MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2021

1

Aritmética Elementar I

Adição e Subtração
Multiplicação e Divisão
Frações

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica
UFC/FUNCAP/SEDUC

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO
SISEDU
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED
CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Sumário

1 Operações aritméticas

1.1 – Adição e subtração

Convidamos você a percorrer este roteiro de estudos de Aritmética, ao longo de exercícios que, gradativamente, vão de problemas básicos a questões do ENEM, vestibulares e algumas olimpíadas.

Nesta seção do caderno, revisamos métodos para efetuar a adição e a subtração, deixando a multiplicação e a divisão para a seção seguinte. Começamos nosso roteiro com um probleminha.

Exercício 1.1 Em qual dos números nas alternativas abaixo o algarismo 5 tem o valor de 500 unidades?

(a) 135.120.
(b) 5.210.
(c) 20.501.
(d) 25.100.

Solução. Percorrendo os algarismos de um número da direita para a esquerda, o algarismo 5 tem o valor de 5 unidades quando está na primeira posição, de 50 unidades quando ocupa a segunda posição, de 500 unidades quando se encontra na terceira posição, e assim por diante. Logo, a alternativa que apresenta um número em que o algarismo 5 vale 500 unidades é a de letra (c). ■

Observe que, no número 20.501, o algarismo 2 corresponde a 20.000 unidades ou 2.000 dezenas ou 200 centenas ou 20 milhares ou 2 dezenas de milhares.

Exercício 1.2 — OBMEP A - 2018 (adaptado). Qual é o valor de $2.018 + 8.012$?

A) 10.000
B) 10.010
C) 10.030
D) 10.218
E) 18.012

Solução. Os números que devemos somar são *decompostos* como

$$2.018 = 2\times 10^3 + 0\times 10^2 + 1\times 10^1 + 8\times 10^0,$$
$$8.012 = 8\times 10^3 + 0\times 10^2 + 1\times 10^1 + 2\times 10^0.$$

Portanto, somando esses dois números, podemos *agrupar* as potências de dez em suas decomposições, obtendo

$$2.018 + 8.012 = (2+8)\times 10^3 + (0+0)\times 10^2 + (1+1)\times 10^1 + (8+2)\times 10^0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2.018 + 8.012 &= 10\times 10^3 + 0\times 10^2 + 2\times 10 + 10\times 1 \\ &= 10^4 + 20 + 10 \\ &= 10.000 + 30 \\ &= 10.030. \end{aligned}$$

Observe que os cálculos que fizemos nesse exercício justificam a "regra do **vai um**" que usamos na escola:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2\,0\,1\,8 \\ +\,8\,0\,1\,2 \\ \hline 1\,0\,0\,3\,0 \end{array}$$

Note que o algarismo 1 que "vai" para a ordem das dezenas corresponde à soma de 8 e 2. Já o 1 que "vai' para a ordem das dezenas de milhares corresponde à soma de $2.000 = 2\times 10^3$ e $8.000 = 8\times 10^3$. ■

Exercício 1.3 Quanto é $99 + 999 + 9.999$?

Solução. Nesta solução, não usaremos o algoritmo do "vai 1". Observe que

$$\begin{aligned} 99 + 1 &= 100, \\ 999 + 1 &= 1.000, \\ 9.999 + 1 &= 10.000. \end{aligned}$$

Somando as parcelas dos lados esquerdos e as parcelas dos lados direitos e *reagrupando* os termos, temos

$$9.999 + 999 + 99 + 1 + 1 + 1 = 10.000 + 1.000 + 100.$$

Logo,

$$9.999 + 999 + 99 + 3 = 11.100.$$

Subtraindo 3 dos dois lados da igualdade, obtemos

$$9.999 + 999 + 99 = 11.100 - 3 = 11.097.$$

■

A subtração, depois da adição, é a segunda **operação aritmética** que estudaremos. Esta operação está associada a problemas da seguinte forma.

Exercício 1.4 Quanto dinheiro falta a João para comprar uma motoneta no valor de R$ 10.590,00, sabendo que ele já conseguiu poupar R$ 6.380,00?

Solução. O problema 1.4 consiste em *resolver a equação*

$$6.380 + \text{quantia que falta} = 10.590.$$

Para encontrar a quantia que falta, a incógnita desta equação, calculamos a *diferença* 10.590 − 6.380 entre o valor da motoneta e a quantia que João tem atualmente. Decompondo as parcelas e reagrupando os componentes, calculamos

$$\begin{aligned} 10.590 - 6.380 &= 10.000 + 500 + 90 - 6.000 - 300 - 80 \\ &= 10.000 - 6.000 + 500 - 300 + 90 - 80 \\ &= 4.000 + 200 + 10 \\ &= 4.210. \end{aligned}$$

Numa subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

Observe que, somando a quantia que falta ao que João já poupou, obtemos a quantia total desejada, ou seja, o valor da motoneta, isto é,

$$6.380 + 4.210 = 10.590,$$

ou seja, subtraendo + "resto ou diferença" = minuendo. ■

Exercício 1.5 Para pagar uma reforma urgente em casa, João gastou R\$ 1.590,00 de sua poupança de R\$ 6.380,00. Com quanto ficou?

