uma estimativa deste logaritmo, relembremos que

$$\log_{10} 30 \approx 1{,}5 \quad \text{e} \quad \log_{10} 2.150 \approx 3{,}33$$

ou seja

$$30 = 10^{1,5} \quad \text{e} \quad 2.150 \approx 10^{3,33}.$$

Assim, podemos escrever a equação

$$30^x = 2.150$$

como

$$(10^{1,5})^x = 10^{3,33}.$$

Portanto, igualando os expoentes dos dois lados da equação, obtemos

$$1{,}5x = 3{,}33,$$

ou seja,

$$x = \frac{3{,}33}{1{,}5} \approx 2{,}22.$$

Portanto, estimamos, desta forma,

$$\log_{30} 2.150 \approx 2{,}22.$$

Nestes últimos cálculos, usamos a propriedade de *mudança de base* de logaritmos, que nada mais é do que uma forma adequada de escrever uma propriedade sobre potência: dados dois números a, b positivos, com $a \neq 1$, tais que

$$\log_{10} a = x \quad \text{e} \quad \log_{10} b = y,$$

temos

$$\log_a b = \frac{y}{x}$$

De fato

$$a^{\frac{y}{x}} = (10^x)^{\frac{y}{x}} = 10^y = b.$$

Encerramos este primeiro módulo de revisão sobre o tema com uma questão do ENEM que aplica logaritmos à Química e à Ciência dos Solos.

Questão 26 — ENEM 2019, Caderno 7 - Azul, Questão 137, adaptada. A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que pH$= -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

A) qualquer valor acima de 10^{-8}.

B) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.

C) valores maiores que 7 e menores que 8.

D) valores maiores que 70 e menores que 80.

E) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Solução. A variante da *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial é produzida em solo com pH inferior a 8, ou seja, cuja concentração x de íon hidrogênio satisfaz

$$-\log_{10} x < 8.$$

Assim,

$$\log_{10} x > -8.$$

Portanto o número x é obtido elevando-se 10 a um expoente *maior* que -8, ou seja,

$$x > 10^{-8}$$

Por outro lado, esta variedade cor-de-rosa de *Hydrangea* ocorre apenas se o *pH* do solo for *maior* que 7, ou seja, se

$$-\log_{10} x > 7.$$

Logo,

$$\log_{10} x < -7.$$

Deste modo, o número x obtido elevando-se 10 a um expoente *menor* que -7, ou seja,

$$x < 10^{-7}.$$

Concluímos, portanto, que

$$10^{-8} < x < 10^{-7},$$

o que corresponde à letra E). ■

Encerramos esta parte do material com uma questão do ENEM que aplica logaritmos em Sismologia, o estudo e observação de movimentos sísmicos como terremotos.

Questão 27 — ENEM 2019, Caderno 7 - Azul, Questão 154, adaptada. Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm-Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leq M_s \leq 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leq M_s \leq 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leq M_s \leq 9{,}9$
Extremo	$M_s \geq 10{,}0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2.000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado)

Utilize 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.
De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

A) Pequeno.
B) Ligeiro.
C) Moderado.
D) Grande.
E) Extremo.

Solução. De acordo com os dados, a amplitude máxima do terremoto registrado foi

$$A = 2.000\,\mu\text{m}$$

e a frequência medida foi

$$f = 0{,}2\,\text{Hz}.$$

Logo

$$A \cdot f = 2.000 \times 0{,}2 = 400.$$

Calculemos, então, o logaritmo de 400 na base 10, usando o fato (lembrado no enunciado) de que

$$\log_{10} 2 \approx 0{,}3$$

temos

$$2 \approx 10^{0{,}3}$$

e

$$4 = 2^2 \approx (10^{0{,}3})^2 = 10^{2 \times 0{,}3} = 10^{0{,}6}.$$

Portanto

$$400 = 4 \times 100 \approx 10^{0{,}6} \times 10^2 = 10^{0{,}6+2} = 10^{2{,}6}.$$

Concluímos que

$$\log_{10} 400 \approx 2{,}6.$$

Substituindo este resultado na fórmula $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A \cdot f)$ para a magnitude local do terremoto, calculamos

