Material Estruturado

MATEMÁTICA

SISEDU

Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

Autores:

Angelo Papa Neto
Marcelo Bessa

Revisor:

Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:

Equipe Cientista Chefe

Raciocínio Geométrico

Coordenadas no Plano

Coordenadoria de Formação Docente e Educação a Distância CED

Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Educação

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO

FUNCAP

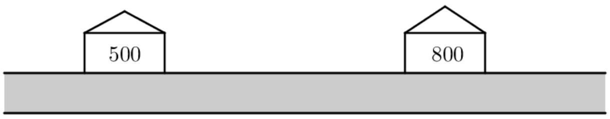
11 | Coordenadas no plano

Neste módulo, apresentamos uma revisão das noções de reta numérica e de plano cartesiano. A principal ideia, aqui, é a de *associação* entre números e pontos, no caso da reta, e entre pares ordenados de números e pontos, no caso do plano.

11.1 – A reta numérica

11.1.1 – Localização de um endereço

A numeração das casas em uma rua, em geral, segue um padrão crescente, de modo que, ao procurarmos uma casa em alguma rua, podemos saber em que sentido devemos seguir.

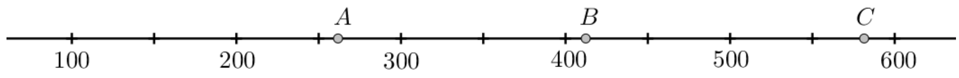


Por exemplo, se procuramos a casa de número 500 em uma rua e estamos à altura do número 800, devemos seguir a rua no sentido que fará a numeração das casas diminuir. Também teremos uma ideia razoável da distância que teremos que percorrer da casa de número 800 até a casa de número 500. Dessa forma, a posição das casas na rua está associada a números.

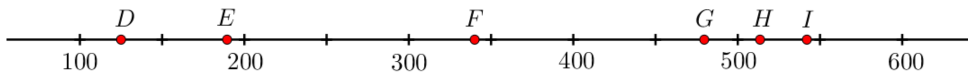
Exercício 11.1 Você sabe como é a numeração das casas na rua onde você mora? Em seu bairro as ruas também são numeradas? Você já percebeu que, na maioria das ruas, as casas de números pares ficam de um lado e as casas de números ímpares de outro?

Observação 11.1.1 Perceba que às vezes dizemos uma frase do tipo: "moro na casa 150". Veja que, nessa frase, há uma identificação. O número 150, claro, não é **a** casa, mas **representa** a casa para fins específicos, ou seja, faz parte do endereço da casa. Da mesma forma, quando você diz "o ponto 4 sobre a reta" não se espera que o número 4 **seja** um ponto, mas que **represente** esse ponto em relação a algum sistema de referência.

Exercício 11.2 A reta a seguir representa uma rua, onde as casas estão numeradas em ordem crescente da esquerda para a direita. Aparecem indicadas na reta as casas de números 100, 200, 300, 400, 500 e 600. Localize aproximadamente, na reta, as casas de números 125, 190, 342, 485, 511, 549.



Solução. Vamos denotar as casas com os números dados da seguinte maneira: $D = 125$, $E = 190$, $F = 342$, $G = 485$, $H = 511$ e $I = 549$. Assim, as casas D, E, F, G, H e I podem ser localizadas na reta que representa a rua como na figura abaixo:



■

Exercício 11.3 Observe a mesma figura que usamos no exercício anterior. O número correspondente à casa A está

(a) abaixo de 200;
(b) entre 200 e 250;
(c) entre 250 e 300;
(d) acima de 300.

Solução. O ponto A está entre as marcas que correspondem às casas de números 250 e 300. Observe que a marca que corresponde a 250 não está numerada. Sabemos que o número correspondente é 250 porque este é o ponto médio de 200 e 300. Dessa forma, o número que corresponde à casa A está entre 250 e 300. O item correto é o (c). ■

Exercício 11.4 Ainda observando a mesma figura, localize a casa B. Mais precisamente, o número correspondente à casa B está

(a) abaixo de 400;
(b) entre 400 e 425;
(c) entre 425 e 450;
(d) acima de 450.

Solução. Este exercício é similar ao Exercício 11.3. Observando a figura dada no enunciado do Exercício 11.2, vemos que o ponto B está entre os números 400 e 500, estando mais próximo do número 400. A marca central, entre 400 e 500 corresponde ao número 450. Então, já podemos afirmar que B está entre 400 e 450. As opções que se encaixam nessa restrição são os itens (b) e (c). Como a casa B está mais próxima de 400 do que de 450, o número correspondente tem que ser menor do que a média entre 400 e 450, ou seja, o número que corresponde a B deve estar entre 400 e 425. Logo, o item correto é (b). ■

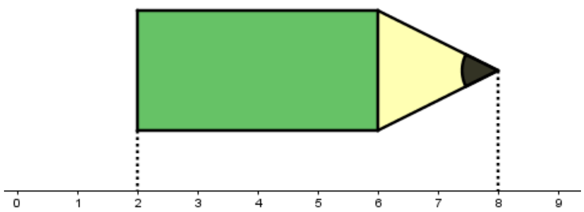
Exercício 11.5 Ainda fazendo referência à figura que aparece no enunciado do Exercício 11.2, suponha que um pedestre caminhe por toda a rua *no sentido decrescente dos números das casas.* Podemos afirmar corretamente que:

(a) O pedestre vai passar pela casa C antes de passar pela casa A.
(b) O pedestre vai passar pela casa A antes de passar pela casa B.
(c) A casa C vai aparecer entre as casas A e B.
(d) Ele passará primeiro pela casa B.

Solução. Note que o pedestre está caminhando *no sentido decrescente*, de modo que a numeração das casas *diminui* à medida em que o pedestre caminha. Assim, a ordem em que o pedestre passa pelas casas é: primeiro a casa C, depois a casa B e, por último, a casa A. Dessa forma, a única opção correta é o item (a). ■

11.1.2 – A régua como instrumento de medição

Uma *régua* é um instrumento de medição que possui uma graduação em um de seus lados. Essa graduação permite que se meça um objeto colocando a régua próximo a ele e comparando os números que estão nas posições correspondentes às extremidades do objeto.



Exercício 11.6 Você possui uma régua? Examine-a junto com seus colegas. Compare várias réguas diferentes e observe se as marcações em cada uma delas são as mesmas. Essas marcações correspondem a uma graduação, que geralmente é dada em centímetros, subdivididos em milímetros. Compare o lado da régua onde há graduação (os tracinhos e os números) com o outro lado, onde nada é desenhado. Ambos os lados podem ser usados para traçar retas, mas apenas o lado graduado pode ser usado para fazer medições. Meça alguns objetos pequenos: lápis, canetas, borrachas. Use a ideia da figura acima para explicar que a medida pode ser feita usando-se qualquer parte do lado graduado da régua, desde que se faça uma subtração entre os números correspondentes às extremidades do objeto medido.

Comentário. Ao usar uma régua para medir o tamanho de um objeto, podemos fazê-lo utilizando qualquer parte da régua. Para isso, como afirmamos no final do enunciado acima, basta fazer a diferença entre os números que correspondem às extremidades do objeto. Para que essa diferença corresponda a uma medida, devemos sempre subtrair o número menor do número maior. Isso é o mesmo que considerar o *valor absoluto*, ou *módulo*, da diferença. Por exemplo, na figura anterior, as extremidades do lápis correspondem aos pontos

2 e 8 da régua. Logo, a medida do lápis é $8 - 2 = 6$ unidades. Se fizermos a diferença ao contrário, ou seja, $2 - 8$, vamos obter $2 - 8 = -6$. Note que os resultados são diferentes apenas pelo sinal. Considerar o valor absoluto da diferença elimina o sinal, ou seja, $|8 - 2| = |2 - 8| = 6$, onde as duas barras verticais indicam o valor absoluto da diferença. ■

Exercício 11.7 Depois de usar uma régua para medir objetos menores do que ela, pense em como você poderia usá-la para medir objetos maiores do que ela. Você consegue **fabricar** uma régua? Tente! Você pode fazer a régua usando papel. Você não precisa usar "centímetro" como unidade de medida. O importante é que as distâncias entre as marcas sejam uniformes, ou seja, a distância entre as marcas onde você vai escrever os números 1 e 2 tem que ser a mesma distância entre as marcas onde você vai escrever os números 3 e 4, por exemplo. Evidentemente, dependendo da escolha da sua unidade de medida, o mesmo objeto pode ter como medida números diferentes.