Solução. Para resolver este problema, precisamos *subtrair* ou retirar 1.590 reais dos 6.380 reais que João já poupara, isto é, precisamos calcular a diferença $6.380 - 1.590$, obtendo o valor que *resta* na poupança de João após estas despesas com a reforma. Desta vez, temos menos centenas e menos dezenas no minuendo que no subtraendo. Assim, precisamos "pedir emprestado", ou seja, reagrupar 1 centena (10 dezenas) na ordem das dezenas; e reagrupar 1 milhar (10 centenas) na ordem das centenas. Com estes "empréstimos", ficamos com $10 + 8 = 18$ dezenas, $10 + 2 = 12$ centenas e 5 milhares, como vemos na continha "armada" a seguir:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 5 & 12 & 18 & \\
 & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{8} & 0 \\
- & 1 & 5 & 9 & 0 \\
\hline
 & 4 & 7 & 9 & 0
\end{array}$$

Para entender por que esse método de "tomar emprestado" funciona, reescrevamos os cálculos usando as decomposições do minuendo e do subtraendo em potências de 10. Temos

$$\begin{aligned}
6.380 - 1.590 &= 6.000 + 300 + 80 - 1.000 - 500 - 90 \\
&= 6.000 + 200 + 100 + 80 - 1.000 - 500 - 90 \\
&= 6.000 + 200 - 1.000 - 500 + 180 - 90 \\
&= 6.000 + 200 - 1.000 - 500 + 90
\end{aligned}$$

Nesta sequência de *passos do algoritmo*, decompusemos as 3 centenas (300 unidades) em 200 unidades e 100 unidades. Somamos 100 dessas unidades às 80 que havia no minuendo, obtendo 180 unidades. Em seguida, subtraímos 90 unidades dessas 180, ficando com 90 unidades. Note que restaram 6 milhares, 2 centenas e 9 dezenas. Precisamos, agora, continuar com os próximos passos da subtração:

$$\begin{aligned}
6.380 - 1.590 &= 6.000 + 200 - 1.000 - 500 + 90 \\
&= 5.000 + 1.000 + 200 - 1.000 - 500 + 90 \\
&= 5.000 - 1.000 + 1.000 + 200 - 500 + 90 \\
&= 5.000 - 1.000 + 700 + 90 \\
&= 4.000 + 700 + 90 = 4.790,
\end{aligned}$$

o que encerra o cálculo. ■

Como vemos, é possível pensar e testar diferentes *algoritmos* para efetuar subtrações e adições. Para finalizar, apresentamos o método de *composição* e *compensação*, também visto na escola e nos livros. Por exemplo, usando este método, efetuamos a subtração do exercício 1.5 do seguinte modo: iniciamos adicionando 100 unidades ao minuendo e 100 unidades ao subtraendo, obtendo

$$\begin{aligned}
6.380 - 1.590 &= 6.000 + 300 + 80 - 1.000 - 500 - 90 \\
&= 6.000 + 300 + 100 + 80 - 1.000 - 500 - 100 - 90 \\
&= 6.000 + 300 + 180 - 1.000 - 600 - 90 \\
&= 6.000 + 300 - 1.000 - 600 + 90
\end{aligned}$$

Prosseguindo, adicionamos 1.000 unidades ao minuendo e 1.000 unidades ao subtraendo:

$$\begin{aligned}
6.380 - 1.590 &= 6.000 + 1.000 + 300 - 1.000 - 1.000 - 600 + 90 \\
&= 6.000 + 1.300 - 2.000 - 600 + 90 \\
&= 6.000 - 2.000 + 700 + 90 = 4.790.
\end{aligned}$$

o que encerra o cálculo.

Observação 1.1 Tanto a adição quanto a subtração podem ser *estendidas* dos números naturais para os números inteiros. As propriedades de *comutatividade* e *associatividade* continuam válidas e serão muito úteis para efetuarmos os cálculos aritméticos e aplicarmos algoritmos. Por exemplo, usando esta extensão da subtração para números naturais, podemos calcular

$$\begin{aligned} 6.380 - 1.590 &= 6.000 + 300 + 80 - 1.000 - 500 - 90 \\ &= 5.000 - 200 - 10 \\ &= 4.800 - 10 = 4.790. \end{aligned}$$

De modo similar, temos

$$\begin{aligned} 1.590 - 6.380 &= 1.000 + 500 + 90 - 6.000 - 300 - 80 \\ &= -5.000 + 200 + 10 \\ &= -4.800 + 10 = -4.790. \end{aligned}$$

Percebemos que admitindo números inteiros positivos e negativos, os cálculos e algoritmos ficam muito mais rápidos e simples.

