Material Estruturado

MATEMÁTICA

SISEDU

Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

Autores:

Bruno Holanda

Ângelo Papa Neto

Esdras Medeiros

Revisor:

Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:

Equipe Cientista Chefe

Geometria A

Noções Primitivas

Segmentos e Ângulos

Retas Paralelas

Triângulos e Quadriláteros

Polígonos

Coordenadoria de Formação Docente e Educação a Distância CED

Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Educação

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

FUNCAP

9 Geometria Plana

9.1 – Introdução

Podemos entender a *Geometria Plana* como a área da Matemática responsável pelo estudo das figura planas. De modo mais informal, na Geometria estudamos as propriedades de alguns desenhos especiais que podemos fazer em uma folha de papel.

Apesar de sabermos que os antigos egípcios e babilônicos eram capazes de empregar conhecimentos geométricos para resolver problemas do cotidiano, o primeiro estudo rigoroso de Geometria surgiu com a obra *Elementos*, do matemático grego Euclides de Alexandria, em aproximadamente 300 a.C.

Os Elementos são um tratado matemático tão único que não houve necessidade de qualquer tipo de acréscimo ou modificação por mais de 2.000 anos, até o momento em que o grande matemático russo N. I. Lobačevskiĭ (1792-1856) desenvolveu um novo tipo de geometria, conhecida como geometria hiperbólica, ao desconsiderar um dos *axiomas* de Euclides (isto é, um dos fatos que Euclides assumia como verdadeiro).

A Geometria Euclidiana Plana baseia-se nos conceitos de *ponto*, *reta* e *plano*, os quais são o que chamamos de *noções primitivas* (em Geometria). Por serem conceitos tão básicos, eles são alguns dos raros objetos matemáticos para os quais não é possível dar uma definição precisa. Devemos simplesmente aceitar que eles existem.

Por outro lado, não é difícil imaginar situações que podem ser modeladas através desses conceitos básicos. Considere, por exemplo, um técnico de futebol que deseja explicar suas estratégias a um grupo de jogadores: Ele pode utilizar uma folha de papel na qual está desenhado um retângulo com 22 pontos em seu interior, cada ponto representado um jogador. Nesse desenho, há também segmentos de retas representado as linhas do campo. Há, por fim, a própria folha de papel, que, se considerada infinita, representa o plano.

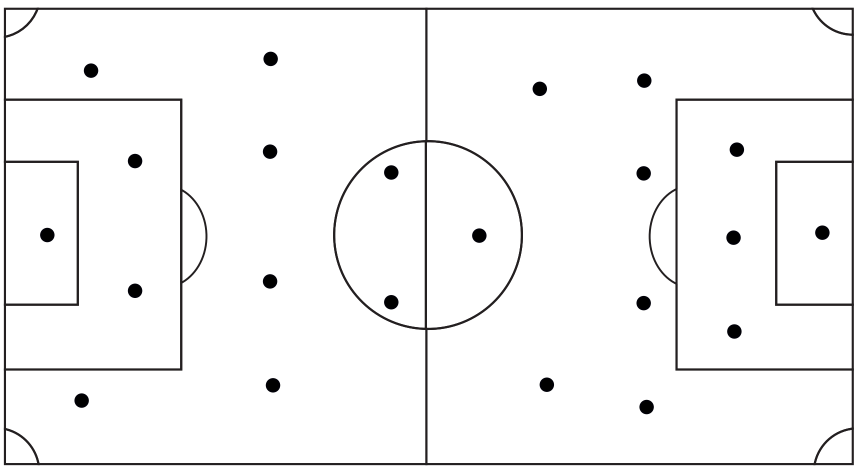


Figura 9.1: Ao fazermos um esboço de um campo de futebol, utilizamos diversas noções primitivas da Geometria.

Além das noções primitivas, Euclides também estabeleceu um conjunto de *propriedades fundamentais* que todos os pontos, retas e planos devem satisfazer. Abaixo, vemos *algumas* dessas propriedades, que são chamadas de *axiomas*.

(A1) Por dois pontos distintos passa uma única reta.
(A2) Por três pontos não colineares passa um único plano.
(A3) Para qualquer reta, existem pontos pertencentes a ela e pontos não pertencentes a ela.
(A4) Para qualquer plano, existem uma reta contida neste plano, um ponto que pertence ao plano mas não pertence a tal reta e um ponto que não pertence ao plano.

Estas afirmações recebem o nome de *axiomas* pois suas validades devem ser aceitas como evidentes, não podendo ser demonstradas (isto é, justificadas) através de um conjunto de verdades mais elementar. Em outras palavras, os axiomas são proposições consideradas como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

A seguir, derivaremos outros conceitos importantes da Geometria, utilizando como base as noções primitivas e os axiomas de Euclides.

9.1.1 – Semirretas e segmentos de reta

Um ponto O pertencente a uma reta r a divide em duas partes, chamadas *semirretas* de origem O. Se $A \in r$ e $A \neq O$, a semirreta de r que contém o ponto A é denotada por $\overrightarrow{OA}$.

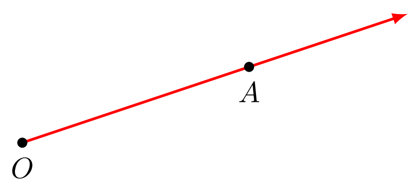


Figura 9.2: semirreta de origem O e passando por A.

Se A e B são dois pontos distintos pertencentes a uma reta r, os pontos que pertencem às semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ formam uma parte da reta chamada de *segmento de reta*. Nesse caso, dizemos que os pontos A e B são as extremidades desse segmento. Denotamos o segmento com extremidades A e B escrevendo AB.

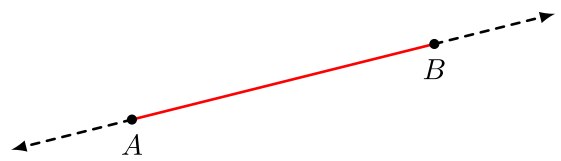


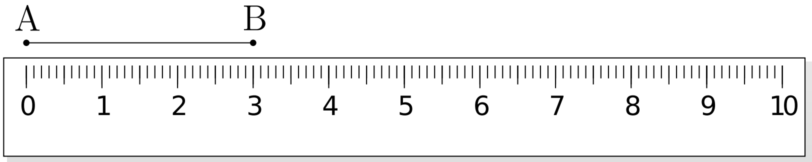
Figura 9.3: segmento de reta AB (em vermelho sólido), como interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

Uma vez que AB é a interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, escrevemos $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Também, dizemos que os pontos pertencentes ao segmento AB e distintos de A e de B *estão entre* A e B.

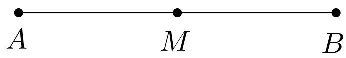
Obs Por vezes, também escreveremos AB para denotar a reta determinada por dois pontos distintos A e B. A possibilidade de confusão com o *segmento* AB será mínima, pois o contexto sempre deixará claro se estaremos nos referindo à reta AB ou ao segmento AB.

A **distância** entre os pontos A e B é, por definição, a **medida do comprimento** do segmento de reta AB. Frequentemente, o comprimento do segmento AB é representado por $\overline{AB}$. Porém, por vezes também utilizaremos a notação simplificada AB para representar essa medida. Isso não deve causar confusão, uma vez que o *contexto* sempre deixará claro se, ao escrevermos AB, estamos pensando no segmento de reta de extremidades A e B ou em seu comprimento.

O comprimento de um segmento AB pode ser calculado de diversas formas. A maneira mais comum é medir o segmento AB utilizando alguma ferramenta (como uma régua pautada), comparando-o com alguma unidade de comprimento pré-estabelecida, como o centímetro, o metro ou o quilômetro. Assim, a figura abaixo mostra um segmento AB de 3 centímetros de comprimento.



O **ponto médio** de um segmento AB é o único ponto que está entre A e B e divide o segmento AB em duas partes de comprimentos iguais, isto é, tal que $AM = MB$.



Exercício 9.1 Em cada uma das figuras a seguir, calcule $\overline{AB}$, sendo M o ponto médio de AB:

(a) $AM = 2x - 5$ e $MB = x + 1$.

(b) $AM = x$, $AP = 4x - 5$ e $BP = x + 7$.

Solução.

(a) Como M é o ponto médio de AB, temos $2x - 5 = x + 1$. Passando os termos com incógnita para o lado esquerdo e as constantes para o lado direito da equação, obtemos:

$$2x - x = 1 + 5 \Rightarrow x = 6.$$

Logo, $AB = (2x - 5) + (x + 1) = 3x - 4 = 14$.

(b) Veja que $MB = AP - AM - BP$. Logo,

$$MB = (4x - 5) - x - (x + 7) = 2x - 12.$$

Como M é o ponto médio de AB, temos que $AM = MB$, ou seja,

$$x = 2x - 12 \Rightarrow x = 12.$$

Portanto, $AB = 2AM = 2x = 24$.

■

Exercício 9.2 Se A, B e C são pontos colineares, calcule AC, sendo $AB = 20$ cm e $BC = 12$ cm.

Solução. Como $BC < BA$, o ponto A não pode estar entre os pontos B e C. Logo, temos apenas duas opções:

(i) Se C estiver entre A e B, teremos que $AC = AB - BC = 20 - 12 = 8$ cm.
(ii) Se B estiver entre A e C, teremos que $AC = AB + BC = 20 + 12 = 32$ cm.

■

Exercício 9.3 Consideremos sobre uma reta r um segmento fixo AB e um ponto móvel P. Seja M o ponto médio de AP e N o ponto médio de BP. O que podemos dizer a respeito do comprimento do segmento MN?

Solução. Seja ℓ o comprimento do segmento AB.

Consideremos inicialmente o caso em que o ponto P está no interior do segmento AB. Seja x a medida (variável) do segmento AP. Nesse caso, $BP = \ell - x$. Como M e N são os pontos médios dos segmentos AP e PB, temos que $MP = \frac{x}{2}$ e $NP = \frac{\ell - x}{2}$. Como P também está no interior do segmento MN, temos que

$$MN = MP + NP = \frac{x}{2} + \frac{\ell - x}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Agora, consideremos o caso em que P está fora do segmento AB, com $PA < PB$. Sendo novamente x a medida (variável) do segmento AP, temos nesse caso que $BP = \ell + x$. Como M e N são os pontos médios dos segmentos AP e PB, temos que $MP = \frac{x}{2}$ e $NP = \frac{\ell + x}{2}$. Como $PM = \frac{1}{2}AP < \frac{1}{2}PB = PN$, temos que

$$MN = \frac{\ell + x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Por fim, resta analisar o caso em que P está fora do segmento AB, com $PA > PB$. Essa situação é análoga à situação anterior, de forma que a deixamos a seu cargo. Logo, a medida do segmento MN é constante quando variamos x. ■

Obs A situação apresentada no exercício anterior pode ser visualizada de maneira dinâmica utilizando o GeoGebra.

