TESTE COMENTADO
MATEMÁTICA

01

#Foco na Aprendizagem | 2021

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO

SISEDU
Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância
CED

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

FUNCAP

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Avaliação Diagnóstica
Matemática

Ensino Médio (2021.1)

SEDUC
Secretaria da Educação

Propósitos da Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica processual, cuja primeira etapa vem ocorrendo desde 15 de fevereiro último, é um dos principais elementos para o trabalho das escolas em 2021 e 2022. De fato, os resultados ajudarão a identificar lacunas ou avanços de aprendizagem em Matemática, norteando as iniciativas educacionais necessárias para um acompanhamento dos alunos que seja mais efetivo, personalizado e baseado em evidências pedagogicamente significativas e estatisticamente robustas.

Para tanto, a equipe do Programa Cientista-Chefe em Educação, em colaboração estreita com a Coordenadoria de Avaliação e Desenvolvimento Escolar para Resultados de Aprendizagem (COADE/SEDUC), esmerou-se em desenhar a avaliação, em seus pressupostos estatísticos e pedagógicos. O teste é baseado na Matriz dos Saberes, que incorpora e articula os descritores de avaliações externas, como SAEB e SPAECE, além das habilidades na matriz do ENEM, mas vai além de uma mera junção de matrizes, no sentido de que elucida toda a gradação lógica e cognitiva da Matemática Básica, nos níveis fundamental e médio, tanto no domínio do conhecimento quanto no domínio dos processos cognitivos.

A avaliação é um elemento transversal a todos as atividades do Ciclo de Fortalecimento e Recuperação das Aprendizagens, uma vez que são os diagnósticos extraídos dos dados que direcionam o planejamento curricular, as escolhas metodológicas e o uso eficiente e focalizado do material estruturado. A passagem do tratamento estatístico das evidências geradas na avaliação para uma legível interpretação pedagógica requer o uso de técnicas combinadas como a Teoria de Resposta ao Item (TRI) e, no caso do teste de Matemática, modelos diagnóstico-cognitivos e análise de componentes principais, inovações trazidas à rede estadual de Ensino Médio pelo Programa Cientista-Chefe.

Usando esse combinado de técnicas, identificamos os conhecimentos e habilidades que caracterizam quatro grupos de alunos na população dos que participaram do teste. Mais do que intervalos *fixos* de proficiência, o que define um grupo específico são os conjuntos **típicos** de saberes e habilidades contemplados nos itens que variam no intervalo de dificuldade - um dos parâmetros na TRI - equivalente ao intervalo da distribuição de proficiência dos alunos deste grupo. Observamos, ainda, a distribuição de respostas dos alunos nas alternativas de cada um desses itens e, por fim, quais *atributos* cognitivos são mobilizados em cada um dos itens cujas dificuldades caracterizam um dado grupo.

A tabela abaixo ajuda a fixar ideias e resulta da análise que descrevemos, sucintamente, acima. Em cada série, identificamos itens do teste cujas dificuldades variam em intervalos próximos aos intervalos de proficiência dos alunos. Dados esses itens, identificamos, por sua vez, os saberes e habilidades, na Matriz dos Saberes, relacionados a cada um deles.

Série	Saber.Habilidade	Saber.Habilidade	Saber.Habilidade	Saber.Habilidade
1ª Série	S02.H23	S04.H8	S06.H3	S06.H15
2ª Série	S02.H23	S04.H8	S06.H14	S06.H15
3ª Série	S02.H28	S04.H8	S06.H14	S06.H15

Tabela 1: Saberes característicos de níveis de desempenho por série

No caso da terceira série, por exemplo, os saberes e habilidades *característicos* de cada um dos grupos são

- **Nível 1**: Saber S02.H28. Formular e resolver problemas, motivados por diversos contextos e com recurso a diferentes procedimentos, em termos de operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e seus vários significados e representações.
- **Nível 2**: Saber S04.H8. Compreender e efetuar cálculos, bem como resolver problemas, que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais (e.g., divisão em partes proporcionais).
- **Nível 3**: Saber S06.H14. Formular modelos ou resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, em termos de (in)equações e sistemas de (in)equações lineares.
- **Nível 4**: Saber S06.H15. Compreender a noção de função como uma relação entre variáveis em que o valor de uma determina, de modo unívoco, o valor da outra.

Em suma, as evidências relevantes em nossa análise não são **apenas** as proporções de acertos e erros, uma das estatísticas descritivas da chamada Teoria Clássica dos Testes. Tampouco, como já mencionado, **não** nos restringimos apenas à classificação dos alunos em faixas de proficiência pré-definidas sem que tenhamos, necessariamente, uma inequívoca interpretação curricular ou pedagógica dessas faixas. Seguindo práticas internacionais, como no PISA, por exemplo, nosso diagnóstico é focado nos conhecimentos e habilidades (saberes e habilidades da Matriz, em nosso caso) que representam, tipicamente, o estado de desenvolvimento dos alunos de cada grupo tanto em termos dos conteúdos quanto dos aspectos cognitivos.

Percebemos, claramente, uma **progressão** de complexidade e dificuldade, na descrição acima, dos saberes e habilidades que caracterizam as dificuldades típicas em cada grupo: avançamos, não de modo linear, mas em uma *espiral ascendente* do domínio da Aritmética para a compreensão e utilização da noção de função, em seus matizes algébricos e geométricos. Na discussão dos itens que se segue, identificaremos alguns que exemplificam essa demarcação dos níveis de complexidade dentro da progressão curricular e cognitiva dos saberes acessados no teste.

Dentre os principais objetivos de um ciclo de avaliações diagnóstico-formativas estão reconhecer os conhecimentos e habilidades que melhor explicam o desempenho dos alunos e monitorar a progressão **qualitativa** de aprendizagem no sentido de que os alunos, ao longo dos ciclos, avancem, na Matriz dos Saberes, progressivamente, para a consolidação de habilidades de maior complexidade cognitiva e que envolvam *repertórios* mais amplos e mais profundos de conhecimento matemático. Essa estratégia de ler as informações da avaliação e, com isto, propor intervenções pedagógicas, está em consonância com as concepções mais modernas de avaliação formativa, como enunciado de forma muito clara por Daisy Christodoulou em sua obra *Making good progress: The future of assessment for learning*.

> *If we want to develop a certain skill, we must break that skill down into its component parts and help pupil to acquire the underlying mental model. Similarly, when developing assessments for formative purposes we need to beak down the skills and tasks that feature in summative assessments.*

A seguir, a(o) professora(or) encontra cada um dos itens expostos nos testes de 2021.1, com informações sobre o saber e habilidade envolvidos, o nível de dificuldade de 1 a 4, além de soluções, comentários sobre as alternativas e *dicas* metodológicas de interpretação das informações e de intervenção pedagógicas, muitas vezes com sugestões de uso do material estruturado e da Matriz de Conhecimentos Básicos (MCB-Mat). Como exemplo da associação entre os resultados da avaliação e prescrições de percursos curriculares em termos de *pré-requisitos* e *objetos de conhecimentos*, enumeramos os 12 itens com maior peso na variabilidade de desempenho dos alunos.

Item	Saber.Habilidade	Tópicos (MCB-Mat)
690	S02.H23	Médias aritméticas
1121	S06.H14	Equações lineares
654	S03.H9	Multiplicação de frações
1120	S06.H3	Retas no plano cartesiano
681	S04.H7	Variações percentuais
1122	S10.H13	Equações quadráticas
653	S07.H5	Área de triângulos
1109	S04.H6	Taxas de variação
657	S06.H17	Funções afins
1161	S06.H23	Equações lineares e funções afins

Tabela 2: Itens que mais afetaram o desempenho global

Elementos da Avaliação Diagnóstica

A tabela seguinte informa quais saberes e habilidades são acessadas em cada item dos testes da primeira, segunda e terceira séries do Ensino Médio. Para a descrição do saber e habilidade a partir de seu código, o leitor deve utilizar a Matriz dos Saberes. Na Matriz, os saberes e habilidades estão associados a habilidades da BNCC, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio. Além disso, alguns dos saberes estão associados a **descritores** das matrizes de referência do SAEB e do SPAECE bem como a habilidades da Matriz de Referência do ENEM.

Saberes avaliados nos itens

Item/Série	1ª Série	2ª Série	3ª Série	Item/Série	1ª Série	2ª Série	3ª Série
1	S01.H1	S06.H19	S06.H19	**14**	S07.H2	S08.H4	S08.H4
2	S02.H23	S02.H23	S10.H17	**15**	S02.H18	S02.H18	S02.H18
3	S02.H14	S10.H15	S10.H15	**16**	S06.H11	S06.H11	S06.H11
4	S03.H2	S03.H2	S03.H2	**17**	S09.H9	S09.H9	S09.H9
5	S02.H17	S02.H17	S14.H17	**18**	S04.H8	S04.H8	S04.H8
6	S03.H13	S03.H13	S03.H13	**19**	S03.H11	S03.H11	S03.H11
7	S03.H15	S03.H15	S03.H15	**20**	S09.H2	S06.H18	S06.H18
8	S03.H3	S03.H3	S03.H3	**21**	S06.H3	S06.H3	S06.H3
9	S02.H11	S06.H13	S06.H13	**22**	S04.H6	S04.H6	S04.H6
10	S02.H20	S02.H20	S02.H20	**23**	S04.H8	S04.H8	S04.H8
11	S04.H7	S04.H7	S04.H7	**24**	S04.H11	S04.H11	S04.H11
12	S07.H5	S07.H5	S07.H5	**25**	S06.H9	S06.H9	S06.H9
13	S07.H7	S07.H7	S07.H7	**26**	S03.H21	S03.H21	S03.H21

A próxima tabela informa os *níveis de dificuldade* o alguns *objetos de conhecimento* associados a itens do teste, identificados por seus códigos no SISEDU. Recomendamos que a(o) professora(or) observe que temas curriculares estão associados a esses itens, em cada faixa de dificuldade, de modo a orientar seu planejamento pedagógico a partir da Matriz dos Conhecimentos Básicos e dos materiais estruturados.

Níveis de dificuldade dos itens

Códigos de itens	Nível de dificuldade	Objetos de conhecimento
648	1	Sistema de numeração decimal
655	1	Operações com números naturais
690	1	Divisão em partes proporcionais
1159	1	Razões ou taxas de variação
654	1	Operações com frações
1121	2	Sistemas de equações lineares
1122	2	Resolução de equação quadrática
668	2	Múltiplos e divisores
936	3	Funções quadráticas (gráfico e raízes)
959	3	Funções afins (representações gráfica e algébrica)
1120	3	Retas no plano cartesiano
653	3	Áreas de figuras planas com uso de coordenadas
681	3	Variação percentual (acréscimos simples)
657	3	Funções afins (representação algébrica em um contexto)
960	3	Médias aritméticas
633	3	Localização de números racionais na reta
652	3	Cálculo de áreas por comparação
933	4	Cálculo de perímetros com uso de coordenadas
1161	4	Modelo envolvendo taxas de variação
1110	4	Divisão proporcional/equações lineares
644	4	Potências e crescimento geométrico
1160	4	Taxas de variação

Atributos Diagnóstico-Cognitivos

Cada um dos 26 itens do teste está associado a um ou mais dos seguintes atributos, que compreendem aspectos relevantes do pensamento e da linguagem matemáticas.

Atributo A1
Ler, interpretar e expressar informações quantitativas apresentadas em tabelas, gráficos de barras ou colunas e outros contextos e suportes.

Atributo A2
Efetuar cálculos envolvendo as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e as relações entre essas operações

Atributo A3
Modelar e resolver problemas, motivados por diversos contextos e com recurso a diferentes procedimentos, em termos de relações, lineares ou não entre variáveis

Atributo A4
Calcular, comparar ou estimar grandezas (e.g, geométricas, como perímetro, área ou volume), em diversos contextos, problemas e aplicações

Atributo A5
Reconhecer e manipular relações algébricas entre variáveis e suas representações geométricas

Item 01

Saber	S01 - Reconhecer e utilizar características do sistema de numeração posicional decimal
Habilidade	S01.H1 - Relacionar a forma escrita por extenso dos números naturais e sua representação por meio de algarismos.
Nível de dificuldade	1
Item do Teste	Código 648

Exercício 1 Uma missão tripulada ao planeta Marte é, ainda, um desafio científico e tecnológico, a começar pelas grandes distâncias a serem superadas. A distância da Terra à Marte, medida em uma determinada hora e dia do ano, é aproximadamente igual a duzentos e quatro milhões, novecentos e vinte e seis mil quilômetros.

Fonte: **The Sky Live**. Disponível em: https://theskylive.com/how-far-is-mars.

Acesso em: 12 de abril de 2020.

Qual a forma correta de escrever, em quilômetros, esta distância no sistema decimal?

A) 200.492.600
B) 204.090.026
C) 204.900.260
D) 204.926.000
E) 240.926.000

Descrição das Alternativas

A) O aluno identifica, erradamente, a alternativa que parece expressar a quantia 200 milhões, sem reconhecer que, por exemplo, os 4 milhões da cifra devem aparecer também na classe dos milhões.

B) O aluno confunde as ordens de centena de milhar e dezena de milhar.

C) O aluno identifica, erradamente, a alternativa que parece expressar a quantia 900 mil, sem reconhecer que, por exemplo, os 26 mil da cifra devem aparecer também na classe dos milhares.

D) **Resposta correta** (73% de respostas).

E) O aluno tem dificuldades de entendimento sobre a diferença posicional entre dezenas e unidades de milhão.