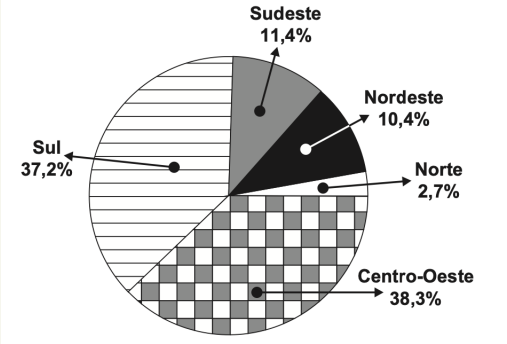
$$M_s \approx 3{,}3 + 2{,}6 = 5{,}9.$$

o que corresponde à letra C). ■

Estatística Descritiva: Médias

Cara(o) estudante, dando sequência aos nossos estudos, abordamos, agora, alguns conceitos e problemas envolvendo o estudo de dados, como a leitura e interpretação de textos, tabelas e gráficos, usando ferramentas da Estatística Descritiva, como as *medidas de tendência central*, dentre as quais médias e medianas, e as *medidas de dispersão*, como amplitude, variância, desvio-padrão, entre outras. Com os exercícios nesta seção, trabalhamos, por exemplo, a seguinte competência explorada no ENEM: interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Questão 28 — ENEM 2019 - PPL, Caderno 7 - Azul, Questão 140, adaptada. Considere que a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, aponte uma participação por região conforme indicado no gráfico. Em valores absolutos, essas estimativas indicam que as duas regiões maiores produtoras deveriam produzir juntas um total de 119,8 milhões de toneladas em 2012.



De acordo com esses dados, a produção estimada, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país, foi um valor mais aproximado de

A) 11,4.
B) 13,6.
C) 15,7.
D) 18,1.
E) 35,6.

Solução. De acordo com o gráfico de setores na figura (forma de gráfico que, muitas vezes, chamamos de gráfico de *pizza*), as duas regiões com maior produção, em 2012, foram as regiões Sul e Centro-Oeste, com percentuais de 37,2% e 38,3%, respectivamente, do total da produção nacional. Portanto, juntas, essas regiões produziram

$$37{,}2\% + 38{,}3\% = 75{,}5\%$$

da produção nacional neste ano. Segundo o enunciado, a produção das duas regiões foi igual a 119,8 milhões de toneladas, ou seja, aproximadamente 120 milhões de toneladas. Com essas duas informações, concluímos que 75,5% da produção nacional equivale a cerca de 120 milhões de toneladas.

Logo, 25% da produção nacional equivalem a cerca de

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ milhões de toneladas.}$$

Portanto, 100% da produção nacional equivalem a cerca de

$$40{\times}4 = 160 \text{ milhões de toneladas.}$$

Como a Região Sudeste produziu 11,4% deste total, sua produção equivale a

$$\frac{11}{100}{\times}160 = 18{,}24 \text{ milhões de toneladas}$$

o que corresponde à letra D). ■

Questão 29 — ENEM 2019 - PPL, Caderno 7 - Azul, Questão 148, adaptada. Um gerente decidiu fazer um estudo financeiro da empresa onde trabalha analisando as receitas anuais dos três últimos anos. Tais receitas são apresentadas no quadro.

Ano	Receita (bilhão de reais)
I	2,2
II	4,2
III	7,4

Estes dados serão utilizados para projetar a receita mínima esperada para o ano atual (ano IV), pois a receita esperada para o ano IV é obtida em função das variações das receitas anuais anteriores, utilizando a seguinte regra: a variação do ano IV para o ano III será igual à variação do ano III para o II adicionada à média aritmética entre essa variação e a variação do ano II para o I.

O valor da receita mínima esperada, em bilhão de reais, será de

A) 10,0.

B) 12,0.

C) 13,2.

D) 16,8.

E) 20,6.