Obs Ainda em relação ao exercício anterior, uma solução alternativa pode ser dada considerando a reta AP como a reta numerada, tal que o ponto A corresponde a 0, o ponto B corresponde a ℓ e o ponto P a x. Nesse caso, M corresponde a $\frac{x}{2}$ e N a $\frac{1}{2}(\ell + x)$. Portanto, a distância entre M e N é

$$MN = \left| \frac{x}{2} - \frac{\ell + x}{2} \right| = \frac{\ell}{2}.$$

9.1.2 – Ângulos

Duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com uma mesma origem O, dividem o plano em duas regiões, cada uma das quais é chamada de *ângulo*. As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os *lados* do ângulo.

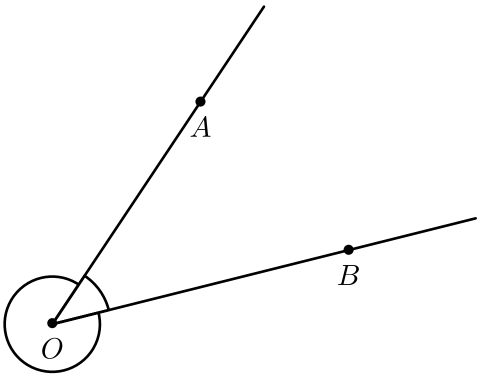


Figura 9.4: um ângulo convexo e seu suplementar côncavo.

Um ângulo é chamado *convexo* se é uma região convexa do plano. Caso contrário, o ângulo é chamado *côncavo*. Usaremos a notação $\angle AOB$ para denotar cada um desses ângulos; em cada caso, o contexto deixará claro a qual dos dois ângulos de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ estamos nos referindo.

Se os pontos A, O e B são colineares, o ângulo $\angle AOB$ é chamado *ângulo raso* (veja a Figura 9.5).

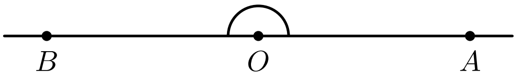


Figura 9.5: um ângulo raso.

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são ditos *iguais* ou *congruentes*, se for possível mover $\angle A'O'B'$ *no espaço* até que ele possa ser posicionado exatamente sobre $\angle AOB$.

Se $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são ângulos rasos, é imediato que podemos mover um deles no espaço até fazê-lo coincidir com o outro, de sorte que dois ângulos rasos quaisquer são iguais. Em particular, o ângulo raso marcado na Figura 9.5 é igual àquele não marcado, situado na parte "de baixo" da reta que passa por A e B. Portanto, *uma volta completa em torno do ponto O corresponde a dois ângulos rasos.*

Se os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ estão situados em um mesmo plano e compartilham um lado (no caso, o lado $\overrightarrow{OB}$) mas não têm pontos interiores comuns, nos referiremos ao ângulo $\angle AOC$ que contém a semirreta $\overrightarrow{OB}$ como a *justaposição* de $\angle AOB$ e $\angle BOC$ (veja a Figura 9.6).

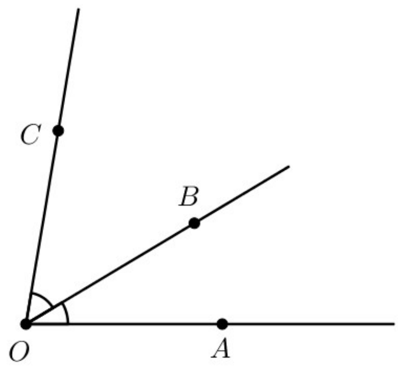
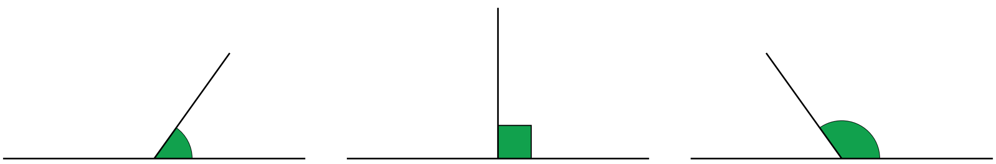


Figura 9.6: a justaposição de dois ângulos.

Para medir ângulos, devemos escolher um padrão, ou unidade. A unidade de medida de ângulos mais usada, e a mais antiga, é o *grau*.

Dizemos (por convenção) que um ângulo $\angle AOB$ mede *um grau* ($1°$, em símbolos) quando o ângulo formado pela justaposição de 180 ângulos iguais a $\angle AOB$ resultar em um ângulo raso. Assim, um ângulo raso mede $180°$ e uma volta completa em torno de um ponto, correspondendo a dois ângulos rasos, mede $360°$.

Um ângulo cuja medida é $90°$ é chamado *ângulo reto*, e corresponde à metade de um ângulo raso. Se a medida de um ângulo for menor que $90°$, diremos que esse ângulo é *agudo*. Se a medida de um ângulo for maior que $90°$ e menor que $180°$, diremos que esse ângulo é *obtuso* (veja a figura a seguir).



(a) ângulo agudo. (b) ângulo reto. (c) ângulo obtuso.

Uma forma simples de visualizarmos e medirmos ângulos é através do uso de um *transferidor*, fazendo o centro do transferidor coincidir com o vértice do ângulo e a marcação zero coincidir com um dos extremos do ângulo.

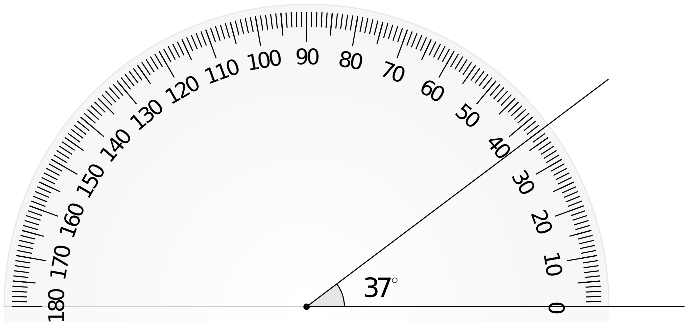


Figura 9.8: um transferidor medindo um ângulo de 37°. Muitos transferidores são transparentes, para poderem ser utilizandos de ambos os lados.

Em Geometria, é costume confundir um ângulo, $\angle AOB$ digamos (visto como região do plano), com sua medida, isto é, usar $\angle AOB$ também para denotar a medida do ângulo $\angle AOB$. Isso não causa confusão, porque o contexto sempre vai deixar claro se, ao escrevermos $\angle AOB$, estaremos nos referindo ao ângulo como região do plano ou à sua medida.

Voltando à Figura 9.6, olhemos novamente o ângulo $\angle AOC$, formado pela justaposição dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$. O uso de um transferidor deixa claro que há uma relação bastante simples entre as medidas desses ângulos:

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC.$$

(Observe que, na igualdade acima, $\angle AOC$, $\angle AOB$ e $\angle BOC$ denotam as *medidas* dos ângulos correspondentes.)

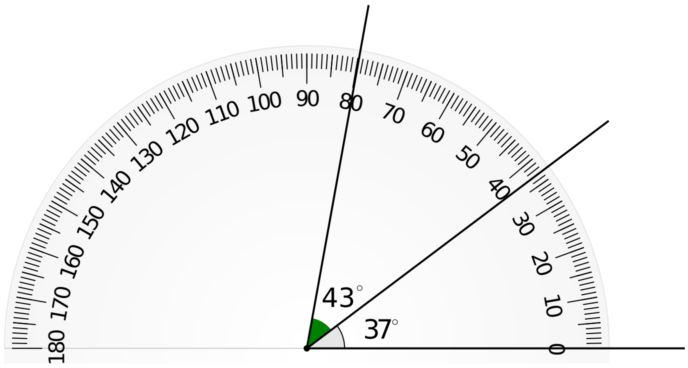


Figura 9.9: soma de ângulos com um transferidor.

Em Geometria (pela própria história de seu desenvolvimento), também é costumeiro (e, conforme veremos, útil) utilizar letras gregas minúsculas para denotar ângulos ou suas medidas. Uma vez que faremos uso desse tipo de notação daqui em diante, reunimos na tabela 9.1 algumas das letras gregas mais utilizadas:
Procure familiarizar-se com os nomes e a escrita dessas letras gregas, pois elas aparecerão frequentemente, doravante.

Consideremos, agora, duas retas r e s *concorrentes*, ou seja, que se intersectam em um único ponto. Nesse caso, elas determinam quatro ângulos, dois dos quais estão marcados em verde na figura abaixo (os outros dois correspondem às regiões que não foram marcadas):

Letra	minúscula	maiúscula
alfa	α	–
beta	β	–
gama	γ	Γ
delta	δ	Δ
téta	θ	Θ
pi	π	Π
sigma	σ	Σ
ômega	ω	Ω

Tabela 9.1: algumas letras gregas comumente usadas em Geometria.

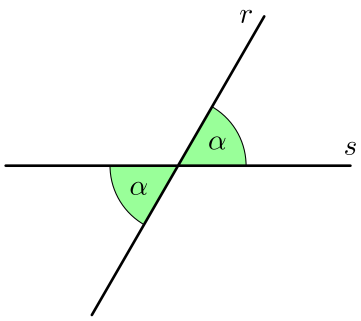
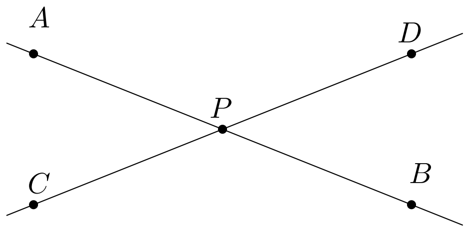


Figura 9.10: ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos que possuem um mesmo vértice e cujos lados estão alinhados de modo a determinar apenas duas retas, como na Figura 9.10, são chamados de *ângulos opostos pelo vértice* (abreviamos **OPV**).

Ângulos opostos pelo vértice possuem uma mesma medida (em graus), ou seja, são congruentes. Esse fato pode ser *demonstrado* (isto é, explicado) com os conhecimentos adquiridos até o momento.

Teorema 9.1.1 — Ângulos OPV. Sejam AB e CD duas retas concorrentes no ponto P, situado no interior dos segmentos AB e CD. Então, $\angle APD = \angle BPC$ e $\angle APC = \angle BPD$.



Demonstração. Já sabemos que ângulos rasos medem 180° e a medida da justaposição de dois ângulos é igual à soma das medidas dos mesmos. Assim, temos $\angle APD + \angle DPB = 180°$ e $\angle DPB + \angle BPC = 180°$. Portanto,

$$\angle APD + \angle DPB = \angle DPB + \angle BPC$$

e, cancelando a parcela comum $\angle DPB$, obtemos

$$\angle APD = \angle BPC.$$

De modo análogo, $\angle APC = \angle BPD$. ■

Nesse ponto, é conveniente dispormos de mais um pouco de terminologia: se P é um ponto em um ângulo $\angle AOB$ tal que $\angle AOP$ e $\angle POB$ são iguais, dizemos que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a **bissetriz** do ângulo $\angle AOB$.