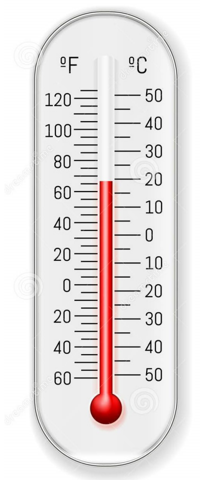
Comentário. Para medir objetos maiores do que a régua, você pode usar a própria régua como unidade de medida, ou seja, você pode verificar quantas vezes a régua cabe dentro da distância que você quer medir. Para construir uma régua, você pode usar um objeto qualquer, de preferência pequeno, como unidade de medida, para construir as marcas consecutivas da sua régua: uma moeda, uma borracha, um apontador, ou até mesmo partes do seu corpo, como a largura de seu dedo polegar. Aliás, foi o uso desse tipo de expediente que gerou a unidade de medida *foot* (do Inglês *pé*), abreviada *ft* e utilizada até hoje nos Estados Unidos e Inglaterra. ■

Exercício 11.8 No caso em que mais de uma pessoa esteja confeccionando réguas, com liberdade para que cada uma delas use a unidade de medida que quiser, um exercício interessante é escolher um objeto qualquer, um lápis, por exemplo, e medir esse objeto usando as várias réguas que foram fabricadas. Digamos que Antônio e Ulisses fabricaram réguas e mediram um mesmo objeto. Antônio, ao medir o objeto, encontrou medida 4. Ulisses, ao medir o mesmo objeto, encontrou medida 3. Qual a relação entre as unidades de medida de Antônio e Ulisses?

Solução. Se a é a unidade de medida na régua de Antônio e u é a unidade de medida na régua de Ulisses, ao medirem o mesmo objeto eles estarão medindo a mesma distância em unidades diferentes. Em nosso caso, o comprimento do objeto é $4a$ na régua de Antônio e $3u$ na régua de Ulisses. Logo, $4a = 3u$ e essa é a relação entre as duas unidades de medida. ■

11.1.3 – Mais alguns exemplos

■ **Exemplo 11.1 — O termômetro.** O termômetro é um instrumento para medição da temperatura. Apesar de hoje serem usados termômetros digitais, durante muito tempo foram utilizados termômetros *analógicos*. Estes consistem em um tubo de vidro dentro do qual há uma substância (geralmente mercúrio) que se dilata facilmente com pequenas mudanças de temperatura.



Essa dilatação faz com que a substância se espalhe pelo tubo preenchendo-o mais ou menos, conforme a temperatura aumente ou diminua, respectivamente.

O termômetro da figura acima apresenta duas graduações: à direita, os números indicam a temperatura em *graus Celsius*[1]; à esquerda, em *graus Fahrenheit*[2]. A conversão de graus Celsius para graus Fahrenheit é feita usando-se a seguinte expressão: se C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit, então

$$F = 1{,}8 \cdot C + 32. \tag{11.1}$$

Por exemplo, na figura acima, a coluna vermelha indica, na escala da direita, aproximadamente $20°C$, logo, a temperatura em graus Fahrenheit é, aproximadamente, $F = 1{,}8 \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$.

Para voltarmos de graus Fahrenheit para graus Celsius, basta olharmos para (11.1) como uma equação com incógnita C e a resolvermos. Assim fazendo, obtemos

$$C = \frac{F - 32}{1{,}8}.$$

Por exemplo, se $F = 68$, então $C = \frac{68-32}{1{,}8} = \frac{36}{1{,}8} = \frac{360}{18} = 20$.

Exercício 11.9 A temperatura média do corpo humano é $36°C$. Encontre o número que representa essa mesma temperatura em graus Fahrenheit.

Solução. Se $C = 36$, podemos obter a medida dessa temperatura em graus Fahrenheit aplicando a fórmula $F = 1{,}8 \cdot C + 32$. Com $C = 36$, obtemos $F = 1{,}8 \cdot 36 + 32 = 64{,}8 + 32 = 96{,}8$. ■

Exercício 11.10 O ponto de ebulição da água é a temperatura em que ela passa do estado líquido para o gasoso, ao nível do mar, quando aquecida. Essa temperatura é $212°F$. Encontre o ponto de ebulição da água em graus Celsius.

Solução. Usando a fórmula de conversão, com $F = 212$, obtemos $C = \frac{F-32}{1{,}8} = \frac{212-32}{1{,}8} = \frac{180}{1{,}8} = \frac{1800}{18} = 100°C$. ■

[1] Anders Celsius (1701-1744) foi um astrônomo sueco.
[2] Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736) foi um físico alemão-polonês.

Exercício 11.11 Dona Maria ganhou de presente um termômetro, mas não sabia que a escala desse termômetro era em graus Fahrenheit. O filho de Dona Maria estava febril e ela resolveu medir sua temperatura com o termômetro que ganhou de presente. Ela se assutou muito com o resultado! Por que você acha que Dona Maria se assustou? Dizemos que uma pessoa está em estado febril se sua temperatura varia entre $37°C$ e $37{,}7°C$. Se o filho de Dona Maria realmente estava febril, o número que ela viu no termômetro e que a assustou deve estar em que intervalo?

Solução. Os números que medem temperaturas em graus Fahrenheit são, para temperaturas com as quais estamos acostumados, maiores do que os que medem as mesmas temperaturas em graus Celsius, como pudemos verificar nos dois exercícios acima. Por isso Dona Maria de assustou: porque interpretou erroneamente uma medição, por confundir a unidade em que a grandeza estava sendo medida.

Se o filho de Dona Maria estava febril, sua temperatura em graus Celsius, estava situada entre 37 e 37,7 graus, ou seja, $37 \le C \le 37{,}7$. Assim,

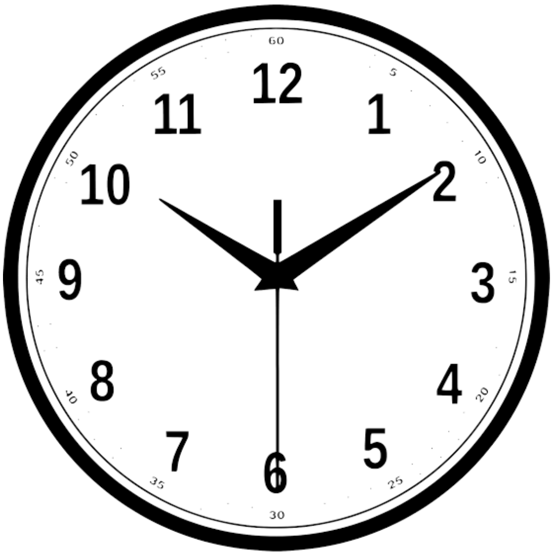
$$37 \cdot 1{,}8 + 32 \le \underbrace{1{,}8 \cdot C + 32}_{=F} \le 1{,}8 \cdot 37{,}7 + 32.$$

Logo, a temperatura de uma pessoa febril, em graus Fahrenheit, varia da segunte maneira: $98{,}6 \le F \le 99{,}86$. Evidentemente, um número em tal intervalo indicaria uma temperatura impossível para o corpo humano, se a unidade de medida fosse $°C$. ■

■ **Exemplo 11.2 — O relógio.** Um relógio analógico comum possui um mostrador que geralmente é circular e no qual podemos ler as horas, minutos e segundos. Para isso, o relógio tem três ponteiros de tamanhos, formatos e, às vezes, cores diferentes. O mostrador circular do relógio é dividido em 12 setores iguais, como na figura a seguir. Cada um desses setores é dividido em 5 partes iguais. Se o ponteiro menor aponta para um dos números, esse número indica a hora, da manhã ou da tarde. Se o ponteiro maior, dos minutos, aponta para um número, ao multiplicar esse número por 5 obteremos os minutos. O mesmo vale para o ponteiro dos segundos, que, apesar de não ter tamanho diferente do ponteiro dos minutos, é claramente identificável, pois move-se bem mais rápido que os outros dois.

O relógio analógico é um bom exemplo por duas razões: é uma graduação feita em um círculo, o que mostra que *não apenas pontos de uma reta podem ser postos em correspondência com números*. Neste caso, a disposição em círculo é adequada *porque as horas se repetem de* 12 *em* 12*, duas vezes a cada dia*, ou seja, a marcação das horas é periódica, cíclica, circular, retorna ao ponto de partida após um período de 12 horas. Além disso, *a mesma graduação serve para marcar horas, minutos e segundos*, sendo que a mesma posição indica intervalos de tempo diferentes, dependendo do ponteiro que está na posição.

