Material Estruturado

MATEMÁTICA

SISEDU
Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

Autores:
Antonio Caminha M. Neto
Ulisses Parente

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Módulo de Transição

Álgebra B

Expressões Algébricas e Polinômios

Coordenadoria de Formação Docente e Educação a Distância CED
Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Educação
Cientista Chefe Educação
FUNCAP

14 Expressões Algébricas e Produtos Notáveis

14.1 – Expressões algébricas

Iniciamos este módulo com o seguinte

Exercício 14.1 Joaquim deseja comprar um terreno na praia de Mundaú, para construir uma casa de veraneio. Depois de cinco anos de muita economia, ele conseguiu juntar a quantia de cem mil reais para esse fim. Então, Joaquim marcou um encontro com Jaime, que é corretor de imóveis e ficou de apresentar algumas opções. O primeiro terreno que Jaime apresentou a Joaquim tinha forma retangular, com 15 metros de largura e 25 metros de comprimento. Jaime informou a Joaquim que o preço do terreno era de R\$ 250,00 por metro quadrado. Joaquim invocou os conhecimentos que adquiriu na escola, ainda no Ensino Fundamental, e percebeu rapidamente que o dinheiro que tinha era suficiente para comprar o terreno.

(a) Como ele chegou a essa conclusão?

(b) Nas próximas visitas, qual é a *expressão algébrica* que Joaquim deve utilizar para calcular os valores dos terrenos, sabendo que todos são retangulares, com dimensões x e y dadas em metros, e têm o mesmo valor por m^2 que o primeiro terreno?

(c) Sabendo que Joaquim deseja cercar o terreno (de dimensões x e y dadas em metros) com um muro, ao custo de R\$ 30,00 por metro, qual é a *expressão algébrica* que representa o custo total do terreno, depois de cercado?

Solução.

(a) Joaquim lembrou que a fórmula para o cálculo da área de um retângulo a partir das medidas das suas dimensões x e y é dada pela expressão algébrica

$$A = x \cdot y.$$

Desse modo, a área do terreno que Jaime apresentou é igual a

$$A = 15 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2.$$

Como cada m^2 do terreno custa R\$ 250,00, o preco T a ser pago seria

$$T = 375 \cdot 250 = 93.750 \text{ reais}.$$

Assim, Joaquim concluiu que o dinheiro que tinha seria suficiente para comprar o terreno.

(b) Uma vez que a área de um terreno retangular de dimensões x metros e y metros é dada por $x \cdot y$ metros quadrados e o preço do terreno é R\$ 250,00 por metro quadrado, temos que o preço T de um terreno genérico, em reais, é dado pela expressão algébrica

$$T = x \cdot y \cdot 250 = 250xy.$$

(c) O comprimento do muro é igual ao perímetro do terreno, que é igual a

$$x + x + y + y = 2x + 2y.$$

Assim, o custo M do muro é dado pela *expressão algébrica*

$$M = (2x + 2y) \cdot 30 = 30 \cdot 2(x + y) = 60(x + y).$$

Logo, o valor total gasto por Joaquim para comprar o terreno e depois murá-lo é

$$V = T + M = 250xy + 60(x + y).$$

■

Em muitas situações, é conveniente denotar um número real arbitrário por uma letra, com o objetivo de fazer operações com esse número, mesmo sem saber o seu valor. Por exemplo, se denotarmos um número real por x, então seu dobro será $2x$, seu triplo $3x$, sua metade $\frac{1}{2}x$ e sua terça parte $\frac{1}{3}x$.

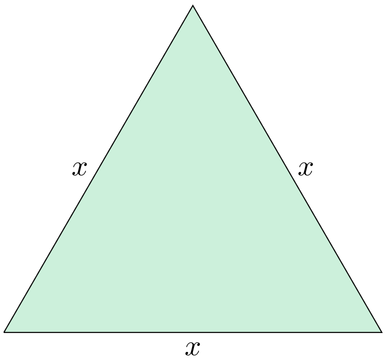
Ao longo deste módulo, denominaremos números reais arbitrários de **variáveis**, e os denotaremos por letras minúsculas do nosso alfabeto: x, y, z, etc. Uma **expressão algébrica** é o resultado de um número finito de operações (escolhidas dentre adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) entre variáveis, sempre que os resultados de tais operações fizerem sentido no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. As expressões algébricas serão denotadas por letras maiúsculas: E, F, G, etc. São exemplos de expressões algébricas:

$$E = 3x^2 - \frac{5}{2}y^3 \text{ e } F = \frac{\sqrt[3]{a^2 + bc^3}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Por vezes, escreveremos $E(x,y)$ e $F(a,b,c)$ para denotar as expressões algébricas acima. Mais geralmente, escrevemos $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para denotar uma expressão algébrica nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

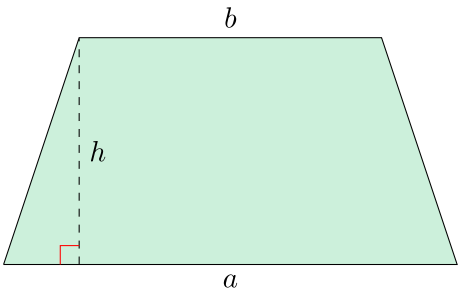
A seguir, listamos outras situações que ilustram o uso de expressões algébricas.

- O triângulo equilátero da figura abaixo, cujos lados medem x, tem perímetro dado pela expressão algébrica $P = 3x$ e área dada pela expressão $A = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$.



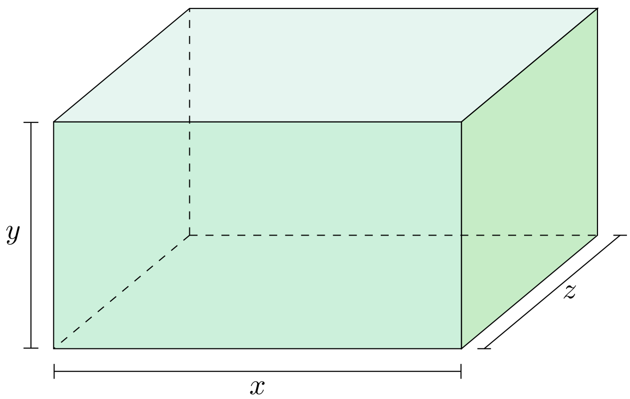
- A área do trapézio na figura abaixo é dada pela expressão algébrica

$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}.$$



- A área da superfície de um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são iguais a x, y e z é igual a

$$A = 2(xy + xz + yz).$$



Exercício 14.2 Pierre possui, em seu sítio, x bois e y galinhas. Qual é a expressão algébrica que indica o número que encontramos ao contar as patas de todos os animais existentes no sítio de Pierre?

Solução. Uma vez que cada boi tem quatro patas e Pierre possui x bois, há $4x$ patas relativas aos bois. Analogamente, como Pierre possui y galinhas e cada galinha tem duas patas, há $2y$ patas referentes às galinhas. Assim, o número de patas de todos os animais existentes no sítio é dado pela expressão algébrica $E = 4x + 2y$. ■

Observação 14.1.1 Se uma expressão algébrica não envolve a operação de radiciação sobre variáveis, ela é chamada de **expressão algébrica racional**. As expressões algébricas racionais podem ser **inteiras**, caso não apresentem operações de divisão envolvendo alguma variável no denominador, ou **fracionárias**, caso contrário. Quando uma expressão apresenta operação de radiciação em alguma variável, a chamamos **expressão algébrica irracional**.