1.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 1.6 Separe os números abaixo em dois grupos, de modo que os números em cada grupo tenham a mesma soma.

$$11, \ 15, \ 19, \ 23$$

Exercício 1.7 Que número torna a igualdade abaixo correta?

$$37 + 56 = 48 + \star$$

Solução. Note que

$$37+56 = 30+7+50+6 = 30+10+7+1+40+5 = 40+8+40+5 = 48+45.$$

Logo $\star = 45$. ■

Exercício 1.8 Calcule as seguintes somas:

(a) $795 + 538$
(b) $989 + 799$
(c) $859 + 947 + 638$
(d) $6.385 + 9.725$

Solução. Em a), temos

$$795 + 538 = 700 + 90 + 5 + 500 + 30 + 8 = 1.200 + 120 + 13 = 1.333.$$

Para efetuar a adição em b), calculamos

$$989 + 799 = 990 - 1 + 800 - 1 = 1.790 - 2 = 1.788.$$

Quanto à soma em c), temos

$$\begin{aligned} 859 + 947 + 638 &= 800 + 900 + 600 + 50 + 40 + 30 + 9 + 7 + 8 \\ &= 2.300 + 120 + 24 = 2.444. \end{aligned}$$

Por fim, calculamos, em d):

$$\begin{aligned} 6.385 + 9.725 &= 6.300 + 85 + 9.700 + 25 = 15.000 + 1.000 + 110 \\ &= 16.110. \end{aligned}$$

■

Exercício 1.9 Qual das alternativas abaixo melhor aproxima o resultado da adição $587.622 + 421.256$?

(a) 1.001.000.
(b) 1.010.000
(c) 1.100.000
(d) 1.000.010
(e) 1.000.100

Escreva por extenso o número na alternativa escolhida.

Exercício 1.10 Calcule as seguintes diferenças:

(a) $1.333 - 538$
(b) $1.333 - 795$
(c) $1.768 - 989$
(d) $10.010 - 8.999$
(e) $110.010 - 101.111$

Solução. Calculamos a diferença em a) da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1.333 - 538 &= 1.300 + 33 - 500 - 38 = 1.300 - 500 - 38 + 33 \\ &= 800 - 5 = 795. \end{aligned}$$

Quanto às operações em b), temos, usando o "método do reagrupamento" (ou da decomposição)

$$\begin{aligned} 1.333 - 795 &= 1.300 + 30 + 3 - 700 - 90 - 5 \\ &= 1.300 + 20 + 13 - 700 - 90 - 5 \\ &= 1.200 + 100 + 20 - 700 - 90 + 8 \\ &= 1.200 + 120 - 700 - 90 + 8 \\ &= 1.200 - 700 + 30 + 8 = 500 + 30 + 8 = 538. \end{aligned}$$

Observe que as contas em a) e b) comprovam que $795 + 538 = 1.333 = 538 + 795$, como já sabíamos do exercício anterior.

Passando ao cálculo da diferença em c), podemos usar o "método da compensação" (ou da composição):

$$\begin{aligned} 1.768 - 989 &= 1.700 + 60 + 8 - 900 - 80 - 9 \\ &= 1.700 + 60 + 10 + 8 - 900 - 80 - 10 - 9 \\ &= 1.700 + 60 + 9 - 900 - 80 - 10 \\ &= 1.700 + 100 + 60 + 9 - 900 - 100 - 90 \\ &= 1.700 + 70 + 9 - 900 - 100 \\ &= 1.700 - 1.000 + 70 + 9 = 779. \end{aligned}$$

Agora, a diferença em d) pode ser mais facilmente calculada com a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned}10.010 - 8.999 &= 10.010 - 9.000 + 1 = 10.000 + 10 - 9000 + 1 \\ &= 1.000 + 11 = 1.011.\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}110.010 - 101.111 &= \cancel{100.000} + 10.000 + 10 - \cancel{100.000} - 1.000 - 111 \\ &= 9.000 + 10 - 100 - 11 = 8.900 + 10 - 11 = 8.900 - 1 = 8.899.\end{aligned}$$

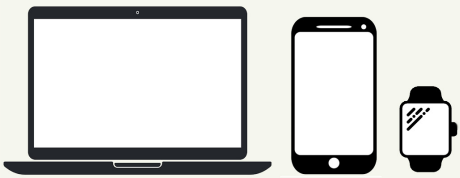
■

Exercício 1.11 Resolva as seguintes expressões numéricas

(a) $14 - (-26 + 38)$.
(b) $57 + (-21) - (-64)$
(c) $-43 + 86 - 31$
(d) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9 + 10$
(e) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 9 - 10$

Exercício 1.12 João foi a uma loja e comprou um computador, um telefone celular e um relógio digital. Sabendo que estes itens custaram, respectivamente, R$ 4566,00, R$ 2733,00 e R$ 589,00, quanto João gastou nesta compra?

(a) R$ 6778,00
(b) R$ 6788,00
(c) R$ 6888,00
(d) R$ 7888,00
(e) R$ 8888,00



Exercício 1.13 — ENEM 2017. As empresas que possuem Serviço de Atendimento ao Cliente (SAC), geralmente informam ao cliente, que utiliza o serviço, um número de protocolo de atendimento. Esse número resguarda o cliente para eventuais reclamações e é gerado consecutivamente, de acordo com os atendimentos executados. Ao

término do mês de janeiro de 2012, uma empresa registrou como último protocolo do SAC o número 390.978.467. Do início do mês de fevereiro até o final do mês de dezembro de 2012, foram abertos 22.580 novos números de protocolos. O algarismo que aparece na posição da dezena de milhar, do último número de protocolo de atendimento registrado pela empresa em 2012, é

(a) 0. (b) 2. (c) 4. (d) 6. (e) 8.