Exercício 11.12 João colocou macarrão em água fervente para cozinhar. No pacote de macarrão há a informação de que são necessários três minutos para que o macarrão cozinhe. Ao colocar o macarrão na panela, João olhou para seu relógio e viu que o ponteiro dos minutos apontava para o número 2. Ele deve retirar o macarrão da panela quando



(a) O ponteiro dos minutos estiver apontando para o número 5.
(b) O ponteiro dos minutos estiver no ponto médio entre 2 e 3.
(c) O ponteiro estiver entre 2 e 3, mais próximo de 2.
(d) O ponteiro estiver entre 2 e 3, mais próximo de 3.

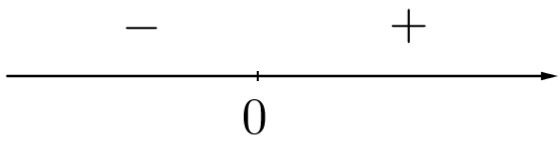
Solução. O ponteiro dos minutos dá uma volta completa no mostrador do relógio em uma hora, ou seja, em 60 minutos. Como o mostrador é dividido em 12 partes iguais, cada uma delas corresponde a $\frac{60}{12} = 5$ minutos. Dessa forma, se o ponteiro dos minutos aponta para o número 2, então após 5 minutos ele apontará para o número 3. Após dois minutos e meio, o ponteiro estará exatamente na metade do arco entre as marcações 2 e 3. Como o tempo que João deve esperar para que o macarrão cozinhe é de 3 minutos, ele deve retirar o macarrão quando o ponteiro estiver entre 2 e 3 e mais próximo do número 3. Logo, a opção correta é o item (d). ■

11.2 – Definição de reta numérica

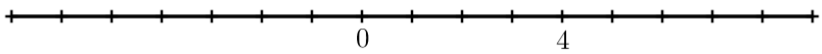
O conceito matemático que engloba os exemplos acima (exceto o exemplo do relógio) é o de *reta numérica*. De maneira precisa, se em uma reta escolhermos dois pontos distintos, um dos quais identificamos com o número 0 e o outro com o número 1, então cada ponto dessa reta pode ser identificado com um único número real, dito a **coordenada** do ponto, de tal modo que a reta passa a ser uma *representação geométrica* do conjunto dos números reais, que chamamos de **reta numérica**. O ponto de uma reta numérica que identificamos com o número 0 é chamado **origem** da reta numérica. A distância entre os pontos que correspondem a 0 e 1 é chamada **unidade de medida** da reta numérica. Por fim, a semirreta que começa no (ponto) 0 e contém o (ponto) 1 é a **semirreta positiva**; a semirreta oposta é a **semirreta negativa**.

Observação 11.2.1 A escolha dos pontos que representam os números 0 e 1 na reta numérica é arbitrária. Veja, por exemplo, o Exercício de Fixação 11.17. Uma vez que a identificação é feita, você pode usar o número como "nome" do ponto: "ponto 1", "ponto -4", etc, mas deve lembrar que isso é uma associação entre objetos distintos, pontos e números reais, ou seja, é uma identificação que depende da escolha inicial dos pontos que representarão os números 0 e 1. Essa identificação segue o mesmo princípio da identificação de uma casa com o seu número na rua, como na Observação 11.1.1.

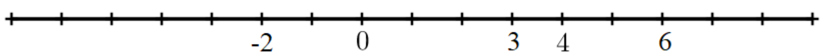
Sempre que uma reta numérica for posicionada na horizontal, salvo menção em contrário convencionamos escolher o ponto correspondente ao número 1 à direita do ponto correspondente ao número 0. Assim fazendo, estabelecemos uma *orientação* na reta, que faz os números reais positivos corresponderem a pontos que estão *à direita da origem* e números reais negativos corresponderem a pontos que estão *à esquerda da origem*. Assim, na figura abaixo, os sinais $-$ e $+$ indicam as semirretas negativa e positiva, respectivamente.



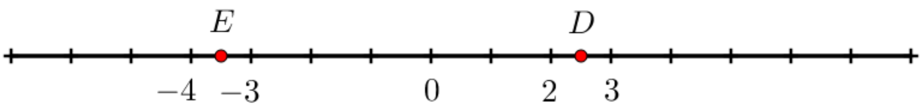
Exercício 11.13 Localize os pontos $A = 3$, $B = -2$, $C = 6$, $D = 2{,}5$ e $E = -3{,}5$, na reta numérica abaixo.



Solução. Como os pontos 0 e 4 estão marcados, a posição de todos os outros números reais na reta dada está determinada. O segmento que vai de 0 a 4 está dividido em quatro partes iguais, logo, cada parte tem comprimento 1 e, por isso, a distância entre duas marcas consecutivas quaisquer, na reta dada, é igual a 1. Assim, os pontos dados podem ser marcados. O ponto $A = 3$ é o que corresponde à marca imediatamente à esquerda do número 4. O ponto $B = -2$ corresponde à segunda marca à esquerda do número 0. O ponto $C = 6$ corresponde à segunda marca à direita do número 4. Veja a figura a seguir.



Os pontos D e E correspondem a números não inteiros. Logo, esses pontos devem ser posicionados *entre* duas marcas consecutivas. Como o número 2,5 é maior do que 2 e menor do que 3, o ponto correspondente, D, deve ser posicionado entre as marcas relativas aos pontos 2 e 3. Como a parte decimal desse número é 0,5, ele é o ponto que está exatamente no meio do segmento que vai do ponto 2 ao ponto 3, ou seja, a distância de D ao ponto 2 é igual à distância de D ao ponto 3. Dizemos que D é o *ponto médio* do segmento que vai do ponto 2 ao ponto 3. O número $-3{,}5$ é maior do que -4 e menor do que -3. Como ele é maior que -4 em 0,5, um raciocínio análogo ao acima garante que o ponto correspondente ao $-3{,}5$ (o ponto E) é o ponto médio do segmento que une o ponto -4 ao ponto -3. Veja a figura a seguir:



■

11.3 – Coordenadas no plano

11.3.1 – Localização de cruzamentos

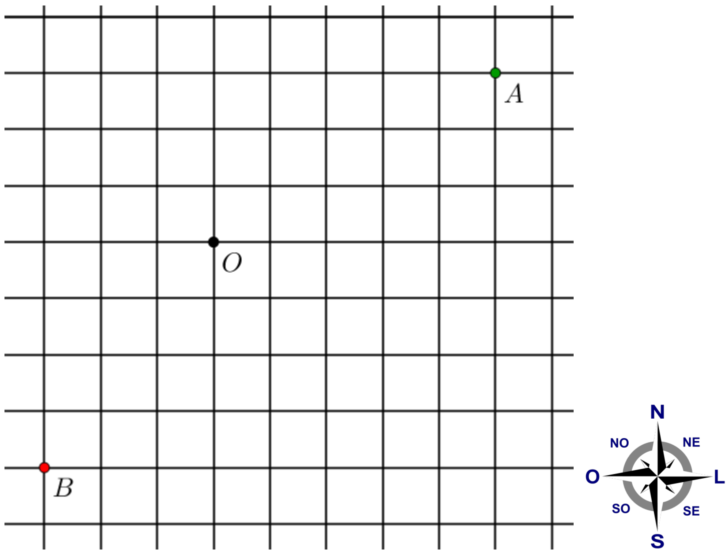
Caso seja necessário localizar um ponto no plano, vamos precisar de duas coordenadas. Para entender porque, observe a figura a seguir, que representa o mapa de um bairro. Nela, as retas representam as ruas, que têm direção Norte-Sul ou Leste-Oeste, e os quadrados representam os quarteirões.

Duas pessoas, localizadas em uma das esquinas do cruzamento O, conversam e uma precisa explicar à outra como chegar a uma lanchonete situada em uma das esquinas do cruzamentos A e a uma livraria situada em uma das esquinas do cruzamento B. Uma maneira dela explicar à outra como chegar ao cruzamento A é dizer que ele está situado 5 quarteirões a Leste e 3 quarteirões a Norte do ponto O. Por sua vez, para o cruzamento B, ela pode dizer que o mesmo está localizado 3 quarteirões a Oeste e 4 quarteirões ao Sul de O.