14.1.1 – Valores numéricos de expressões algébricas

Voltando ao exercício 14.1, a área do primeiro terreno visitado por Joaquim, cujas dimensões são 15 e 25 metros, é dada por

$$A = 15 \cdot 25 = 375 \text{ metros quadradados},$$

enquanto as áreas dos demais terrenos, dos quais não sabemos as medidas, são dadas, em metros quadrados, pela expressão algébrica

$$A = x \cdot y = xy.$$

Neste caso, 375 é o *valor numérico* da expressão algébrica $A = xy$ para $x = 15$ e $y = 25$. De modo semelhante, quando observamos o preço do primeiro terreno,

$$T = 375 \cdot 250 = 93.750 \text{ reais},$$

e o preço dos demais terrenos,

$$T = x \cdot y \cdot 250 = 250xy,$$

notamos que 93.750 é o *valor numérico* da expressão algébrica $T = 250xy$, também para $x = 15$ e $y = 25$.

De modo geral, quando atribuímos valores (números reais) às variáveis que compõem uma expressão algébrica, obtemos uma expressão numérica. O resultado dessa expressão numérica é o **valor numérico** da expressão algébrica para aqueles valores que foram atribuídos às suas variáveis. Por exemplo, o valor numérico da expressão algébrica $E(x,y) = 4x^2 - 5xy + 3y^2$ para os valores $x = 2$ e $y = 3$ é

$$4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 4 \cdot 4 - 30 + 3 \cdot 9 = 16 - 30 + 27 = 13.$$

Vejamos mais alguns exemplos:

Exercício 14.3 Qual a área do trapézio cujas bases medem $3cm$ e $2cm$, e cuja altura mede $4cm$?

Solução. Sabemos que a área do trapézio é dada por

$$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2},$$

em que a e b são as medidas das bases e h é a medida da altura do trapézio. Atribuindo os valores $a = 3cm$, $b = 2cm$ e $h = 4cm$, obtemos

$$A = \frac{(3+2) \cdot 4}{2} = 10cm^2.$$

■

Exercício 14.4 Calcule o valor numérico da expressão algébrica $E(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ para $x = -1$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} E(-1) &= (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

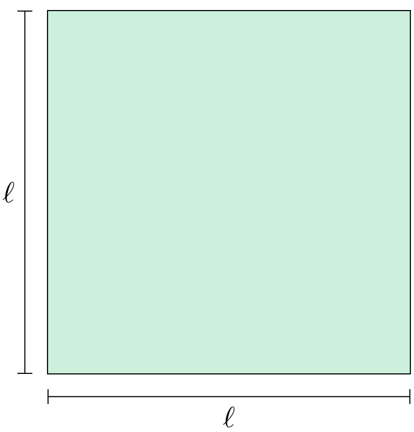
■

14.2 – Monômios

Observe as expressões algébricas utilizadas nas situações abaixo.

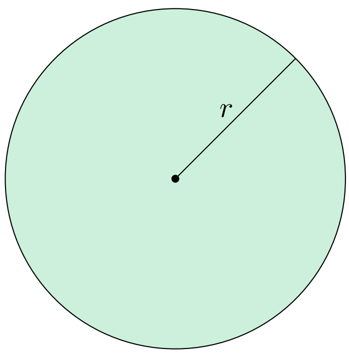
- A área e o perímetro de um quadrado de lado ℓ são dados, respectivamente, pelas expressões algébricas

$$A = \ell^2 \quad \text{e} \quad P = 4\ell.$$



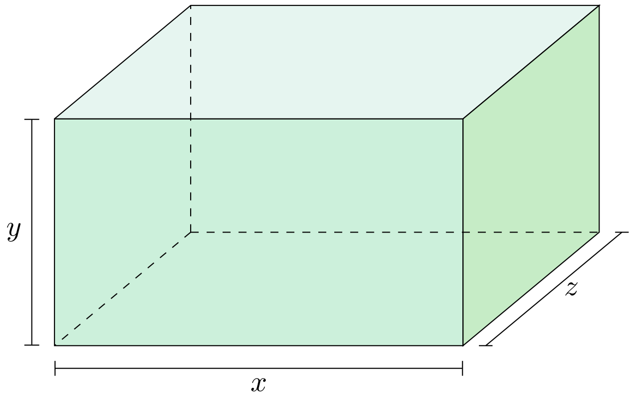
- A área e a circunferência de um círculo de raio r são dadas, respectivamente, pelas expressões algébricas

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \text{e} \quad C = 2\pi r.$$



- O volume de um paralelepípedo reto retângulo é dado pela expressão algébrica

$$V = xyz.$$



Um **monômio** é uma expressão algébrica dada pelo produto de um número real não nulo por um número finito de potências de expoentes inteiros e não negativos, cujas bases são variáveis. Por exemplo, $-3x^2$, $\frac{1}{2}m^3n$, $-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}a^9b^2$ e $\sqrt{3}xyz^3$ são monômios. Um monômio possui uma **parte literal**, formada pelo produto das potências das variáveis, além de uma **parte numérica**, chamada de **coeficiente** do monômio, formada pelo número real que antecede a parte literal. Nos exemplos acima, as partes literais são, respectivamente, x^2, m^3n, a^9b^2 e xyz^3, enquanto que os coeficientes são -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}$ e $\sqrt{3}$.

O **grau** de um monômio é a soma dos expoentes das potências que compõem sua parte literal. Os graus dos monômios dos exemplos acima são, respectivamente, 2, 4, 11 e 5.

Dizemos que dois ou mais monômios são **semelhantes** se possuem a mesma parte literal. Observe os exemplos abaixo:

- Os monômios $-4x^2y^3z$ e $\sqrt{5}x^2y^3z$ são semelhantes, pois ambos possuem parte literal igual a x^2y^3z.

- Os monômios m^3n^2, $\frac{3}{4}m^3n^2$ e $\sqrt{2}m^3n^2$ são semelhantes, pois os três possuem parte literal igual a m^3n^2.

- Já os monômios $-4p^5q^4$ e $-2p^4q^5$ não são semelhantes, pois possuem partes literais distintas.

Agora, observe os próximos exemplos, lembrando que variáveis representam números reais arbitrários e notando que operamos com as variáveis utilizando as propriedades das operações usuais com números reais (por exemplo, distributividade da multiplicação em relação à adição, regras de potenciação e radiciação, etc).

- Na soma $4ab^3 - 3ab^3 + 6ab^3$, podemos desfazer a distributividade da multiplicação em relação à adição colocando ab^3 em evidência:

$$4ab^3 - 3ab^3 + 6ab^3 = (4 - 3 + 6)ab^3 = 7ab^3.$$

- Da mesma forma, *agrupando monômios semelhantes*, temos

$$\begin{aligned} -8xy^3 + \frac{1}{2}x^3y^2 + 4xy^3 + \frac{3}{2}x^3y^2 &= (-8+4)xy^3 + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)x^3y^2 \\ &= -4xy^3 + 2x^3y^2. \end{aligned}$$

Em resumo:

> Para **adicionar** (ou **subtrair**) dois ou mais monômios semelhantes, devemos adicionar (ou subtrair) seus coeficientes e conservar a parte literal comum.

Ao tratarmos com expressões algébricas, a frase **reduzir os monômios semelhantes** significa adicionar ou subtrair todos os grupos de monômios semelhantes, *rezuzindo* cada um desses grupos, a um só monômio, como feito nos exemplos acima.

Agora, veja os exemplos abaixo, os quais tratam de multiplicações e divisões de monômios. Também nessas operações, utilizamos propriedades das mesmas operações com números reais, como produto e divisão de potências de mesma base.

- $5xy^2 \cdot 3x^2y^2 = 15x^{1+2}y^{2+2} = 15x^3y^4.$
- $(5ab^2) \cdot (-4a^2b^3c^2) = -20a^{1+2}b^{2+3}c^2 = -20a^3b^5c^2.$
- $(-4x^3y^4z) \div (2xy^2z) = -2x^{3-1}y^{4-2}z^{1-1} = -2x^2y^2.$
- $\dfrac{45m^8n^7p^3}{9m^3n^2p} = 5m^{8-3}n^{7-2}p^{3-1} = 5m^5n^5p^2.$

Em resumo:

> Para **multiplicar** (ou **dividir**) monômios, multiplicamos (ou dividimos) os coeficientes e as partes literais.