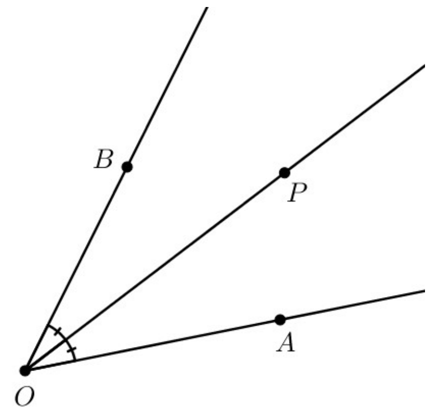
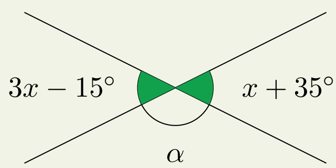


Figura 9.11: a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

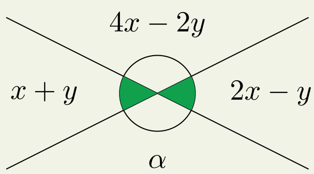
Exercitemos o material discutido até aqui em alguns exercícios simples.

Exercício 9.4 Calcule o valor de α nos casos abaixo:

(a)



(b)



Solução.

(a) Pelo teorema 9.1.1, temos que

$$3x - 15 = x + 35 \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25°.$$

Logo, os ângulos verdes medem $x + 35° = 60°$, de sorte que $\alpha = 180° - 60° = 120°$.

(b) Novamente pelo teorema 9.1.1, temos

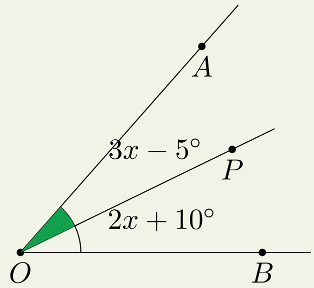
$$x + y = 2x - y \Rightarrow x = 2y.$$

Então, $x + y = 3y$, de forma que cada ângulo verde mede $3y$, e (uma vez mais pelo teorema 9.1.1) $\alpha = 4x - 2y = 4 \cdot 2y = 2y = 6y$. Por fim, usando o fato de que $\alpha + (x + y) = 180°$, temos $6y + 3y = 180°$, logo $y = 20°$. Com isso, $\alpha = 6y = 120°$.

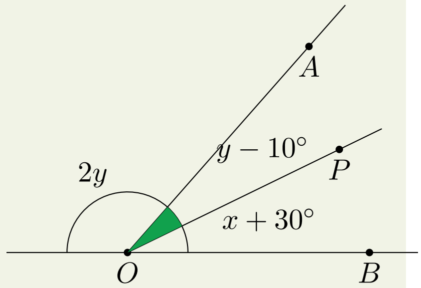
■

Exercício 9.5 Em cada uma das figuras a seguir, $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de $\angle AOB$. Calcule x em cada caso:

(a)



(b)



Solução.

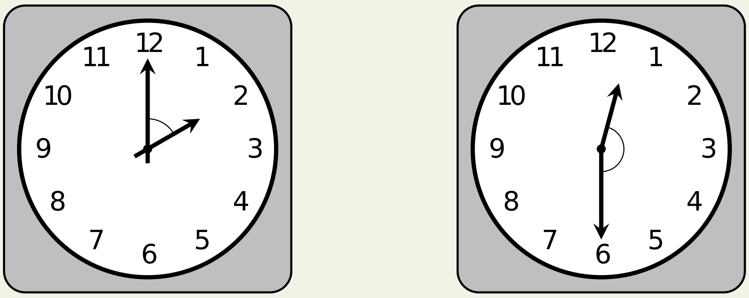
(a) Como OP é bissetriz, temos $3x - 5° = 2x + 10°$. Logo, $x = 15°$.

(b) Novamente pelo fato de OP ser bissetriz, temos $x + 30° = y - 10°$, logo, $y = x + 40°$. Por outro lado, como $2y + (y - 10) + (x + 30) = 180°$, temos

$$
\begin{aligned}
&2y + (y - 10) + (x + 30) = 180 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2(x + 40) + (x + 30) + (x + 30) = 180 \\
&\Rightarrow 4x + 140 = 180 \Rightarrow x = 10°.
\end{aligned}
$$

■

Exercício 9.6 — OBMEP 2006. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? E qual é este menor ângulo quando o relógio marca 12 horas e 30 minutos?



Solução. Observe que o ponteiro menor leva 12 horas para dar uma volta completa, que corresponde a $360°$. Logo, em uma hora, este ponteiro terá percorrido $\frac{360°}{12} = 30°$. Portanto, o ângulo destacado no relógio da esquerda corresponde a dois intervalos de $30°$, logo, mede $60°$.

No relógio da direita, a posição do ponteiro maior indica que já se passou meia hora após uma hora cheia. Neste intervalo de tempo, o ponteiro menor percorreu $\frac{30°}{2} = 15°$. Logo, o ângulo destacado no relógio da direita mede $180° - 15° = 165°$. ■

9.2 – O quinto axioma de Euclides

Como vimos anteriormente, quando duas retas são concorrentes, elas se encontram em um único ponto e formam dois pares de ângulos (opostos pelo vértice) que são congruentes. Por outro lado, em sua construção da Geometria, Euclides permitiu a possibilidade de duas retas não se encontrarem. Nesse caso, dizemos que tais retas são **paralelas**.

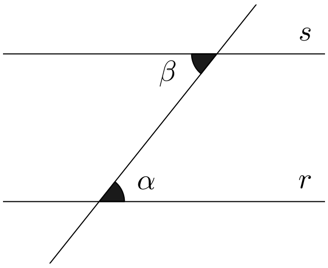
Obs A título de curiosidade, observamos que nem todas as teorias de Geometria permitem a existência de retas que não se encontram. Por exemplo, em Geometria Projetiva, quaisquer duas retas se encontram em um único ponto, de sorte que não há retas paralelas. Quando traçamos uma relação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva, retas que são paralelas na Geometria Euclidiana se encontram em um ponto da "reta do infinito" na Geometria Projetiva.

No caso de retas paralelas, Euclides postulou a seguinte afirmação que hoje é conhecida como o seu quinto axioma.

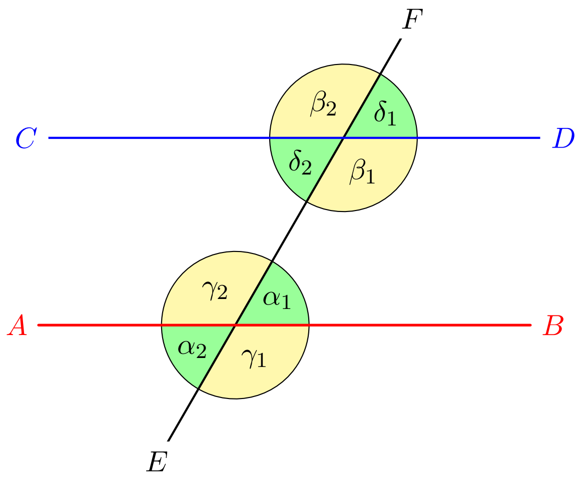
Quinto Axioma de Euclides

Se duas retas r e s são cortadas por uma terceira reta, então r e s são paralelas se, e somente se, os ângulos marcados na figura (que são chamados de *alternos internos*) são iguais. Ou seja,

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$



Suponha, agora, que temos duas retas paralelas, digamos AB e CD. Uma terceira reta que intersecta as duas primeiras é chamada de reta *transversal*. Na Figura 9.12 a reta EF é uma transversal.



Se AB e CD são paralelas, então $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$.

Consequentemente:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \delta_1 = \delta_2$ e

$\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2$.

Figura 9.12: duas retas paralelas e uma transversal.

Pelo Quinto Axioma, temos que $\alpha_1 = \delta_1$, logo,

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + (180° - \delta_1) = 180°.$$

Por outro lado, $\alpha_1 + \gamma_2 = 180°$, pois AB é uma reta. Logo, $\gamma_2 = 180° - \alpha_1 = \beta_1$. Como $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ (pois são pares de ângulos OPV), concluímos que os quatro ângulos em amarelo da Figura 9.12 são congruentes. Da mesma forma, os quatro ângulos em verde são congruentes entre si, de forma que, dentre os oito ângulos que a reta EF forma com AB e CD, há apenas (no máximo) dois valores distintos.

As letras gregas que usamos aqui foram escolhidas arbitrariamente, ou seja, nem sempre o ângulo α_1 estará na posição indicada na figura. Por isso, para melhor falar sobre estes ângulos, nos usamos o seguinte vocabulário.

Ângulos que estão de um mesmo lado da reta transversal EF são chamados de *colaterais* (o prefixo *co* indica *mesmo*). Por exemplo, α_1, γ_1, β_1 e δ_1 são colaterais uns aos outros. Assim como os α_2, γ_2, β_2 e δ_2 são colaterais uns aos outros. Os ângulos que estão entre as retas paralelas são chamados de *internos*; em nosso caso, estes são α_1, β_1, γ_2 e δ_2. Por sua vez, os ângulos que não estão entre as paralelas são chamados de *externos*. Por fim, ângulos que estão em lados diferentes da reta EF são chamados de *alternos*, enquanto os ângulos que estão em uma mesma posição relativa às retas AB e CD são chamados *correspondentes*. Combinando esse vocabulário, podemos nos referir como segue a vários dos pares de ângulos da Figura 9.12:

Nomenclaturas de *alguns* dos pares de ângulos da Figura 9.12:

- α_1 e β_1 são *colaterais internos*.
- α_1 e δ_2 são *alternos internos*.
- α_1 e δ_1 são *correspondentes*.
- α_2 e δ_1 são *alternos externos*.
- α_2 e β_2 são *colaterais externos*.

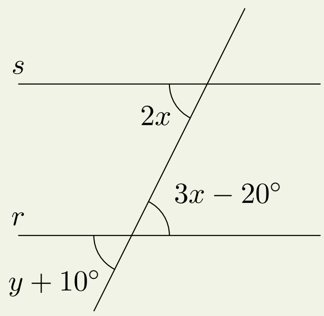
Organizando as ideias, chegamos à seguinte conclusão.

Em relação a duas retas paralelas cortadas por uma transversal:

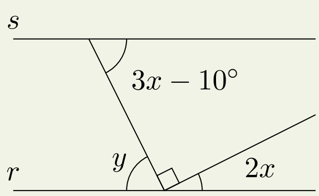
i. Ângulos *colaterais* de um mesmo tipo (ambos internos ou ambos externos) somam $180°$.
ii. Ângulos *alternos* de um mesmo tipo são congruentes.
iii. Ângulos *correspondentes* são congruentes.

Exercício 9.7 Em cada uma das figuras abaixo, as retas r e s são paralelas. Calcule x e y.

(a)



(b)



Solução.

(a) Os ângulos de medidas $2x$ e $3x - 20°$ são alternos internos, logo, congruentes. Portanto,

$$2x = 3x - 20^\circ \Rightarrow x = 20^\circ.$$

Além disso, os ângulos de medidas $y + 10^\circ$ e $2x$ são correspondentes, logo, também congruentes. Então, $y + 10^\circ = 2x = 40^\circ \Rightarrow y = 30^\circ$.