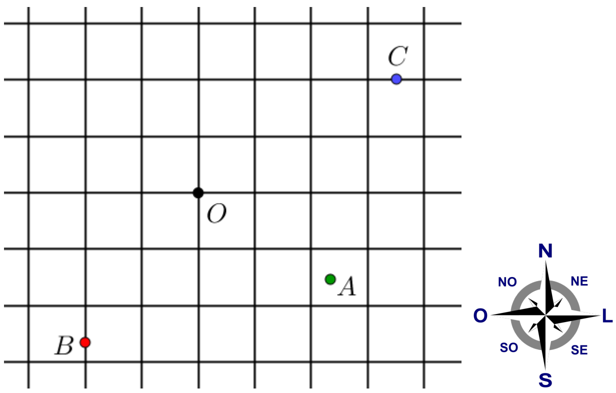
Note que, em cada um dos casos acima, um dos números usado indicou a posição do cruzamento a que se queria chegar em relação à rua Oeste-Leste passando por O, enquanto o outro número indicou a posição do cruzamento a que se queria chegar em relação à rua Sul-Norte passando por O. Além disso, no mapa essas ruas são representadas pelas retas horizontal e vertical passando por O, respectivamente.

Observe agora que, se as pessoas duas pessoas que conversavam estivessem situadas no cruzamento B e uma fosse instruir a outra sobre como chegar em A, então a explicação dada seria bem diferente: ela diria que A está 8 quarteirões a Leste e 7 quarteirões ao Norte de A. No entanto, também neste caso, os dois números utilizados indicam os deslocamentos necessários, a partir de B, em relação às ruas Oeste-Leste (horizontal) e Sul-Norte (vertical) passando por esse ponto.

> **Observação 11.3.1** Um ponto que não esteja no cruzamento de duas retas não pode ser localizado com precisão se usarmos apenas números (inteiros) de quarteirões como referência. Por exemplo, o ponto C da próxima figura está situado entre o terceiro e o quarto quarteirões ao Leste do ponto O e a (exatamente) dois quarteirões ao Norte do ponto O. O ponto B, por sua vez, está localizado a dois quarteirões ao Oeste do ponto O e entre o



segundo e o terceiro quarteirões ao Sul de O. Por fim, oo ponto A não admite uma localização precisa, em termos de quantidades de quarteirões, nem na horizontal nem na vertical: ele está situado entre o segundo e o terceiro quarteirões ao Leste de O e entre o primeiro e o segundo quarteirões ao Sul de O.

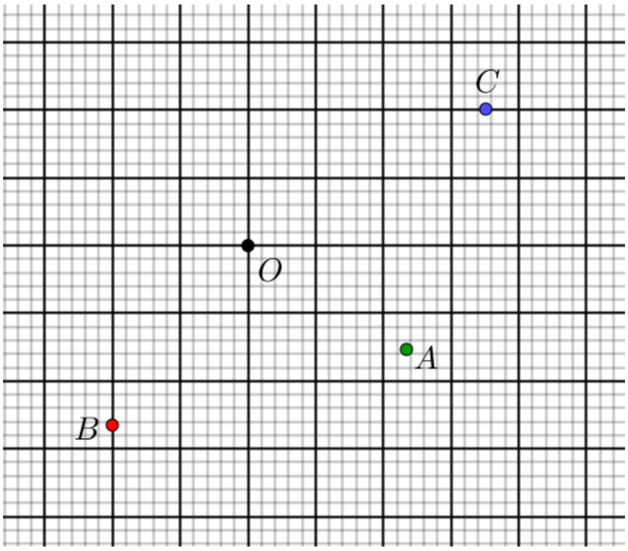


11.3.2 – Refinando malhas

Agora, suponhamos que as figuras da seção anterior não representem mais ruas, mas que são apenas retas em um plano, horizontais ou verticais, dividindo o plano em quadradinhos. Nos referiremos a esse conjunto de retas que se cruzam de maneira equiespaçada de **malha**.

Se quiséssemos localizar com maior precisão os pontos A, B e C dos quais falamos na Observação 11.3.1, o que poderíamos fazer? Imagine que as retas horizontais (resp. verticais) da figura anterior estejam a uma distância de 1 unidade de suas vizinhas, de modo que cada quadradinho da figura tenha lado 1.

Se acrescentarmos mais retas entre as já existentes, de modo a formar quadradinhos menores, dizemos que estamos **refinando a malha**. Um exemplo de refinamento de malha é dado na figura a seguir, na qual quatro retas horizontais (resp. verticais) equiespaçadas foram inseridas entre duas horizontais (resp. verticais) quaisquer da figura anterior.



Assim, a nova distância entre duas retas horizontais (resp. verticais) da malha refinada é de $1/5$ de unidade. Dessa forma, podemos garantir que o ponto A, por exemplo, está situado entre $2\frac{1}{5}$ e $3\frac{1}{5}$ quarteirões ao Leste do ponto de referência O e entre $1\frac{2}{5}$ e $1\frac{3}{5}$ quarteirões ao Sul de O.

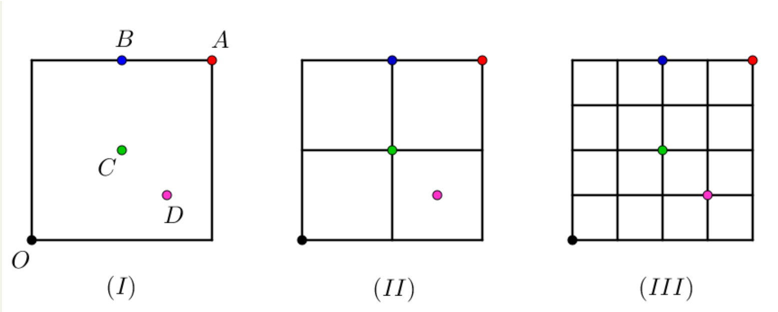
Evidentemente, poderíamos continuar a refinar a malha acrecentando mais e mais retas, até que fosse possível localizar cada um dos pontos A, B e C com uma precisão desejada.

Exercício 11.14 Ainda em relação ao refinamento mostrado na figura anterior, localize os pontos B e C em relação ao ponto de referência O. Que dificuldade você teria para localizar, com precisão de $\frac{1}{5}$ de uma unidade, o ponto O em relação ao ponto de referência A?

Solução. O ponto B está localizado dois quarteirões ao Oeste de O e entre $2\frac{3}{5}$ e $2\frac{4}{5}$ quarteirões ao Sul do ponto O. Já o ponto C está entre $3\frac{2}{5}$ e $3\frac{3}{5}$ quarteirões ao Leste de O, e dois quarteirões ao Norte de O.

A dificuldade em localizar tal ponto é que o ponto de referência A não está em um cruzamento de duas retas da malha. Isso torna *todas* as localizações imprecisas, porque fazem sempre referência a um ponto que não está localizado precisamente. ■

Exercício 11.15 Na figura a seguir, o mesmo quadrado, de lado igual a $1m$, é representado três vezes. Em (I) vemos um ponto de referência O e mais quatro pontos, A, B, C e D.



O mesmo quadrado, com os mesmos quatro pontos destacados, aparece em (II), dividido em quatro quadrados menores iguais, e em (III), dividido em 16 quadrados menores iguais. Usando o ponto O como referência,

(a) em (I), localize o ponto A;
(b) em (II), localize os pontos B e C;
(c) em (III), localize o ponto D.

Solução. (a) Uma vez que o quadrado da figura (I) tem 1m de lado, vemos que o ponto A está $1m$ à direita e $1m$ acima do ponto O.

(b) Na figura (II), o lado de cada quadrado menor mede $\frac{1}{2}$m, isto é, 50cm. Portanto, o ponto B está 50cm à direita e 1m acima do ponto O. O ponto C, por sua vez, está situado 50cm à direita e 50cm acima do ponto O.

(c) Como os lados do quadrado da figura (I) foram divididos em quatro partes iguais para gerar os quadrados da figura (III), percebemos que os quadrados da figura (III) têm lados iguais a $\frac{1}{4}$m, isto é, 25cm. Como o ponto D está localizado 3 quadradinhos à direita e 1 quadradinho acima de O, vemos que ele está situado a $3 \times 25 = 75$cm à direita de O e a 25cm acima de O. ■

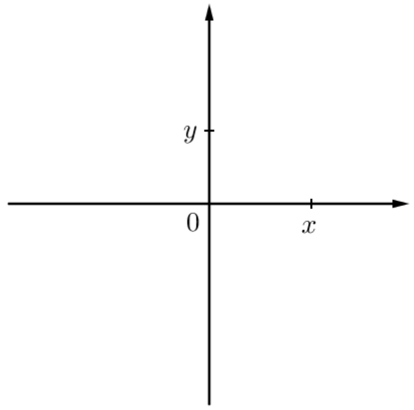
11.4 – Definição de plano cartesiano

Abstraímos as situações descritas anteriormente da seguinte forma: Chamamos o plano de **plano cartesiano** quando tivermos, atrelado ao plano, um sistema de referência formado por duas retas numéricas perpendiculares, as quais se intersectam no ponto que representa o número 0 em ambas. Em seguida, denominamos uma dessas retas de **eixo das abscissas** e a outra de **eixo das ordenadas**.