Nenhuma das alternativas incorretas teve percentual relevante de acerto ou consideravalmente maior que as outras.

Solução e Comentários

A questão mobiliza os conhecimentos do aluno com respeito ao sistema posicional decimal. A distância informada no enunciado é

$$204 \text{ milhões} + 900 \text{ mil} + 26 \text{ mil} = 204.000.000 + 900.000 + 26.000 = 204.926.000.$$

O entendimento do sistema posicional decimal é pré-requisito para compreensão e uso corretos dos algoritmos de cálculo de operações aritméticas, por exemplo.

O atributo que associamos a esta questão foi o A1, uma vez que requer a expressão numérica correta de uma informação expressa no enunciado. A questão envolve a habilidade H1, competência de área 1, na Matriz de Referência do ENEM, a saber, *reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais*.

#Fica a Dica

A ênfase da questão recai sobre a compreensão do sistema posicional decimal, em especial do papel do algarismo 0 da noção de valor posicional dos algarismos. Esse entendimento é indispensável ao uso correto e reflexivo dos algoritmos das operações aritméticas. Por outro lado, é pré-requisito para a expansão decimal dos números racionais, um ponto que representa dificuldades de aprendizagem.

A questão abre ao professor possibilidades de evocar contextos científico-tecnológicos interessantes, bem difundidos nas mídias, para *resgatar* conceitos básicos do sistema de numeração decimal e, gradualmente, articulá-los ao estudo da notação científica, com as conceitos de ordens de grandeza, algarismos significativos, aproximações, arredondamentos e erros. A este propósito, podem ser desenvolvidas sequência de atividades de avaliação formativa sobre distâncias relativas de planetas, como mudam ao longo do ano, que trajetórias descrevem, entre outros tópicos. O próprio site Sky Live ou a página da NASA trazem rico material de apoio neste sentido. Algumas das habilidades da BNCC mobilizadas em roteiros desta natureza são EM13MAT103 e EM13MAT313. Recomendamos ao professor que possa utilizar o Caderno 1 (Aritmética Elementar 1) do Material Estruturado, especialmente sua seção 1.1.

Item 02

Saber	S02 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.
Habilidade	S02.H23: Utilizar procedimentos e efetuar cálculos envolvendo as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais ou inteiros e as relações entre essas operações.
Nível de dificuldade	1
Item do Teste	Código 655

Exercício 2 Cícero viaja três vezes por mês de Fortaleza à cidade de Jardim, em viagens de ida e volta. Para isso, costuma percorrer de ônibus a distância de 551 quilômetros de Fortaleza a Juazeiro do Norte. Depois, pega uma *van* de Juazeiro do Norte a Jardim, em um percurso de 48 quilômetros de distância.

Qual distância total, em quilômetros, Cícero percorre, por mês, nestas viagens de ida e volta?

A) 1.198
B) 1.653
C) 1.797
D) 3.306
E) 3.594

Descrição das Alternativas

A) Esta opção é escolhida pelo aluno que, possivelmente, calculou apenas um percurso total de ida e volta (12% de respostas).
B) Neste caso, o aluno computa apenas o percurso total de ida (ou de volta), nas três viagens, mas apenas considerando os deslocamentos de Fortaleza a Juazeiro do Norte.
C) Neste caso, o aluno computa apenas o percurso total de ida (ou de volta), nas três viagens (22% de respostas).
D) A escolha desta opção pode significar que o aluno não considerou os deslocamentos de Juazeiro do Norte a Jardim, multiplicando por $2{\times}3$ apenas os 551 quilômetros de Fortaleza a Juazeiro do Norte.
E) **Resposta correta** (53% de respostas).

Solução e Comentários

A questão mobiliza os conhecimentos do aluno com respeito a operações aritméticas com naturais, especialmente o fato de que a multiplicação consiste na adição repetida de parcelas iguais. De fato, deve ser observado que cada viagem corresponde a

$$2{\times}(551 + 48) = 2{\times}599 = 1.198 \text{ quilômetros.}$$

As três viagens mensais somam, portanto,

$$3{\times}2{\times}599 = 3{\times}1.198 = 3.594 \text{ quilômetros.}$$

Note que, alternativamente, a conta poderia ser efetuada muito mais rapidamente, considerando que $599 = 600 - 1$ e calculando

$$6{\times}599 = 6{\times}(600 - 1) = 3.600 - 6 = 3.594 \text{ quillômetros.}$$

Os atributos que associamos a esta questão foram A2 e A3, uma vez que o aluno deve modelar a situação descrita no enunciado em termos de operações aritméticas com números naturais e, em seguida, efetuá-las corretamente. A questão envolve as habilidades H1 e H3, competência de área 1, na Matriz de Referência do ENEM, a saber, *reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais* e *resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos*.

#Fica a Dica

A questão explora o uso correto e eficiente das propriedades operatórias da adição e multiplicação, como, por exemplo, a distributividade da multiplicação em relação à adição. Essas propriedades operatórias justificam os algoritmos das operações aritméticas e, em problemas como esse, quando corretamente empregadas, permitem simplificar os cálculos. Recomendamos ao professor que possa utilizar o Caderno 1 (Aritmética Elementar 1) do Material Estruturado, especialmente os capítulos 1 e 2. A compreensão e uso correto e reflexivo das propriedades e procedimentos das operações aritméticas são determinantes para o desenvolvimento da competência específica 1 na área de Matemática e Suas Tecnologias na BNCC. Os exercícios nos cadernos de Aritmética Elementar, 1 e 2, devem ser fortemente utilizados para consolidar, no aluno, o uso destro, correto, inteligente e crítico dos algoritmos: não apenas executá-los com correção, mas compreendê-los, justificá-los e, mesmo, adaptá-los em problemas que exijam procedimentos de cálculo diferentes dos usuais ou em que novas estratégias sejam mais eficientes e efetivas do que as tradicionais.

Item 03

Saber	**S02 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.**
Habilidade	S02.H14: Utilizar as propriedades das operações (comutatividade, associatividade, distributividade) para efetuar cálculos aritméticos.
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 664

Exercício 3 Isaac, por engano, digitou 101.110.011 ao preencher uma planilha. A quantidade correta seria **cento e um milhões, onze mil, cento e dez.**

Qual a diferença entre a quantidade digitada e a quantidade correta?

A) 101.101
B) 100.001

C) 99.901
D) 99.001
E) 98.901

Análise das Alternativas

A) (21% de respostas) O aluno emprega erradamente o algoritmo da subtração efetuando os seguinte cálculos

$$\begin{array}{r} 101.110.011 \\ -\ 101.011.110 \\ \hline 101.101 \end{array}$$

B) O aluno escreve a cifra enunciada por extenso como 101.011.010 e calcula, a partir daí, a diferença, mas seguindo um procedimento errado, a saber,

$$\begin{array}{r} 101.110.011 \\ -\ 101.011.010 \\ \hline 101.001 \end{array}$$

C) O aluno emprega erradamente o algoritmo da subtração em termos de, por exemplo, “pedir emprestado”, efetuando os seguinte cálculos

$$\begin{array}{r} 101.110.011 \\ -\ 101.011.110 \\ \hline 99.901 \end{array}$$

D) O aluno escreve a cifra enunciada por extenso como 101.011.010 e calcula, a partir daí, a diferença.
E) **Resposta correta** (55% de respostas).

Solução e Comentários

Observamos que os números 101.110.011 (digitado por Isaac) e 101.011.110 (o que ele quisera digitar), diferem, na escrita, pela posição relativa dos algarismos que estão na classe dos milhares e na classe das unidades. O cálculo da diferença entre esses números pode gerar algumas dificuldades, caso o aluno tente aplicar, de modo irrefletido e mecânico, os algoritmos mais costumeiros de subtração, com os quais certamente se familiarizou no Ensino Fundamental, a exemplo do reagrupamento ou decomposição, referido, costumeiramente, como “tomar emprestado”. O algoritmo de subtração pode ser efetuado corretamente do seguinte modo, por exemplo:

$$\begin{aligned} &101.110.011 - 101.011.110 = 101.000.000 + 110.011 - 101.000.000 - 11.110 \\ &\quad = 110.011 - 11.110 = 98.000 + 12.011 - 11.110 = 98.000 + 11.000 - 11.000 + 1.011 - 110 \\ &\quad = 98.000 + 901 = 98.901. \end{aligned}$$

O atributo que associamos a esta questão foi o A2, dado que pretendíamos observar o uso dos procedimentos algorítmicos, não necessariamente os costumeiramente ensinados e empregados, na execução do cálculo. Trata-se de distinguir entre a mera aplicação correta de um procedimento usual e o entendimento das razões pelas quais os algoritmos funcionam, o que permite maior *flexibilidade* na elaboração ou escolha da técnica a ser usada em cada problema, tornando a solução mais eficiente. A questão envolve as habilidades H1 e H3, competência de área 1, na Matriz de Referência do ENEM, a saber, *reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais* e *resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos*. Em termos da Escala de Proficiência do SAEB, é evidente que a questão (e o saber) estão relacionados à habilidade *resolver problemas utilizando operações fundamentais com números naturais* na descrição do Nível 3 dessa escala.

#Fica a Dica

O Caderno 1 (Aritmética Elementar I) do Material Estruturado traz, especialmente nas seções 1.2 e 1.3, uma discussão bastante detalhada dos algoritmos da subtração por meio de exemplos que *explicam* os algoritmos mais corriqueiros e direciona o aluno a elaborar e testar algoritmos válidos a partir de uma compreensão melhor consolidada do sistema decimal e das propriedades das operações.

Item 04

Saber	S03 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.
Habilidade	S03.H2: Reconhecer e expressar frações, expressas em diferentes formas e suportes, em diversos contextos do cotidiano e científicos-tecnológicos.
Nível de dificuldade	Questão anulada
Item do Teste	Código 1107

Exercício 4 A Sociedade Brasileira de Pediatria recomenda limitar o tempo máximo de telas e jogos de *videogames* a três horas por dia, para adolescentes com idades entre 11 e 18 anos.

Fonte: **Sociedade Brasileira de Pediatria**. Disponível em: https://www.sbp.com.br/fileadmin/user_upload/_22246c-ManOrient_-__MenosTelas__MaisSaude.pdf.

Acesso em: 16 de janeiro de 2021. Adaptado.

Este tempo máximo, se usado todos os dias, representa, dos 11 aos 18 anos, um total de horas que equivale a

A) 1 ano.
B) 3 anos.
C) 6 anos.
D) 7 anos.
E) 8 anos.

Análise das Alternativas

O enunciado pode ter gerado ambiguidade, uma vez que a contagem do intervalo de 11 a 18 poderia ser feita em termos do intervalo de tempo, isto é, 7 anos, como natural, ou contando-se todas as faixas etárias (dos 10 aos 11, dos 11 aos 12, e assim por diante) registradas nesse intervalo, que são 8. O contexto não deixa claro se devemos considerar 7 anos ou 8 anos de intervalo de tempo. Esta potencial ambiguidade refletiu-se certamente em um posicionamento inadequado deste item na escala de dificuldade.

Item 05

Saber	**S02 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.**
Habilidade	S02.H17: Reconhecer múltiplos e divisores de um dado número natural, utilizando, em particular, tábuas de multiplicação e critérios de divisibilidade na resolução de problemas.
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 668

Exercício 5 Fernando, dono de um restaurante, foi ao mercado comprar feijão, vendido em pacotes de um quilograma. Na compra, ele gastou todo o dinheiro que levou.

Se Fernando levou ao mercado mais de R$110,00 e menos de R$120,00 e o preço de cada pacote de feijão é R$6,00, qual foi o valor da compra?

A) R$ 111,00
B) R$ 112,00
C) R$ 114,00
D) R$ 116,00
E) R$ 118,00

Análise das Alternativas

A) O aluno marcou uma opção que apresenta um múltiplo de 3 que não é múltiplo de 2.
B) O aluno marcou uma opção que apresenta um múltiplo de 2 que não é múltiplo de 3.
C) **Resposta correta** (73% de respostas).
D) Como o último algarismo dessa opção é o número 6, o aluno pensou que esta fosse a opção correta.
E) O aluno considera que, como 18 é múltiplo de 6, 118 é também múltiplo de 6.

Solução e Comentários

A questão mobiliza os conhecimentos do aluno com respeito a noção de múltiplos de um dado número natural: no problema, como Fernando gastou todo o dinheiro com feijão e não recebeu troco, a quantia que ele levou ao mercado é um múltiplo de 6. Como o único múltiplo de 6 entre 110 e 120 é 114, essa é a quantia que Fernando levou consigo.

O atributo que associamos a esta questão foi o A2, dado que pretendíamos observar como o aluno mobilizaria conhecimentos básicos a respeito de múltiplos e divisores para modelar o problema, reformulando-o em uma questão de Aritmética. Embora seja um item tecnicamente simples, requer esta transferência do conhecimento para resolver um problema em que o contexto não explicita que se deva usar a noção de múltiplos e divisores. A questão envolve as habilidades H1 e H3, competência de área 1, na Matriz de Referência do ENEM, a saber, *reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais* e *resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos*. Em termos da Escala de Proficiência do SAEB, é evidente que a questão (e o saber) estão relacionados à habilidade *resolver problemas utilizando operações fundamentais com números naturais* na descrição do Nível 3 dessa escala.