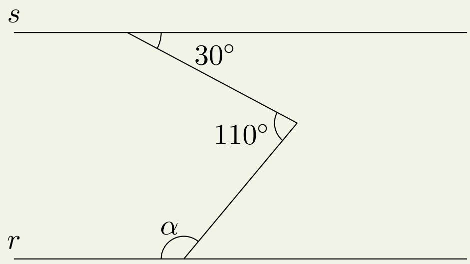
(b) Os ângulos de medidas y e $3x - 10^\circ$ são alternos internos, logo, congruentes. Somando todos os ângulos que estão sobre a reta r, temos:

$$\begin{aligned} y + 90^\circ + 2x = 180^\circ &\Rightarrow (3x - 10^\circ) + 90^\circ + 2x = 180^\circ \\ &\Rightarrow 5x = 100^\circ \Rightarrow x = 20^\circ. \end{aligned}$$

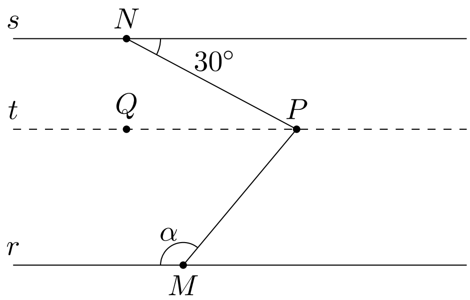
Assim, $y = 3x - 10^\circ = 50^\circ$.

■

Exercício 9.8 Sabendo que as retas r e s da figura são paralelas, calcule α.



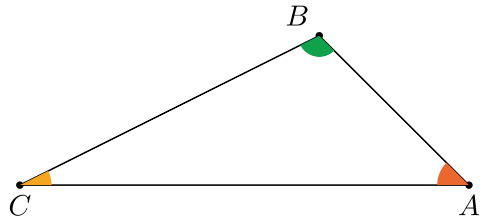
Solução. Sejam M, N e P os pontos marcados na figura a seguir. Trace a reta t paralela às retas r e s e passando pelo ponto P.



Seja Q um ponto sobre t conforme também indicado na figura. Em relação às paralelas s e t, a igualdade dos ângulos alternos internos determinados pela transversal NP dá $\angle NPQ = 30^\circ$. Logo, $\angle QPM = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$. Como t e r também são paralelas, ângulos colaterais internos em relação à transversal MP somam 180°. Logo, $\alpha + 80^\circ = 180^\circ$ e, daí, $\alpha = 100^\circ$. ■

9.3 – Triângulos

Definimos um **triângulo** como um conjunto de três pontos não colineares A, B, C (que são chamados de **vértices** do triângulo) juntamente com os segmentos AB, BC e CA (que são chamados de **lados** do triângulo). Esse triângulo é representado simbolicamente como ΔABC e possui **ângulos internos** $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$. A região limitada delimitada pelos lados do triângulo será chamada de interior do triângulo.

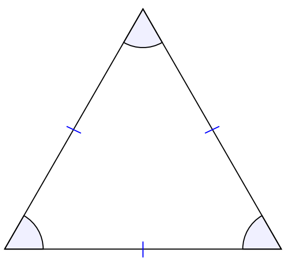


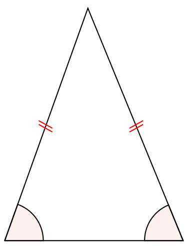
Um triângulo pode ser classificado de duas formas: De acordo com a quantidade de lados de medidas iguais que possui ou de acordo com as medidas de seus ângulos internos.

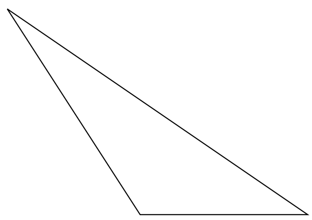
Classificação de triângulos de acordo com o número de lados iguais

Um triângulo que possui:

- três lados de medidas iguais é **equilátero**.
- dois lados de medidas iguais é **isósceles**.
- os três lados de medidas diferentes é **escaleno**.


(a) Equilátero.


(b) Isósceles.


(c) Escaleno.

Observe que, pela definição acima, triângulos equiláteros são isósceles e triângulos isósceles *podem ser ou não* equiláteros. Também, veremos mais adiante que os ângulos marcados na figura (a) são iguais, assim como também são iguais os ângulos marcados na figura (b).

Uma nomenclatura importante relativa a triângulos isósceles é que o terceiro lado de um triângulo isósceles (o lado que não é nenhum dos dois que sabemos serem iguais) é chamado de **base**.

Antes de discutirmos a classificação dos triângulos quanto ao tipos de ângulos que possuem, é conveniente fazermos mais alguns comentários sobre o Quinto Axioma e provarmos um resultado muito importante. Primeiramente, pode ser mostrado que uma maneira equivalente de formular o Quinto Axioma é a seguinte:

Axioma das Paralelas

Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.

O Axioma das Paralelas é a ferramenta de que precisamos para demonstrar o teorema a seguir, o qual é um dos mais importantes resultados da Geometria Euclidiana.

Teorema 9.3.1 A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é (sempre) igual a $180°$.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Utilizando o Axioma das Paralelas, tracemos a (única) reta r paralela ao lado AB e passando pelo ponto C (cf. Figura 9.13). Marque pontos D e E sobre a reta r, situados em semirretas distintas em relação a C conforme também mostrado na Figura 9.13.

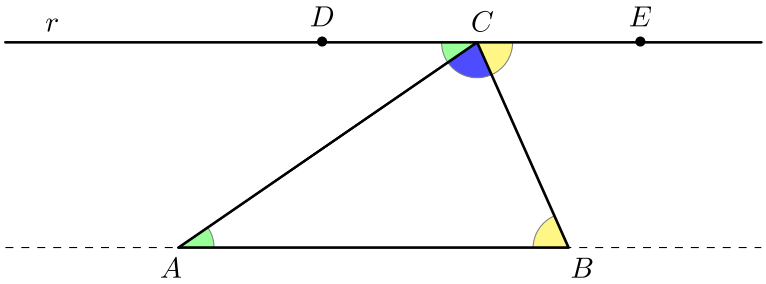


Figura 9.13: demonstração do Teorema 9.3.1.

O lado AC é uma transversal que corta duas retas paralelas e, consequentemente, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DCA$ (destacados em verde) são congruentes, pois são alternos internos. Do mesmo modo, o lado BC corta duas retas paralelas e os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCE$ (destacados em amarelo) são congruentes, por também são alternos internos. Logo,

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = \angle DCA + \angle BCE + \angle ACB = \angle DCE = 180°.$$

A última igualdade é valida pelo fato do ângulo $\angle DCE$ ser um ângulo raso, já que os pontos D, C e E estão sobre uma mesma reta (a reta r). ■

Uma consequência importante do teorema anterior é o fato de que, se em um triângulo ABC tivermos $\angle A \geq 90°$, então

$$\angle B + \angle C = 180° - \angle A \leq 90°.$$

Consequentemente, $\angle B, \angle C < 90°$. Em palavras, todo triângulo tem *no máximo um* ângulo reto ou obtuso.

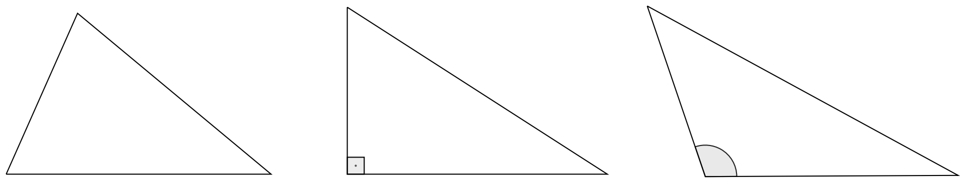
Podemos finalmente enunciar a classificação dos triângulos quanto a seus ângulos internos.

Classificação de triângulos quanto ao tipos de ângulos

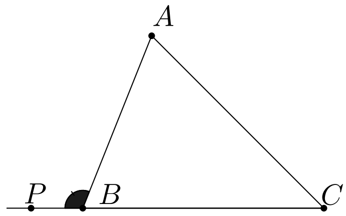
Um triângulo em que:

- todos os seus agudos são agudos é chamado de **acutângulo**.
- um de seus ângulos é reto é chamado de **(triângulo) retângulo**. (O lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados de *catetos*).
- um de seus ângulos é obtuso é chamado de **obtusângulo**.

Em um triângulo, um **ângulo externo** é um ângulo formado entre o prologamento de um dos lados do triângulo e com um dos seus lados adjacentes. Nas notações da figura a seguir, $\angle ABP$ é um ângulo externo de ABC, *adjacente* ao ângulo interno $\angle ABC$.



(a) Acutângulo. (b) Retângulo. (c) Obtusângulo.



O Teorema 9.3.1 tem uma consequência muito útil para a medida dos ângulos externos de um triângulo, conhecida como o **Teorema do Ângulo Externo**.

Teorema 9.3.2 — do Ângulo Externo. Em um triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração. Nas notações da figura anterior, veja que $\angle ABP = 180° - \angle ABC$. Por outro lado, uma vez que a soma dos ângulos internos do triângulo é $180°$, temos $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$, logo, $180° - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB$. Então,

$$\angle ABP = 180° - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB.$$

■

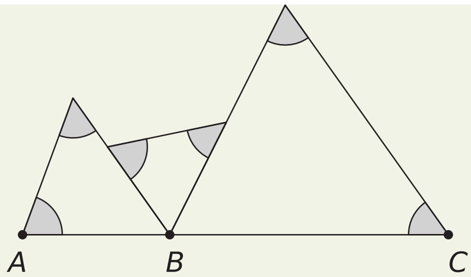
O próximo resultado pode ser visto como uma ligação entre as classificações de triângulos quanto a seus lados e ângulos. Ele será apresentado sem sua respectiva demonstração, por tratar-se de um fato que será muito importante para a resolução de diversos exercícios deste módulo. Assim, resolvemos antecipar sua exposição, deixando sua demonstração para o módulo seguinte de Geometria Plana, quando abordaremos o conceito de *congruência de triângulos*.

Teorema 9.3.3 — do triângulo isósceles. Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos adjacentes à base são iguais. Em símbolos, no ΔABC, temos:

$$AB = AC \Leftrightarrow \angle ABC = \angle ACB.$$

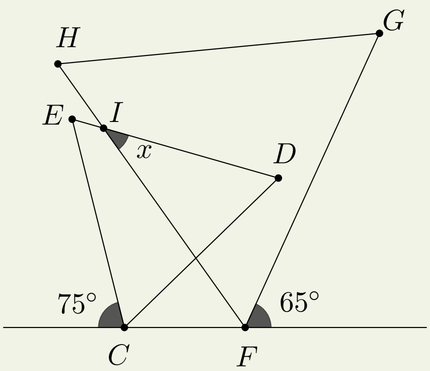
Como consequência desse resultado, podemos verificar que cada ângulo de um triângulo equilátero é igual a $60°$. De fato, todos os ângulos um triângulo equilátero são iguais, pois todos os lados podem ser interpretados como base de um triângulo isósceles. Além disso, a soma dos três ângulos é $180°$. Consequentemente, todos eles são iguais a $60°$.