Por comodidade do desenho, geralmente tomamos o **eixo das abscissas** como uma reta horizontal orientada da esquerda para a direita e o **eixo das ordenadas** como uma reta vertical orientada de baixo para cima, como mostrado na próxima figura.

Seja como for, o número real associado a um ponto arbitrário do eixo das abscissas é denotado pela letra x e o número real associado a um ponto arbitrário do eixo das ordenadas é denotado pela letra y. Por isso, os eixos das abscissas e das ordenadas também são chamados, respectivamente, de eixo-x e eixo-y.

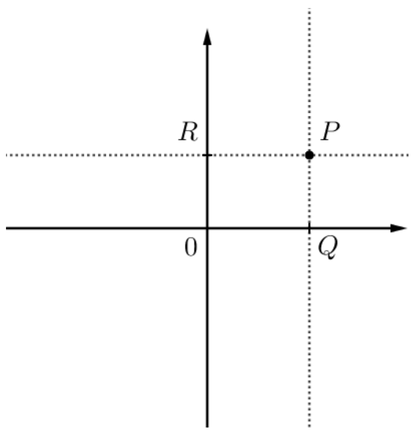
Da mesma forma que um ponto pertencente a uma reta numérica pode ser associado de maneira única a um número real, em um plano cartesiano um



ponto qualquer pode ser associado a um *par ordenado* de números reais. Isso é sugerido pelos exemplos que vimos anteriormente, nos quais um ponto em um mapa pôde ser localizado contando-se quantos quarteirões o separavam de um ponto de referência (uma "origem"), em duas direções diferentes (Norte-Sul e Leste-Oeste).

Para isso, vamos considerar como ponto de referência o ponto de cruzamento dos dois eixos, que chamaremos de **origem** do plano cartesiano.

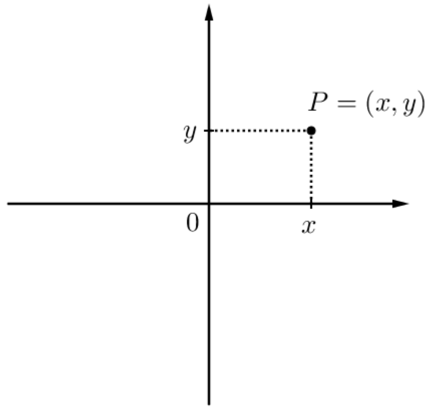
Em seguida, dado um ponto P no plano cartesiano, existem duas retas que passam por P e são paralelas aos eixos (veja a figura a seguir).



A reta que passa por P e é paralela ao eixo-x corta o eixo-y no ponto R, ao passo que a reta que passa por P e é paralela ao eixo-y corta o eixo-x no ponto Q. Dizemos que os pontos Q e R são as **projeções** do ponto P sobre os eixos.

Como os pontos P e Q pertencem aos eixos, os quais são retas numéricas, eles correspondem, em tais retas, a números reais. Digamos, pois, que Q (pertencente ao eixo-x) corresponde a um número real x e R (pertencente ao eixo-y) corresponde a um número real y. Esses números são chamados **coordenadas** do ponto P e formam um par ordenado (x,y).

Assim, num plano cartesiano, cada ponto corresponde a um único par ordenado, de modo que podemos identificar o ponto P com o par ordenado (x,y), escrevendo $P = (x,y)$. Os números x e y são chamados, respectivamente, de **abscissa** e **ordenada** do ponto P. Na situação da próxima figura o ponto P tem abscissa e ordenada positivas.



Obs Observe que a abscissa x do ponto P é a primeira entrada do par ordenado (x,y), enquanto a ordenada é a segunda entrada do par. Isso é uma convenção importante, porque, se não tivermos cuidado com ela, poderemos confundir facilmente os pontos $(1,2)$ e $(2,1)$, por exemplo.

Podemos ver a abscissa do ponto P como o número que indica o deslocamento horizontal que deve ser feito, desde a origem O até a projeção do ponto P sobre o eixo-x; da mesma forma, a ordenada de P pode ser vista como o número que indica o deslocamento vertical que se deve fazer, desde a origem O até a projeção do ponto P sobre o eixo-y.

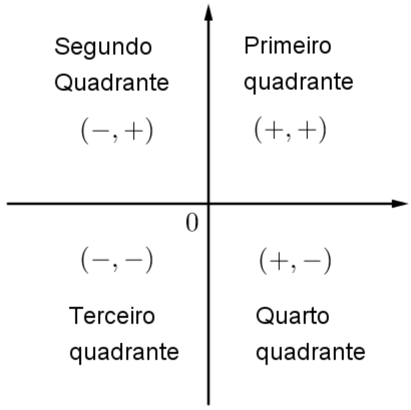
11.4.1 – Quadrantes

Os eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**. Numeramos os quadrantes de "*primeiro*" a "*quarto*", sendo chamado de **primeiro quadrante** a região do plano onde os pontos têm abscissa e ordenada positivas, o que indicamos pelo símbolo $(+,+)$. Chamamos de **segundo quadrante** a região onde os pontos têm abscissa negativa e ordenada positiva, o que indicamos escrevendo $(-,+)$. Chamamos de **terceiro quadrante** a região onde os pontos têm abscissa negativa e ordenada também negativa, e indicamos isso escrevendo $(-,-)$. Finalmente, chamamos de **quarto quadrante** a região onde os pontos têm abscissa positiva e ordenada negativa, e escrevemos $(+,-)$ para indicar isso (veja a figura a seguir).

Assim, se o eixo das abscissas for (como de costume) uma reta horizontal orientada da esquerda para a direita e o eixo das ordenadas for uma reta vertical orientada de baixo para cima (como mostrado na figura anterior), então a numeração dos quadrantes segue o sentido anti-horário, a partir do primeiro.

O primeiro e o terceiro quadrantes são chamados **quadrantes ímpares** e, enquanto o segundo e o quarto quadrantes são chamados **quadrantes pares**. Nos quadrantes ímpares os sinais das coordenadas no par ordenado são iguais: $(+,+)$ e $(-,-)$. Nos quadrantes pares os sinais das coordenadas são diferentes: $(-,+)$ e $(+,-)$.

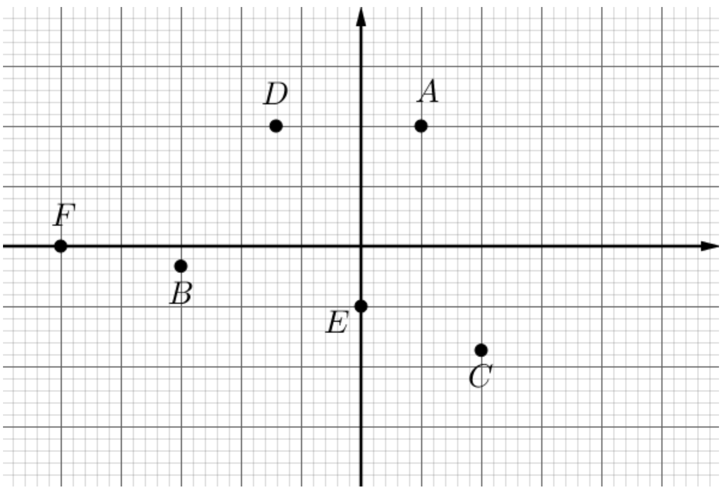
Os pontos que têm pelo menos uma coordenada nula não pertencem a um quadrante, mas a um eixo. A origem, $O = (0,0)$, é o único ponto que pertence aos dois eixos.



Exercício 11.16 São dados os pares ordenados $A = (1{,}2)$, $B = (-3, -1/3)$, $C = (2, -\sqrt{3})$, $D = (-\sqrt{2}{,}2)$, $E = (0, -1)$, $F = (-5{,}0)$. Desenhe um plano cartesiano e, nele marque cada ponto, localizando o quadrante ou eixo em que se situa. Para os pontos com abscissas ou ordenadas irracionais, use aproximações racionais desses números.

Solução. Vamos analisar cada par ordenado: $A = (1{,}2)$ está no primeiro quadrante, pois tem as duas coordenadas positivas. Mais precisamente, este ponto está 1 unidade à direita do eixo-y e a 2 unidades acima do eixo-x. O ponto $B = (-3, -1/3)$ está no terceiro quadrante porque tem as duas coordenadas negativas. Ele está 3 unidades à esquerda do eixo-y e $1/3$ de unidade abaixo do eixo-x.