#Fica a Dica

A(o) professora(or) pode usar este item para retomar critérios de divisibilidade, observando que múltiplos de 6 devem ser pares múltiplos de 3 e que, por sua vez, 114 é um múltiplo de 3 seja porque $114 = 120 - 6$ ou $114 = 99 + 15$, seja porque

$$114 = 100 + 10 + 4 = 99 + 1 + 9 + 1 + 4 = 99 + 9 + (1 + 1 + 4),$$

isto é, a soma de seus algarismos é múltiplo de 3, justificando uma dessas "regras" que nos habituamos a seguir sem, muitas vezes, deduzí-las de fatos mais fundamentais.

O material estruturado, em seu Caderno 1 - Aritmética Elementar I, na versão para professores, traz uma discussão detalhada sobre múltiplos e divisores: este estudo começa mostrando os padrões formados pelos múltiplos de um dado número natural na reta numérica, passando pela noções de divisão exata, múltiplos e divisores comuns, divisões com restos (e o algoritmo euclidiano da divisão), para culminar no estudo de frações. Essa sequência deve ser fortemente explorada no planejamento das aulas, visto que representa uma das maiores fontes de dificuldade em toda a trajetória acadêmica de nossos alunos.

Questão 06

Saber	S03 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.
Habilidade	S03.H13: Efetuar, segundo algoritmos corretos e justificados, operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) de frações.
Nível de dificuldade	Questão anulada
Item do Teste	Código 671

Exercício 6 Nesta temporada longe da escola, David tem mantido uma rotina de estudos, realizando atividades de estudo domiciliar durante $\frac{1}{6}$ do dia. No entanto, ainda gasta cerca de $\frac{1}{4}$ do dia nas redes sociais.

Que fração total do dia David ocupa com essas duas atividades?

A) $\frac{1}{24}$
B) $\frac{1}{10}$
C) $\frac{2}{12}$
D) $\frac{2}{10}$
E) $\frac{5}{12}$

Análise das Alternativas

Nenhuma das alternativas é a correta, ou seja, o item **não tem gabarito**, conforme a versão disponível *online* ou em arquivo PDF.

A introdução da palavra "restante" altera por completo a resolução do problema, visto que haveria $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ como fração "restante" do dia, do qual calcularíamos $\frac{1}{4} \times \frac{5}{6}$.

No processo de elaboração e posterior revisão dessa questão, ocorreram alguns erros técnicos da equipe, gerados por conflitos de versões no processo de edição e alimentação do SISEDU. Ressaltamos que esses erros não alteraram os procedimentos estatísticos e computacionais da avaliação. Ou seja, não afetaram a produção dos resultados, dos boletins e das devolutivas às escolas e professores. Há as inevitáveis perdas de informação pedagógica, mas não foram tão significativas por contarmos com itens redundantes nas especificações dos saberes e habilidades.

Para atenuar os problemas gerados na aplicação entre alunos, professores e gestores, descrevemos, acima, o erro cometido. Reforçamos que não será necessária qualquer ação do professor/escola/CREDE/SEFOR a este respeito, visto que os itens defectivos serão ANULADOS e, portanto, não serão considerados na análise, nem estatística nem pedagógica.

Item 07

Saber	S03 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.
Habilidade	Saber S03.H15: Compreender e efetuar, segundo algoritmos corretos e justificados, a multiplicação ou divisão de números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais.
Nível de dificuldade	1
Item do Teste	Código 654

Exercício 7 David usa $\frac{1}{6}$ do dia para realizar atividades de estudo domiciliar enquanto Roger, seu colega, dedica um tempo $\frac{3}{2}$ vezes maior para essas atividades.

Quanto tempo por dia, em horas, Roger utiliza para o estudo domiciliar?

A) 4
B) 6
C) 9
D) 12
E) 16

Análise das Alternativas

A) O aluno faz os cálculos corretamente, mas entende a resposta $1/4$ do dia como 4 horas.
B) **Resposta correta** (63% de respostas).
C) (10% de respostas) O aluno interpreta, erradamente, que o cálculo a fazer é

$$\frac{3}{2}\times 6 = 9 \text{ horas.}$$

certamente por equivocar-se em tomar $1/6$ do dia como 6 horas.
D) (12% de respostas) O aluno julga que o termo "maior" refere-se a somar uma quantidade e calcula, erradamente,

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ do dia.}$$

E) O aluno calcula, erradamente,

$$\frac{2}{3}\times 24 = 16 \text{ horas.}$$

Solução e Comentários

O tempo que Roger usa é dado por

$$\frac{3}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ do dia,}$$

ou seja, 6 horas.

O atributo que associamos a esta questão foi o A2, dado que pretendíamos observar como o aluno efetua operações aritméticas envolvendo, desta vez, números racionais em sua representação fracionária. A questão envolve as habilidades H1 e H3, competência de área 1, na Matriz de Referência do ENEM, a saber, *reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais* e *resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos*.

#Fica a Dica

A questão requer o entendimento básico da multiplicação de frações que, junto às demais operações aritméticas com números racionais, representa algumas das mais patentes dificuldades conceituais e procedimentais dos(as) alunos(as). Recomendamos que questões desse tipo ensejem a apresentação de modelos geométricos e pictóricos (por exemplo, barras, "pizzas" e, principalmente, segmentos da reta numérica) das frações e de seu produto. A este propósito, recomendamos o estudo da seção 3, particularmente dos exercícios 3.2 e 3.3, do Caderno 1 (Aritmética Elementar I) e o Caderno 2 (Aritmética Elementar II).

Questão 08

Saber	**S03 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.**
Habilidade	Saber S03.H03: Determinar frações (e.g., metade, um terço, um quinto, um décimo, um centésimo, etc.) de um número inteiro, associando-as às noções de divisão, fatoração ou partes de um todo.
Nível de dificuldade	Questão anulada
Item do Teste	Código 1158

Exercício 8 Segundo dados da FUNCEME, o açude de Orós armazenava, no fim de janeiro de 2020, cerca de 95.640.000 metros cúbicos de água, ou seja, aproximadamente $\frac{1}{20}$ de sua capacidade total.

Fonte: **FUNCEME - Portal Hidrológico do Ceará**. Disponível em: http://www.funceme.br/produtos/script/acudes_e_rios/Boletim_diario_nivel_acudes/.

Acesso em: 23 de janeiro de 2020.

Quantos metros cúbicos de água, portanto, o açude teria que receber para atingir um quarto de sua capacidade total?

A) 478.200.000
B) 471.500.000
C) 49.300.000
D) 38.256.000
E) 23.910.000

Análise das Alternativas

Nenhuma das alternativas é a correta, ou seja, o item **não tem gabarito**, conforme a versão disponível *online* ou em arquivo PDF.

Observe que, para que que atinja $\frac{1}{4}$ da capacidade, o açude teria que ter $5\times\frac{1}{20}$ da capacidade atual, portanto, 4 vezes mais do que esta capacidade, ou seja, $4\times 95.640.000 = 382.560.000$ milhões de metros cúbicos. A letra D) seria o gabarito, não fosse o erro gerado pela omissão de algarismo 0 na edição. Sobre o fato de que esta questão **não** foi utilizada nas análises estatísticas e pedagógicos, remetemos o leitor ao comentário da questão 06.

Item 09

Saber	**S02 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.**
Habilidade	Saber S02.H11: Utilizar, de modo correto e justificado, procedimentos e algoritmos de subtração de números naturais ou inteiros.
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 677

Exercício 9 O comércio eletrônico, que inclui compras pela *internet*, tem se expandido, ano após ano. A tabela abaixo registra o volume de compras no comércio eletrônico, por minuto, em três anos seguidos.

Ano	Dólares gastos por minuto
2017	751.522
2018	862.823
2019	996.956

Fonte: **Visual Capitalist**. Disponível em: https://www.visualcapitalist.com/what-happens-in-an-internet-minute-in-2019/.

Acesso em: 11 de abril de 2020.

De 2017 a 2019, o aumento do volume de compras pela *internet*, por minuto, foi igual a

A) 134.133 dólares.
B) 245.434 dólares.
C) 996.956 dólares.
D) 1.748.478 dólares.
E) 2.611.301 dólares.

Análise das Alternativas

A) O aluno interpreta que deve calcular a diferença entre o valor em 2019 e o imediatamente anterior, isto é,

$$996.956 - 862.823 = 134.133$$

B) **Resposta correta** (34% de respostas).
C) O aluno interpreta, pelo comando, que deve identificar o valor atual, isto é, aquele correspondente à 2019.
D) O aluno interpreta que o aumento é dado pela soma dos valores referentes a 2017 e 2019.
E) (42% de respostas) O aluno interpreta que o aumento é dado pela soma dos valores referentes a 2017, 2018 e 2019.

Solução e Comentários

O resultado corresponde ao resultado da subtração

$$996.956 - 751.522 = 245.434.$$

Note que a solução não depende do cálculo exato e pode ser obtida por um mero arredondamento, como em

$$1.000.000 - 750.000 = 250.000.$$

O nível de dificuldade da questão, que é maior do que seria esperado, pode ser explicado pelo fato de que a alternativa E) funcionou como um **distrator**, certamente pela interpretação do comando em termos de compreender "aumento" como "acúmulo" ao longo dos 3 anos da série na tabela.

Os atributos que associamos a esta questão foram A1 e A2, também relacionados às habilidades H1 e H3, competência de área 1, na Matriz de Referência do ENEM, e ao Nível 3 da Escala de

Proficiência do SAEB

#Fica a Dica

Importante explorar, a partir de questões como essa, estratégias de aproximação, arredondamento e cálculo mental que possam ser efetivas ferramentas no dia-a-dia e em diversos contextos e problemas. O Material Estruturado, em seus Cadernos 1 e 2, traz atividades que tratam dessas técnicas, pouco utilizadas no ensino usual de Aritmética, mas contempladas na BNCC (vide habilidade EM13MAT313, por exemplo).

Item 10

Saber	**S02 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.**
Habilidade	Saber S02.H20: Compreender a noção de potências naturais de números inteiros e efetuar cálculos envolvendo essas potências.
Nível de dificuldade	4
Item do Teste	Código 644

Exercício 10 Os cientistas usam modelos matemáticos para estudar como uma doença causada por vírus se espalha em uma população, usando dados sobre contágio. Em um modelo bastante simples, suponhamos que o número de pessoas contagiadas dobra a cada cinco dias.

Sendo assim, havendo 512 contagiados em um dado dia, quantos haverá 20 dias depois?

A) 2.048
B) 2.560
C) 4.096
D) 8.192
E) 10.240

Análise das Alternativas

A) (22% de respostas) O aluno percebe que, em 20 dias, precisa contabilizar 4 aumentos, mas calcula, erradamente,

$$512\times\frac{20}{5} = 512\times 4 = 2.048.$$

B) O aluno multiplica o valor inicial, 512, por 5, obtendo 2.560.

C) O aluno entende a progressão do contágio como sendo aritmética e calcula, simplesmente,

$$512\times(\underbrace{2+\ldots+2}_{\text{4 vezes}}) = 512\times 8 = 4.096.$$

D) **Resposta correta** (33% de respostas).

E) (28% de respostas) De modo conceitualmente falho, o aluno entende que deve multiplicar o número de dias pelo número inicial de contagiados, ou seja,

$$512 \times 20 = 10.240.$$

Solução e Comentários

Inicialmente, observamos que 20 dias corresponde a quatro intervalos de 5 dias. Logo, iniciando com 512 casos de contágio, a progressão, 20 dias depois, é dada por

$$512 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512 \times 2^4.$$

Assim, o número de contagiados, 20 dias depois do início da contagem, é igual a

$$512 \times 2^4 = 8.192 \text{ contagiados.}$$

Os atributos que associamos a esta questão foram A2 e A3, dado que pretendíamos observar como o aluno modelaria o problema utilizando potências naturais de números naturais. A questão envolve, agora, as habilidades H1, H3, H4 e H17, competências das áreas 1 e 2, na Matriz de Referência do ENEM. Em termos da Escala de Proficiência do SAEB, avançamos para habilidades descritas no Nível 5, a exemplo de "resolver problema envolvendo operações, além das fundamentais, com números naturais". Além disso, o item contempla elementos que serão essenciais ao desenvolvimento de tópicos como progressões geométricas e funções exponenciais, associados a descritores como D22, D27 e D29 da Matriz de Referência do SAEB.

#Fica a Dica

O(a) professor(a) pode elaborar sequências didáticas, partindo de questões como essa, que retomam conceitos e propriedades básicas da potenciação de números naturais, e enveredando por discussões sobre crescimento linear *versus* crescimento geométrico, colocando gradualmente ideias fundamentais sobre progressões geométricas e funções exponenciais. Parece oportuno, a este propósito, tratar dos modelos de crescimento populacional, da difusão de informações e, infelizmente, patógenos em uma população, e assim por diante. Trata-se de elaborar roteiros que recuperem aprendizagens, mas conectem o aluno a contextos e aplicações muito atuais, que passam por Ciência de Dados, Epidemiologia e outras áreas. Veja, por exemplo, https://www.youtube.com/watch?v=Kas0tIxDvrg ou https://www.youtube.com/watch?v=wNJVvwhU3a0

Item 11

Saber	S04 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
Habilidade	Saber S04.H07: Resolver problema que envolva porcentagens.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 681

Exercício 11 De agosto a novembro de 2019, o preço da carne bovina no Ceará aumentou cerca de 50%. Porém, de novembro a dezembro, o preço diminuiu 35% em média.

Fonte: **Diário do Nordeste**. Disponível em: https://diariodonordeste.verdesmares.com.br/editorias/negocios/online/valor-da-carne-bovina-segue-em-ritmo-de-estabilizacao-no-ceara-1.2190945.