Solução. A variação de receita do ano III para o ano II é dada por

$$7{,}4 - 4{,}2 = 3{,}2 \text{ bilhões de reais,}$$

enquanto que a variação de receita do ano II para o ano I é igual a

$$4{,}2 - 2{,}2 = 2{,}0 \text{ bilhões de reais.}$$

A média aritmética dessas variações é calculada como

$$\frac{2{,}0 + 3{,}2}{2} = 1 + 1{,}6 = 2{,}6 \text{ bilhões de reais.}$$

Portanto, a variação do ano IV para o ano III é dada pela variação do ano III para o ano II *mais* a média aritmética que calculamos, ou seja,

$$3{,}2 + 2{,}6 = 5{,}8 \text{ bilhões de reais.}$$

Portanto, a receita mínima esperada no ano IV é dada pela receita do ano III *mais* a variação que acabamos de calcular, isto é,

$$7{,}4 + 5{,}8 = 13{,}2 \text{ bilhões de reais,}$$

o que corresponde à letra C). ■

Questão 30 — ENEM 2019 - PPL, Caderno 7 - Azul, Questão 140, adaptada. A ingestão de sódio no Brasil, que já é normalmente alta, tende a atingir os mais elevados índices no inverno, quando cresce o consumo de alimentos calóricos e condimentados. Mas, o sal não é um vilão, ele pode e deve ser consumido diariamente, salvo algumas restrições. Para uma pessoa saudável, o consumo máximo de sal de cozinha (cloreto de sódio) não deve ultrapassar 6 g diárias ou 2,4 g de sódio, considerando que o sal de cozinha é composto por 40% de sódio e 60% de cloro.

Disponível em: http://depoisdos25.com. Acesso em: 31 jul. 2012 (adaptado)

Considere uma pessoa saudável que, no decorrer de 30 dias, consuma 450 g de sal de cozinha. O seu consumo médio diário excede ao consumo máximo recomendado diariamente em

A) 150 %
B) 250 %
C) 275 %
D) 525 %
E) 625 %

Solução. O consumo de 450 gramas de sal de cozinha em 30 dias corresponde a um consumo *médio* diário de

$$\frac{450}{30} = 15 \text{ gramas}$$

de sal de cozinha. Portanto, este consumo é

$$15 - 6 = 9 \text{ gramas.}$$

maior do que o recomendável. Agora, calculemos *quantas vezes* esse excesso é maior do que o valor recomendável, Para isso, calculamos

$$\frac{9}{6} = \frac{6+3}{6} = 1{,}5 = 150\%,$$

o que corresponde à letra A). ■

Questão 31 — ENEM 2019 - PPL, Caderno 7 - Azul, Questão 150, adaptada. Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	$M \leq 22$
II	$22 < M \leq 27$
III	$27 < M \leq 32$
IV	$32 < M \leq 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso

A) I.

B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

Solução. De acordo com o enunciado, de cada 100 analfabetos na população, 60 são mulheres e, portanto, 40 são homens. Entre as mulheres analfabetas, a média de idade é 30 anos, enquanto que a média de idade dos homens analfabetos é 35 anos. Assim, a média M de idade entre os analfabetos, sejam homens ou mulheres, é dada por

$$\frac{60\times 30 + 40\times 35}{100} = \frac{1.800 + 1.400}{100} = 32 \text{ anos.}$$

De acordo com a tabela, este valor de M corresponde ao recurso III, o que corresponde à letra C). ■

Questão 32 — ENEM 2019, Caderno 6 - Cinza, Segundo Dia, Questão 165, adaptada. O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo. Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo?

A) 1,60
B) 1,78
C) 1,79
D) 1,81
E) 1,82

Solução. A média *aritmética* das alturas dos 20 jogadores, antes da substituição, é dada por

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{20}}{20},$$

onde $x_1, \ldots, x_{20}$ são as alturas desses vinte jogadores. Assim,

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{20}}{20} = 1{,}80,$$

ou seja, a *soma* das alturas desses jogadores, antes da substituição, era igual a

$$x_1 + \ldots + x_{20} = 20\times 1{,}80 = 36 \text{ metros.}$$

Substituindo o jogador contundido por outro 20 centímetros mais baixo, esta soma passou a ser igual a

$$36 - 0{,}20 = 35{,}80 \text{ metros.}$$

Assim, a média aritmética das alturas do grupo, após a substituição do jogador, tornou-se igual a

$$\frac{35{,}80}{20} = \frac{34}{20} + \frac{1{,}80}{20} = 1{,}70 + 0{,}09 = 1{,}79 \text{ metro,}$$

o que corresponde à alternativa C). ■

Relembremos que a *média aritmética* de n números reais $x_1, \ldots, x_n$ é dada por