É importante observar que nem sempre podemos executar uma divisão de monômios. Para que possamos fazê-la, os expoentes das variáveis do numerador têm de ser maiores ou iguais que os expoentes das variáveis correspondentes no denominador. Por exemplo, não podemos executar a divisão de monômios

$$\frac{45m^8n^7p^3}{9m^3n^2p^5},$$

pois, ainda que as mesmas variáveis compareçam no numerador e no denominador, o expoente da variável p no numerador é menor que seu expoente no denominador.

> Para calcular uma **potência** de um monômio, elevamos tanto o coeficiente quanto a parte literal do monômio à potência indicada.

- $\left(\dfrac{1}{2}x^2y^3\right)^4 = \dfrac{1}{16}x^8y^{12}.$
- $\left(-\sqrt{3}abc^3\right)^2 = 3a^2b^2c^6.$

Para extrair a **raiz n−ésima** de um monômio, extraímos as raízes n−ésimas de seu coeficiente e de sua parte literal. Observe que nem sempre a raiz n−ésima de um monômio será um monômio.

- $\sqrt{9x^6y^4} = \sqrt{(3x^3y^2)^2} = 3x^3y^2$, se $x \geq 0$.
- $\sqrt[3]{64a^3b^6c^9} = \sqrt[3]{(4ab^2c^3)^3} = 4ab^2c^3$.

14.3 – Polinômios

Um **polinômio** é uma expressão algébrica que é dada por uma soma finita de monômios. Por exemplo,

$$P(x) = 3x^2y - 3xy^3 + \sqrt{2}xy + 7$$

é um polinômio nas variáveis x e y. Utilizamos a notação $P(x)$ para representar um polinômio na variável x, $P(x,y)$ para representar um polinômio nas variáveis x e y, $P(x,y,z)$ para representar um polinômio nas variáveis x, y e z, e assim por diante. Os **coeficientes** de um polinômio são os coeficientes dos monômios que o compõem. O **grau** de um polinômio é o maior dentre todos os graus dos monômios que o compõem. Denotamos o grau de um polinômio $P(x)$ por ∂P. (Aqui, ∂ é a letra maiúscula grega *rô*.)

- Os coeficientes do polinômio $P(x) = 3x^2y - 3xy^3 + \sqrt{2}xy + 7$ são 3, −3, $\sqrt{2}$ e 7 e, uma vez que os graus dos monômios que o compõem são 3, 4, 2 e 0, seu grau é igual a 4.

Daqui em diante, trataremos apenas de polinômios com uma variável. São exemplos de polinômios em uma variável:

- $P(x) = -2x^4 + \sqrt{5}x^2 - \dfrac{5}{11}$;
- $Q(x) = -3x^5 + x^4 - 3x^3 - 7$.

Quando o coeficiente do monômio de maior grau de um polinômio é igual a 1, dizemos que o polinômio é **mônico**.

- $P(x) = x^3 - 5x^2 + \sqrt{2}$ e $Q(x) = x^{100} - 2x + 1$ são polinômios mônicos.

Dizemos que $P(x)$ é **nulo** (ou **identicamente nulo**), se $P(x) = 0$, para qualquer valor real que se atribua à variável x e, neste caso, escrevemos $P \equiv 0$. A proposição destacada a seguir é um fato conhecido, que será assumido sem maiores comentários:

Um polinômio $P(x)$ é nulo se, e somente se, seus coeficientes são todos nulos.

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são **iguais** (ou **idênticos**) se $P(x) = Q(x)$, para todo valor que se atribua à variável x. Também é um fato conhecido que $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais se, e somente se, possuem os mesmos coeficientes.

Uma **raiz** de um polinômio $P(x)$ é qualquer número real que, uma vez atribuído à variável x, torna o valor numérico de P igual a zero.

- Os números reais 2 e 5 são raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 10$, pois, substituindo x por 2 e por 5 obtemos, respectivamente, $P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$ e $P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$.

- Os números reais 1 e -1 são raízes do polinômio $P(x) = x^{2016} - 1$, pois $P(1) = 1^{2016} - 1 = 1 - 1 = 0$ e $P(-1) = (-1)^{2016} - 1 = 1 - 1 = 0$. Por outro lado, considerando o polinômio $Q(x) = x^{2015} - 1$, vemos que, dentre os números 1 e -1, apenas 1 é raiz, pois $Q(-1) = (-1)^{2015} - 1 = -1 - 1 = -2$. Mais geralmente, se n é par, então 1 e -1 são raízes do polinômio $S(x) = x^n - 1$. Caso n seja ímpar, então apenas 1, dentre os números 1 e -1, é raiz de $S(x) = x^n - 1$.

- O número real 5 não é raiz do polinômio do terceiro grau $P(x) = x^3 - 4x^2 - 24$, pois $P(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 24 = 125 - 100 - 24 = 1$.

Se $P(x)$ é um polinômio de grau 1, isto é, $P(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, então encontrar as raízes de P é uma tarefa bastante simples. Senão, vejamos:

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a},$$

ou seja, a única raiz de P é $x = -\frac{b}{a}$.

Quando $P(x)$ é um polinômio de grau dois, isto é, $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, existe uma fórmula, chamada **fórmula de Bhaskara**, que permite que se determine as raízes através de operações algébricas entre os coeficientes a, b e c. De fato, se $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes de $P(x) = ax^2 + bx + c$ são dadas por

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para polinômios de graus três e quatro, também há fómulas envolvendo apenas operações algébricas com os coeficientes e que explicitam as raízes. Embora existam, tais fórmulas são bem complexas e, o mais das vezes, dão como resultado expressões muito complicadas para as raízes, o que inviabiliza seus usos. Para polinômios de grau maior do que ou igual a cinco, pode ser mostrado que não existe uma expressão algébrica, construída em função dos coeficientes do polinômio, que sirva para determinar as raízes.

14.3.1 – Adicão e subtração de polinômios

Para **adicionar** (ou **subtrair**) dois polinômios, adicionamos (ou subtraímos) os monômios de um aos do outro e, depois, reduzimos os monômios semelhantes.

Exercício 14.5 Se $P(x) = 3x^4 - 5x + 4$ e $Q(x) = -x^5 + 8x^4 + 8x$, encontre $P(x) + Q(x)$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^4 - 5x + 4) + (-x^5 + 8x^4 + 8x) \\ &= 3x^4 - 5x + 4 - x^5 + 8x^4 + 8x \\ &= -x^5 + 3x^4 + 8x^4 - 5x + 8x + 4 \\ &= -x^5 + 11x^4 + 3x + 4. \end{aligned}$$

■

Exercício 14.6 Dados $P(x) = 9x^6 - 7x^4 + 3x - 2$ e $Q(x) = -x^6 + 3x^5 - 8x + 9$, encontre $P(x) - Q(x)$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (9x^6 - 7x^4 + 3x - 2) \\ &\quad - (-x^6 + 3x^5 - 8x + 9) \\ &= 9x^6 - 7x^4 + 3x - 2 + x^6 - 3x^5 + 8x - 9 \\ &= 9x^6 + x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 3x + 8x - 2 - 9 \\ &= 10x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 11x - 11. \end{aligned}$$

■

Observação 14.3.1 Se o polinômio resultante da adição (ou subtração) de dois outros polinômios for não nulo, então seu grau é menor do que ou igual ao maior dos graus dos polinômios-parcela. Em símbolos,

$$\partial(P + Q) \le \max\{\partial P, \partial Q\}.$$

Exercício 14.7 Se $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$ e $Q(x) = -2x^3 + x^2 + 4$, encontre $P(x) + Q(x)$.

Solução.