Acesso em: 19 de janeiro de 2019. (Adaptado)

Portanto, se um quilo de carne custava R$ 20,00 em agosto de 2019, quanto passou a custar em dezembro de 2019?

A) R$ 10,50
B) R$ 13,00
C) R$ 19,50
D) R$ 23,00
E) R$ 30,00

Análise das Alternativas

A) O aluno calcula, erradamente, $20 \times (1 + 0{,}5) \times 0{,}35$, obtendo R$ 10,50.
B) (20% de respostas) O aluno aplica, certamente por dificuldade de interpretação, apenas o segundo percentual, de desconto, obtendo: $20 \times (1 - 0{,}35) = 20 \times 0{,}65 = 13$.
C) **Resposta correta** (56% de respostas).
D) O aluno considera que a variação percentual final é, simplesmente, a subtração das taxas percentuais, isto é,
$$50 - 35 = 15\%.$$
Em seguida, aplica esta percentual ao preço original, obtendo $20 \times 1{,}15 = 23$ reais.
E) O aluno aplica apenas o percentual, inicial, de aumento, obtendo $20 + 0{,}5 \times 20 = 30$.

Solução e Comentários

O aumento, inicialmente, levou o preço do quilo de carne a

$$20 \times (1 + 0{,}5) = 20 + 10 = 30 \text{ reais.}$$

Na sequência, com um percentual de 35% de diminuição, temos

$$30 \times (1 - 0{,}35) = 30 \times 0{,}65 = 19{,}50 \text{ reais.}$$

Os atributos que associamos a esta questão foram A2 e A3, dado que pretendíamos observar tanto a modelagem correta em termos de variações percentuais quanto o uso adequado dos operações com decimais ou frações (centesimais). Com esta questão, avançamos na Matriz de Referência do ENEM rumo a habilidades na competência de área 4, particularmente H15 e H16. Na Escala de Proficiência do SAEB, nos situamos no Nível 3, com habilidades como "determinar um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste" ou, ainda, no Nível 5, representado pela habilidades descrita por "determinar um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste", visto que a solução passa, implícita ou explicitamente, pela determinação da variação percentual total. Por fim, o item contempla elementos que serão essenciais ao desenvolvimento de tópicos como a Matemática Financeira (e, obviamente, ao estudo de noções de acréscimos simples ou compostos), associados a descritores como D15 e D16 da Matriz de Referência do SAEB.

#Fica a Dica

O Caderno 2 (Aritmética Elementar 2) prepara as bases para o estudo das representações decimais de números racionais e o Caderno 5 (Razões, Proporções e Equações e Funções Lineares) o retoma no contexto da Proporcionalidade, com ênfase em aplicações, particularmente ao uso de porcentagens na modelagem de acréscimos simples ou compostos. Recomendamos, fortemente, o uso desse materiais de modo que a(o) professora(or) estruture sequências didáticas e sequências de tarefas que articulem, de modo encadeado, os seguintes temas: equivalência de frações; explicação da relação de proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

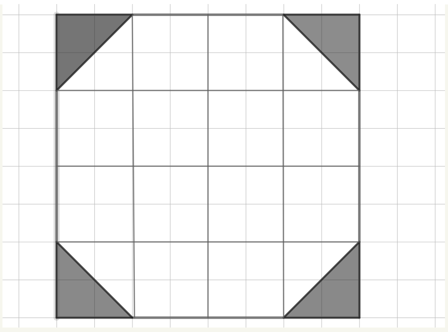
em termos de equivalência entre frações, posto que a "propriedade da igualdade dos produtos dos meios pelos extremos" nada é mais do que a equivalência de frações acima após a multiplicação de ambos os lados da igualdade por bd, por exemplo; a interpretação da proporção como igualdade de taxas de variação; a interpretação geométrica da proporção e da igualdade de taxas de variação em termos da declividade de uma reta no plano, com a ajuda de relações de semelhança de triângulos; a relação entre declividades das retas e condições de existência e unicidade de soluções de sistemas de 2 equações a 2 variáveis; e, por fim, ou simultaneamente, a apresentação de retas no plano em termos de sua equação cartesiana ou de funções afins.

Este circuito oferece possibilidades de conectar a retomada de conhecimentos básicos sobre a representação fracionária de números racionais ao estudo das funções, dos sistemas lineares ou da Geometria Analítica, conforme a série.

Item 12

Saber	**S07 - Compreender e medir grandezas geométricas de figuras geométricas planas.**
Habilidade	Saber S07.H05: Compreender a noção de área de figuras planas.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 652

Exercício 12 A prefeitura da cidade de Sabiá construirá uma praça no bairro de Santa Luzia, na forma de um quadrado. Veja o esboço do projeto na figura, em que o quadrado maior representa a praça e, em seu interior, a parte sombreada representa o jardim.



Quantas vezes a medida da área total da praça é maior do que a medida da área ocupada pelo jardim?

A) 4
B) 8
C) 12
D) 14
E) 16

Análise das Alternativas

A) O aluno concluiu que a área do jardim corresponde a quatro quadrados menores.
B) **Resposta Correta** (48% de respostas).
C) O aluno considerou como resposta a quantidade de quadrados inteiramente brancos.
D) (21% de respostas) O aluno considerou a diferença entre a área da praça e a área do jardim, interpretando erradamente a sentença "quantas vezes".
E) O aluno concluiu que a área do jardim corresponde a um quadrado menor.

Solução e Comentários

A área ocupada pelo jardim corresponde à área de dois dos quadrados menores que formam a malha quadriculada, enquanto a área total da praça corresponde à área de 16 desses quadrados. Portanto, a área total da praça é 16:2=8 vezes a área ocupada pelo jardim.

Os atributos que associamos a esta questão foram A2 e A4, dado que envolve operações aritméticas em um contexto geométrico. De fato, a questão pode ser pedagogicamente explorada nos dois sentidos: partindo da geometria, esclarece a comparação ou multiplicação de frações, caso atribuamos à área total o papel de unidade de medida de área. Sendo assim, teríamos modelos geométricos para frações como $1/32, 1/16, 1/4$, dentre outras. Do ponto de vista estritamente geométrico, o item **não** depende da memorização ou da destreza no uso de "fórmulas" de área e afins, mas tão-somente do entendimento da noção de área e do uso de movimentos geométricos que, por rearranjo das "peças" em que a figura seja decomposta, permitam calcular facilmente as áreas.

Com esta questão, lidamos com as competências de área 2 e 3 na Matriz de Referência do ENEM, expressa em habilidades como H8, H9 e H11. Na Escala de Proficiência do SAEB, esse problema é naturalmente relacionado à habilidade "resolver problemas envolvendo área de uma região composta por retângulos a partir de medidas fornecidas em texto e figura", situado no Nível 4. Por fim, o item contempla descritores como D1 e D12 da Matriz de Referência do SAEB.

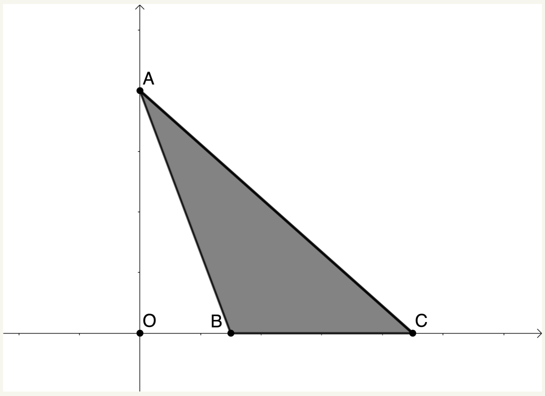
#Fica a Dica

Esta questão integra um grupo de itens relativos a Geometria Elementar, tema que será tratado nos Cadernos 3 e 4 do Material Estruturado.

Item 13

Saber	**S07 - Compreender e medir grandezas geométricas de figuras geométricas planas.**
Habilidade	Saber S07.H07: Calcular ou estimar a área de regiões poligonais.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 653

Exercício 13 No triângulo representado na figura abaixo, o segmento de reta ligando os pontos O e A mede 8 metros.



Sabendo que a área do triângulo ABC é igual a 24 metros quadrados, o comprimento, em metros, do segmento ligando o ponto B ao ponto C é igual a

A) 3.
B) 4.
C) 6.
D) 12.
E) 16.

Análise das Alternativas

A) O aluno, possivelmente, ignora o fator $\frac{1}{2}$ no cálculo da área do triângulo.
B) (13% de respostas) O aluno, erradamente, considera o segmento $\overline{OC}$ como a base para o cálculo da área do triângulo. A partir daí, infere, pela figura, que o segmento $\overline{BC}$ mede dois terços da medida do segmento $\overline{OC}$.
C) **Resposta correta** (62% de respostas).
D) (10% de respostas) O aluno, erradamente, aplica a fórmula da área do triângulo do seguinte

modo

$$\frac{1}{2}\times 24 = 12.$$

E) O aluno, certamente, confunde área e perímetro e, tentando lidar com os dados disponíveis, subtrai 8 de 24.

Solução e Comentários

A área do triângulo pode ser calculada, por exemplo, como

$$\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{BC} = 24$$

Como $\overline{OA} = 8$, concluímos que

$$\overline{BC} = 6.$$

O item contempla descritores como D12 da Matriz de Referência do SAEB.

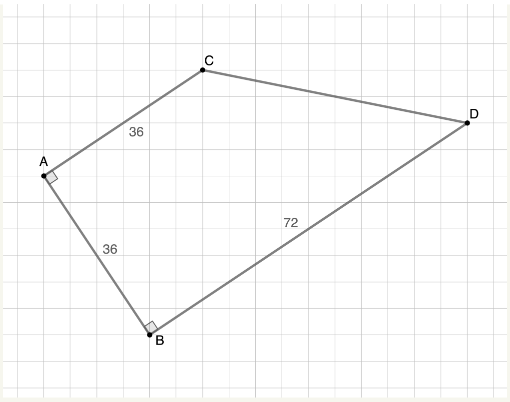
#Fica a Dica

Esta questão pertence à sequência mencionada na discussão do item 652, mas explora aspectos mais sutis do conceito de área. O relevante, no trabalho pedagógico com este problema, é que a(o) professora(or) não recaia na abordagem corriqueira de "aplicar a fórmula da área do triângulo", mas possa, no sentido inverso, usar a situação geométrica exposta no suporte da questão para constatar que a área do triângulo ABC pode ser obtida da área do triângulo AOC *subtraindo* a área do triângulo AOB e que esses triângulos têm área dada pela metade dos áreas dos respectivos retângulos. Além disso, a professora pode direcionar uma discussão sobre o que acontece com a área se movermos a base BC à esquerda e à direita na reta. Elementos fundamentais da noção de área seriam, dessa forma, trabalhados, como a invariância por movimentos rígidos no plano. Esta é uma das ideias metodológicas fundamentais do material estruturado, especialmente do Caderno 3, de Geometria Métrica.

Item 14

Saber	**S07 - Compreender e medir grandezas geométricas de figuras geométricas planas.**
Habilidade	Saber S07.H2: Calcular ou estimar perímetros de figuras geométricas gerais por aproximação ou comparação com o perímetro de figuras planas elementares, em diversos contextos, aplicações e problemas.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 1108

Exercício 14 A figura seguinte representa um terreno vista de cima, com as dimensões de apenas três de seus quatro lados, em metros.



Sendo assim, o perímetro deste terreno é

A) maior ou igual a 1944 metros.
B) maior ou igual a 216 metros e menor que 1944 metros.
C) maior ou igual a 180 metros e menor que 216 metros.
D) maior ou igual a 144 metros e menor que 180 metros.
E) menor que 144 metros.

Análise das Alternativas

A) (17% de respostas) O aluno pode ter calculado a área do trapézio em vez de seu perímetro, obtendo $(36 + 72)\times 36/2 = 1944$.
B) O aluno considera que o comprimento não informado é igual a 72 metros, do que resultaria a soma $36 + 36 + 72 + 72 = 216$ metros.
C) **Resposta correta** (17% de respostas).
D) (53% de respostas) O aluno considera que o comprimento não informado é igual a 36 metros, do que resultaria a soma $36 + 36 + 36 + 72 = 180$ metros.
E) O aluno pode ter considerado apenas a soma dos três lados informados, que resulta em $36 + 36 + 72 = 144$ metros.

Solução e Comentários

Observamos que o perímetro deve ser superior à soma dos três lados cujos comprimentos estão dados, ou seja, $36+36+72 = 144$ metros. O quarto lado deve ter comprimento superior a 36 e inferior a 72, pela desigualdade triangular. Portanto, o perímetro deve estar entre $36 + 36 + 36 + 72 = 180$ metros e $36 + 36 + 72 + 72 = 216$ metros.

Este item apresentou características anômalas quanto à dificuldade, como se pode depreender do fato de que houve mais respostas no *distrator* da alternativa D) do que na resposta correta. Mais uma vez, trata-se de mobilizar conhecimentos básicos, como o conceito de perímetro, para um contexto que, embora tecnicamente pouco exigente, não permite soluções que se resumam a uma aplicação direta de um procedimento. Antes, o item demandava algo pouco exercitado, embora essencial no uso prático e corriqueiro da Matemática: aproximar, estimar e comparar. Temos um exemplo concreto do balanço e simbiose necessários entre a aquisição dos conhecimentos e a articulação deles na resolução de problemas, para a qual concorrem diversas habilidades, algumas das quais codificadas na BNCC. Em termos do Matriz de Referência do ENEM, abrangemos, certamente, as habilidades H8, H9, H11 e H12. No caso da Matriz de Referência do SAEB, o descritor mais diretamente relacionado é o D11.