Solução. Note que

$$390.978.467 + 22.580 = 391.001.047.$$

Assim, a posição referente à dezena de milhar (10.000) no número 391.001.047, que é a quinta posição da direita para a esquerda, é ocupada pelo algarismo 0. Logo, a alternativa correta é a de letra (a).

■

Exercício 1.14 Segundo o Censo do IBGE, a população residente em Fortaleza era de 2.452.185 habitantes em 2010. Estima-se que até 2020 essa população tenha um aumento de aproximadamente 250.000 habitantes. Assim, espera-se que o número de habitantes de Fortaleza em 2020 seja de, aproximadamente

(a) 2.377.215.
(b) 2.477.435.
(c) 2.479.685.
(d) 2.522.185.
(e) 2.700.000.

Exercício 1.15 — ENEM 2014 - PPL. Uma loja decide premiar seus clientes. Cada cliente receberá um dos seis possíveis brindes disponíveis, conforme sua ordem de chegada na loja. Os brindes a serem distribuídos são: uma bola, um chaveiro, uma caneta, um refrigerante, um sorvete e um CD, nessa ordem. O primeiro cliente da loja recebe uma bola, o segundo recebe um chaveiro, o terceiro recebe uma caneta, o quarto recebe um refrigerante, o quinto recebe um sorvete, o sexto recebe um CD, o sétimo recebe uma bola, o oitavo recebe um chaveiro, e assim sucessivamente, segundo a ordem dos brindes.

O milésimo cliente receberá de brinde um(a)

(a) bola.
(b) caneta.
(c) refrigerante.
(d) sorvete.
(e) CD.

Solução. Precisamos identificar quantos grupos de seis clientes podemos formar com os 1.000 primeiros clientes. Começando com o primeiro cliente, cada grupo de 6 clientes recebe os prêmios na sequência definida no enunciado. O último grupo completo de seis clientes são os de números $991, 992, 993, 994, 995$ e 996. Logo após, teremos

- cliente 997: bola
- cliente 998: chaveiro
- cliente 999: caneta
- cliente 1.000: refrigerante.

Concluímos que a alternativa correta é a de letra (c). ■

Sequência 2

Exercício 1.16 Semana passada consegui ler um livro do início da página 185 até o final da página 437. Que número de páginas desse livro consegui ler naquela semana?

(a) 623 (b) 438 (c) 348 (d) 338 (e) 253

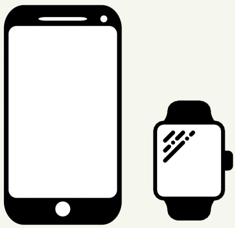
Exercício 1.17 A tabela abaixo representa as temperaturas máxima e mínima, em graus Celsius, registradas em 2020 em quatro localidades do planeta.

Localidades	Temperatura mínima	Temperatura máxima
Toronto	$-7°C$	$27°\ C$
Vladivostok	$-21°C$	$26°C$
Marrakesh	$5°C$	$36°C$
Bariloche	$-1°C$	$24°C$

Em qual dessas localidades houve maior *amplitude térmica*, isto é, maior diferença entre as temperaturas mínima e máxima?

Exercício 1.18 Felipe entrou numa loja de eletrônicos com R$ 5000,00 e comprou um *smartphone* e um relógio digital. Sabendo que esses itens custaram, respectivamente, R$ 3187,00 e R$ 839,00, quanto sobrou do dinheiro de Felipe?

(a) R$ 974,00.
(b) R$ 1813,00.
(c) R$ 1974,00.
(d) R$ 2974,00.
(e) R$ 4161,00.



Solução. Efetuando a soma dos valores, em reais, dos itens que Felipe comprou, obtemos

$$\begin{array}{rcccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 3 & 1 & 8 & 7 \\ + & & 8 & 3 & 9 \\ \hline & 4 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

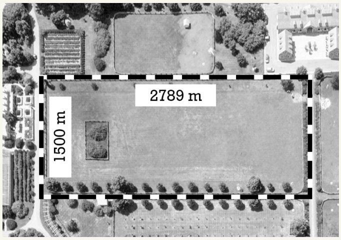
Portanto, Felipe gastou R$ 4026,00 na compra. Visto que ele tinha R$ 5000,00, a subtração

$$5000 - 4026 = (1 + 4999) - (4025 + 1) = 4999 - 4025 = 974$$

nos dá o valor, em reais, do restante do dinheiro de Felipe. Assim, a alternativa (a) é a correta. ■

Exercício 1.19 Um fazendeiro mediu sua terra, de formato retangular, para cercá-la inteiramente com uma cerca de madeira. Quantos metros de cerca ele deverá fazer, se sua fazenda possui 1500 metros de largura por 2789 metros de comprimento?

(a) 3000 metros.
(b) 4289 metros.
(c) 8000 metros.
(d) 8578 metros.
(e) 9000 metros.