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

No contexto da Estatística, podemos pensar que esses n números são valores de uma certa variável x, observados em uma amostra obtida por coleta de dados. Neste caso, a média aritmética é entendida como a *média amostral* desta variável x e passa a ser denotada por $\overline{x}$. Esta é uma das medidas de *tendência central* em Estatística.

Questão 33 — ENEM 2011, Caderno 6 - Cinza, Segundo Dia, Questão 166, adaptada. Em uma fábrica de refrigerantes, é necessário que se faça periodicamente o controle no processo de engarrafamento para evitar que sejam envasadas garrafas fora da especificação do volume escrito no rótulo. Diariamente, durante 60 dias, foram anotadas as quantidades de garrafas fora dessas especificações. O resultado está apresentado no quadro.

Quantidade de garrafas fora das especificações por dia	Quantidade de dias
0	52
1	5
2	2
3	1

A média diária de garrafas fora das especificações no período considerado é

A) 0,1.
B) 0,2.
C) 1,5.
D) 2,0.
E) 3,0.

Solução. Calculemos a média amostral desses dados coletados ao longo dos 60 dias. Denotemos por x a variável "quantidade de garrafas fora das especificações por dia". Então, nesta amostra, temos

$$\overline{x} = \frac{52{\times}0 + 5{\times}1 + 2{\times}2 + 1{\times}3}{60},$$

ou seja, nas 60 observações, de acordo com a tabela, o valor $x = 0$ foi registrado 52 vezes, o valor $x = 1$ foi registrado 5 vezes, o valor $x = 2$ foi registrado 2 vezes e o valor $x = 3$ foi registrado 1 vez. Assim, a média de x nesta amostra é

$$\overline{x} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

ou seja, *em média*, observou-se, nesses 60 dias, 0,2 garrafa fora das especificações *por dia*. Concluímos que a alternativa correta é B). ■

Vejamos mais uma questão em que basta utilizarmos este conceito de média. Novamente, os valores da variável se repetem: portanto, cada valor deve aparecer multiplicado pelo número de vezes em que aparece repetido.

As variáveis como "quantidade de garrafas fora das especificações por dia", na questão anterior, ou "número de acidentes por funcionário", que aparece na próxima questão, são exemplos de "variáveis aleatórias", ou seja, variáveis cujos valores não podem ser previstos ou determinados com total certeza ou precisão.

Questão 34 — ENEM 2018, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 154, adaptada. A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

A) 0,15.
B) 0,30.
C) 0,50.
D) 1,11.
E) 2,22.

Solução. Calculemos a média amostral desses dados coletados entre os $50 + 17 + 15 + 10 + 6 + 2 = 100$ funcionários da empresa. Denotemos por x a variável "número de acidentes por funcionário". Então, nesta amostra, temos

$$\overline{x} = \frac{50{\times}0 + 17{\times}1 + 15{\times}2 + 10{\times}3 + 6{\times}4 + 2{\times}5}{100},$$

ou seja, nas 100 observações (ou funcionários), de acordo com a tabela, o valor $x = 0$ foi registrado 50 vezes, o valor $x = 1$ foi registrado 17 vezes, o valor $x = 2$ foi registrado 15 vezes, e assim por diante. Assim, a média de x nesta amostra é

$$\overline{x} = \frac{111}{100} = 1{,}11$$

ou seja, observou-se que, *em média*, ocorreu 1,11 acidente *por funcionário*, o que corresponde à opção D). ■

Observação 0.11 Os exercícios anteriores envolviam uma das medidas de tendência central, a média. No exercício seguinte, estudamos uma medida de *dispersão* em relação à média, ou seja, de quanto os dados estão dispersos ("distantes") da média.