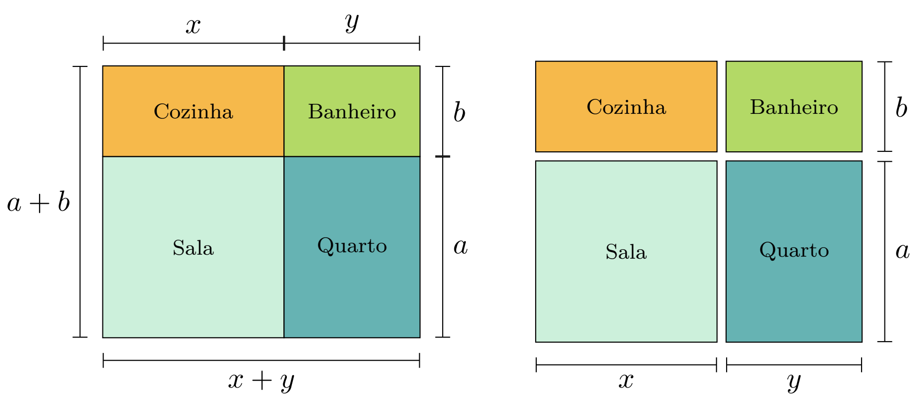
$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 - 3x + 1) + (-2x^3 + x^2 + 4) \\ &= 2x^3 - 3x + 1 - 2x^3 + x^2 + 4 \\ &= 2x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 4 \\ &= x^2 - 3x + 5. \end{aligned}$$

■

14.3.2 – Multiplicação de polinômios

Observe a seguinte situação:

Joaquim tem um quitinete que possui quatro cômodos, como ilustrado na figura abaixo.



Na figura da esquerda, podemos notar que a área total do quitinete, que tem forma retangular, é igual a

$$(a+b)\cdot(x+y).$$

Por outro lado, se observarmos a figura da direita, onde o quitinete está dividido em cômodos, podemos obter a área total do quitinete somando os monômios que representam as áreas dos cômodos. Assim, essa área é dada por

$$ax+ay+bx+by.$$

Portanto, obtemos a igualdade

$$(a+b)\cdot(x+y)=ax+ay+bx+by.$$

Essa igualdade pode ser facilmente obtida utilizado a propriedade distributiva dos números reais.

> De modo geral, para **multiplicar** dois polinômios, multiplicamos cada monômio de um deles por todos os monômios do outro. Em seguida, adicionamos os resultados, reduzindo os monômios semelhantes. Assim como com números reais, numa multiplicação de polinômios, os polinômios que estão sendo multiplicados são chamados de **fatores** e o resultado é o **produto**.

Exercício 14.8 Se $P(x)=2x-1$ e $Q(x)=x+3$, encontre $P(x)\cdot Q(x)$.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (2x-1)\cdot(x+3)\\ &= 2x\cdot x+2x\cdot 3-1\cdot x-1\cdot 3\\ &= 2x^2+6x-x-3\\ &= 2x^2+5x-3. \end{aligned}$$

■

Exercício 14.9 Se $P(x)=x^2-2x+4$ e $Q(x)=-2x+2$, encontre $P(x)\cdot Q(x)$.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (x^2-2x+4)\cdot(-2x+2)\\ &= x^2\cdot(-2x+2)-2x\cdot(-2x+2)\\ &\quad +4\cdot(-2x+2)\\ &= -2x^3+2x^2+4x^2-4x-8x+8\\ &= -2x^3+6x^2-12x+8. \end{aligned}$$

■

Outro dispositivo bastante útil para calcular o produto de dois polinômios é aquele mostrado no exemplo abaixo. Note a *semelhança formal* entre ele e o dispositivo que utilizamos costumeiramente para multiplicar dois números naturais.

Exercício 14.10 Se $P(x) = -x^3 + 4x - 11$ e $Q(x) = 3x^2 - 8x + 6$, calcule $P(x) \cdot Q(x)$.

Solução.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & -x^3 & +4x & -11 & & & \\
\times & 3x^2 & -8x & +6 & & & \\
\hline
 & & & -6x^3 & & +24x & -66 \\
 & & 8x^4 & & -32x^2 & +88x & \\
 & -3x^5 & & +12x^3 & -33x^2 & & \\
\hline
 & -3x^5 & +8x^4 & +6x^3 & -65x^2 & +112x & -66
\end{array}
$$

■

Observação 14.3.2 O grau do produto de dois polinômios não nulos é igual à soma dos graus dos fatores, isto é,

$$\partial(P \cdot Q) = \partial P + \partial Q.$$

Isto segue de que, se $P(x) = ax^m +$ monômios de graus menores e $Q(x) = bx^n +$ monômios de graus menores, então

$$
\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (ax^m + \ldots\ldots\ldots)(bx^n + \ldots\ldots\ldots) \\
&= abx^{m+n} + \text{monômios de graus menores},
\end{aligned}
$$

de forma que

$$\partial(P \cdot Q) = m + n = \partial P + \partial Q.$$

Um caso particular de multiplicação de polinômios que vale a pena ser ressaltado é quando os dois fatores da multiplicação têm grau 1, como no próximo exemplo.

Exercício 14.11 Dados $P(x) = x + 5$ e $Q(x) = x + 6$, encontre $P(x) \cdot Q(x)$.

Solução. Temos

$$
\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (x + 5) \cdot (x + 6) \\
&= x^2 + 6x + 5x + 30 \\
&= x^2 + 11x + 30.
\end{aligned}
$$

Note que $11 = 5 + 6$ e $30 = 5 \cdot 6$. ■

Generalizando o exemplo anterior, você pode verificar sem dificuldade, que:

Sempre que multiplicamos $P(x) = x + a$ por $Q(x) = x + b$, obtemos $P(x) \cdot Q(x) = x^2 + Sx + P$, em que $S = a + b$ e $P = ab$.

14.3.3 – Divisão de polinômios

Começamos esta seção com o seguinte teorema que trata da existência e unicidade do quociente e do resto em uma divisão de polinômios em uma variável x.

> **Teorema 14.3.3** Dados polinômios $A(x)$ e $B(x) \neq 0$, existem únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$, com $\partial R < \partial B$ ou $R = 0$.

No teorema 14.3.3, $A(x)$ é chamado **dividendo**, $B(x)$ é o **divisor**, $Q(x)$ o **quociente** e $R(x)$ o **resto** da divisão. (Note a semelhança com a divisão de números naturais, trocando a relação do resto *ser menor que o divisor* pela relação do resto *ter grau menor que o do divisor*.)

A partir de agora, explicaremos como funciona um dispositivo prático para calcular o quociente e o resto numa divisão de polinômios. Propomos, como exemplo, calcular o quociente e o resto na divisão de

$$A(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3x - 1 \quad \text{por} \quad B(x) = x^2 - 3x + 4.$$

Antes, observe que o termo de maior grau do polinômio quociente $Q(x)$, neste caso, deve ser $5x^2$, pois seu produto por x^2 deve resultar em $5x^4$. Considere, então, o polinômio

$$R_1(x) = A(x) - 5x^2 \cdot B(x) = 15x^3 - 24x^2 + 3x - 1.$$

Como $\partial R_1 = 3 > \partial B$, encontramos o segundo termo de $Q(x)$ dividindo o termo de maior grau de $R_1(x)$ por x^2. Esse termo é igual a $15x$ e, daí, consideramos o polinômio

$$R_2(x) = R_1(x) - 15x \cdot B(x) = 21x^2 - 57x - 1.$$

Como $\partial R_2 = 2 = \partial B$, seguimos, dividindo o termo de maior grau de $R_2(x)$ por x^2. Dessa vez, obtemos 21 como resultado, que é o terceiro termo de $Q(x)$. Agora,

$$R(x) = R_2(x) - 21 \cdot B(x) = 6x - 85$$

satisfaz a condição $\partial R < \partial B$ e, além disso,

$$\begin{aligned} R(x) &= R_2(x) - 21 \cdot B(x) \\ &= R_1(x) - 15x \cdot B(x) - 21 \cdot B(x) \\ &= A(x) - 5x^2 \cdot B(x) - 15x \cdot B(x) - 21 \cdot B(x) \\ &= A(x) - \left(5x^2 + 15x + 21\right) \cdot B(x), \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$Q(x) = 5x^2 + 15x + 21 \quad \text{e} \quad R(x) = 6x - 85.$$