Exercício 9.9 — OBMEP 2014. Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



Solução. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Por outro lado, os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam 180° , já que A, B e C estão alinhados. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180° \cdot 3) - 180° = 360°$. ■

Exercício 9.10 — OBM 2004. Na figura a seguir temos dois triângulos equiláteros. Calcule o valor de x.



Solução. Seja P o ponto de encontro entre os lados CD e HF. Note que

$$\angle PCF = 180° - 75° - \angle CDE = 105° - 60° = 45°$$

e que

$$\angle PFC = 180° - 65° - \angle GFH = 115° - 60° = 55°.$$

Como $\angle DPF$ é externo do triângulo PCF, temos que $\angle DPF = 45° + 55° = 100°$. Por outro lado, $\angle DPF$ também é externo do triângulo IPD. Logo,

$$x + 60° = \angle DPF \Rightarrow x + 60° = 100° \Rightarrow x = 40°.$$

■

Exercício 9.11 O triângulo ABC é isósceles com $AB = AC$. Sobre o lado AB há um ponto P tal que $AP = PC = BC$. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

Solução. Seja $\alpha = \angle BAC$. Como o triângulo APC é isósceles de base AC, o Teorema 9.3.3 dá $\angle PCA = \alpha$. Daí, $\angle BPC = 2\alpha$, pois é ângulo externo do triângulo APC. Como BCP é isósceles de base BP, novamente pelo Teorema 9.3.3 temos $\angle PBC = 2\alpha$. Como ΔABC é isósceles de base BC, apelando uma vez mais para o Teorema 9.3.3 obtemos $\angle BCA = 2\alpha$. Por fim, somando todos os ângulos do triângulo ABC, temos que

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ.$$

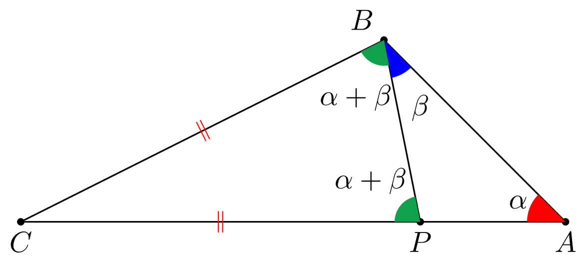
Portanto, os ângulos do triângulo são 36°, 72° e 72°. ■

9.3.1 – Desigualdades no triângulo

Nesta seção, utilizaremos o material discutido até aqui para estabelecer algumas desigualdades importantes envolvendo os comprimentos dos lados de um triângulo. Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 9.3.4 Em qualquer triângulo, a ordem entre dois lados coincide com a ordem entre os ângulos opostos a esses lados. Em particular, o maior lado é oposto ao maior ângulo, e vice-versa.

Demonstração. Assuma que, no triângulo ABC, tenhamos $BC < AC$. Temos de provar que $\angle BAC < \angle ABC$. Para tanto (acompanhe na figura), usando o fato de que $BC < AC$, podemos marcar um ponto P sobre o lado AC tal que $CP = CB$.



Agora, se $\angle PAB = \alpha$ e $\angle ABP = \beta$, Teorema do Ângulo Externo dá $\angle CPB = \alpha + \beta$. Mas, como ΔBCP é isósceles de base BP, segue do Teorema 9.3.3 que $\angle CBP = \alpha + \beta$. Portanto,

$$\angle ABC = \alpha + 2\beta > \alpha = \angle CAB.$$

■

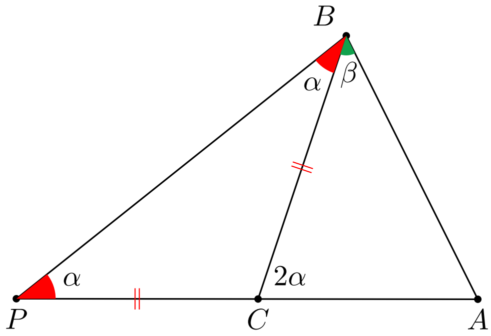
O próximo resultado confirma nossa intuição, construída no dia-a-dia, de que para ir de um ponto a outro a melhor trajetória possível é seguir *em linha reta*. Talvez você ache um tanto surpreendente o fato de que isso é um teorema, e não meramente uma manifestação de nossa intuição.

Teorema 9.3.5 — Desigualdade Triângular. Em todo triângulo, o maior lado é menor do que a soma dos outros dois.

Demonstração. Se AB é o maior lado do triângulo ABC, temos de mostrar que $AB < AC + BC$. Para tanto (acompanhe o raciocínio na próxima figura), marque P um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $CP = CB$ e o ponto C esteja entre A e P.

Uma vez que o triângulo ΔPCB é isósceles de base BP, temos $\angle CPB = \angle CBP$. Denotando tais ângulos por α e sendo $\beta = \angle ABP$, temos

$$\angle ABP = \alpha + \beta > \alpha = \angle APB.$$



Portanto, aplicando o Teorema 9.3.4 ao triângulo APB, concluímos que $AP > AB$. Mas $AP = AC + CP = AC + BC$, de sorte que $AC + BC > AB$. ∎

Obs Note que esse resultado também pode ser declarado da seguinte forma: *Em qualquer triângulo, a medida de um dos lados será menor do que a soma das medidas dos outros dois.*

Exercício 9.12 Três segmentos, medindo 5, 7 e x centímetros, são os lados de um triângulo. Quais são os possíveis valores que x pode assumir?

Solução. Pela desigualdade triangular, devemos ter $x < 5+7 = 12$. Por outro lado, $7 < x + 5$, de sorte que $2 < x$. Juntando essas duas desigualdades, temos que

$$2 < x < 12.$$

∎

Exercício 9.13 Encontre o intervalo de variação de x, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

Solução. Pela desigualdade triangular, temos:

$$(x+10) + (2x+4) > 20 - 2x \Rightarrow 3x + 14 > 20 - 2x \Rightarrow 5x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{5}.$$

$$(x+10) + (20-2x) > 2x + 4 \Rightarrow 30 - x > 2x + 4 \Rightarrow 26 > 3x \Rightarrow \frac{26}{3} > x.$$

$$(2x+4) + (20-2x) > x + 10 \Rightarrow 24 > x + 10 \Rightarrow 14 > x.$$

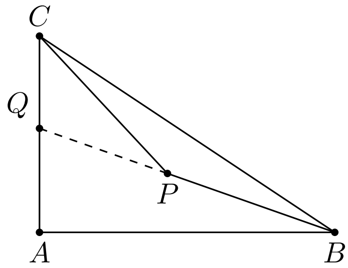
Como $14 > \frac{26}{3}$, os valores que satisfazem simultaneamente a todas essas desigualdades são $\frac{26}{3} > x > \frac{6}{5}$. ∎

Obs A solução do exercício anterior esconde a seguinte sutileza: dados números reais a, b e c, em princípio poderíamos ter $a+b > c$, $a+c > b$ e $b+c > a$, mas pelo menos um dos números a, b e c poderia ser negativo, de forma que a, b e c não fossem lados de triângulo algum. Isso não ocorre! Realmente, assumindo que $a+b > c$, $a+c > b$ e $b+c > a$, temos

$$\left.\begin{array}{l} a > c - b \\ a > b - c \end{array}\right\} \Rightarrow 2a > (c-b) + (b-c) \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0.$$

Da mesma forma, concluímos que $b > 0$ e $c > 0$.

Exercício 9.14 Se P é um ponto no interior de um triângulo ABC, mostre que $BP + PC < AB + AC$.



Solução. Prolongue $\overrightarrow{BP}$ até ela encontrar AC em um ponto Q. Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos ABQ e QPC, temos que:

$$BQ < AB + AQ \qquad \text{e} \qquad PC < PQ + QC.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos

$$BQ + PC < AB + AQ + PQ + QC$$

Por outro lado, $BQ = BP + PQ$ e $AQ + QC = AC$. Portanto,

$$(BP + PQ) + PC < AB + AC + PQ.$$

Então, cancelando a parcela PQ que aparece dos dois lados, ficamos com

$$BP + PC < AB + AC.$$

■

9.4 – Quadriláteros

Um **quadrilátero** $ABCD$ é o conjunto formado por quatro pontos A, B, C e D (seus **vértices**), tal que não há três deles colineares, e pelos segmentos AB, BC, CD e DA (os **lados** do quadrilátero).

Um quadrilátero é dito **convexo** quando a reta definida por cada um de seus lados deixa os outros dois vértices de um mesmo lado (veja a Figura 9.14). Nesta seção, vamos considerar apenas quadriláteros convexos, de forma que, daqui em diante, omitiremos a palavra *convexo*.

Se $ABCD$ é um quadrilátero, seu **interior** é a interseção dos quatro semi-planos definidos por cada lado e que contêm os outros dois vértices. Dizemos também que $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são os **ângulos internos** de $ABCD$ e os segmentos AD e BC são suas **diagonais**. Note que elas estão contidos na união dos lados com o interior de $ABCD$.

Por vezes, dizemos que AB e CD são **lados opostos** de $ABCD$. De modo equivalente, BD e AC também são lados opostos.

Assim como ocorre com os triângulos, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é invariante, ou seja, é igual em todos os quadriláteros. Mas, no caso de quadriláteros, o valor obtido é 360°.

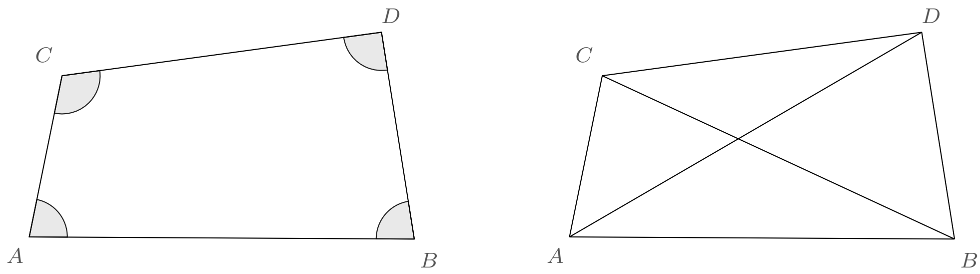


Figura 9.14: um quadrilátero (à esquerda) e suas diagonais (à direita).

Teorema 9.4.1 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

Demonstração. Desenhando apenas uma das diagonais, dividimos o quadrilátero em dois triângulos. Podemos observar facilmente que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual à soma dos ângulos internos desses dois triângulos. Logo, a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a $2 \cdot 180°$, ou seja, 360°. ∎

Vamos, agora, definir alguns tipos especiais de quadriláteros, segundo seus ângulos e lados. À medida que você ler as definições, observe os vários tipos especiais de quadriláteros na figura 9.15.