Os atributos que associamos a esta questão foram A2, A3 e A4, visto que combinam estimativas de grandezas geométricas e o uso das operações aritméticas e da ordenação dos números naturais.

#Fica a Dica

Esses temas serão tratados nos Cadernos de Geometria Elementar, 3 e 4, do Material Estruturado. Sugerimos que o professor possa discutir como a estimativa pode ser refinada. Além disso, o problema é uma ocasião natural para tratar de distância entre pontos, dadas suas coordenadas, ou a aplicação de relações métricas como o Teorema de Pitágoras.

Item 15

Saber	S02 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros.
Habilidade	S02.H18: Formular e resolver problemas que envolvam múltiplos e divisores comuns a dois ou mais números inteiros.
Nível de dificuldade	Não considerado na determinação do nível de dificuldade
Item do Teste	Código 1109

Exercício 15 As máscaras faciais são uma medida de prevenção contra o novo coronavírus. A fabricação caseira dessas máscaras deve seguir orientações técnicas dadas pelas autoridades. Por exemplo, o molde para uma máscara deve ter dimensões de 21 centímetros de altura e 34 centímetros de largura, de acordo com orientação do Ministério da Saúde.

Fonte: **Ministério da Saúde**. Disponível em: https://www.saude.gov.br/images/pdf/2020/April/04/1586014047102-Nota-Informativa.pdf.

Acesso em 29 de julho de 2020.

Quantas máscaras, no máximo, podem ser fabricadas a partir de um corte quadrado de tecido com dimensões iguais a 2 metros de lado?

A) 14
B) 25
C) 45
D) 55
E) 81

Análise das Alternativas

A) (14% de respostas) O aluno efetua os cálculos, obtendo os fatores 9 e 5. No entanto, *soma* estes valores em vez de multiplicá-los.
B) O aluno escolhe a alternativa que corresponde a 5×5 moldes, levando em conta apenas uma das dimensões.
C) **Resposta correta** (58% de respostas).
D) O aluno escolhe a alternativa que corresponde à soma $21 + 34 = 55$.

E) O aluno escolhe a alternativa que corresponde a $9{\times}9$ moldes, levando em conta apenas uma das dimensões.

Solução e Comentários

No comando, é *tacitamente* suposta a seguinte informação (em negrito), que deveria ser explicitada

a partir de um corte quadrado de tecido com dimensões iguais a 2 metros de lado, **cortando-se o tecido em linhas paralelas às bordas**

Esta informação é muito relevante para o problema e, certamente, poderia até ser ilustrado com recurso a uma figura para evitar ambiguidades. Considerando esta limitação, o problema pode ser resolvido como segue: em uma dimensão de 2 metros, ou 200 centímetros, podemos recortar, no máximo, 9 intervalos de 21 centímetros (extensão total de 189 centímetros), enquanto que, na outra dimensão, que também mede 200 centímetros, podemos recortar, no máximo, 5 intervalos de 34 centímetros, perfazendo 170 centímetros. Logo, é possível recorter $9{\times}5 = 45$ moldes para máscaras.

Apesar do comando não trazer a condição explicitamente, o item teve parâmetros adequados tanto na Teoria Clássica da Medida quanto na Teoria de Resposta ao Item. De todo modo, não o consideramos para efeito da análise do desempenho dos alunos.

Item 16

Saber	S06 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.
Habilidade	Saber S06.H11: Resolver uma equação linear com procedimentos corretos e justificados (e.g., o método de falsa posição).
Nível de dificuldade	4
Item do Teste	Código 1110

Exercício 16 Duas irmãs devem dividir R\$ 40,00 entre elas, de modo que uma receba $\frac{3}{5}$ da outra. Quantos reais correspondem à menor parte?

A) 15
B) 16
C) 20
D) 24
E) 25

Análise das Alternativas

A) **Resposta correta** (42% das respostas).
B) (34% das respostas) O aluno, possivelmente, assinala a alternativa que corresponde a

$$\frac{2}{5}{\times}40 = 16 \text{ reais.}$$

C) O aluno considera a média aritmética, ou seja, 20 reais.
D) O aluno, possivelmente, assinala a alternativa que corresponde a

$$\frac{3}{5}\times 40 = 24 \text{ reais.}$$

E) O aluno efetua os cálculos corretamente mas assinala a maior parte em vez da menor.

Solução e Comentários

Dividamos os 40 reais em oito partes iguais: a fração menor corresponde a 3 partes e a fração maior a 5 partes. Logo, a menor fração é igual a

$$\frac{3}{8}\times 40 = 3\times 5 = 15 \text{ reais.}$$

A questão envolve os atributos A2 e A3, dado que envolve o uso de razões, proporções ou equações lineares, relacionado às habilidades H15 e H16 na competência de área 4 da Matriz de Referência do ENEM e à habilidades como "resolver problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples" ou "resolver problema envolvendo a relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas", associadas, respectivamente aos níveis 4 e 5 da Escala de Proficiência do SAEB. Por fim, o item contempla ao menos o descritor D15 da Matriz de Referência do SAEB.

#Fica a Dica

Nesta questão, abordamos o uso de razões e proporções e, eventualmente, de equações lineares para resolver um problema rotineiro de divisão em partes proporcionais, que pode ser reapresentado de diversas formas. A relevância pedagógica do item é que este pode ser explorado em sequências de atividades que façam a transição dos procedimentos aritméticos envolvendo proporções, como na solução exposta acima, para um modelo baseado em equações e sistemas lineares em que, tipicamente, as partes proporcionais seriam as duas variáveis. A julgar pelo quantitativo de respostas na alternativa B), cabe desenvolver nos alunos uma melhor compreensão do significado da proporcionalidade das partes, antes mesmo de aprofundar-se na modelagem algébrica do problema. Fica patente, pela análise das alternativas, que o entrave para a resolução de exercícios desse tipo pode não ser apenas a manipulação algébrica de equações lineares como em

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ 3x &= 5y, \end{aligned}$$

mas a expressão correta e o entendimento consolidado de uma dada razão ou proporção. Recomendamos ao professor que possa utilizar o Caderno 5 (Razões, Proporções e Equações e Funções Lineares) do Material Estruturado.

Item 17

Saber	S09 - Efetuar operações, calcular medidas e tratar informações envolvendo números reais.
Habilidade	Saber S09.H11: Calcular e diferenciar médias aritméticas e geométricas, em diversos contextos, aplicações e problemas.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 1111

Exercício 17 Nos dias de segunda, quarta e sexta, João paga R$ 5,50 por almoço em um restaurante perto do trabalho. Nas terças e quintas, ele almoça em outro local, onde paga R$ 6,00 por refeição.

Quanto, em média, João paga por almoço de segunda-feira a sexta-feira?

A) R$ 28,50
B) R$ 11,50
C) R$ 5,75
D) R$ 5,70
E) R$ 5,50

Análise das Alternativas

A) (75% de respostas) Esta opção pode ser assinalada caso o estudante tenha somado os resultados, mas esquecido de (ou ignorado que fosse necessário) efetuar a divisão por três.
B) (11% de respostas) A escolha desta opção sugere que o aluno apenas somou apenas os dois dados numéricos informados no enunciado, obtendo $5{,}50 + 6{,}00 = 11{,}50$.
C) Este é, provavelmente, a alternativa apontada pelo estudante que calculou a média entre 5,50 e 6, isto é, $(5{,}50 + 6)/2$.
D) **Resposta correta** (6% de respostas).
E) Alternativa escolhida, provavelmente, no caso em que o estudante considere o valor mais frequente como a resposta correta.

Solução e Comentários

Basta calcularmos

$$\frac{5{,}50 + 5{,}50 + 5{,}50 + 6 + 6}{5} = 5{,}70.$$

Trata-se de uma questão direta e rotineira sobre médias, pressupondo que os elementos básicos da Estatística Descritiva tenham sido minimamente abordados no Ensino Fundamental. Sendo assim, a questão é associada aos atributos A2 e A3 e às habilidades H3 e H28 da Matriz de Referência do ENEM.

#Fica a Dica

A opção expressiva pela alternativa A) pode indicar a fragilidade, conceitual e técnica, dos alunos em relação a noções básicas de Estatística Descritiva que deveriam ser supostamente trabalhadas no Ensino Fundamental, neste caso até mesmo durante o estudo de médias aritméticas, normalmente combinado ao tópico de razões e proporções em muitos modelos curriculares. Portanto, temos uma possível evidência de que é preciso consolidar conceitos e métodos básicos relacionados a médias e outras medidas de tendência central. É recomendável que, neste processo, a professora possa também retomar operações aritméticas com números decimais. Para tanto, recomendamos o uso dos Cadernos 2 (Aritmética Elementar II) e 7 (Noções de Estatística Descritiva).

Item 18

Saber	**S04 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.**
Habilidade	Saber S04.H8: Compreender e efetuar cálculos, bem como resolver problemas, que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais (e.g., divisão em partes proporcionais).
Nível de dificuldade	1
Item do Teste	Código 690

Exercício 18 Lucas, Miguel e Cícero alugaram um carro para trabalhar com um aplicativo de transporte de passageiros. Combinaram utilizar o carro de forma que Lucas trabalhará 6 horas por dia, Miguel trabalhará 5 horas por dia e Cícero 4 horas por dia.

Quanto Cícero deve receber, proporcionalmente ao tempo que trabalhou, caso os três juntos apurem, em um dia, um total de R$ 360,00?

A) R$ 4,00
B) R$ 24,00
C) R$ 90,00
D) R$ 96,00
E) R$ 120,00

Análise das Alternativas

A) O aluno considera o número de horas trabalhadas por Cícero como a resposta demandada.
B) O aluno considera o valor correspondente a uma hora de trabalho como a resposta demandada.
C) (16% de respostas) O aluno considera que Cícero deve receber

$$\frac{360}{4} = 90 \text{ reais},$$

ou seja, a divisão do total apurado pelo número de horas trabalhadas por ele.
D) **Resposta correta** (59% de respostas).
E) O aluno considera que a divisão deve ser feita em partes iguais (não necessariamente proporcionais), o que resultaria em um terço do valor total para cada motorista.

Solução e Comentários

O total de horas trabalhadas pelos três motoristas é

$$6 + 5 + 4 = 15.$$

Portanto, *cada hora de trabalho* vale

$$\frac{360}{15} = 24 \text{ reais}.$$

Como o trabalho de Cícero dura 4 horas, ele deve receber, proporcionalmente,

$$4 \times 24 = 96 \text{ reais}.$$

A questão envolve os atributos A2 e A3, dado que envolve o uso de razões, proporções ou equações lineares, relacionado às habilidades H15 e H16 na competência de área 4 da Matriz de Referência do ENEM e à habilidades como "resolver problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples" ou "resolver problema envolvendo a relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas", associadas, respectivamente aos níveis 4 e 5 da Escala de Proficiência do SAEB. Por fim, o item contempla ao menos o descritor D15 da Matriz de Referência do SAEB.

#Fica a Dica

Remetemos o leitor aos comentários acerca do item 1110, do qual este item é uma sequência natural, por tratar de uma divisão proporcional, desta vez em 3 partes. Observe que a alternativa C) funcionou como *distrator*, o que pode ser tomado como evidência de falhas na **compreensão** do conceito de proporcionalidade: neste caso, o aluno divide *equitativamente* o valor total pelo número de horas trabalhadas em vez de multiplicar pela fração que esse número de horas representa do total de horas trabalhadas pelos três personagens. Lacunas conceituais desse tipo podem afetar a aprendizagem do aluno ao ser confrontado com temas como funções afins, matrizes e sistemas lineares, Geometria Analítica e, em resumo, todo e qualquer tópico que depende da noção estruturante de **proporcionalidade**. Recomendamos, a propósito, os Cadernos 1 (seção 3), 2 e 5 do Material Estruturado.

Item 19

Saber	S03 - Efetuar operações e resolver problemas envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais.
Habilidade	Saber S03.H11: Ordenar ou comparar números racionais, em suas representações fracionária ou decimal, em particular por meio de sua localização na reta numérica.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 633

Exercício 19 Seja x um número racional entre $\frac{1}{2}$ e 1, como indicado na figura a seguir.

A respeito do número $x + \frac{1}{x}$, podemos afirmar que

A) está entre $\dfrac{3}{2}$ e 3.
B) está entre 1 e $\dfrac{3}{2}$.
C) está entre 1 e 2.
D) está entre $\dfrac{1}{2}$ e 1.
E) está entre 0 e 1.

Análise das Alternativas

A) **Resposta correta** (50% de respostas).
B) (19% de respostas) O aluno soma $1 + \frac{1}{2}$ por considerar que o *maior* valor para $x + \frac{1}{x}$ é dado pela soma do maior valor para x e do menor valor para x.
C) (14% de respostas) O aluno soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ e $1 + 1$ para obter o intervalo em que $x + \frac{1}{x}$ varia.
D) O aluno não considera o efeito da parcela $\frac{1}{x}$.
E) O aluno assinala a alternativa certamente levando em conta apenas a representação geométrica do número x na figura.

Solução e Comentários

Observamos que

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

e, portanto,

$$1 \leq \frac{1}{x} \leq 2.$$

Assim

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

Com este item, pretendíamos detectar conhecimentos e habilidades relativas aos atributos A2, A3 e A4 e ao descritor D1 da Matriz de Referência do SAEB bem como averiguar a compreensão e correta manipulação das operações aritméticas com números racionais.