Solução. Antes de resolver o problema, devemos observar que um retângulo possui 4 lados. Os lados da frente e do fundo medem 1500 metros, pois essa é a medida da largura do retângulo que forma o terreno. Então, esses dois lados medem, ao todo, $1500 + 1500 = 3000$ metros. Os dois lados da lateral do retângulo medem 2789 metros, que é o comprimento do terreno. Portanto, a metragem para cercar as suas duas laterais é de 5578 metros, pois

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1}\,{}^{1} \\ 2\,7\,8\,9 \\ +\,2\,7\,8\,9 \\ \hline 5\,5\,7\,8 \end{array}$$

Assim, a metragem total da cerca que o comerciante deverá comprar é de $3000 + 5578 = 8578$ metros:

$$\begin{array}{r} 3\,0\,0\,0 \\ +\,5\,5\,7\,8 \\ \hline 8\,5\,7\,8 \end{array}$$

A alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 1.20 Um marido é 10 anos mais velho que sua esposa. Esta, por sua vez, tinha 22 anos quando o filho deles nasceu. O filho do casal tinha 8 anos quando sua irmã nasceu. Esta última fez 6 anos ontem. Qual é a idade do marido?

(a) 42 anos. (b) 44 anos. (c) 46 anos. (d) 48 anos.

Solução. Uma vez que a filha completou 6 anos de idade, o filho tem, agora, $8 + 6 = 14$ anos. Logo, a esposa tem $22 + 14 = 36$ anos e o esposo $36 + 10 = 46$ anos. A alternativa (c) é a correta. ■

Exercício 1.21 Certo asteroide é visível da Terra a olho nu a cada 67 anos, tendo sido visto pela última vez no ano de 1954. Qual foi, ou será, o primeiro ano de nosso século em que ele tornará a ser visto a olho nu de nosso planeta?

(a) 1987.
(b) 2008.
(c) 2021.
(d) 2045.
(e) 2088.

Exercício 1.22 — PUC-RJ 2007. Um taxista trocou uma nota de 50 reais por notas de 2 reais e 5 reais num total de 19 notas. Quantas notas de cada valor o taxista recebeu?

(a) 9 notas de 5 reais e 10 notas de 2 reais.
(b) 4 notas de 5 reais e 15 notas de 2 reais.
(c) 15 notas de 5 reais e 4 notas de 2 reais.
(d) 12 notas de 5 reais e 7 notas de 2 reais.
(e) 7 notas de 5 reais e 12 notas de 2 reais.

Solução. O valor recebido em notas de 2 reais é, por definição, um número par. Subtraindo esse valor de 50, obtemos também um número par. Esse número par deve ser um *múltiplo* de 5, pois é recebido apenas em notas de 5 reais. As possibilidades são $10, 20, 30, 40$ reais com, respectivamente, $2, 4, 6$ ou 8 notas de 5 reais. Com 4 notas de 5 reais, ou seja, 20 reais, ficam 30 reais em 15 notas de 2. Logo, deste modo, o taxista recebe 4 notas de 5 reais e 15 notas de 2 reais, em um total de 10 notas. A alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 1.23 — ENEM 2018. Um edifício tem a numeração dos andares iniciando no térreo (T), e continuando com primeiro, segundo, terceiro, ..., até o último andar. Uma criança entrou no elevador e, tocando no painel, seguiu uma sequência de andares, parando, abrindo e fechando a porta em diversos andares. A partir de onde entrou a criança, o elevador subiu sete andares, em seguida desceu dez, desceu mais treze, subiu nove, desceu quatro e parou no quinto andar, finalizando a sequência. Considere que, no trajeto seguido pela criança, o elevador parou uma vez no último andar do edifício.

De acordo com as informações dadas, o último andar do edifício é o

(a) 16°.
(b) 22°.
(c) 23°.
(d) 25°.
(e) 32°.

Exercício 1.24 — UERJ 2014 - adaptado. Cientistas da Nasa recalculam idade da estrela mais velha já descoberta.
Cientistas da agência espacial americana (Nasa) recalcularam a idade da estrela mais velha já descoberta, conhecida como "Estrela Matusalém" ou HD 140283. Eles estimam que a estrela possua 14.500 milhões de anos, com margem de erro de 800 milhões para menos ou para mais, o que significa que ela pode ter de x a y anos.

Adaptado de g1.globo.com, 11/03/2013.

De acordo com as informações do texto, a soma $x + y$ é igual a:

(a) 137×10^7.
(b) 15×10^8.
(c) 235×10^7.
(d) 29×10^8.

Exercício 1.25 — Canguru 2014. No número do ano 2014, os algarismos são diferentes e o último algarismo é maior do que a soma dos outros três algarismos. Antes de 2014, há quantos anos isto aconteceu pela última vez?

(a) 5.
(b) 215.
(c) 305.
(d) 395.
(e) 485.

Sequência 3

Exercício 1.26 No Dia dos Pais, numa promoção, uma camisa e uma calça custavam, juntas, R$ 190,00. Sabendo que a camisa custava R$ 30,00 a mais que a calça, qual era o preço da camisa?

(a) R$ 190,00.
(b) R$ 110,00.
(c) R$ 80,00.
(d) R$ 30,00.