- **Retângulo** é um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos.
- **Losango** é um quadrilátero que possui todos os seus lados iguais.
- **Quadrado** é um quadrilátero que possui todos os ângulos retos e todos os lados iguais. Portanto, um quadrilátero é um quadrado se, e somente se, for simultaneamente um retângulo e um losango.
- **Paralelogramo** é um quadrilátero que possui seus dois pares de lados opostos paralelos.
- **Trapézio** é um quadrilátero que possui um par de lados (opostos) paralelos (que são chamados de **bases**).

Observe que todo paralelogramo também é trapézio. Por outro lado, em um trapézio, seus outros dois lados podem ou não ser paralelos. Contudo, a fim de ter uma nomenclatura que funcione em todos os casos, se $ABCD$ for um trapézio de bases AB e CD, diremos que AD e BC são os **lados não paralelos** do trapézio, lembrando que eles *podem vir a ser* paralelos. A nomenclatura é um tanto infeliz, mas está consagrada pelo uso e não gerará confusões, pois o contexto sempre deixará cada situação bastante clara.

Uma última definição: se $ABCD$ for um trapézio de bases AB e CD, diremos que $ABCD$ é **isósceles** se $\angle BAD = \angle ABC$. Nesse caso, é possível usar o Teorema 9.3.3 para mostrar que $AD = BC$.

Analisaremos mais algumas propriedades dos tipos especiais de quadriláteros listados acima no próximo módulo de Geometria, quando formalizarmos o conceito de congruência de triângulos.

Exercício 9.15 Na figura a seguir, $ABCD$ é um trapézio de bases AB e CD. Encontre x e y.

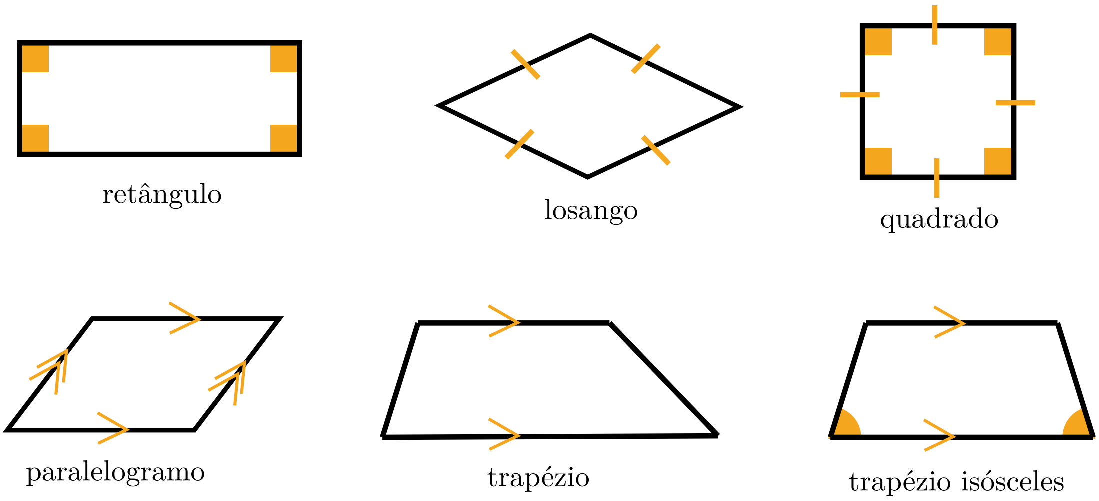
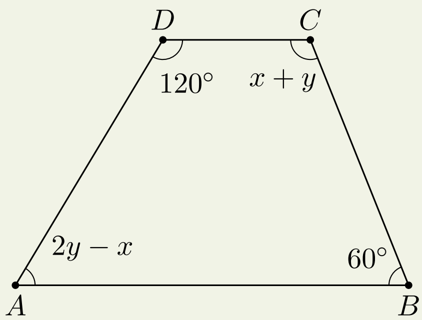


Figura 9.15: Tipos de quadriláteros.

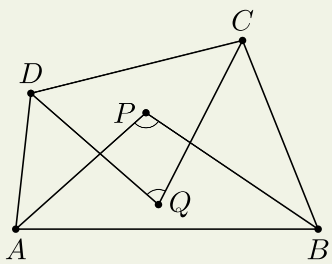


Solução. Por paralelismo, temos $2y - x + 120° = 180°$ e $60° + x + y = 180°$ ou, ainda,

$$2y - x = 60° \quad \text{e} \quad x + y = 120°.$$

Somando estas duas equações, chegamos a $3y = 180°$. Logo, $y = 60°$ e, consequentemente, $x = 60°$. (Observe que, graças a esses valores, $ABCD$ é um trapézio isósceles.) ■

Exercício 9.16 Na figura a seguir, P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$, enquanto que Q é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$. Ache o valor de $\angle APB + \angle CQD$.



Solução. Sejam $2\alpha = \angle DAB$, $2\beta = \angle ABC$, $2\theta = \angle BCD$ e $2\delta = \angle CDA$ as medidas dos ângulo do quadrilátero $ABCD$. Note que

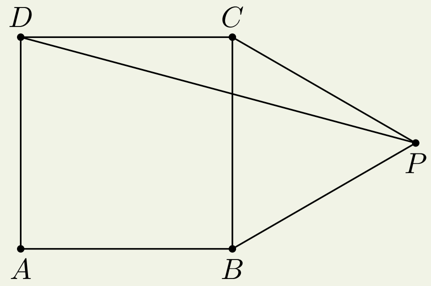
$$\angle APB = 180° - \alpha - \beta \qquad \text{e} \qquad \angle CQD = 180° - \theta - \delta.$$

Somando essas duas equações, temos que

$$\angle APB + \angle CQD = 360^\circ - (\alpha + \beta + \theta + \delta).$$

Por outro lado, 2α, 2β, 2θ e 2δ são as medidas dos ângulos de um quadrilátero, consequentemente, a soma desses ângulos é 360°. Assim, $\alpha + \beta + \theta + \delta = 180^\circ$ e, daí, $\angle APB + \angle CQD = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. ■

Exercício 9.17 A figura a seguir é formada por um quadrado e um triângulo equilátero. Calcule a medida do ângulo $\angle PDC$.



Solução. Como $CD = BC$ e $BC = CP$, temos que $CD = CP$. Assim, ΔCDP é um triângulo isósceles, o Teorema 9.3.3 garante que $\angle CDP = \angle CPD = x$. Por outro lado, sendo $ABCD$ um quadrado e CBP um triângulo equilátero, temos $\angle BCD = 90^\circ$ e $\angle BCP = 60^\circ$. Logo, $\angle DCP = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Por fim, calculando a soma dos ângulos do triângulo ΔCDP, obtemos

$$2x + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 30^\circ \Rightarrow x = 15^\circ.$$

■

9.5 – Polígonos

Generalizando triângulos e quadriláteros, definimos um **polígono de n lados** $A_1A_2 \ldots A_n$ como o conjunto formado por n pontos A_1, A_2, $\ldots$, A_n (seus **vértices**), tal que não há três deles colineares, e pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 (os **lados** do polígono).

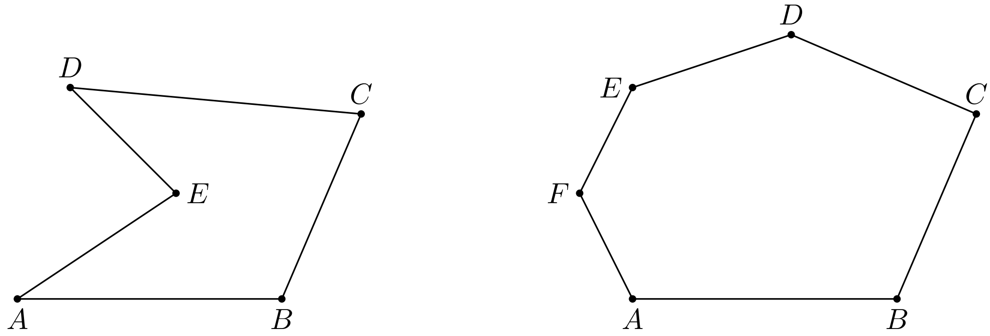
Um polígono de n-lados também é chamado de **n-ágono**. No entanto, em geral usamos palavras específicas quando n varia de 3 a 10. Já conhecemos esses nomes quando $n = 3$ (triângulos) e $n = 4$ (quadriláteros). A seguir, listamos os nomes usados para $5 \leq n \leq 10$, os quais são formados pela contração do prefixo grego correspondente a n (sublinhado) com a terminação *ágono*:

i. $n = 5$: pentágono.
ii. $n = 6$: hexágono.
iii. $n = 7$: heptágono.
iv. $n = 8$: octógono.
v. $n = 9$: eneágono.
vi. $n = 10$: decágono.

Da mesma forma, nesses casos podemos nomear os vértices do polígono usando as primeiras letras maiúsculas do alfabeto, a partir de A. Assim, podemos falar do pentágono $ABCDE$, do octógono $ABCDEFGH$, etc.

Um polígono de n lados é **convexo** quando a reta definida por cada um de seus lados deixa os outros $n - 2$ vértices de um mesmo lado do plano. As

Figuras 9.16 mostram dois exemplos de polígonos, um pentágono não convexo (à esquerda) e um hexágono convexo (à direita). Nesta seção, vamos considerar apenas polígonos convexos, de forma que, daqui em diante, omitiremos a palavra *convexo*.



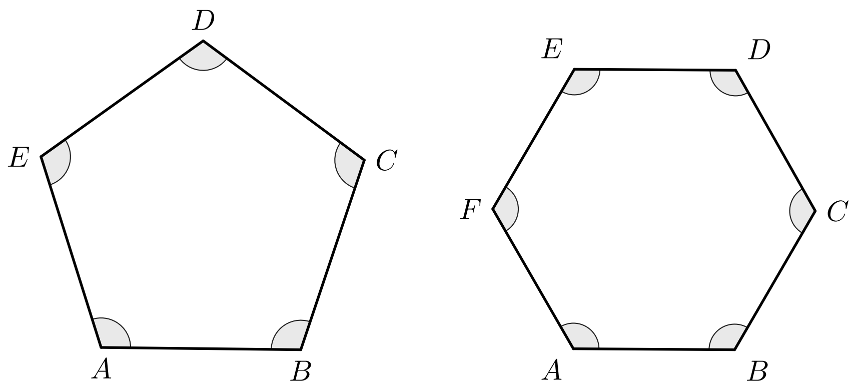
(a) Um pentágono não convexo. (b) Um hexágono convexo.

Figura 9.16: dois exemplos de polígonos.

Se $A_1A_2\ldots A_n$ é um n-ágono, seu **interior** é a interseção dos n semiplanos definidos por cada lado e que contêm os outros $n-2$ vértices. Dizemos também que $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\ldots$, $\hat{A}_n$ são os **ângulos internos** do polígono.

Definição 9.5.1 Um **polígono regular** é um polígono em que todos os lados têm um mesmo comprimento e todos os ângulos internos são congruentes.

Na Figura 9.17, ilustramos o pentágono regular (5 lados) e o hexágono regular (6 lados).