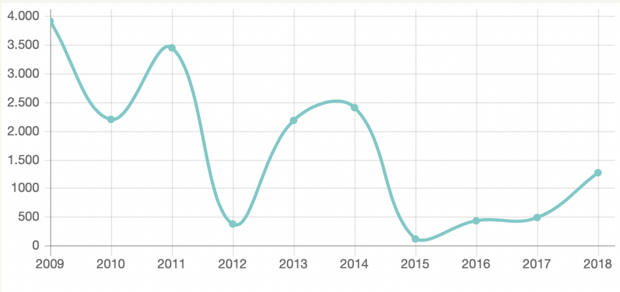
#Fica a Dica

A questão combina o entendimento das operações aritméticas com números racionais e a interpretação geométrica dessas operações (neste caso, a adição) em termos da localização dos números na reta numérica. Observe que a dispersão das respostas entre o gabarito e as alternativas B) e C) parece revelar lacunas relevantes nesses temas. Recomendamos a leitura dos Cadernos 1 e 2 em que elucidamos esta interpretação geométrica, assimilando a adição a translações na reta numérica. Vários exercícios sobre comparação e localização de números racionais, em suas representações fracionárias e decimais, são propostos nesses cadernos.

Item 20

Saber	S09 - Efetuar operações, calcular medidas e tratar informações envolvendo números reais.
Habilidade	Saber S09.H2: Ler e expressar numericamente informações apresentadas em tabelas, gráficos de barras ou colunas e outros contextos e suportes.
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 1119

Exercício 20 O Ceará é, historicamente, um estado produtor de algodão herbáceo. O gráfico seguinte mostra a quantidade de algodão herbáceo produzido no Ceará em toneladas.



Fonte: **IBGE**. Disponível em: `https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ce/pesquisa/14/10193?tipo=grafico&indicador=10201`.

Acesso em 29 de julho de 2020.

Em que período, representado na figura, houve o maior crescimento da produção de algodão herbáceo no Ceará?

A) 2009 a 2010
B) 2010 a 2011
C) 2012 a 2014
D) 2015 a 2017
E) 2017 a 2018

Análise das Alternativas

A) (69% de respostas) Este é o intervalo de maior *variação*, mas negativa em vez de positiva. O aluno desconsiderou, certamente, este importante detalhe.
B) Embora este não seja o período de maior crescimento, é aquele em que os valores variaram no

intervalo entre maiores números, ou seja, é um intervalo que está representado mais acima no gráfico. Isto pode levar o aluno a escolher esta opção.

C) **Resposta correta** (16% de respostas).

D) O aluno considera a variação no eixo horizontal em vez do vertical.

E) O aluno assinala a opção que corresponde ao intervalo com os últimos anos.

Solução e Comentários

A questão envolve apenas a interpretação dos dados representados graficamente. De 2012 a 2014, temos a maior amplitude, positiva, da produção anual em toneladas.

A questão está relacionada aos descritores D21 e D34 nos campos de Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação, respectivamente, da Matriz de Referência do SAEB. A interpretação e adequada leitura de informações em gráficos (e tabelas) é pressuposto para outros descritores e para habilidades na Matriz de Referência do ENEM, a exemplo da habilidade H24.

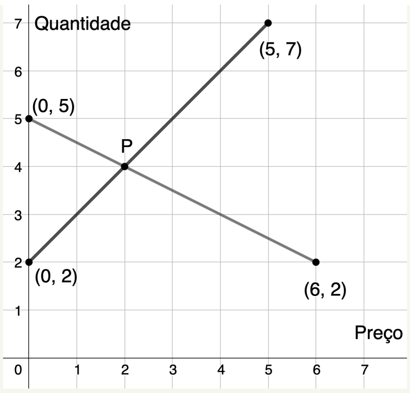
#Fica a Dica

A evidência trazida pelo percentual de alunos que optaram pelo distrator na alternativa A) é pedagogicamente relevante: sugere que é preciso trabalhar a interpretação de gráficos quanto à expressão das variáveis e à relação entre elas bem como quanto ao comportamento dessas variáveis e suas variações. Sem esse entendimento prévio devidamente consolidado, o estudo de temas como Funções e Estatística fica severamente comprometido ou reduz-se a uma mera apropriação formal dos conceitos, mas destituída de significado e, certamente, insuficiente para que se mobilize o conhecimento na resolução de problemas ou na proposição de intervenções.

Item 21

Saber	S06 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.
Habilidade	Saber S06.H3: Identificar e interpretar representações gráficas ou geométricas de variáveis (e suas variações) expressas em informações contidas em um texto ou outro conjunto de dados.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 1120

Exercício 21 A reta na figura seguinte, ligando os pontos $(0{,}2)$ e $(5,7)$, mostra que, aumentando o preço, um comerciante aumenta seu faturamento. Todavia, a reta ligando os pontos $(0{,}5)$ e $(6{,}2)$ indica que o aumento do preço tem também o efeito de diminuir o número de compradores.



Qual preço corresponde ao ponto P na figura, que representa o ponto de equilíbrio dessas duas tendências?

A) 2
B) 3
C) 5
D) 6
E) 12

Análise das Alternativas

A) **Resposta correta** (60% de respostas).
B) O aluno marca, erradamente, a quantidade que corresponde à receita igual a zero.
C) O aluno marca, erradamente, a *quantidade* que corresponde ao preço de equilíbrio.
D) O aluno marca, erradamente, o intercepto da reta que define a demanda.
E) O aluno marca, erradamente, o preço que corresponde à quantidade nula de vendas.

Solução e Comentários

O ponto de equilíbrio, que corresponde ao preço que ajusta a oferta e a demanda, é o ponto P, cuja abscissa é o preço de equilíbrio, isto é, 2. Note que não é preciso ter noções de Economia para resolver a questão ou, ainda, utilizar técnicas de solução de sistemas lineares. Espera-se apenas um entendimento claro do contexto e de sua interpretação gráfica. No caso da Matriz de Referência do SAEB, o descritor mais diretamente relacionado é o D9.

#Fica a Dica

Sugerimos que o professor possa utilizar sequências de exercícios a partir desse item que permitam explorar tópicos previstos na Matriz de Conhecimentos Básicos, como localização de pontos via coordenadas cartesianas; discussão de sistemas lineares $2{\times}2$; estudo das funções afins; equações cartesianas da reta. Estes tópicos podem ser introduzidos ou retomados, conforme seja, utilizando-se o contexto da relação entre oferta, demanda e preço anunciado no item.

Item 22

Saber	S04 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
Habilidade	Saber S04.H6: Resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, que envolvam a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
Nível de dificuldade	1
Item do Teste	Código 1159

Exercício 22 Um dado modelo de carro consome cerca de 1 litro de gasolina a cada 20 quilômetros. Supondo que 1 litro de gasolina custe R$ 5,00, o custo total com gasolina correspondente a um percurso de 300 quilômetros, realizado com este modelo, dada esta média de consumo, é aproximadamente igual a

A) 15 reais.
B) 20 reais.
C) 60 reais.
D) 75 reais.
E) 100 reais.

Análise das Alternativas

A) (22% de respostas) O aluno assinala a alternativa que corresponde à quantidade de litros de gasolina necessários ao percurso, dada a média de consumo, isto é,

$$\frac{300}{20} = 15 \text{ litros.}$$

B) Alternativa marcada quando, possivelmente, o aluno confunde a taxa média de consumo com o próprio consumo, mas expresso em reais e não em quilômetros por litro.

C) Alternativa que pode ter sido motivada pelo quociente

$$\frac{300}{5}$$

entre o percurso total e o custo por litro, em vez da distância percorrida por litro.

D) **Resposta correta** (52% de respostas).

E) O aluno toma o produto 20×5 como resposta, por considerar que 2

Solução e Comentários

O consumo *médio* do carro é de 1 litro a cada 20 quilômetros ou, uma vez que, $300 = 15 \times 20$, de 15 litros em um percurso de 300 quilômetros. Como cada litro de gasolina custa R$ 5,00, o custo total é de R$ 75,00.

O problema lida com *taxas de variação* ou *constantes de proporcionalidade* entre pares de variáveis, sendo, portanto, relevante para a análise dos atributos A2 e A3, bem como do grau de consolidação das habilidades H15, H16 e H17 na Matriz de Referência do ENEM, também relacionadas aos descritores D15 e D19 da Matriz de Referência do SAEB e a habilidades como "determinar o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta a partir de três valores fornecidos em uma situação do cotidiano" e "resolver problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples", descritas nos níveis 3 e 4, respectivamente, da Escala de Proficiência do SAEB.

#Fica a Dica

Os itens de códigos 1159, 1160 e 1161 formam uma **sequência** progressiva em que o aluno gradualmente elabora um modelo matemático para descrever uma relação de proporcionalidade ou linearidade e, a partir desse modelo, estabelecer conclusões ou inferência e partir de dados. Obviamente, tudo isto em uma situação idealizada, mas minimamente plausível.

Item 23

Saber	S04 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
Habilidade	Saber S04.H8: Compreender e efetuar cálculos, bem como resolver problemas, que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais (e.g., divisão em partes proporcionais).
Nível de dificuldade	4
Item do Teste	Código 1160

Exercício 23 O consumo médio de energia elétrica de um modelo de carro elétrico é de 0,196 quillowatt-hora por quilômetro percorrido. A energia elétrica acumulada na bateria do carro, se estiver totalmente carregada, é de 40 quilowatts-hora. Considerando esses dados, a distância máxima que pode ser percorrida pelo carro com apenas $1/4$ da carga total da bateria é aproximadamente igual a

A) 8 quilômetros.
B) 10 quilômetros.
C) 50 quilômetros.
D) 80 quilômetros.
E) 200 quilômetros.

Análise das Alternativas

A) O aluno multiplica 40 por $0{,}196$, obtendo, aproximadamente, 8. Isto pode revelar que a autonomia do carro é entendida pelo aluno como o produto do consumo por quilômetro percorrido e a carga *total* da bateria.
B) (49% de respostas) O aluno considera como resposta, erradamente, a carga parcial da bateria, isto é, $\frac{1}{4}\times 40$.
C) **Resposta correta** (28% de respostas).

D) O aluno multiplica, erradamente, a taxa média de consumo pela carga total e, certamente, erra no cálculo com os números decimais, considerando $40\times 0{,}2$ como 80.

E) .O aluno, erradamente, divide 40 por $0{,}196 \approx 2$, obtendo, aproximadamente, 200. Confunde, assim, o autonomia do carro pela razão entre a carga total e a taxa média de consumo.

Solução e Comentários

Nesta sequência de questões, iniciada com o item 1159, continuamos relacionando taxas de variação de diferentes variáveis, desta vez introduzindo algum grau de dificuldade técnica tanto no uso de operações com números decimais quanto no contexto, que envolve grandezas menos familiares, mas cujo conhecimento preciso e formal não é demandado na solução da tarefa. Dado que $1/4$ da carga total da bateria equivale a

$$\frac{1}{4}\times 40 = 10 \text{ quilowatt-hora}$$

e dado que o consumo médio de energia elétrica é de $0{,}196$ quilowatt-hora por quilômetro, concluímos que a autonomia do carro será de

$$\frac{10}{0{,}196} = \frac{100}{1{,}96} \approx \frac{100}{2} = 50 \text{ quilômetros.}$$

#Fica a Dica

Os itens de códigos 1159, 1160 e 1161 formam uma **sequência** progressiva em que o aluno gradualmente elabora um modelo matemático para descrever uma relação de proporcionalidade ou linearidade e, a partir desse modelo, estabelecer conclusões ou inferência e partir de dados. Obviamente, tudo isto em uma situação idealizada, mas minimamente plausível.

Item 24

Saber	**S04 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.**
Habilidade	Saber S04.H11: Formular e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.
Nível de dificuldade	4
Item do Teste	Código 1161

Exercício 24 A tabela abaixo estabelece comparações entre distâncias percorridas e os custos totais de gasolina para percorrê-las, usando carros de cinco diferentes modelos, que indicaremos como A, B, C, D e E.

Modelo	Distância percorrida	Custos
A	240 quilômetros	80 reais
B	300 quilômetros	75 reais
C	360 quilômetros	150 reais
D	360 quilômetros	100 reais
E	400 quilômetros	200 reais

Considerando apenas esses dados, qual o modelo mais econômico?

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E

Análise das Alternativas

A) O aluno considera, erradamente, a alternativa que corresponde ao *menor percurso*.
B) **Resposta correta** (54% de respostas)
C) O aluno pode ter cometido erro de cálculo na divisão de 360 por 150. Uma alternativa cuja escolha revela uma falha conceitual, além disso, uma vez que, com a mesma quilometragem percorrida, o carro de modelo D consome menos gasolina.
D) (18 % de respostas) Os alunos podem ter comparado apenas os modelos C e D, o que dispensaria realizar cálculos.
E) Os alunos consideram, erradamente, a alternativa que corresponde ao *maior percurso*.