O ponto $C = (2, -\sqrt{3})$ está no quarto quadrante, pois tem a abscissa positiva e a ordenada negativa. Considerando $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, podemos localizar o ponto C estando 2 unidades à direita do eixo-y e entre $1\frac{3}{5}$ e $1\frac{4}{5}$ unidades abaixo do eixo-x.



O ponto $D = (-\sqrt{2}{,}2)$ está no segundo quadrante, porque a abscissa é negativa e a ordenada é positiva. Considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, podemos localizar este ponto entre $1\frac{2}{5}$ e $1\frac{3}{5}$ unidades à esquerda do eixo-y e 2 unidades acima do eixo-x.

Finalmente, os pontos E e F estão sobre os eixos, pois uma de suas coordenadas é igual a zero. $E = (0, -1)$ está sobre o eixo-y, porque sua abscissa é igual a zero, 1 unidade unidade abaixo da origem. $F = (-5{,}0)$ está sobre o eixo-x, porque sua ordenada é igual a zero, 5 unidades à esquerda da origem. ■

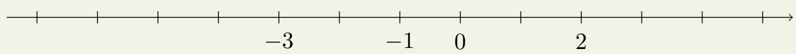
11.4.2 – Resumo

1. Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência com os números reais. Essa correspondência depende da escolha de dois pontos, um dos quais é identificado com o número 0 e o outro com o número 1.
2. Uma vez feita essa escolha, a reta passa a ser chamada *reta numérica*. O número real correspondente a um ponto da reta numérica é chamado *coordenada* desse ponto.
3. O ponto identificado com o número 0 é a *origem* da reta numérica. Ele divide a reta em duas semirretas, uma das quais contém os pontos correspondentes aos números reais negativos, enquanto a outra contém os pontos identificados com os números positivos. Em geral, se a reta numérica for horizontal, convenciona-se colocar os pontos correspondentes a números positivos *à direita* da origem.
4. Fixadas duas retas numéricas perpendiculares em um plano, chamadas eixos, cada ponto P desse plano corresponde a um par ordenado (x,y) de números reais.
5. Uma vez feita a escolha de eixos em um plano, ele passa a ser chamado de *plano cartesiano*. Os números reais que formam o par ordenado (x,y) correspondente a um ponto P são as *coordenadas* de P. A primeira coordenada, x, é chamada de *abscissa*. A segunda coordenada, y, é chamada de *ordenada*.
6. Os eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. O primeiro quadrante é aquele onde as duas coordenadas são positivas. Se os eixos forem traçados da maneira usual (isto é, com o eixo das abscissas horizontal e orientado da esquerda para a direita e o eixo das ordenadas vertical e orientado de baixo para cima), então os demais quadrantes são enumerados no sentido anti-horário.

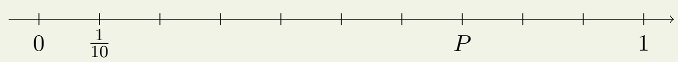
11.5 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 11.17 Na reta numérica abaixo, escreva os números **inteiros** que estão faltando.

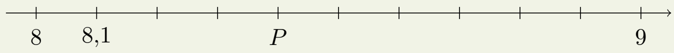


Exercício 11.18 Na reta numérica abaixo, que fração corresponde ao ponto P?



(a) $\frac{2}{10}$. (b) $\frac{3}{10}$. (c) $\frac{5}{10}$. (d) $\frac{7}{10}$. (e) $\frac{8}{10}$.

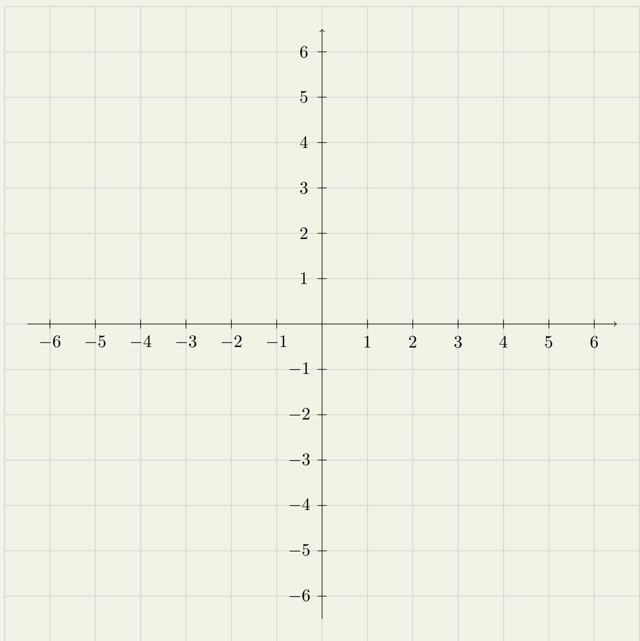
Exercício 11.19 Na reta numérica abaixo, que fração corresponde ao ponto P?



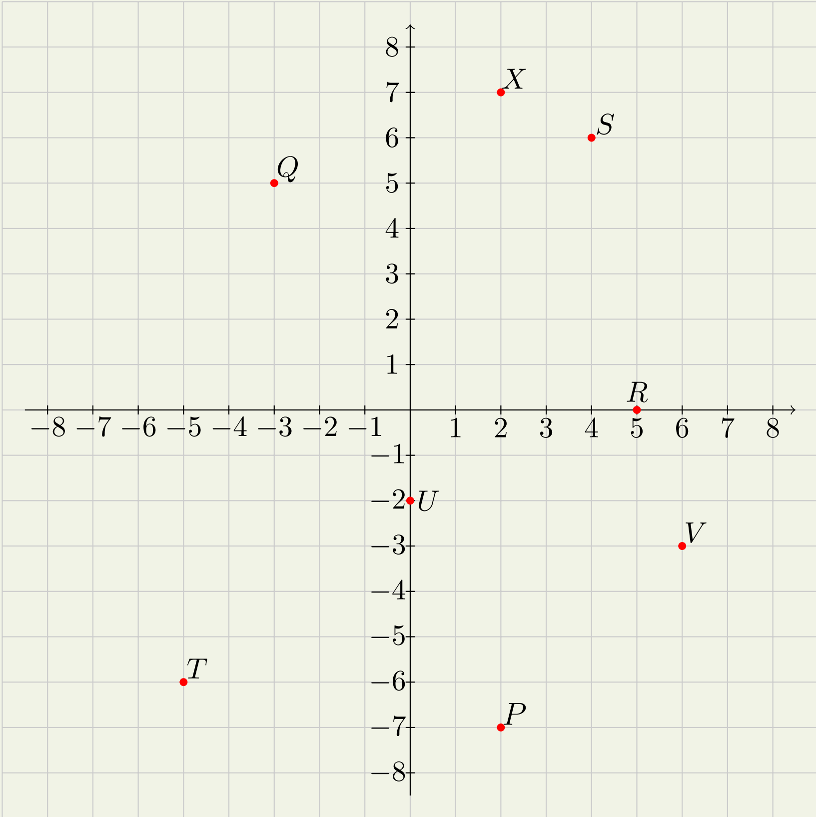
(a) 8,2. (b) 8,3. (c) 8,4. (d) 8,5. (e) 8,6.

Exercício 11.20 No plano cartesiano, localize os pontos cujas coordenadas são dadas pelos pares ordenados abaixo:

(a) (2,3).
(b) $(-4,5)$.
(c) $(5,-3)$.
(d) (3,0).
(e) $(-5,-4)$.
(f) $(0,-2)$.



Exercício 11.21 No plano cartesiano abaixo, identifique as coordenadas dos pontos P, Q, R, S, T, U, V e X.

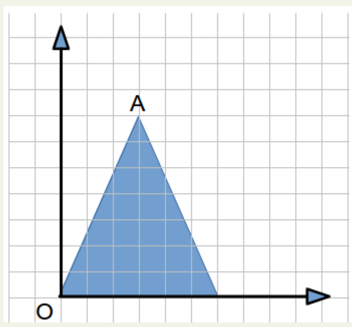


Exercício 11.22 Localize os pontos a seguir no plano cartesiano: $A = (1{,}1/2)$, $B = (3/5, -2)$, $C = (\sqrt{2}{,}4)$, $D = (3{,}\sqrt{3})$. Considere $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

Nível 2

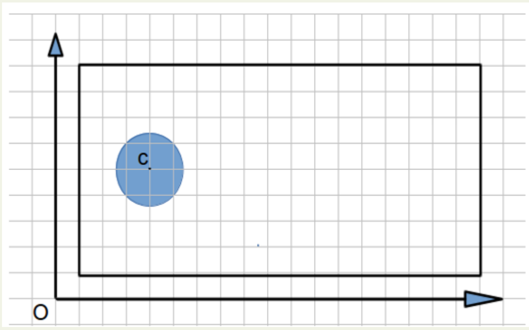
Exercício 11.23 Na figura abaixo, um triângulo está desenhado em um plano cartesiano. Dois dos vértices do triângulo estão identificados: o vértice $O = (0{,}0)$ e o vértice A. Assinale a alternativa que dá as coordenadas do vértice A.