A discussão acima pode ser sintetizada da seguinte forma (uma vez mais, repare na semelhança com o procedimento que empregamos rotineiramente para dividir dois números naturais):

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 3x - 1 & x^2 - 3x + 4 \\ \hline -5x^4 + 15x^3 - 20x^2 \qquad\qquad & 5x^2 + 15x + 21 \\ \hline 15x^3 - 24x^2 + 3x - 1 & \qquad \uparrow \\ -15x^3 + 45x^2 - 60x \quad\;\; & \quad\; Q(x) \\ \hline 21x^2 - 57x - 1 & \\ -21x^2 + 63x - 84 & \\ \hline R(x) \longrightarrow \quad 6x - 85 & \end{array}$$

ou, de uma forma ainda mais simples,

5	0	-4	3	-1	1	-3	4
-5	15	-20			5	15	21
	15	-24	3	-1			
	-15	45	-60				
		21	-57	-1			
		-21	63	-84			
			6	-85			

Exercício 14.12 Encontre o resto e o quociente da divisão de $2x^3 - 3x + 8$ por $x + 2$.

Solução. Utilizando o dispositivo prático mostrado acima, obtemos

2	0	-3	8	1	2	
-2	-4			2	-4	5
	-4	-3	8			
	4	8				
		5	8			
		-5	-10			
			-2			

Daí, segue que

$$2x^3 - 3x + 8 = \left(2x^2 - 4x + 5\right) \cdot (x + 2) - 2,$$

ou seja, $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$ e $R(x) = -2$. ■

Numa divisão, quando o divisor é um polinômio mônico de grau 1, existe um dispositivo, chamado **algoritmo de Briot-Ruffini**, que permite calcular o quociente e o resto de uma maneira bem mais rápida. Para ver como ele funciona, vamos dividir $A(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ por $B(x) = x - 3$. Então, nosso objetivo é determinar $Q(x) = ax^3 + bx_2 + cx + d$ e $R(x) = r \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x),$$

ou seja,

$$5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = \left(ax^3 + bx_2 + cx + d\right) \cdot (x - 3) + r.$$

Daí, segue que

$$5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4 =$$
$$= ax^4 + (b - 3a)\,x^3 + (c - 3b)\,x^2 + (d - 3c)\,x + (r - 3d),$$

e obtemos

$$
\begin{aligned}
& & a &= 5;\\
b - 3a = -2 &\implies & b &= 13;\\
c - 3b = 3 &\implies & c &= 42;\\
d - 3c = 4 &\implies & d &= 130;\\
r - 3d = -4 &\implies & r &= 386.
\end{aligned}
$$

A discussão acima pode ser reduzida ao seguinte esquema:

5	-2	3	4	-4	3
$\color{blue}{5}$	$\underbrace{3 \cdot 5 - 2}_{\color{blue}{13}}$	$\underbrace{3 \cdot 13 + 3}_{\color{blue}{42}}$	$\underbrace{3 \cdot 42 + 4}_{\color{blue}{130}}$	$\underbrace{3 \cdot 130 - 4}_{\color{red}{386}}$	

Portanto, obtemos, $Q(x) = \color{blue}{5}x^3 + \color{blue}{13}x^2 + \color{blue}{42}x + \color{blue}{130}$ e $R(x) = \color{red}{386}$.

Exercício 14.13 Determine o quociente e o resto na divisão de $P(x) = 8x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ por $Q(x) = x - 2$.

Solução. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini obtemos,

8	-5	5	3	2
$\color{blue}{8}$	$\underbrace{2 \cdot 8 + (-5)}_{\color{blue}{11}}$	$\underbrace{2 \cdot 11 + 5}_{\color{blue}{27}}$	$\underbrace{2 \cdot 27 + 3}_{\color{red}{57}}$	

Portanto, $Q(x) = \color{blue}{8}x^2 + \color{blue}{11}x + \color{blue}{27}$ e $R(x) = \color{red}{57}$. ■

Expressões algébricas no ENEM

Vejamos alguns exemplos de como as expressões algébricas têm sido abordadas no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM:

Exercício 14.14 — ENEM - 2009. Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

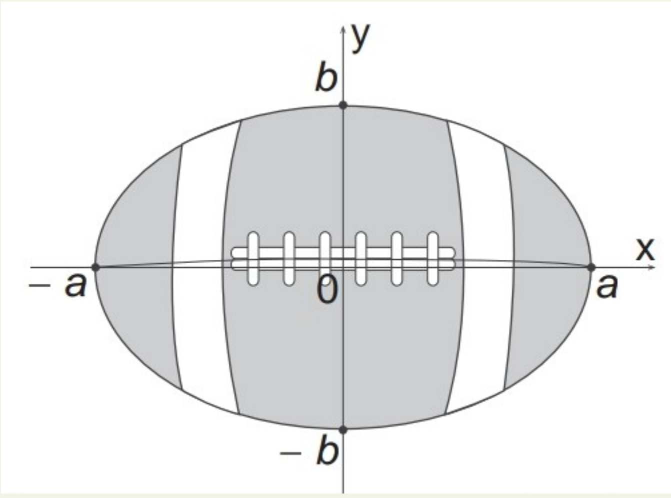
(a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.
(b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.
(c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.
(d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.
(e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

Solução. O desconto de x centavos concedido pelo dono do posto corresponde a $\frac{x}{100}$ em real. Daí, o preço da gasolina, também em real, passa a ser $1{,}50 - \frac{x}{100}$. Mas, para cada centavo de denconto, são vendidos 100 litros de álcool a mais, logo, o total de litros vendidos é $10.000 + 100x$. Portanto, o valor, em R\$, arrecadado é dado por

$$\begin{aligned} V &= (10.000 + 100x)\left(1{,}50 - \frac{x}{100}\right) \\ &= 15.000 - 10.0\cancel{00} \cdot \frac{x}{1\cancel{00}} + 150x - \cancel{100}x \cdot \frac{x}{\cancel{100}} \\ &= 15.000 - 100x + 150x - x^2 \\ &= 15.000 + 50x - x^2. \end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

Exercício 14.15 — ENEM - 2015. A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores **a** e **b** são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $\mathbf{V} = 4\mathbf{ab}^2$. O volume dessa bola, em função apenas de **b**, é dado por

(a) $8\mathbf{b}^3$.
(b) $6\mathbf{b}^3$.
(c) $5\mathbf{b}^3$.
(d) $4\mathbf{b}^3$.
(e) $2\mathbf{b}^3$.