Solução e Comentários

Basta calcularmos os consumos médios, representados pelas razões distâncias percorridas/custos, como medidas do quanto os modelos são econômicos. Comparando e ordenando essas frações, temos

$$\frac{400}{200} = 2 < \frac{360}{150} < 3 = \frac{240}{80} < \frac{360}{100} < \frac{300}{75}.$$

#Fica a Dica

Com este questão, encerramos uma sequência progressiva de itens: o objetivo fora verificar a progressão cognitiva sem, necessariamente, um acréscimo considerável de dificuldade técnica. O primeiro item, o 1159, resumia-ao cálculo direto de uma taxa de variação ou, posto de outro modo, à determinação de um termo desconhecido em uma relação de proporcionalidade. Encerrava alguma demanda técnica por combinar informações de 3 variáveis proporcionalmente relacionadas: custo do combustível, consumo de combustível, distância percorrida. O segundo item, o 1160, embora não demandasse habilidades cognitivas complexas, exigia maior domínio das manipulações aritméticas, o que aumentava o grau de dificuldade procedimental. Fechando a série, o item 1161 distingue-se dos dois anteriores pelo maior grau de complexidade: o estudante deve, a partir do comando, que não é explícito quanto ao procedimento a ser efetuado, reconhecer que operações aritméticas devem ser efetuada para conduzir à resposta que se pede, a saber, qual o modelo *mais econômico*. Isto envolve recuperar os modelos mentais de que dispõe em seu repertório de conhecimentos e habilidades. Caso reconheça ser preciso calcular razões ou determinar taxas de variação custos/distâncias, deve efetuar as contas corretamente e, em seguida, **interpretar** os resultados obtidos como dados que darão sustentação a sua resposta. Por esta complexidade, o item envolve mais habilidades da Matriz de Referência do ENEM, com maior alcance cognitivo do que os dois itens anteriores.

Item 25

Saber	S06 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.
Habilidade	Saber S06.H9: Reconhecer relações de proporcionalidade (linearidade) entre variáveis ou suas variações a partir de modelos, tabelas, gráficos e outros conjuntos de informações.
Nível de dificuldade	Questão anulada
Item do Teste	Código 1162

Exercício 25 Considerando a distância percorrida e o combustível consumido para percorrê-la, utilizando um dado modelo de carro, qual das seguintes expressões melhor descreve o quanto esse modelo é econômico?

A) consumo de combustível + distância percorrida
B) distância percorrida − consumo de combustível
C) consumo de combustível × distância percorrida
D) distância percorrida − consumo de combustível
E) consumo de combustível : distância percorrida

Análise das Alternativas

A alternativa B) foi repetida como alternativa D), o que invalida o item, embora seu gabarito seja a alternativa E), conforme a versão disponível *online* ou em arquivo PDF.

O propósito desta questão era que fizesse parte da sequência dos itens 1159, 1160 e 1161, uma vez que seria acessada a habilidade do aluno em modelar o conceito de “modelo econômico” de carro como uma relação matemática formal entre as variáveis de interesse, a saber, a distância percorrida e o consumo consumido. Portanto, a questão não envolveria um procedimento aritmético com números dados, mas a elaboração de um modelo algébrico a partir do contexto dado.

Item 26

Saber	S03 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.
Habilidade	Saber S03.H21: Formular e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e com recurso a diferentes procedimentos, envolvendo operações entre números racionais, expressos na forma de frações ou de números decimais.
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 1154

Exercício 26 Uma montadora de automóveis planeja deixar de vender carros a gasolina e diesel em 2035, passando a vender apenas carros elétricos.

Fonte: **Folha de São Paulo**. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2021/01/gm-quer-encerrar-vendas-de-carros-a-gasolina-e-diesel-em-2035.shtml.

Acesso em: 12 de fevereiro de 2021.

Se as vendas de carros elétricos representam, atualmente, apenas $0{,}008$ das vendas totais de automóveis dessa montadora, em quantas vezes essas vendas devem crescer para que atinjam a meta desejada em 2035?

A) 1,25 vez
B) 12,5 vezes
C) 125 vezes
D) 1.250 vezes
E) 12.500 vezes

Análise das Alternativas

C) **Resposta correta** (54% das respostas).

As demais alternativas correspondem, possivelmente, a erros nas operações com os números decimais.

Solução e Comentários

Bastaria interpretarmos a sentença "vender apenas carros elétricos" como a meta desejada em 2035, isto é, que os carros elétricos passem de $0{,}008$ para 100% da venda total de automóveis da montadora. O aumento seria de

$$\frac{1}{0{,}008} = \frac{1.000}{8} = 125 \text{ vezes.}$$

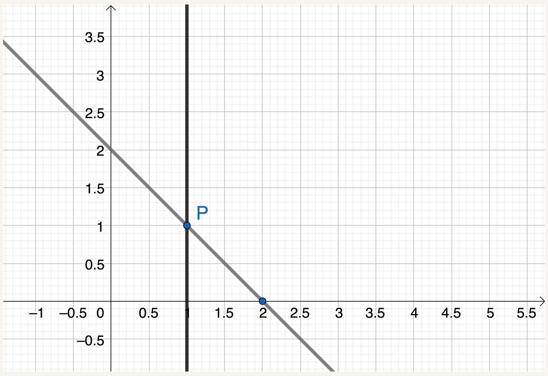
#Fica a Dica

A questão envolve o uso de operações aritméticas com números racionais na forma decimal. Recomendamos o uso do material estruturado, particularmente do Caderno 2 - Aritmética Elementar II.

Item 27

Saber	**S06 - Identificar e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas.**
Habilidade	Saber S06.H19: Identificar os parâmetros e a representação algébrica de uma função afim a partir da reta que a representa graficamente.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 959

Exercício 27 O gráfico de uma função afim $y = f(x)$ passa pelo ponto $(2,0)$ e intersecta a reta $x = 1$ no ponto $P = (1,1)$, conforme representado na figura seguinte.



Qual a expressão desta função f?

A) $f(x) = 1$
B) $f(x) = x - 2$
C) $f(x) = 2 - x$
D) $f(x) = 2$
E) $f(x) = 1 - x$

Análise das Alternativas

A) O aluno confunde determinar a expressão geral da função e determinar um valor específico, como seu valor em $x = 1$.
B) (14% de respostas) O aluno calcula a razão das variações de x e y, mas não leva em conta que a taxa de variação (ou coeficiente angular ou, ainda, declividade da reta) é negativa.
C) **Resposta correta** (59% de respostas).
D) (12% de respostas) O aluno confunde determinar a expressão geral da função e determinar

um valor específico da variável independente, a saber, $x = 2$.

E) O aluno compreende que a declividade é negativa, mas toma o intercepto com a reta vertical $x = 1$ como sendo o valor do coeficiente linear.

Solução e Comentários

A forma geral de uma função afim é

$$f(x) = ax + b,$$

onde a e b são coeficientes, constantes, portanto. A partir do gráfico, sabemos que a declividade é igual a $a = -1$. Assim, a função tem a forma particular

$$f(x) = -x + b.$$

Sabemos, além disso, que $f(2) = 0$. Logo, $b = 2$. Assim, a função é dada por

$$f(x) = 2 - x.$$

Uma solução alternativa consiste em usarmos a forma geral para escrevermos

$$0 = f(2) = 2a + b$$

e

$$1 = f(1) = a + b.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, termo a termo, temos

$$a = -1.$$

Substituindo esta informação na segunda, obtemos $b = 2$.

Uma terceira estratégia de solução é reconhecer que a reta inclinada é dada pela equação $x+y = 2$. Logo $y = 2 - x$.

Em termos da Matriz de Referência do SAEB, os descritores mais diretamente relacionados são o D20 e, especialmente, o D24.

#Fica a Dica

Neste item, avançamos na linguagem algébrica em termos de equações lineares ou funções afins. É relevante que a(o) professora(or) elabore sequências didáticas que utilizem semelhanças de triângulos para o cálculo da declividade da reta e. em seguida, relacione esta declividade ao coeficiente angular da função afim. Concretamente, vejamos que, se $P = (x,y)$ e dado que os pontos $A = (0,2)$ e $B = (2,0)$ pertencem ao gráfico da função afim, temos a igualdade das taxas de variação:

$$\frac{y-0}{x-2} = \frac{2-0}{0-2},$$

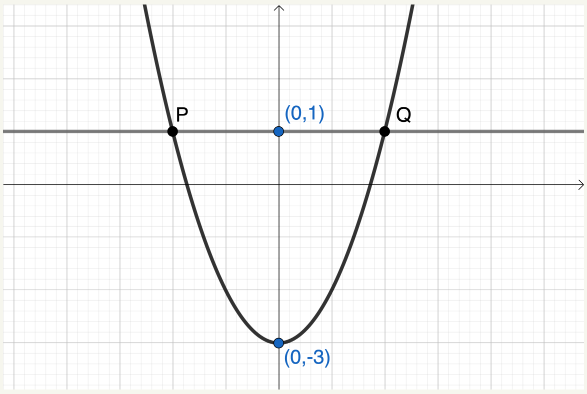
ou seja

$$y = -(x-2) = 2 - x.$$

Item 28

Saber	**S10 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações quadráticas e polinomiais entre grandezas.**
Habilidade	Saber S10.H15: Reconhecer as representações algébrica ou geométrica de funções quadráticas.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 936

Exercício 28 O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 3$ intersecta a reta horizontal $y = 1$ nos pontos P e Q, conforme a seguinte figura.



Qual a distância entre os pontos P e Q?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Análise das Alternativas

A) O aluno considera a diferença entre as ordenadas dos pontos P e Q.
B) O aluno toma a ordenada comum aos dois pontos como a resposta.
C) (16% de respostas) O aluno considera o valor de uma das raízes da equação como resposta.
D) (13% de respostas) O aluno considera o coeficiente 3 como resposta.
E) **Resposta correta** (58% de respostas).

Solução e Comentários

Nos pontos P e Q de intersecção, temos

$$x^2 - 3 = 1.$$

Logo, $x^2 = 4$ e, portanto, $x = -2$ ou $x = 2$. Portanto, a distância entre os pontos P e Q é igual a 4.

#Fica a Dica

Nesta questão, consideramos equações e funções quadráticas. Pode ser pedagogicamente útil explorar esse exercício para uma revisão de fatos básicos das funções quadráticas, sob um enfoque que não demande o jargão e tecnicalismos habituais nos livros-texto. A ideia seria partir da geometria do gráfico para deduzir a expressão algébrica da função. Por exemplo, tendo em conta que os pontos $P = (p, 1)$ e $Q = (q,1)$ são simétricos em relação ao eixo vertical e que

$$f(x) = 1$$

quando $x = p$ e $x = q$, com $q = -p$, temos

$$f(x) - 1 = (x - p)(x + p).$$

Logo

$$f(x) - 1 = x^2 - p^2.$$

Assim,

$$f(x) = x^2 - p^2 + 1.$$

Comparando com a expressão $f(x) = x^2 - 3$, temos $p^2 = 4$. Concluímos que $p = -2$ e $q = -p = 2$.

Em suma, recomendamos que o(a) professor(a) faça uso da representação geométrica e utilize os movimentos geométricos do plano, como translações ao longo dos eixos coordenadas, reconhecendo seus efeitos sobre os coeficientes da função quadrática.

Item 29

Saber	S06 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.
Habilidade	Saber S06.H13: Utilizar, com correção e justificativa, procedimentos algébricos para solução (de sistemas) de equações lineares a duas variáveis (eliminação, substituição, sistemas equivalentes, etc.).
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 1121

Exercício 29 Marivaldo ganha R\$ 130,00 vendendo 30 coxinhas e 20 empadas. Percebeu que, se vendesse as mesmas quantidades de coxinhas e empadas, mas com os preços trocados, ganharia R\$ 120,00.

Sendo assim, por quanto Marivaldo vende uma coxinha?

A) R\$ 2,00
B) R\$ 2,60
C) R\$ 3,00

D) R$ 4,00
E) R$ 4,30

Análise das Alternativas

A) (10% das respostas) O aluno assinala a alternativa que corresponde ao preço da empada em vez do preço da coxinha.
B) (13% das respostas) O aluno, supostamente, soma $30x + 20x = 130$, obtendo $50x = 130$ e, portanto, $x = 2{,}60$ reais.
C) **Resposta correta** (66% das respostas).
D) O aluno divide $120/30$, obtendo o valor de $4{,}00$ reais.
E) O aluno divide $130/30$, obtendo o valor aproximado de $4{,}30$ reais.

Solução e Comentários

Designando por x o preço (unitário) de uma coxinha e por y o preço (unitário) de uma empada, temos

$$30x + 20y = 130.$$

No entanto,

$$20x + 30y = 120.$$

Logo,

$$10x - 10y = 10,$$

ou seja,

$$x = y + 1.$$

Substituindo na primeira equação, temos

$$50y + 30 = 130.$$

Logo, $50y = 100$, ou seja, $y = 2$ reais e, assim, $x = 3$ reais.

#Fica a Dica

Recomendamos ao(à) professor(a) que utilize esse item para revisar os métodos usuais de resolução de sistemas de 2 equações lineares a 2 variáveis, com as devidas interpretações geométricas da discussão do sistema em termos da intersecção das retas representadas pelas equações lineares.

Item 30

Saber	S09 - Efetuar operações, calcular medidas e tratar informações envolvendo números reais.
Habilidade	Saber S09.H9: Calcular e diferenciar médias aritméticas e geométricas, em diversos contextos, aplicações e problemas.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 960

Exercício 30 A média aritmética de dois números é 5.

Qual número deve ser adicionado a esses dois para que a média aritmética dos três números passe a ser igual a 6?