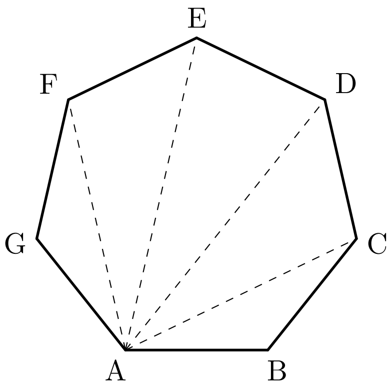
(a) Pentágono regular. (b) Hexágono regular.

Figura 9.17

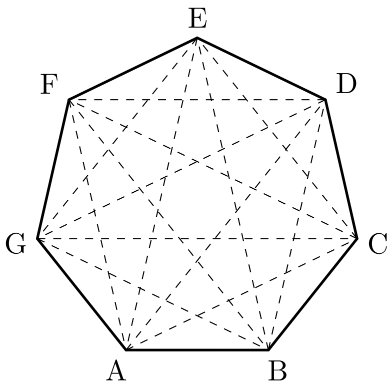
Triângulos equiláteros e quadrados são polígonos regulares. No caso dos triângulos equiláteros, recorde que (graças ao Teorema 9.3.3) a igualdade dos lados implicava a igualdade dos ângulos. Entretanto, já no caso dos quadrados, tivemos de exigir as igualdades dos lados e dos ângulos internos (pois há retângulos que não são quadrados).

De maneira similar, para todo $n \geq 4$ não é difícil esboçarmos exemplos de n-ágonos *equiláteros* (isto é, com todos os lados iguais) ou *equiângulos* (isto é, com todos os ângulos iguais) mas que não são regulares. Por exemplo, imaginando que os lados do pentágono regular da figura acima são barras de ferro conectadas por pinos nos vértices, vemos que o conjunto das barras não é *rígido*; podemos achatá-lo ou alongá-lo e, assim fazendo, obter outros pentágonos, equiláteros mas não equiângulos. Da mesma forma, escolha um ponto qualquer A' no interior do pentágono (faça uma figura para acompanhar) e, em seguida, marque os pontos B' sobre BC e E' sobre DE tais que $A'B'$ seja paralela a AB e $A'E'$ seja paralela a AE; então, $A'B'CDE'$ é um pentágono equiângulo, mas não equilátero (pois $B'C < BC = CD$).

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento que une dois vértices não adjacentes (ou seja, que não são extremidades de um mesmo lado). Já sabemos que o quadrado possui duas diagonais e, na Figura 9.18(b), ilustramos as diagonais de um heptágono que partem de um vértice (à esquerda), bem como todas as diagonais (à direita).



(a) Diagonais em um pentágono partindo de um vértice.



(b) Um heptágono tem 14 diagonais.

Figura 9.18

Vamos, agora, calcular a quantidade de diagonais em um polígono convexo qualquer, em função do número de lados.

Teorema 9.5.1 Um polígono convexo de n lados possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Demonstração. Ao fixar um vértice qualquer do polígono, note que o número de diagonais que partem dele é igual a $n-3$ (por exemplo, na Figura 9.18(a), temos $n = 7$ e $7-3 = 4$ diagonais partindo de A). Assim, podemos contabilizar todas as diagonais somando as contribuições de diagonais que partem de cada vértice, o que dá

$$\underbrace{(n-3) + (n-3) + \ldots + (n-3)}_{n \text{ parcelas}} = n(n-3)$$

diagonais. Contudo, o cálculo acima tem uma *redundância*: cada diagonal foi contada duas vezes, pois liga dois vértices (e, assim, foi contada uma vez a partir de cada um desses dois vértices). Portanto, o total de diagonais, sem repetições, é $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

Vimos anteriormente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, enquanto que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°. O próximo resultado generaliza esses dois, calculando a soma dos ângulos internos em qualquer n-ágono convexo.

Teorema 9.5.2 A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180°(n-2)$.

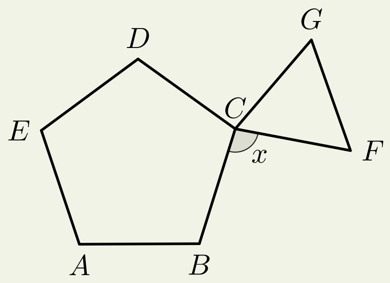
Demonstração. Escolha um vértice do polígono e trace todas as $n-3$ diagonais que partem dele (veja a Figura 9.18(a) para o caso $n=7$). Desse modo, subdividimos o polígono em $n-2$ triângulos ($7-2=5$ triângulos, na Figura 9.18(a)). Observe, agora, que a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de todos esses $n-2$ triângulos. Logo, a soma total é $180°(n-2)$. ■

Como consequência imediata do resultado anterior, obtemos o

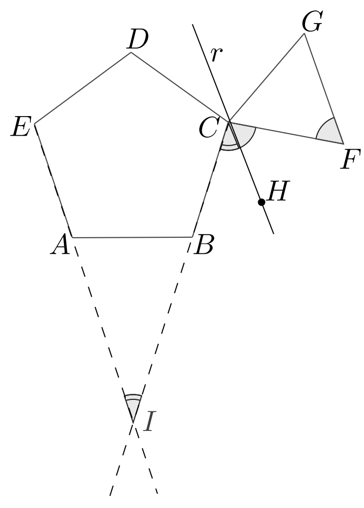
Corolário 9.5.3 Em um polígono regular de n lados, cada ângulo interno mede $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Demonstração. Como a soma dos ângulos é $180°(n-2)$ e há n ângulos, todos de mesma medida, cada um deles deve medir $\frac{180°(n-2)}{n}$. ■

Exercício 9.18 Na figura a seguir, vemos um pentágono regular $ABCDE$ e um triângulo equilátero CFG, unidos pelo vértice comum C. Calcule a medida do ângulo $x = \angle BCF$ para que os lados AE e FG estejam contidos em retas paralelas.



Solução. Seja r a reta paralela a FG e AE passando por C, seja I o ponto de interseção dos prolongamentos dos lados CB e AE do pentágono e marque um ponto H sobre a reta r, conforme mostrado na figura a seguir.



Os ângulos $\angle HCF$ e $\angle CFG$ são iguais, por serem alternos internos para as retas paralelas CH e FG, em relação à transversal CF. Como o triângulo CFG é equilátero, temos $\angle HCF = 60°$.

Os ângulos $\angle IAB$ e $\angle IBA$ são os suplementos dos ângulos internos $\angle EAB$ e $\angle ABC$, respectivamente. Como o pentágono é regular, temos

$$\angle EAB = \angle ABC = \frac{(5-3)180°}{5} = 108°;$$

assim,

$$\angle IAB = \angle IBA = 180° - 108° = 72°.$$

Calculando a soma dos ângulos do triângulo AIB, segue que

$$\angle AIB + 72° + 72° = 180° \implies \angle AIB = 180° - 144° = 36°.$$

Os ângulos $\angle AIB$ e $\angle BCH$ são iguais, pois são alternos internos para as retas paralelas AE e CH, em relação à transversal CI. Logo, $\angle BCH = 36°$.

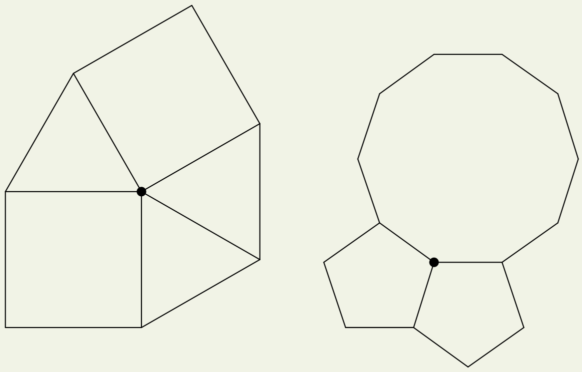
Por fim, $x = \angle BCH + \angle HCF = 36° + 60° = 96°$. ■

Exercício 9.19 — OBMEP 2007.

(a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos é de um polígono regular de n lados é $(n-2) \cdot 180°$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5		
6		
8		

Dizemos que três ou mais polígonos regulares *se encaixam* se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



(b) Um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam? Justifique sua resposta.

(c) Um triângulo equilátero, um heptágono regular e um outro polígono regular se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

Solução.
(a) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5$, 6 e 8 na fórmula $(n-2)\cdot 180°$. Para completar a segunda coluna, basta (conforme visto no Corolário 9.5.3) dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n, ou seja, calcular $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. A tabela completa é dada abaixo.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°

(b) O ângulo interno de um quadrado é 90° e o de um octógono regular é 135°. Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360°. Como $90° + 135° + 135° = 360°$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares realmente se encaixam.

(c) O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60° e o de um heptágono regular é $\frac{(7-2)\cdot 180°}{7} = \frac{5\cdot 180°}{7}$. Seja n o número de lados do terceiro polígono. O ângulo interno desse polígono é $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Como os três polígonos se encaixam, devemos ter

$$60° + \frac{5\cdot 180°}{7} + \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360°,$$

ou ainda, dividindo os dois lados por 60°,

$$1 + \frac{5\cdot 3}{7} + \frac{(n-2)\cdot 3}{n} = 6.$$

Multiplicando ambos os membros por $7n$, obtemos

$$7n + 15n + 21(n-2) = 42n$$

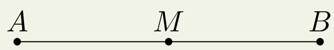
de sorte que $n = 42$. ■

9.6 – Problemas Propostos

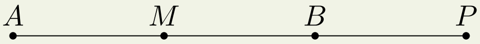
9.6.1 – Nível 1

Exercício 9.20 Em cada uma das figuras a seguir, calcule $\overline{AB}$, sendo M ponto médio de AB:

(a) $AM = 3x - 7$ e $MB = x + 1$.

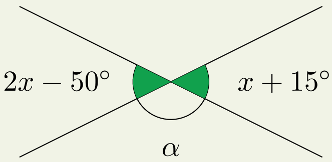


(b) $AM = x$, $AP = 5x - 6$ e $BP = x + 3$.

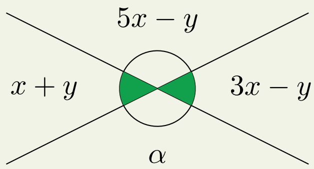


Exercício 9.21 Calcule o valor de α em cada um dos itens a seguir:

(a)



(b)

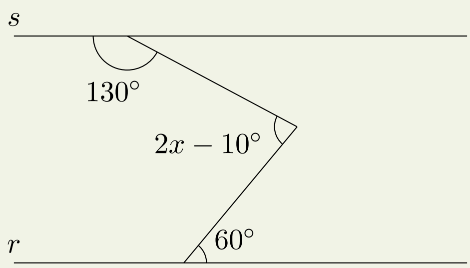


Exercício 9.22 Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando este indica 3 horas e 40 minutos.

Exercício 9.23 Calcule as medidas dos ângulos de um triângulo, sabendo que, quando as expressamos em graus, elas são proporcionais a 1, 2 e 3.