Questão 35 — ENEM 2019 - PPL, Caderno 7 - Azul, Questão 149, adaptada. Um fiscal de certa empresa de ônibus registra o tempo, em minuto, que um motorista novato gasta para completar certo percurso. No Quadro 1 figuram os tempos gastos pelo motorista ao realizar o mesmo percurso sete vezes.

Quadro 1

Tempos (em minuto)	48	54	50	46	44	52	49

O Quadro 2 apresenta uma classificação para a variabilidade do tempo, segundo o valor do desvio padrão.

Quadro 2

Variabilidade	Desvio padrão do tempo (em minuto)
Extremamente baixa	$0 < \sigma \leq 2$
Baixa	$2 < \sigma \leq 4$
Moderada	$4 < \sigma \leq 6$
Alta	$6 < \sigma \leq 8$
Extremamente alta	$\sigma > 8$

Com base nas informações apresentadas nos quadros, a variabilidade do tempo é

A) Extremamente baixa.

B) Baixa.

C) Moderada.

D) Alta.

E) Extremamente alta.

Solução. No quadro 2, a letra σ (lê-se "sigma") indica o desvio-padrão, uma medida de variabilidade dos tempos em minutos. Para calcular σ, precisamos, antes, determinar a média aritmética dos 7 tempos que foram registrados pelo fiscal da empresa. Esta média (que denotamos pela letra grega μ) é dada por

$$\mu = \frac{48 + 54 + 50 + 46 + 44 + 52 + 49}{7} = \frac{343}{7} = 49 \text{ minutos.}$$

O passo seguinte, para determinar σ, é calcular os desvios de cada um dos tempos registrados em relação à média μ, Obtemos os sete desvios do seguinte modo

Desvios da média (em minuto)	-1	5	1	-3	-5	3	0

Observe que a *soma* desses desvios em relação à média é igual a zero. Ou seja, a soma dos desvios não nos dá informação sobre a variabilidade: um acréscimo de 3 minutos em relação à média é compensado com outro registro de 3 minutos abaixo da média. Portanto, devemos calcular os *quadrados* dos desvios, isto é,

Desvios quadráticos	1	25	1	9	25	9	0

Desta forma, obtemos apenas variações positivas ou nulas. Agora, calculamos a *média* desses 7 desvios quadráticos, isto é,

$$\frac{1 + 25 + 1 + 9 + 25 + 9 + 0}{7} = \frac{70}{7} = 10.$$

Finalmente, para obtermos um número que possa ser expresso em *minutos* e não em *minutos ao quadrado*, calculamos a raiz quadrada deste valor, obtendo, deste modo, o desvio-padrão:

$$\sigma = \sqrt{10}.$$

Portanto, concluímos que o desvio-padrão é aproximadamente igual a 3,2, ou seja,

$$\sigma \approx 3{,}2.$$

o que corresponde a uma variabilidade *baixa*. Portanto, a alternativa correta é a de letra C). ■

Em resumo, dados N valores observados de uma certa variável (por exemplo, o tempo, no caso da questão acima)

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

a média aritmética desses valores (e da amostra da variável x) é

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}.$$

A variância é dada pela soma dos desvios quadráticos

$$(x_1 - \mu)^2 + \ldots + (x_N - \mu)^2$$

e o desvio padrão pela raiz quadrada da média desses desvios, isto é,

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + \ldots + (x_N - \mu)^2}{N}}$$

Questão 36 — ENEM 2014, Caderno 7 - Azul, Questão 137, adaptada. A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

A) 1,14.

B) 1,42.

C) 1,52.

D) 1,70.

E) 1,80.

Antes de passarmos à resolução da questão, revisemos este conceito de variação percentual: trata-se de comparar o valor de uma variável Q, digamos, em dois instantes, que denominaremos *antes* e *depois*. A variação de Q é dada pela diferença

$$Q(\text{depois}) - Q(\text{antes}).$$

Para medirmos a intensidade desta variação, ou seja, o quanto esta variação é mais ou menos significativa, comparamos a variação com o valor inicial da variável, isto é, calculamos o *quociente* ou razão

$$\frac{Q(\text{depois}) - Q(\text{antes})}{Q(\text{antes})}.$$

Para fixar ideias, calculemos as variações percentuais de duas variáveis, a variável Q e a variável R, de acordo com a tabela abaixo:

Variável	Valor antes	Valor depois	Variação
Q	10	30	$30-10=20$
R	20	40	$40-20=20$

Note que as *variações* das variáveis são ambas iguais a 20. No entanto, a *variação percentual* de Q é dada por

$$\frac{Q(\text{depois})-Q(\text{antes})}{Q(\text{antes})}=\frac{30-10}{10}=\frac{20}{10}=2,$$

ou seja, 200%, ao passo que a *variação percentual* de R é dada por

$$\frac{R(\text{depois})-R(\text{antes})}{R(\text{antes})}=\frac{40-20}{20}=\frac{20}{20}=1,$$

ou seja, 100%. Portanto, a variação percentual de Q é maior que a variação percentual de R. Isto quer dizer que o aumento de 10 para 30 (da variável Q) é mais significativo que o aumento de 20 para 40 (da variável R).

Finalmente, um comentário para justificar o adjetivo "percentual": considere que o valor inicial da variável, por exemplo o valor $Q(\text{antes})$ corresponde ao total, isto é, a 100%. Calculemos, então, qual a porcentagem deste total que corresponde à variação $Q(\text{depois})-Q(\text{antes})$. Para isto, usamos a seguinte regra de três ou proporção:

$$Q(\text{antes}) \text{ está para } 100\,\%$$

assim como

$$Q(\text{depois})-Q(\text{antes}) \text{ está para } x\,\%$$

Portanto,

$$\frac{x\%}{100\%}=\frac{Q(\text{depois})-Q(\text{antes})}{Q(\text{antes})}.$$

Logo,

$$x\%=\frac{Q(\text{depois})-Q(\text{antes})}{Q(\text{antes})}.$$

Solução. Considerando a definição de variação percentual que revisamos no quadro anterior, calculemos a variação da taxa de fecundidade de 2000 (antes) a 2010 (depois). Temos

$$\text{Taxa em 2010}-\text{Taxa em 2000}=1{,}90-2{,}38=-0{,}48,$$

uma variação negativa, já que a taxa de fecundidade diminuiu de 2000 para 2010. Agora, vejamos o quão significativamente diminuiu. Para isso, calculamos a variação *percentual*

$$\frac{\text{Taxa em 2010}-\text{Taxa em 2000}}{\text{Taxa em 2000}}\approx\frac{-0{,}48}{2{,}38}=-0{,}20=-20\%.$$

No enunciado, afirma-se que a variação percentual de 2010 a 2020 deve ser a mesma. Portanto, a taxa de fecundidade de 2020 deve ser 20% menor do que em 2010. Ou seja, a taxa de fecundidade em 2020 deve ser igual a 80% da taxa de fecundidade em 2010, isto é,

$$\begin{aligned}\text{Taxa em 2020}&=\frac{80}{100}\times\text{Taxa em 2020}\\&=\frac{80}{100}\times 1{,}90\\&=1{,}52.\end{aligned}$$

Outra maneira de calcularmos a taxa em 2020 é a seguinte: como a variação percentual de 2010 a 2020 é também de -20%, temos

$$\frac{\text{Taxa em 2020} - \text{Taxa em 2010}}{\text{Taxa em 2010}} = -20\%.$$

Logo

$$\frac{\text{Taxa em 2020}}{\text{Taxa em 2010}} - 100\% = -20\%$$

e, sendo assim,

$$\frac{\text{Taxa em 2020}}{\text{Taxa em 2010}} = 80\%,$$

donde concluímos, como antes, que

$$\text{Taxa em 2020} = \frac{80}{100} \times \text{Taxa em 2020} = \frac{80}{100} \times 1{,}90 = 1{,}52.$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra C). ■

Questão 37 — ENEM 2014, Caderno 7 - Azul, Questão 141, adaptada. Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Port.	Mat.	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior. O candidato aprovado será

A) K.
B) L.
C) M.
D) N.
E) P.