A) 1
B) 2
C) 8
D) 10
E) 18

Análise das Alternativas

A) (18% das respostas) O aluno escolhe a esta opção por ser a diferença $6 - 5 = 1$ entre as médias.
B) (15% das respostas) O aluno considera o que deve ser adicionado à média de *dois* números para que a média dos dois passe de 5 para 6, ou seja, para que sua soma passe de 10 para 12.
C) **Resposta correta** (53% das respostas).
D) O aluno assinala a opção que corresponde à soma dos dois primeiros números.
E) O aluno assinala a opção que corresponde à soma dos três números.

Solução e Comentários

Dados os dois números a e b cuja média aritmética é 5, temos

$$\frac{a+b}{2} = 5,$$

ou seja,

$$a + b = 10.$$

Denotando o terceiro número por c, para que a média aritmética dos três números seja 6, temos

$$\frac{a+b+c}{3} = 6.$$

Portanto,

$$a + b + c = 18.$$

Como $a + b = 10$, temos

$$c = 18 - 10 = 8.$$

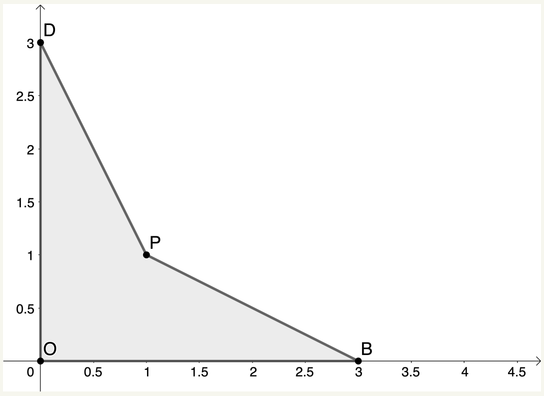
#Fica a Dica

Trata-se de um modelo de questão bastante corriqueiro em exames, vestibulares e nos livros didáticos. Observamos que, ao lidar com os cálculos necessários para determinar medidas de tendência central e de dispersão, a professora tem, à sua disposição, um momento apropriado para retomar a Aritmética Elementar, de modo significativos para estudantes do Ensino Médio.

Item 30

Saber	S08 - Compreender e utilizar relações métricas e razões trigonométricas em figuras geométricas planas.
Habilidade	Saber S08.H4: Formular e resolver problemas, motivados por diversos contextos e aplicações, envolvendo o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.
Nível de dificuldade	4
Item do Teste	Código 933

Exercício 31 Na figura seguinte, o ponto P tem coordenadas $(1,1)$ e ambos os segmentos OB e OD têm comprimentos iguais a 3 metros.



Pode-se concluir que o perímetro do quadrilátero OBPD é, em metros, é igual a

A) 6.
B) $6+3$.
C) $6+3\sqrt{2}$.
D) $6+2\sqrt{5}$.
E) $6+4$.

Análise das Alternativas

A) (15% das respostas) O aluno considera apenas os lados $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$ sobre os eixos horizontal e vertical no cálculo do perímetro.
B) (10% das respostas) O aluno multiplica os comprimentos dos lados $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$.
C) (19% das respostas) O aluno calcula, erradamente, a soma dos comprimentos $\overline{BP}$ e $\overline{PD}$ como o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos $\overline{OB}$.e $\overline{OD}$.
D) **Resposta correta** (50% das respostas).
E) O aluno considera o comprimento dos segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{PD}$ como a diferença entre as abscissas e ordenadas, respectivamente, de suas projeções sobre os eixos.

Solução e Comentários

É preciso observar que os segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{PD}$ são, ambos, hipotenusas de triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos horizontal e vertical medindo 2 metros e 1 metro. Usando o Teorema de Pitágoras, deduzimos que estes segmentos medem, cada um,

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Somando esses comprimentos aos comprimentos dos lados $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$, obtemos $3 + 3 + 2\times\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}$.

#Fica a Dica

Este item complementa o item 1108, acessando habilidades tecnicamente mais elaboradas, ao combinar o cálculo de perímetros ao uso de coordenadas e a relações métricas como o Teorema de Pitágoras. Chamamos a atenção da(o) professora(or) para a oportunidade de, a partir de questões como essa, explicitar aos alunos que o Teorema de Pitágoras permite obter uma expressão algébrica ou aritmética para a distância entre pontos, *dadas as* coordenadas Cartesianas destes pontos. Dos pontos de vista lógico e pedagógico, não é preciso adiar esta observação fundamental apenas para o estudo da Geometria Analítica. Na verdade, uma vez que sejam introduzidas as coordenadas cartesianas, é relevante fazer uma breve revisão das relações métricas e razões trigonométricas de triângulos retângulos: dado um triângulo retângulo com catetos paralelos aos eixos coordenados, podem ser estudadas a noção de declividade da hipotenusa (em relação ao eixo horizontal, por exemplo) como tangente do ângulo entre a hipotenusa e o eixo horizontal, por exemplo; da mesma forma, o Teorema de Pitágoras, neste arranjo geométrico, pode ser expresso em termos das variações das coordenadas.

Item 31

Saber	**S06 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações lineares entre variáveis.**
Habilidade	Saber S06.H18: Relacionar funções afins e equações lineares a relações de proporcionalidade (linearidade) entre variáveis ou suas variações e suas representações gráficas em termos de retas no plano.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 657

Exercício 32 A cidade de Fortaleza passou por uma recente mudança no sistema de transporte público urbano com o fim da presença de cobradores nos coletivos e a implementação da cobrança por tarifa eletrônica. Caso um passageiro não possua o *ticket* eletrônico, é possível adquirir um bilhete avulso recarregável, ao custo único de R$ 4,00 do *ticket* adicionando, ainda, o valor da passagem, que custa, atualmente, R$ 3,60 por cada viagem.

O custo y para o usuário que deseja adquirir o bilhete avulso, em função do número x de passagens recarregáveis, pode ser representado corretamente pela função afim

A) $y = 4x + 3{,}60$.
B) $y = 3{,}60x + 4$.
C) $y = 7{,}60x$.
D) $y = x + 4$.
E) $y = 3{,}60x$.

Análise das Alternativas

A) (17% das respostas) O aluno, possivelmente, atribui a variável dependente ao valor da taxa fixa.
B) **Resposta correta** (61% das respostas).
C) (10% das respostas) O aluno, supostamente, adicionou o valor da taxa fixa ao valor da passagem e o associou à variável dependente.
D) O aluno, certamente, considera a variável dependente como o valor da passagem.
E) O aluno, possivelmente, desconsidera o valor da taxa fixa.

Solução e Comentários

De acordo com o enunciado, que o custo y varia linearmente com o número x de passagem (a um valor unitário de R$ 3,60), adicionado de um valor fixo de 4 reais, pago uma única vez. Ou seja

$$y = 3{,}60x + 4.$$

#Fica a Dica

O teste contém uma sequência exploratória de questões sobre proporcionalidade e linearidade que inicia com o cálculo de taxas de variação e porcentagens, passa por modelos e aplicações simples desses conceitos e culmina no item 959 e neste item com habilidades relacionadas a *reconhecer a expressão algébrica de uma função afim em termos de sua representação gráfica* e a *determinar a expressão algébrica de uma função afim a partir de informações expressas em um dado contexto*. Os resultados agregados da avaliação, como indicados nas tabelas na introdução, indicam que este grande eixo curricular da proporcionalidade, que vai da equivalência de frações ao estudo da reta em coordenadas cartesianas, define um conjunto de conhecimentos (conceitos, técnicas, fatos, procedimentos, métodos) que representa os fatores que mais explicam o *déficit* de aprendizagem dos alunos.

Item 32

Saber	S10 - Utilizar modelos e resolver problemas envolvendo relações quadráticas e polinomiais entre grandezas.
Habilidade	Saber S10.H17: Identificar raízes, máximos/mínimos e outros elementos algébricos e geométricos (convexidade, interceptos, vértice, eixo de simetria) a partir da forma estendida e da forma fatorada de uma função quadrática.
Nível de dificuldade	2
Item do Teste	Código 1122

Exercício 33 Suponha que, em sua empresa familiar, Dona Joana vende um salgadinho a x reais (por unidade). A quantidade vendida por dia diminui com o preço e é dada por $32 - x$. Portanto, a equação quadrática

$$x(32 - x) = 31$$

significa que, com o preço x, o total apurado nas vendas, isto é, a receita, é igual a 31 reais por dia. Qual o menor preço x do salgadinho para que isto ocorra?

A) 1
B) 2
C) 31
D) 32
E) 62

Análise das Alternativas

A) **Resposta correta** (69% das respostas).
B) (10% das respostas) O aluno, no cálculo das raízes da equação quadrática, esquece o fator $\frac{1}{2}$.
C) (13% das respostas) O aluno escolhe uma das raízes como solução, mas não a menor.
D) O aluno, erradamente, considera como solução uma das raízes da equação $x(32 - x) = 0$.
E) O aluno, certamente, considera como solução o resultado da expressão

$$32 + \sqrt{32^2 - 4{\times}31}.$$

Solução e Comentários

As soluções desta equação quadrática são dadas por

$$x = \frac{1}{2}\left(32 \pm \sqrt{32^2 - 4{\times}31}\right) = \frac{1}{2}\left(32 \pm \sqrt{1024 - 124}\right) = \frac{1}{2}\left(32 \pm 30\right).$$

Portanto, $x = 1$ ou $x = 31$. O menor valor é, portanto, $x = 1$. Uma solução alternativa, extremamente simples, é observar, de saída, que substituindo o valor $x = 1$, no segundo fator, obtém-se $32 - 1 = 31$ ao passo que, no primeiro fator, obtém-se 1.

#Fica a Dica

Este item, juntamente com o item 936, explora conhecimentos e habilidade relacionadas às equações e funções quadráticas. Reforçamos nossas observações sobre a relevância pedagógica de combinar os modelos geométrico e algébrico das funções quadráticas. Por exemplo, o professor pode reapresentar a questão como a determinação das raízes ou zeros da função quadrática

$$f(x) = x(32 - x) - 31 = -x^2 + 32x - 31.$$

Posto que essas raízes são $r = 1$ e $r' = 31$, o professor pode "comprovar" a relação entre as raízes e a forma fatorada da função:

$$-(x - 1)(x - 31) = -x^2 + 32x + 31.$$

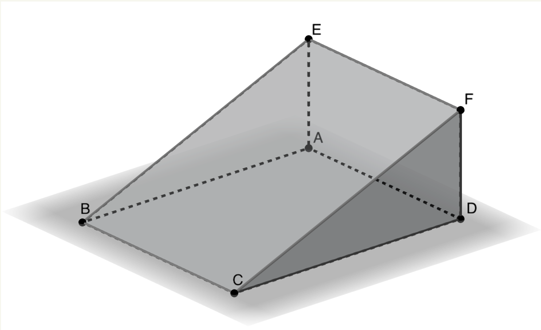
Em seguida, o professor pode observar que o gráfico deve ser simétrico em relação ao eixo horizontal que passa pelo ponto médio entre $(1,0)$ e $(31,0)$, ou seja, em relação ao eixo horizontal $x = 16$. A intersecção deste eixo com o gráfico é, exatamente, o *vértice*, ou seja, o ponto que, neste caso, tem o valor máximo da coordenada vertical no gráfico.

Em relação à Matriz de Referência do SAEB, o descritor mais diretamente relacionado é o D26.

Item 33

Saber	**S14 - Compreender e utilizar elementos, propriedades e medidas de objetos geométricos no espaço.**
Habilidade	Saber S14.H17: Compreender a noção de volume de figuras espaciais.
Nível de dificuldade	3
Item do Teste	Código 964

Exercício 34 Um sólido tem base dada por um retângulo ABCD cujos lados AB e AD medem, respectivamente, 10 e 6 metros. A altura máxima deste sólido é dada pelo comprimento do lado AE, que é igual a 4 metros, conforme a figura seguinte.



O volume do sólido, em metros cúbicos, é igual a

A) 20.
B) 40.
C) 60.
D) 120.
E) 240.

Análise das Alternativas

A) (10% das respostas) Alternativa que corresponde à soma das dimensões lineares, isto é, $4 + 6 + 10 = 20$ metros.
B) (11% das respostas) O aluno considera que a resposta é dada pelo produto da altura com uma das dimensões lineares da base, ou seja, $4{\times}10 = 40$ metros quadrados.
C) (12% das respostas) Alternativa que corresponde à área da base do sólido, isto é, $6{\times}10 = 60$ metros quadrados
D) **Resposta correta** (54% das respostas).
E) Alternativa que corresponde ao produto das dimensões lineares, isto é, $4{\times}6{\times}10 = 240$ metros

cúbicos, que é o volume do paralelepípedo retângulo obtido “duplicando-se’ o sólido.

Solução e Comentários

Observamos que o sólido pode ser representado como a “metade” de um paralelepípedo retângulo de lados 10, 6 e 4 metros, cujo volume é 240 metros cúbicos, portanto. Logo, o sólido em questão tem $240/2 = 120$ metros cúbicos de volume.

#Fica a Dica

Nesta questão, o propósito é mobilizar a intuição geométrica do(a) estudante no sentido de que ele(a) possa reconhecer que o “completamento"ou “duplicação” da figura resultaria em um sólido, a saber, um paralelepípedo retângulo, cujo volume pode ser naturalmente determinado. Não se trata, portanto, de verificar se o(a) estudante invocou fórmulas prontas para o volume de uma figura presente em uma “lista” de sólidos geométricos para as quais haja expressões disponíveis de áreas e volumes que possam ser imediatamente aplicadas.

Em relação à Matriz de Referência do SAEB, o descritor mais diretamente relacionado é o D13.