(A) (0,0).
(B) (6,0).
(C) (3,7).
(D) (7,3).
(E) (0,6).

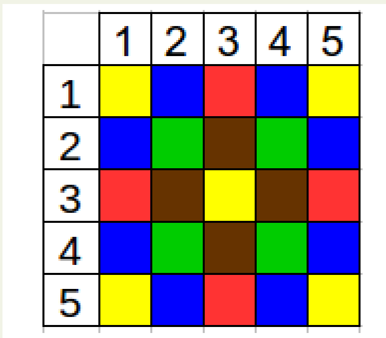


Exercício 11.24 Um desenhista arquitetônico estava determinando o posicionamento correto de uma piscina com o formato circular que seria construída em um terreno retangular. Ele posicionou o terreno e a piscina em um plano cartesiano, conforme a figura a seguir. Qual a coordenada do centro C da piscina que será construída?

(a) (0,0).
(b) (3,4).
(c) (5,4).
(d) (4,5).
(e) (4,6).



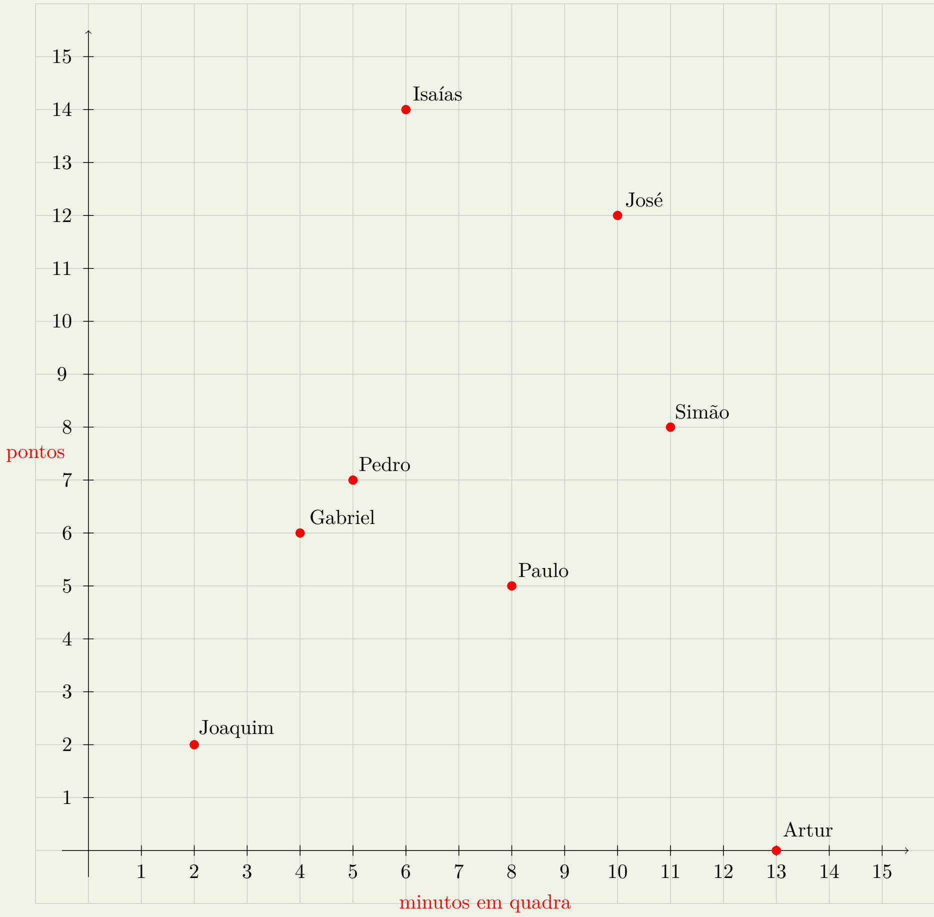
Exercício 11.25 Considere a seguinte tabela, formada por quadradinhos de diversas cores:



Cada quadradinho pode ser localizado na tabela usando-se dois números, ou seja, duas coordenadas. Assinale a alternativa que contém as cores de quadrados cujas coordenadas são iguais.

(a) Amarelo e azul.
(b) Verde e vermelho.
(c) Amarelo e verde.
(d) Azul e verde.
(e) Azul e vermelho.

Exercício 11.26 O treinador Josias coletou dados sobre 6 de seus jogadores de basquete. Os pontos marcados no plano cartesiano mostram o número de minutos em quadra e a quantidade de pontos marcados na última partida pelos 6 jogadores.



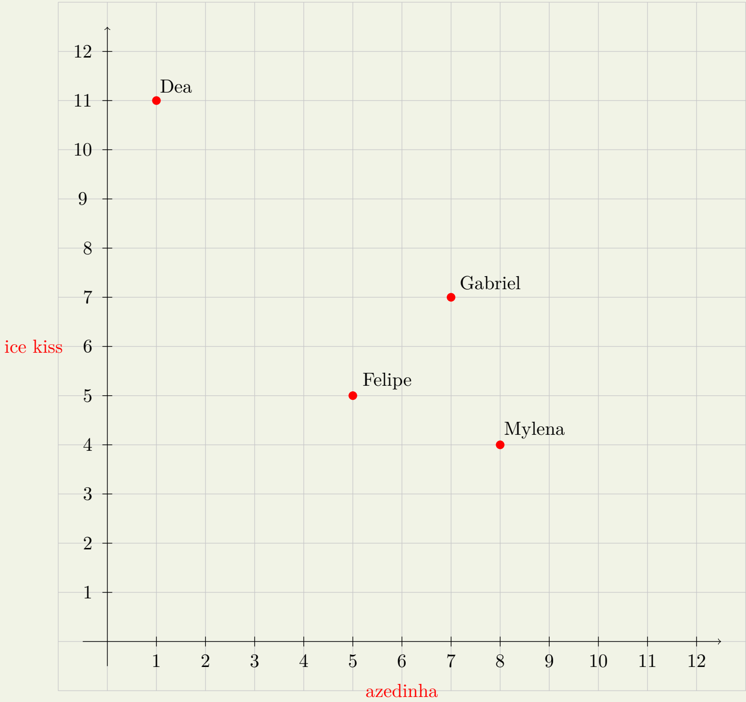
Qual jogador marcou a maior quantidade de pontos?

(a) Isaías.
(b) José.
(c) Simão.
(d) Paulo.
(e) Artur.

Exercício 11.27 Ainda de acordo com o plano cartesiano apresentado no exercício anterior, qual jogador permaneceu o maior tempo em quadra?

(a) Isaías.
(b) José.
(c) Simão.
(d) Joaquim.
(e) Artur.

Exercício 11.28 No dia das crianças, vovô Leônidas montou sacos de bombons para presentear os seus 5 netinhos: Fernando, Felipe, Mylena, Dea e Gabriel. As coordenadas dos pontos marcados no plano cartesiano abaixo representam a quantidade de bombons de cada tipo que 4 dos 5 netos do vovô Leônidas receberam.



(a) Sabendo que Fernando recebeu 4 azedinhas a mais que Felipe e 1 ice kiss a menos que Mylena, quantos bombons ele recebeu ao todo?
(b) Qual dos 5 netos recebeu mais azedinhas?
(c) Qual dos 5 netos recebeu mais ice kiss?
(d) Qual dos 5 netos recebeu a maior quantidade de bombons?
(e) Quantos bombons vovô Leônidas distribuiu ao todo?
(f) Localize o ponto que representa o saco de doces recebido por Fernando.

Exercício 11.29 Dulce está registrando informações sobre seus animais de estimação em um plano cartesiano. Cada um dos pares ordenados mostra a idade (em anos) e a massa (em quilogramas), respectivamente, de um de seus animais de estimação.

- Capitu: (1,4);
- Cadu: (2,20);
- Bia: (9,8).

Dulce também tem um cachorro chamado Black, que é 3 anos mais novo que Bia e tem 5 vezes a massa da Capitu.