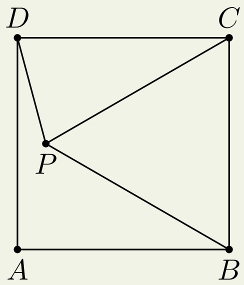
Exercício 9.24 Obtenha o intervalo de variação de x, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 20$, $3x + 5$ e $25 - 2x$.

Exercício 9.25 As retas r e s da figura são paralelas. Encontre x.



Exercício 9.26 Os ângulos internos de um quadrilátero convexo valem $2x + 50°$, $150° - 4x$, $x + 40°$ e $4x + 90°$. Calcule o valor de x.

Exercício 9.27 A figura a seguir é formada a partir de um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero BCP. Calcule a medida do ângulo $\angle ADP$.



Exercício 9.28 Seja $ABCDE$ um pentágono regular. Calcule a medida do ângulo $\angle BEC$.

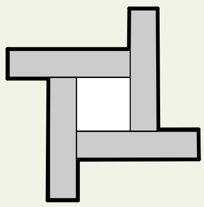
Exercício 9.29 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ACE.

9.6.2 – Nível 2

Exercício 9.30 — UFMG 1992. Os pontos A, B, C, D são colineares e tais que $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 8$ cm e $BD = 7$ cm. Nessas condições, uma possível disposição desses pontos é:

(a) $A\ D\ B\ C$.
(b) $A\ B\ C\ D$.
(c) $A\ C\ B\ D$.
(d) $B\ A\ C\ D$.
(e) $B\ C\ D\ A$.

Exercício 9.31 — OBMEP 2014. Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



Exercício 9.32 — PUC SP 1983. Duas retas concorrentes são *perpendiculares* se se encontram formando um ângulo de 90°. A esse respeito, considere a seguinte sentença:

"Num plano, se duas retas são ..... então toda reta ..... a uma delas é ..... à outra."

A alternativa que preenche corretamente as lacunas:

(a) paralelas - perpendicular - paralela.
(b) perpendiculares - paralela - paralela.
(c) perpendiculares - perpendicular - perpendicular.
(d) paralelas - paralela - perpendicular.
(e) perpendiculares - paralela - perpendicular.

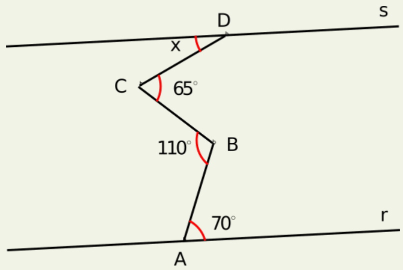
Exercício 9.33 — PUC SP 1984. Em um triângulo isósceles, a média aritmética das medidas de dois de seus ângulos é 50°. A medida de um dos ângulos do triângulo pode ser:

(a) 100°.
(b) 90°.
(c) 60°.
(d) 30°.
(e) 20°.

Exercício 9.34 Mostre que todas as diagonais de um pentágono regular têm a mesma medida.

Exercício 9.35 Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Explique por que $\angle BPC > \angle BAC$.

Exercício 9.36 Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule a medida do ângulo x.



Exercício 9.37 — UFMG 1992. Sobre figuras planas, é correto afirmar que:

(a) um quadrilátero convexo é um retângulo se os lados opostos têm comprimentos iguais.
(b) um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.
(c) um trapézio que tem dois ângulos consecutivos congruentes é isósceles.
(d) um triângulo equilátero é também isósceles.
(e) um triângulo retângulo é aquele cujos ângulos são retos.

Exercício 9.38 — ENEM 2004. Um fabricante planeja colocar no mercado duas linhas de cerâmicas para revestimento de pisos. Diversas formas possíveis para as cerâmicas foram apresentadas e decidiu-se que o conjunto P de formas possíveis seria composto apenas por figuras poligonais regulares.

Duas formas geométricas que podem fazer parte de P são:

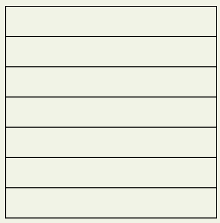
(a) triângulo e pentágono.
(b) triângulo e hexágono.
(c) triângulo e octógono.
(d) hexágono e heptágono.
(e) hexágono e octógono.

Exercício 9.39 — UNICAMP 1987. O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos mede $1440°$ tem, exatamente:

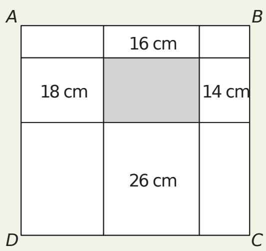
(a) 15 diagonais.
(b) 20 diagonais.
(c) 25 diagonais.
(d) 30 diagonais.
(e) 35 diagonais.

9.6.3 – Nível 3

Exercício 9.40 Um quadrado é dividido em sete retângulos, como mostrado na figura abaixo. Se o perímetro de cada um desses retângulos é 32cm, qual o perímetro do quadrado?

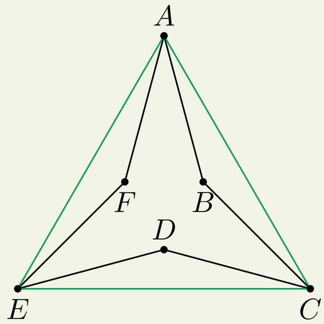


Exercício 9.41 — OBMEP 2016. O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. Se o perímetro do retângulo $ABCD$ é 54cm, qual o perímetro do retângulo cinza?

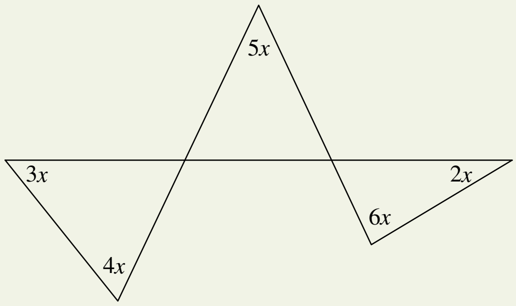


Exercício 9.42 — UERJ 2019. No desenho a seguir, está ilustrada uma estrela de três pontas iguais, com lados $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, inscrita no triângulo equilátero ACE. Se $\angle ABC = 150°$, os ângulos $\angle FAB$, $\angle BCD$ e $\angle DEF$ medem:

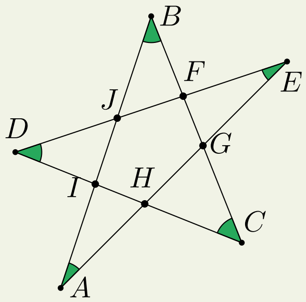
(a) 15°.
(b) 20°.
(c) 25°.
(d) 30°.



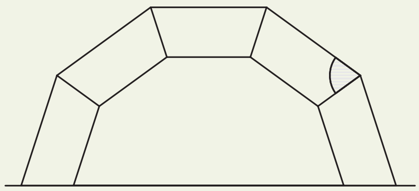
Exercício 9.43 — OBM 2004. Na figura, quanto vale x?



Exercício 9.44 Calcule a soma dos cinco ângulos da estrela $ABCDE$.



Exercício 9.45 — OBMEP 2009. A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?



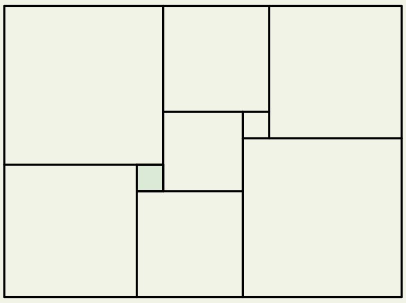
Exercício 9.46 Seja $ABCDEFG$ um heptágono regular. Qual é a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e DE?

Exercício 9.47 Em um polígono convexo, A, B e C são três vértices consecutivos. O **ângulo externo** do polígono em B é o ângulo formado entre o prolongamento do lado AB (prolongado de A para B) e o lado BC (faça uma figura para garantir que entendeu a definição). Graças ao Teorema 9.1.1, poderíamos ter definido o ângulo externo do polígono em B como o ângulo formado entre o prolongamento do lado BC (prolongado de C para B) e o lado AB. Prove que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer (um ângulo externo por vértice) é sempre igual a $360°$.

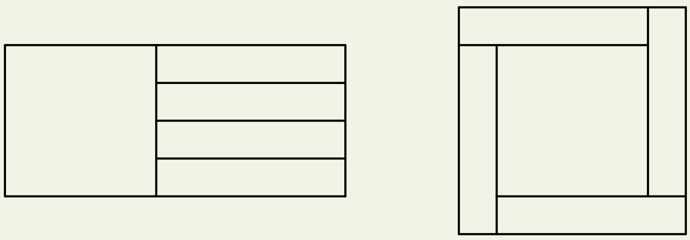
9.6.4 – Nível 4

Exercício 9.48 Qual é o número máximo de regiões em que três retas podem dividir o plano? E se forem 10 retas?

Exercício 9.49 Na figura a seguir, temos um retângulo dividido em vários quadrados menores. Sabendo que o quadrado azul tem lado igual a 1cm, qual é o perímetro do retângulo maior?

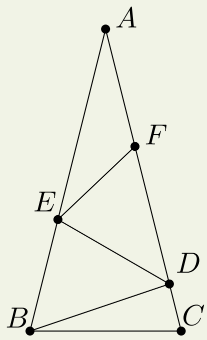


Exercício 9.50 — OBM 2017 - adaptado. Manoela tem cinco pedaços de papel: um quadrado e quatro retângulos iguais. Utilizando os cinco pedaços ela primeiro monta um retângulo de perímetro 780cm e, em seguida, desmonta o retângulo e usa os cinco pedaços para montar um quadrado conforme mostrado na figura a seguir. Qual é o perímetro deste quadrado?



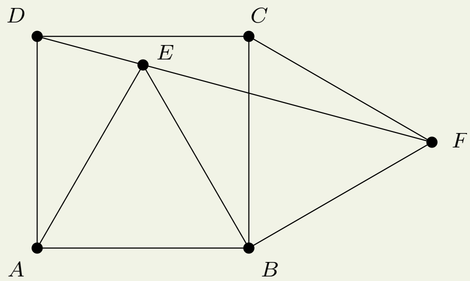
Exercício 9.51 — OBM 2011. Em um triângulo ABC com $\angle ABC - \angle BAC = 50°$, a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $\angle CDE = 90°$. Qual é medida do ângulo $\angle ADE$?

Exercício 9.52 O triângulo ABC da figura é isósceles com vértice em A. Calcule os ângulos deste triângulo, sabendo que $BC = BD = DE = EF = FA$.



Exercício 9.53 No triângulo ABC, $AB = AC$, D está sobre BC e E está sobre AC de modo que $AE = AD$ e $\angle BAD = 30°$. Calcule $\angle EDC$.

Exercício 9.54 Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e os triângulos ABE e BFC são equiláteros. Prove que os pontos D, E e F se localizam sobre uma mesma reta. (Apesar disso ser *sugerido* pela figura, para verificar que D, E e F são realmente colineares temos de mostrar que $\angle AED + \angle AEB + \angle BEF = 180°$.)



Exercício 9.55 Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC.$$