Solução. Se os dois objetos tivessem o mesmo preço, cada um custaria R$ 95,00, pois $95+95 = 180+10 = 190$. No entanto, para que a diferença entre os preços fosse de R$ 30,00, precisariamos aumentar R$ 15,00 no preço de um e diminuir R$ 15,00 no preço do outro. Ou seja, o preço da camisa deveria ser $95 + 15 = 110$ reais e o preço da calça deveria ser $95 - 15 = 80$ reais. A alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 1.27 — UFSJ 2004. Entre os números abaixo discriminados, o ÚNICO que pode ser escrito como a soma de três números inteiros consecutivos é

(a) -30522.
(b) 28613.

(c) -34811.
(d) 25432.

Solução. Podemos representar os três números inteiros como $n-1, n, n+1$. Somando estes números, temos

$$(n-1)+n+(n+1) = n+n+n = 3\times n.$$

Portanto, a soma desses três números deve ser um *múltiplo* de 3. O único número, nas alternativas, com esta propriedade é -30.522. De fato, temos

$$-30.522 = -10.174 - 10.174 - 10.174.$$

Logo,

$$-30.522 = -10.173 - 10.174 - 10.175$$

■

Exercício 1.28 — ENEM 2010 - PPL. Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em: http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.

Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

(a) 12 dias.
(b) 13 dias.
(c) 14 dias.

(d) 15 dias.
(e) 16 dias.

Solução. Segundo o plano de treinamento diário, a cada dia o corredor percorre 500 metros a mais. Portanto, corre $500+500 = 1.000$ metros ou 1 quilômetro a mais a cada 2 dias. Portanto, começando com 3 quilômetros por dia, chega a 10 quilômetros por dia, ou seja, 7 quilômetros a mais, por aumentos progressivos em $7\times 2 = 14$ dias depois do primeiro dia. Portanto, o plano de treinamento poderá ser executado somente durante 15 dias, o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 1.29 Calcule a soma

$$1+2+3+\ldots+98+99+100$$

dos 100 primeiros números naturais.

Solução. Somando os números naturais de 1 a 100 duas vezes, uma em ordem crescente, outra em ordem decrescente, temos

$$\begin{array}{lllllll} & 1 & +2 & +3 & +\ldots+98 & +99 & +100 \\ + & 100 & +99 & +98 & +\ldots+3 & +2 & +1 \\ \hline & 101 & +101 & +101 & +\ldots+101 & +101 & +101, \end{array}$$

ou seja, **duas vezes** a soma dos números naturais de 1 a 100 equivale a 100 vezes o número 101. Logo, a soma é dada por

$$\underbrace{101+101+101+\ldots+101+101+101}_{50 \text{ vezes}} = 50\cdot 101,$$

isto é, a soma dos números naturais de 1 a 100 é igual a 5.050. ■

Observação 1.2 O raciocínio que usamos para resolver este problema se aplica ao cálculo da soma dos números naturais de 1 a n, para um dado $n > 1$. Duas vezes esta soma equivale a n somas de

1 e n. Portanto, a soma é dada por

$$\frac{1}{2}\times n\times(n+1). \tag{1.1}$$

Calculamos, deste modo, a soma dos 200 primeiros números naturais como sendo

$$\frac{1}{2}\times 200\times(200+1) = 100\times 201 = 20.100.$$

Exercício 1.30 — Canguru 2016 - Prova J. O pequeno Lucas inventou seu próprio meio de representar números negativos antes de aprender a usar o sinal de menos. Contando de trás para a frente, ele escreve: $\ldots, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, \ldots$ Dessa forma, se ele calcular a soma $000 + 0000$, que número ele escreverá com sua notação?

(a) 1
(b) 00000
(c) 000000
(d) 0000000
(e) 00000000

Solução. Observe que 00 representa o número -1, 000 representa o número -2, 0000 representa o número -3, e assim por diante. Logo, $000 + 0000$ equivale a $-2 + (-3) = -5$. O número -5 é representado por uma sequência de 6 zeros, isto é, por 000000, o que corresponde à alternativa (c). ■

Exercício 1.31 — FUVEST 2006. Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396, resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é

(a) 4.
(b) 5.

(c) 6.
(d) 7.
(e) 8.

Solução. Como o número N tem três algarismos, pode ser decomposto como

$$N = 100\times a + 10\times b + c,$$

onde a, b e c são algarismos (de 0 a 9, sendo que a não é 0). Subtraindo 396 de N, obtemos, de acordo com o enunciado, o número

$$M = 100\times c + 10\times b + a.$$

Portanto, subtraindo M de N, obtemos 396:

$$100\times a + 10\times b + c - (100\times c + 10\times b + a) = 396.$$

Logo,

$$99a - 99c = 396.$$

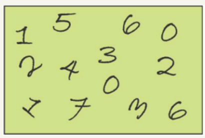
Mas $396 = 99\times 4$. Deduzimos, então, que $a - c = 4$. Como a soma do algarismo das centenas a e do algarismo das unidades c é igual a 8, temos $a + c = 8$ e, portanto,

$$a - c = 4 \text{ e}$$
$$a + c = 8.$$

Daí, concluímos que $a = 6$ e $c = 2$. A resposta correta é a alternativa de letra c).