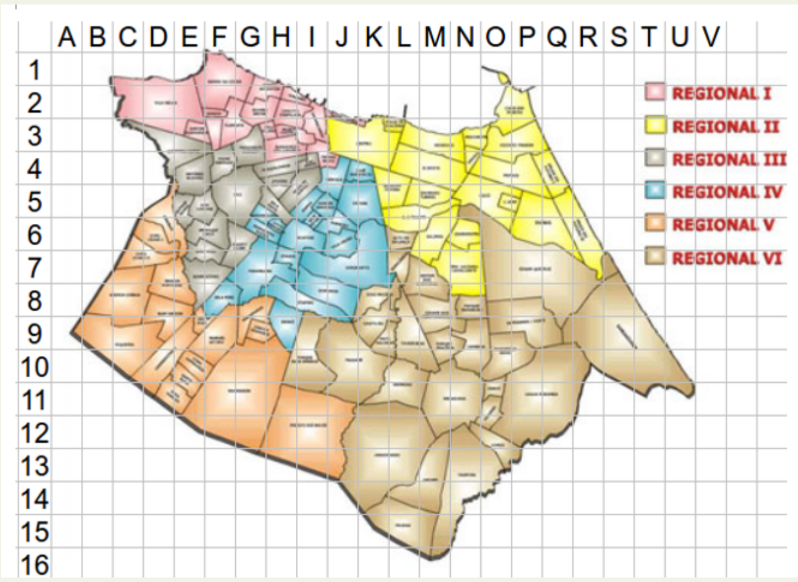
(a) Qual par ordenado representa a idade e a massa de Black?
(b) Desenhe os dois eixos de um sistema cartesiano e localize os pontos que representam as idades e as massas dos animais de estimação de Dulce.

Nível 3

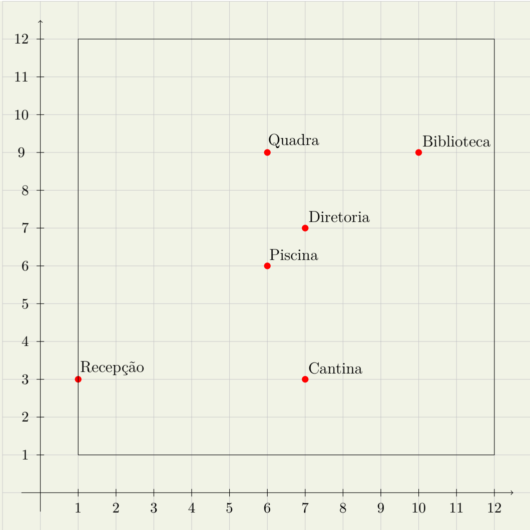
Exercício 11.30 Para um melhor trabalho de assistência aos moradores de diversas localidades, a cidade de Fortaleza foi dividida em regionais que vão da regional (I) a regional (VI). Observe o mapa a seguir e responda a pergunta.

Os moradores das coordenadas $M9$, $H2$, $J7$, $I12$, $F5$ e $P4$ moram respectivamente nas regionais:

(A) I, II, III, IV, V e VI;
(B) VI, I, IV, V, III e II
(C) V, I, IV, VI, III e II
(D) VI, V, IV, III, II e I
(E) VI, III, IV, V, I e II



Exercício 11.31 Alcides fez um mapa aproximado da escola em que estuda no plano cartesiano abaixo.



Sempre que o diretor Flamarion sai da diretoria e vai à cantina para merendar, ele segue pelo caminho mais curto, que é uma linha reta. Exatamente na metade desse caminho está a coordenação das turmas olímpicas e, uma vez ou outra, Flamarion convida o coordenador Adonias para a merenda.

(a) Se a coordenação das turmas olímpicas estivesse representada no mapa por um ponto P, quais seriam as coordenadas de P?
(b) Localize o ponto P no plano catesiano.

Exercício 11.32 Descubra a temperatura que, numericamente, têm o mesmo valor em graus Celsius e Fahrenheit.

Exercício 11.33 Qual dos pontos a seguir **não** satisfaz a relação $y = \frac{x}{x+1}$?

(A) $(0,0)$.
(B) $(-1/2, -1)$.
(C) $(1/2, 1/3)$.
(D) $(-1,1)$.
(E) $(-2,2)$.

Exercício 11.34 Considere os pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e P_7, situados em uma mesma reta, nessa ordem, mas não necessariamente igualmente espaçados. Escolha, messa mesma reta, um ponto qualquer P e calcule a soma

$$s = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3} + \overline{PP_4} + \overline{PP_5} + \overline{PP_6} + \overline{PP_7}.$$

O valor de s é o menor possível se, e somente se, o ponto P é:

(A) O ponto médio de P_1P_7.
(B) O ponto médio de P_2P_6.
(C) O ponto médio de P_3P_5.
(D) P_4.
(E) P_1.

Exercício 11.35 Quantos pontos de coordenadas inteiras estão sobre o segmento que une o ponto (0,0) ao ponto (12,9)?

Exercício 11.36 Os pontos $(-1/2, -1/2)$ e $(5/2,3/2)$ são vértices opostos de um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados. Quantos pontos de coordenadas inteiras esse retângulo contém em seu interior?

Exercício 11.37 Calcule a área do triângulo ABC cujos vértices têm coordenadas $A = (4,1)$, $B = (6,5)$ e $C = (1,4)$.

Nível 4

Exercício 11.38 No plano cartesiano, os vértices de um triângulo são os pontos $(-2, -1)$, $(2, -1)$ e $(x,9)$. Pergunta-se:

(a) Para que valor de x o triângulo é isósceles (isto é, tem dois lados iguais)?
(b) Quais os possíveis valores da área do triângulo?

Exercício 11.39 Dois gafanhotos dão pulos ao longo de um parapeito bastante comprido. Eles começam no mesmo ponto e seguem pulando, sempre num mesmo sentido e ao mesmo tempo. Cada pulo do gafanhoto maior vale o triplo de cada pulo do gafanhoto menor. Quando os gafanhotos derem seus centésimos pulos, o gafanhoto menor terá estado em quantas posições anteriormente já ocupadas pelo gafanhoto maior?

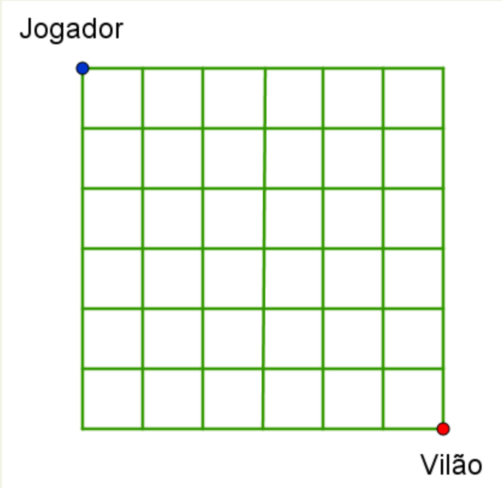
Exercício 11.40 Um relógio atrasa 2,4 minutos por dia. Ele marcou a hora certa pela última vez às 13h do dia 15 de março. No dia 21 de março, às 9h, esse relógio estava atrasado em quantos minutos?

(A) 12 minutos.
(B) 6 minutos e 6 segundos.
(C) 13 minutos e 6 segundos.
(D) 14 minutos.
(E) 18 minutos e 6 segundos.

Exercício 11.41 Em uma corrida de dez quilômetros, o primeiro colocado chegou dois quilômetros à frente do segundo colocado e quatro quilômetros à frente do terceiro colocado. Supondo que os corredores mantiveram velocidades constantes durante a corrida, quantos quilômetros o segundo colocado chegou à frente do terceiro?

Exercício 11.42 Alguns minutos após as $19h$, Pedro percebeu que os ponteiros do relógio formavam novamente um ângulo de $100°$. Que horas serão quando isso ocorrer?

Exercício 11.43 Num dos primeiros jogos de computador, aparecia na tela uma malha luminosa verde, como abaixo:



O jogo começava com o jogador representado por um ponto piscante azul situado em uma "esquina" da malha e o vilão representado por um ponto piscante vermelho, situado em outra "esquina" da malha (um possível par de posições iniciais é mostrado na figura). Um movimento permitido ao jogador era mover o ponto azul de uma esquina para outra adjacente, mas após ele fazer isso o vilão também se movia, também para uma esquina adjacente à que ocupava. O jogador perdia se o vilão conseguisse chegar, em seu movimento, à mesma esquina do jogador.

Se as posições iniciais são as mostradas na figura, faça os itens a seguir:

(a) Qual o número mínimo de jogadas que o jogador deve fazer para chegar ao canto oposto da malha (onde,a princípio, estava o vilão)?

(b) Apesar do item anterior, na situação mostrada na figura o jogador sempre perderá se o vilão utilizar uma estratégia adequada. Que estratégia pode ser essa?