Solução. Como a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical, temos

$$2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \frac{1}{2} \cdot 2\mathbf{b},$$

ou seja,

$$2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow 2\mathbf{a} = 3\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \frac{3\mathbf{b}}{2}.$$

Desse modo, o volume, em função de $\mathbf{b}$, é dado por

$$\mathbf{V} = 4\mathbf{ab}^2 = \cancel{4}^2 \cdot \frac{3\mathbf{b}}{\cancel{2}}\mathbf{b}^2 = 6\mathbf{b}^3.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(b)**. ■

Exercício 14.16 — ENEM - 2013. Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y

(a) $5X - 3Y + 15 = 0.$
(b) $5X - 2Y + 10 = 0.$
(c) $3X - 3Y + 15 = 0.$
(d) $3X - 2Y + 15 = 0.$
(e) $3X - 2Y + 10 = 0.$

Solução. Em cada ciclo de Y segundos, a luz amarela fica acesa por 5 segundos e a luz verde fica acesa por X segundos. Como o tempo em que a luz verde permanece acesa é igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fica acesa, temos que o tempo em que a luz vermelha vica acesa é igual a $\frac{3}{2} \cdot X$. Desse modo, temos:

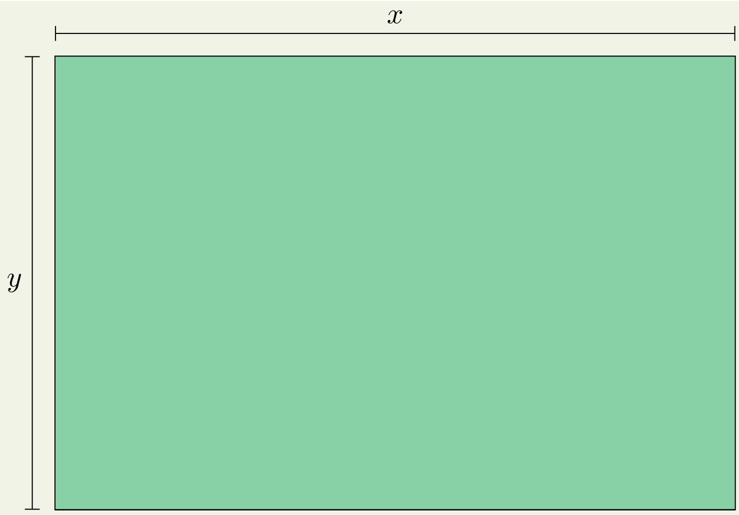
$$\begin{aligned} Y &= 5 + x + \frac{3X}{2} \\ &= \frac{10 + 2X + 3X}{2} \\ &= \frac{5X + 10}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$5X - 2Y + 10 = 0.$$

Logo, alternativa correta é a letra **(b)**. ■

Exercício 14.17 — ENEM - 2016. Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metros, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R$ 7500,00. O material da cerca custa R$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R$ 2,00 por metro para os demais lados. Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

(a) $4(2x + y) = 7.500$.
(b) $4(x + 2y) = 7.500$.
(c) $2(x + y) = 7.500$.
(d) $2(4x + y) = 7.500$.
(e) $2(2x + y) = 7.500$.

Solução. Os lados paralelos ao rio medem, juntos, $2x$ metros, e os outros dois lados medem, também juntos, $2y$ metros Como cada metro do material usado para cercar o lado paralelos ao rio custa R$ 4,00; cada metro do material usado para cercar os outros dois lados custa R$ 2,00 e o custo total para cercar todo o terreno é R$ 7.500,00, obtemos:

$$2x \cdot 4 + 2y \cdot 2 = 7.500 \Longrightarrow 8x + 4y = 7.500,$$

ou seja,

$$4(2x + y) = 7.500.$$

Portanto, a opção correta é a letra **(a)**. ■

Exercício 14.18 — ENEM - 2015. Num campeonato de futebol de 2012, um time sagrou-se campeão com um total de 77 pontos (P) em 38 jogos, tendo 22 vitórias (V), 11 empates (E) e 5 derrotas (D). No critério adotado para esse ano, somente as vitórias e empates têm pontuações positivas e inteiras. As derrotas têm valor zero e o valor de cada vitória é maior que o valor de cada empate.

Um torcedor, considerando a fórmula da soma de pontos injusta, propôs aos organizadores do campeonato que, para o ano de 2013, o time derrotado em cada partida perca 2 pontos, privilegiando os times que perdem menos ao longo do campeonato. Cada vitória e cada empate continuariam com a mesma pontuação de 2012.

Qual a expressão que fornece a quantidade de pontos (P), em função do número de vitórias (V), do número de empates (E) e do número de derrotas (D), no sistema de pontuação proposto pelo torcedor para o ano de 2013?

(a) $P = 3V + E$.
(b) $P = 3V - 2D$.
(c) $P = 3V + E - D$.
(d) $P = 3V + E - 2D$.
(e) $P = 3V + E + 2D$.

Solução. O time fez 77 pontos e obteve 22 vitórias e 11 empates, logo, a quantidade de pontos recebidos por cada vitória é, no máximo, igual a 3 (pois $22 \cdot 4 = 88 > 77$). Se cada vitória vale 2 pontos no máximo, então o total de pontos ganhos com os 11 empates é maior que $77 - 2 \cdot 22 = 33$, o que implica que a quantidade de pontos ganhos em cada empate é, no mínimo, igual a 3. mas isso não pode acontecer, porque o valor de cada vitória é maior que o valor de cada empate. Logo, cada vitória vale 3 pontos e cada empate vale 1 ponto. Assim, com a proposta de o time perder 2 pontos a cada derrota, temos que a quantidade de pontos do time em 2013 será:

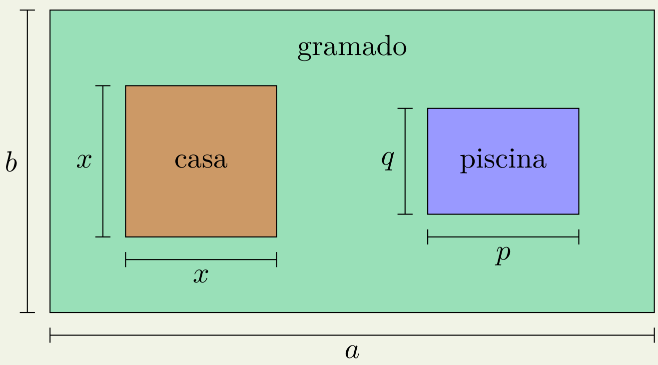
$$P = 3V + E - 2D.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

14.4 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 14.19 Uma casa deve ser construída em um terreno que tem forma retangular, conforme a planta esboçada na figura abaixo:



De acordo com a planta, encontre a expressão algébrica que representa:

(a) a área do terreno.
(b) a área ocupada pela casa.
(c) a área ocupada pela piscina.
(d) a área livre, que corresponde ao gramado.

Exercício 14.20 Em cada um dos itens abaixo, calcule o valor numérico da expressão algébrica dada:

(a) $x^2 + 4xy + 1$, para $x = 2$ e $y = -1$.

(b) $3x + 3y - 7$, para $x = -2$ e $y = 4$.

(c) $\dfrac{x^3 + y + z^2}{2}$, para $x = -1$, $y = 2$ e $z = -2$.

(d) $\dfrac{3xy}{5}$, para $x = \sqrt{5}$ e $y = -\sqrt{5}$.

(e) $\dfrac{\pi r^2}{2}$, para $r = \sqrt{2}$.

(f) $\dfrac{4\pi r^3}{3}$, para $r = 2\sqrt[3]{3}$.

Exercício 14.21 Encontre o coeficiente e a parte literal do monômio dado em cada um dos itens abaixo.

(a) $-a^2bc^3$.

(b) $\frac{xy^4}{2}$.

(c) $-\frac{2}{3}xy$.

(d) $\frac{\pi r^2}{2}$.

(e) $0{,}2x^2y^2z$.

(f) $-2\sqrt{5}x^2$.

(g) $-\frac{3mnp}{8}$.

(h) xy.

Exercício 14.22 Dentre as expressões algébricas listadas abaixo, quais são monômios?

(a) $2(x + y)$.

(b) $-0.3xyz$.

(c) $x^2 - x$.

(d) $5abcd$.

(e) -1.

(f) $\frac{10}{xy}$.

(g) $-\frac{x+y}{3}$.

(h) xy^2.

Exercício 14.23 Em cada um dos itens a seguir, encontre o grau do polinômio dado:

(a) $7a^2 - b^3$.
(b) $x^4y^2 - 2xy^3$.
(c) $4a^2b^4 - 5ab^6$.
(d) $12x^3 + 11x^2y^3 - 2y^4$.
(e) $5z^4 + 8z^3 - \frac{7z^3xy}{2}$.
(f) $9a^3b{-}7a^2 + 5b^2$.
(g) $13a^3b + a^2b^2 - 2ab^4$.
(h) $4x^4y^3 - 5x^7$.