∎

Exercício 1.32 — KangoTreino (adaptado). Geraldinho quer apagar números do quadro ao lado de modo que, sempre que ele apaga um algarismo, **deve** remover todas as cópias do mesmo. Ele quer deixar apenas três algarismos distintos de forma que a soma deles seja a menor possível. Qual é a soma dos valores dos números que ele deverá apagar?



(a) 10. (b) 34. (c) 36. (d) 38. (e) 40.

Solução. Vamos primeiro reorganizar os números do quadro, do menor para o maior, considerando as repetições:

$$0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7.$$

A soma de todos eles é igual a:

$$0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 = 40.$$

- A soma dos '0's do quadro é 0.
- A soma dos '1's do quadro é 2.
- A soma dos '2's do quadro é 4.
- A soma dos '3's do quadro é 6.
- A soma dos '4's do quadro é 4.
- A soma dos '5's do quadro é 5.
- A soma dos '6's do quadro é 12.
- A soma dos '7's do quadro é 7.

As três menores somas possíveis são 0, 2 e 4 e elas somam um total de $0 + 2 + 4 = 6$. Tal soma pode ser obtida deixando no quadro os números 0, 0, 1, 1, 2 e 2, ou deixando os números 0, 0, 1, 1 e 4. Em todo caso, a soma dos algarismos que foram apagados é

$$40 - 6 = 34.$$

Assim, a alternativa correta é a de letra (b).

■

Exercício 1.33 — Círculos Matemáticos de Moscou. João e Cândido estão usando uma balança de mola para pesar suas mochilas.

Quando pesadas separadamente, a balança mostra 3 kg e 2 kg; quando são pesadas juntas, a balança mostra 6 kg.

– "Isto não pode estar certo", disse Cândido. "Dois mais três não é igual a seis!"
– "Você não está vendo?", respondeu João. "O ponteiro da balança não está no zero."

Quanto as mochilas pesam de fato?

(a) 2 kg e 1 kg.
(b) 3 kg e 2 kg.
(c) 4 kg e 3 kg.
(d) 5 kg e 4 kg.
(e) 6 kg e 5 kg.

Solução. Se X é o valor exibido na balança quando nenhum peso está sobre ela, então as informações apresentadas podem ser expressas assim:

- Quando a mochila de João é pesada, a balança mostra seu peso real somado a X, percebendo que, se X for negativo, então isso significa que a balança mostra menos que o peso real. Portanto, o peso real da mochila de João é $3 - X$.
- Quando a mochila de Cândido é pesada, a balança mostra seu peso real somado a X, novamente percebendo que, se X for negativo, então isso significa que a balança mostra menos que o

peso real. Portanto, o peso real da mochila de Cândido é $2 - X$.

- Quando as duas mochilas são pesada juntas, a balança mostra a soma de seus pesos reais acrescida de X. Portanto, a soma dos pesos reais das mochilas é $6 - X$.

Assim,

$$6 - X = (3 - X) + (2 - X) = 5 - 2X,$$

o que nos dá $2X - X = 5 - 6$, isto é, $X = -1$. Portanto, as mochilas de João e Cândido pesam, efetivamente, $3 - (-1) = 4\,\text{kg}$ e $2 - (-1) = 3\,\text{kg}$, respectivamente. A alternativa correta é (c). ■

Exercício 1.34 — OBMEP (adaptada). Numa adição de 7 parcelas foram adicionadas 3 unidades a cada uma das parcelas. Na nova operação, o que ocorre com a soma original das parcelas?

(a) Não se altera.
(b) É acrescida de 3 unidades.
(c) É acrescida de 7 unidades.
(d) É acrescida de 21 unidades.
(e) É acrescida de 3 parcelas.

Solução. Como não são informadas as 7 parcelas, tampouco precisaremos dessa informação, escrevemos a soma delas como

$$A + B + C + D + E + F + G.$$

Somando 3 unidades a cada parcela e usando a *comutatividade* e *associatividade* da adição, calculamos

$$\begin{aligned}
&(A+3) + (B+3) + (C+3) + (D+3) + (E+3) + (F+3) + (G+3)\\
&= (A + B + C + D + E + F + G) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)\\
&= (A + B + C + D + E + F + G) + 21.
\end{aligned}$$

Logo, a soma inicial é *acrescida*, isto é, aumentada, em 21 unidades. A alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 1.35 — FGV-RJ 2016. O número 2016 pode ser decomposto como a soma de dois números naturais ímpares de várias maneiras. Por exemplo, $1 + 2015$ e $13 + 2003$ são duas dessas decomposições. Considere que as decomposições $1 + 2015$ e $2015 + 1$ sejam iguais.

O número de decomposições diferentes é

(a) 505. (b) 504. (c) 507. (d) 506. (e) 503.

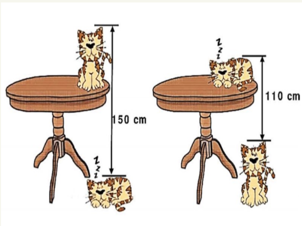
Sequência 4

Exercício 1.36 — UECE 2020.2. Se forem listados, em ordem crescente, todos os números de cinco dígitos distintos obtidos com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, é correto dizer que o número 62.437 ocupa a posição (ordem) de número

(a) 8. (b) 10. (c) 7. (d) 9.