Solução. Para determinarmos as medianas das quatro notas dos candidatos, reorganizamos os dados na tabela de modo que as notas fiquem em ordem crescente:

K	33	33	33	34
L	32	33	34	39
M	34	35	35	36
N	24	35	37	40
P	16	26	36	41

Como temos *quatro* notas por candidato, ou seja, um número par de notas, a mediana das notas de cada candidato será igual a *média aritmética* das duas notas centrais, destacada em vermelho na tabela acima. Assim, calculamos

Candidato	Mediana
K	$\frac{33+33}{2} = 33$
L	$\frac{33+34}{2} = 33{,}5$
M	$\frac{35+35}{2} = 35$
N	$\frac{35+37}{2} = 36$
P	$\frac{26+36}{2} = 31$

Portanto, o candidato com notas de maior mediana é o candidato N. A alternativa correta é a de letra D). ■

Comparemos as principais medidas de tendência central dos dados da tabela de notas. Por exemplo, vejamos as médias aritméticas e as medianas das notas dos cinco candidatos:

Candidato	Média	Mediana
K	$\frac{33+33+33+34}{4} = 33{,}25$	$\frac{33+33}{2} = 33$
L	$\frac{32+33+34+39}{4} = 34{,}5$	$\frac{33+34}{2} = 33{,}5$
M	$\frac{34+35+35+36}{4} = 35$	$\frac{35+35}{2} = 35$
N	$\frac{24+35+37+40}{4} = 34$	$\frac{35+37}{2} = 36$
P	$\frac{16+26+36+41}{4} = 29{,}75$	$\frac{26+36}{2} = 31$

Quais das duas medidas, a média ou a mediana, reflete melhor o desempenho dos candidatos? Note que o candidato N tem duas notas mais "afastadas" da média e e da mediana, a saber, as notas 24 e 40. O candidato M tem notas mais próximas da média e da mediana.

Questão 38 — ENEM 2014, Caderno 7 - Azul, Questão 157, adaptada. Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito

	Média	Mediana	Moda
Numerações	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

A) branca e os de número 38.

B) branca e os de número 37.

C) branca e os de número 36.

D) preta e os de número 38.

E) preta e os de número 37.

Solução. Devemos lembrar que a moda das numerações com sapatos com defeito é, por definição, a numeração *mais frequente*, ou seja, a numeração que mais apareceu na amostra de sapatos com defeitos. Portanto, esta numeração mais frequente é a 38. Não serão, assim, mais encomendados sapatos de numeração 38.

Com respeito à cor, denotemos por B e P as quantidades de sapatos de cor branca (número 0) e sapatos de cor preta (número 1), respectivamente. Assim, a média da cor dessa amostra de sapatos é dada por

$$\frac{0\times B + 1\times P}{B+P},$$

ou seja,

$$\frac{P}{B+P} = 0{,}45.$$

Logo, a média é a fração de sapatos de cor preta no total de sapatos de amostra. Como esta média é menor que 1, concluímos que há menos sapatos de cor preta do que sapato de cor branca no total. Portanto, não serão mais encomendados sapatos de cor branca.

Concluímos que a alternativa correta é a de letra A). ■

Materiais e Roteiros para Estudo

Neste material, estudamos os seguintes conhecimentos e habilidades

- Habilidades da BNCC: EM13MAT104, EM13MAT301, EM13MAT302, EM13MAT304, EM13MAT314, EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT501, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT507.
- Descritores do SAEB: D6, D7, D8, D9, D14, D15, D16, D17, D18, D19, D20, D21, D22, D23, D24, D25, D29.
- Habilidades do ENEM: H10, H11, H12, H15, H16, H19, H20, H21, H25, H27.

Se você quer revisar alguns assuntos ou técnicas que usamos aqui, recomendamos que leia e resolva os exercícios nos diferentes níveis dos seguintes módulos do Foco na Aprendizagem

- Aritmética Elementar, I e II.
- Álgebra Elementar, I e II.

Os seguintes vídeos e materiais (Khan Academy e Portal da Matemática) podem ser bastante úteis também

- https://pt.khanacademy.org/math/algebra
- https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/index?a=1#2

Os seguintes links levam você a materiais gravados e *podcasts* sobre os assuntos tratados aqui:

- https://www.dropbox.com/sh/y27qsmjpjs0zq82/AADK2jLlT_bgkh1hH4Mq3MVba?dl=0