Exercício 14.24 Simplifique as expressões:

(a) $4x - 3x + x$.
(b) $xy^2 + \frac{xy^2}{2}$.
(c) $8a^2b^2 - 13a^2b^2 + \frac{9}{2}a^2b^2$.
(d) $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{3} + \frac{ab}{6}$.
(e) $x^2y - 3xy^2 - 4x^2y + 5xy^2$.
(f) $a^5 - 3a^4 + 7a^2 - 3a^5 + 4a^4 - 3a^2$.

Exercício 14.25 Encontre os valores das operações com monômios abaixo:

(a) $2x \cdot 3y^2$.
(b) $3x^2y^2 \cdot 3xy^4$.
(c) $4ab^3 \cdot (-2a^2bc)$.
(d) $(-x^2y^2z) \cdot (-2x^2yz)$.
(e) $8x^6 \div 4x^4$.
(f) $(-9x^3yz^2) \div 3xyz$.
(g) $12a^4b^3 \div (-3a^4)$.
(h) $(-p^4q^3r^2) \div (-2p^2q^3)$.

Nível 2

Exercício 14.26 Dadas as expressões algébricas $E = 2x^2 - 1$ e $F = x^2 + 2$, calcule:

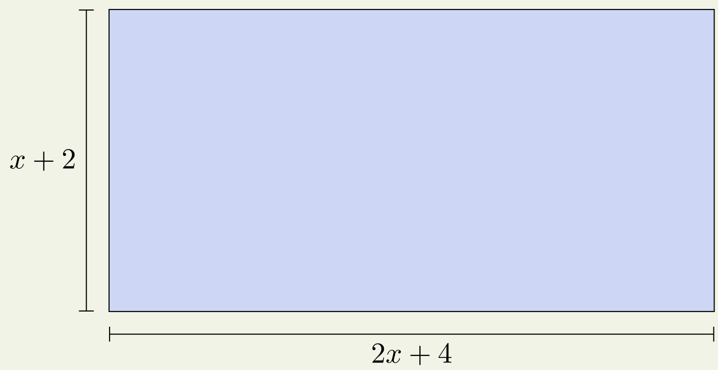
(a) E^2.
(b) F^2.
(c) $(E + F)^2$.
(d) $(E - F)^2$.
(e) $(E + F)^3$.
(f) $(E - F)^3$.

Exercício 14.27 Calculo o valor numérico da expressão algébrica

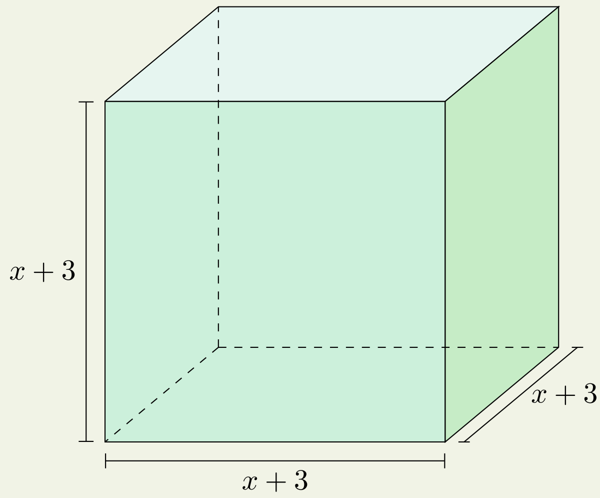
$$\frac{x^2y^3 - xz^2}{x^3y^2 + yz}$$

para $x = -1$, $y = 1$ e $z = 2$.

Exercício 14.28 Encontre o polinômio que representa a área da figura abaixo:



Exercício 14.29 Encontre o polinômio que representa o volume da figura abaixo:



Exercício 14.30 Em cada item, multiplique os polinômios e reduza os termos semelhantes:

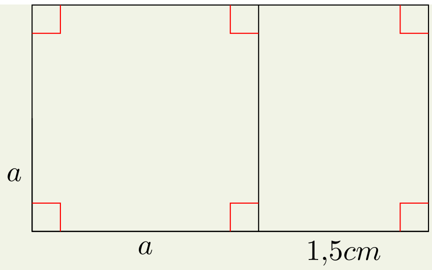
(a) $(5x+2)\cdot(3x-1)$.

(b) $(2x^2-3x+1)\cdot(x+1)$.

(c) $(-3x+1)\cdot(x^2-2x+1)$.

(d) $(12x+7)\cdot(x^3-3x^2)$.

Exercício 14.31 — Banco OBMEP. O que representam, na figura a seguir, as expressões a^2+1, $5a$ e $4a+3$?



Exercício 14.32 Em cada um dos itens abaixo, encontre o divisor e o resto na divisão de $P(x)$ por $Q(x)$:

(a) $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ e $Q(x) = x - 1$.

(b) $P(x) = 4x^3 - 4x$ e $Q(x) = 2x^2 - 1$.

(c) $P(x) = -3x^2 - x + 2$ e $Q(x) = x - 3$.

(d) $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 7$ e $Q(x) = x^2 - 2x - 1$.

Exercício 14.33 Quais são o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^4 - x^2 + 2$ por $B(x) = x^2 + 2x - 1$?

Nível 3

Exercício 14.34 Calcule os valores de a e b de modo que a divisão de $A(x) = x^3 - ax + b$ por $B(x) = x^2 - x + 2$ seja exata.

Exercício 14.35 — OBM. Os números reais x e y são distintos de zero, distintos entre si e satisfazem a igualdade

$$x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

Então, o valor de xy é igual a:

(a) 4.
(b) 1.
(c) -1.
(d) -4.
(e) é preciso de mais dados.

Exercício 14.36 — ENEM - 2013. Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que o "cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa

M"[a].

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

(a) $S = k \cdot M$.
(b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$.
(c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$.
(d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$.
(e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$.

[a] HUGHES-HALLETT, et al. *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Bücher, 1999 (adaptado).

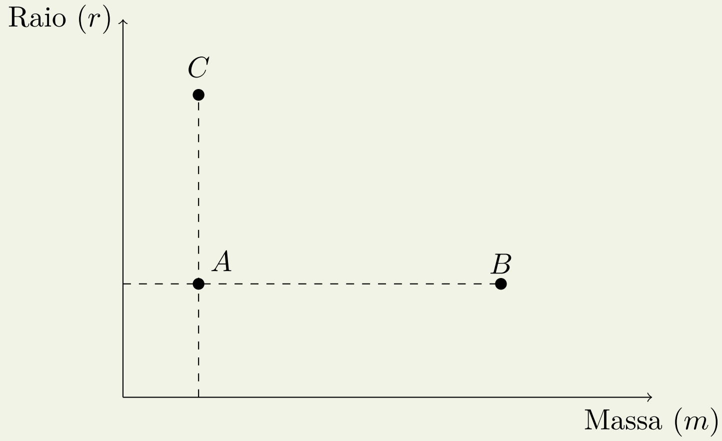
Exercício 14.37 — ENEM - 2018. Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual ã quantidade de panfletos distribuídos, enquanto que a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R$ 120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1500 pessoas. Já a produção e a distribuição dos panfletos custam R$ 180,00 cada 1000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias. Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente. O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão

(a) $\dfrac{50X}{4} + \dfrac{50Y}{9}$.
(b) $\dfrac{50X}{9} + \dfrac{50Y}{4}$.
(c) $\dfrac{4X}{50} + \dfrac{4Y}{50}$.
(d) $\dfrac{50}{4X} + \dfrac{50}{9Y}$.
(e) $\dfrac{50}{9X} + \dfrac{50Y}{4Y}$.

Exercício 14.38 — ENEM - 2018. De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa m do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio r da órbita, ou seja,

$$F = \frac{km}{r^2}.$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto (m, r) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades F_A , F_B e F_C da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente. As intensidades F_A, F_B e F_C expressas no gráfico satisfazem a relação

(a) $F_C = F_A < F_B$.
(b) $F_A = F_B < F_C$.
(c) $F_A < F_B < F_C$.
(d) $F_A < F_C < F_B$.
(e) $F_C < F_A < F_B$.

Exercício 14.39 — ENEM - 2017. O estado de qualquer substância gasosa é determinado pela medida de três grandezas: o volume (V), a pressão (P) e a temperatura (T) dessa substância. Para os chamados gases "ideais", o valor do quociente $\dfrac{P \times V}{T}$ é sempre constante. Considere um reservatório que está cheio de um gás ideal. Sem vazar o gás, realiza-se uma compressão do reservatório, reduzindo seu volume à metade. Ao mesmo tempo, uma fonte de calor faz a temperatura do gás ser quadruplicada. Considere P_0 e P_1, respectivamente, os valores da pressão do gás no reservatório, antes e depois do procedimento descrito. A relação entre P_0 e P_1 é

(a) $P_1 = \dfrac{P_0}{8}$.

(b) $P_1 = \dfrac{P_0}{2}$.

(c) $P_1 = P_0$.

(d) $P_1 = 2P_0$.

(e) $P_1 = 8P_0$.

Exercício 14.40 — ENEM - 2016. Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m^2, sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento. Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

(a) $\dfrac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$.

(b) $\dfrac{500 \cdot A}{D^2}$.

(c) $\dfrac{500 \cdot D^2}{A}$.

(d) $\dfrac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$.

(e) $\dfrac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$.

Exercício 14.41 — ENEM - 2019. Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

(a) $Y = 80X + 920$.
(b) $Y = 80X + 1000$.
(c) $Y = 80X + 1080$.
(d) $Y = 160X + 840$.
(e) $Y = 160X + 1000$.

Exercício 14.42 O quadro apresenta os dados da pescaria de uma espécie de peixe realizada ao final de um dia de pesca, em lagos diferentes.

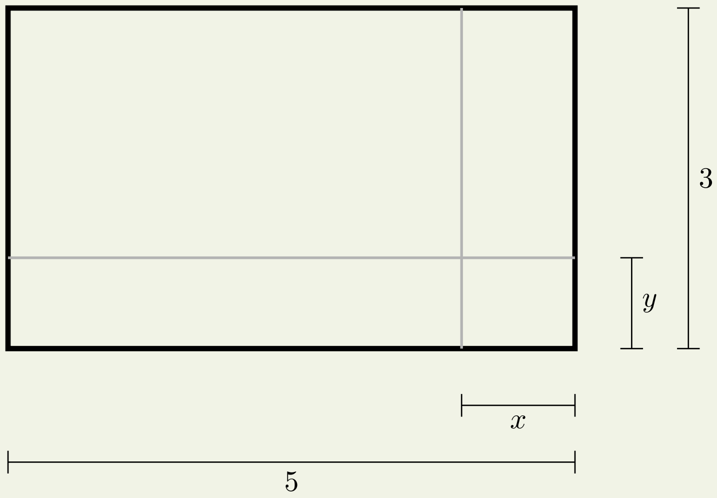
Lago (L)	Número de barcos utilizados (B)	Número de horas de pesca (H)	Quantidade pescada (C, em kg)
I	5	5	250
II	6	10	300
III	4	5	180
IV	3	7	215
V	3	10	220

Considere que a medida do esforço de pesca (E) seja dada pela função $E = 2 \cdot 10^{-7} \cdot B \cdot H$. A captura (quantidade pescada C) e a população de peixes $P(L)$ dessa espécie no lago L, no início desse dia de pescaria, relacionam-se pela fórmula $C = E \cdot P(L)$.
Em qual lago a população de peixes dessa espécie era maior no início do dia?

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) IV.
(e) V.

Nível 4

Exercício 14.43 — ENEM - 2012. Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por

(a) $2xy$.
(b) $15 - 3x$.
(c) $15 - 5y$.
(d) $-5y - 3x$.
(e) $5y + 3x - xy$.

Exercício 14.44 Determine o polinômio $P(x)$, de grau 2, tal que $P(1) = 3$, $P(-2) = 9$ e $P(x) = P(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 14.45 Sejam a, b e c números reais não nulos, tais que $a+b+c = 0$. Calcule o valor de cada uma das expressões abaixo:

(a) $\dfrac{a^2}{(b+c)^2} + \dfrac{b^2}{(a+c)^2} + \dfrac{c^2}{(a+b)^2}$.
(b) $\dfrac{a^3}{(b+c)^3} + \dfrac{b^3}{(a+c)^3} + \dfrac{c^3}{(a+b)^3}$.

Exercício 14.46 Sejam a, b e c números reais tais que $a+b+c=0$. Mostre que $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Exercício 14.47 Mostre que ao dividirmos um polinômio qualquer $A(x)$ por um polinômio $B(x)=x-m$, obtemos como resto o polinômio constante e igual ao valor numérico de $A(x)$ em m.

Exercício 14.48 Determine α de modo que a divisão de $A(x)=2x^3-5x^2+7x-\alpha$ por $B(x)=x-2$ deixe resto 9.

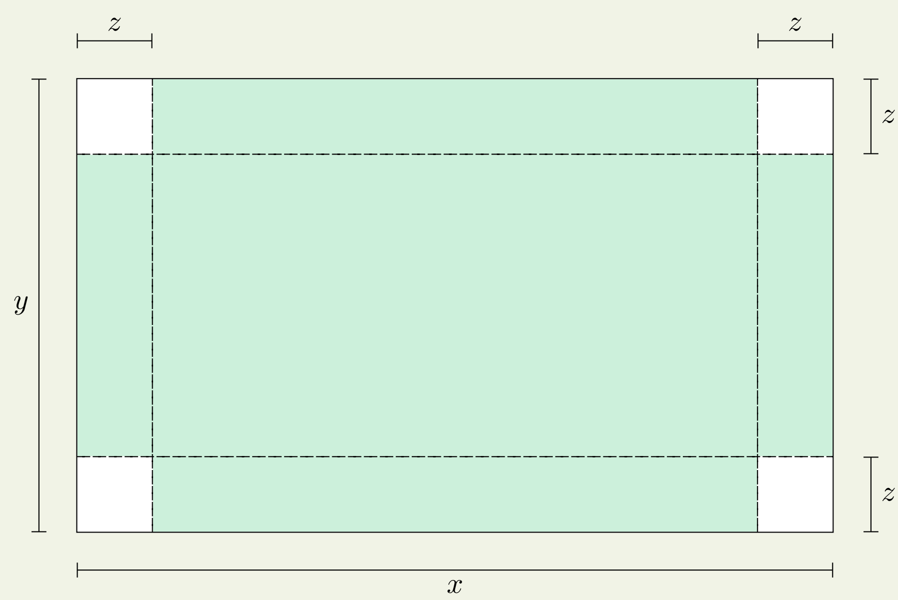
Exercício 14.49 — Unespar - 2016. Com relação aos polinômios $P(x)=(x^4-1)\cdot(x^2-2)$ e $Q(x)=x^3-x^2+x$, considere as afirmações:

I. O coeficiente de x^6 em $P(x)$ é zero.
II. $x=0$ é raiz de $Q(x)$.
III. $x=2$ é raiz de $P(x)$.
IV. O resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ é um polinômio de grau 2.

Podemos afirmar que:

(a) todas as afirmações são verdadeiras.
(b) somente a afirmação IV é falsa.
(c) apenas II e IV são verdadeiras.
(d) somente I é verdadeira.
(e) Apenas I e II são falsas.

Exercício 14.50 Joaquim fex uma caixa do seguinte modo: a partir de uma folha de cartolina, ele cortou os quatro cantos e dobrou a cartolina nas linhas pontilhadas, conforme a figura abaixo.



encontre o polinômio que representa

1. a área da superfície da caixa.
2. o volume da caixa.