Exercício 1.37 Para pagar uma conta, Débora apresentou ao caixa uma nota de 50 reais. Contudo, ele lhe disse que o dinheiro não era suficiente, e então Débora lhe deu outra nota de R$ 50,00. O caixa devolveu-lhe um troco de R$ 27,00, mas Débora percebeu que ainda faltavam 9,00 reais de troco. Qual foi o valor da compra que Débora efetuou?

Exercício 1.38 — Canguru 2018 - Prova J. Considere as duas distâncias verticais indicadas na figura ao lado. Os gatos são do mesmo tamanho. Qual é a altura da mesa, em centímetros?



(a) 110
(b) 120
(c) 130
(d) 140
(e) 150

Solução. Olhando para a figura, percebemos que

$$\begin{aligned} \text{altura\_doGato\_emPé} + \text{altura\_daMesa} - \text{altura\_doGatoDeitado} &= 150 \\ \text{altura\_doGatoDeitado} + \text{altura\_daMesa} - \text{altura\_doGato\_emPé} &= 110 \end{aligned}$$

Portanto, somando os lados esquerdo e direito das duas equações, temos

$$\cancel{\text{altura\_doGato\_emPé}} + \text{altura\_daMesa} - \cancel{\text{altura\_doGatoDeitado}} + \cancel{\text{altura\_doGatoDeitado}} + \text{altura\_daMesa} - \cancel{\text{altura\_doGato\_emPé}} = 150 + 110 = 260.$$

Daí, concluímos que

$$\text{altura\_daMesa} = 130 \text{ centímetros.}$$

A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 1.39 — UEL. O caixa de um banco trocou a ordem dos dois algarismos do valor da conta a ser paga por um cliente, cobrando R$ 27,00 a mais. Sendo 11 a soma dos algarismos, o valor correto a ser pago pelo cliente era de:

(a) R$ 29,00
(b) R$ 38,00
(c) R$ 47,00
(d) R$ 74,00
(e) R$ 83,00

Solução. O número, de dois algarismos, pode ser decomposto como $10a + b$, onde a e b são algarismos de 0 a 9, com a diferente de 0. Trocando a ordem dos algarismos, obtém-se o número cuja decomposição decimal é $10b + a$. A diferença entre os dois valores é igual a 27 reais. Portanto,

$$10b + a - (10a + b) = 27,$$

ou seja

$$9b - 9a = 27,$$

o que dá $b - a = 3$. Como os algarismos têm soma igual a 11, isto é, $b + a = 11$, concluímos que $b = 7$ e $a = 4$. Logo, o valor correto a ser pago é R$ 47,00. A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 1.40 — OBMEP 2016. Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6. (d) 7 (e) 8

Solução. Começamos observando que o maior desses dois números deve ser da forma

$$1.000 + 100\times A + 10\times B + C,$$

onde A, B e C são, portanto, algarismos de 0 a 9. Logo, o número menor é da forma

$$100 + 10\times A + B.$$

Somando os dois números obtemos

$$\begin{aligned} &1.000 + 100\times A + 10\times B + C + (100 + 10\times A + B) \\ &= 1.000 + 100 + (100 + 10)\times A + (10 + 1)\times B + C \\ &= 1.100 + 110\times A + 11\times B + C. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos decompor o resultado da soma, 1.357, como

$$1.357 = 1.100 + 220 + 33 + 4$$

Comparando as decomposições, concluímos que $A = 2$, $B = 3$ e $C = 4$. Portanto, o algarismo apagado é 4. A alternativa correta é a de letra (a). ■

Exercício 1.41 — OBMEP 2011. Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

(a) 12654.
(b) 12740.
(c) 13124.
(d) 13210.
(e) 13320.

Exercício 1.42 — ENEM 2016. Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores: 0 ou 1. Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de *bits*, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 *bits* em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas 28 informações distintas.

Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2 560 informações distintas, o número de *bits* em um *byte* deve passar de 8 para

(a) 10. (b) 12. (c) 13. (d) 18. (e) 20.

Exercício 1.43 — UECE 2019.1. Qualquer número inteiro positivo pode ser expresso, de modo único, como soma de potências de 2. Exemplos: $63 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ (seis parcelas), $64 = 2^6$ (uma parcela), $68 = 2^2 + 2^6$ (duas parcelas). O número de parcelas na expressão de 2018 como soma de potências inteiras de 2 é

(a) 8. (b) 10. (c) 7. (d) 9.

Observação 1.3 No sistema de numeração binário, ou de base 2, um número natural é escrito como somas de potências de 2. Por exemplo, temos

$$16 = 2^4,$$
$$17 = 2^4 + 1 = 2^4 + 2^0, \qquad 18 = 2^4 + 2 = 2^4 + 2^1,$$

e assim por diante. Deste modo, escrevemos os três números anteriores, em base 2, nos formatos

$$16 = 1000, \quad 17 = 1001 \quad \text{e} \quad 18 = 1010.$$

Repare que, nas expressões do lado esquerdo, usamos o sistema decimal e, no lado direito, o sistema binário. Quando uma dada potência aparece na decomposição binária, temos o algarismo 1 na posição correspondente; se não aparece, pomos o algarismo 0.

Obs

Para tornar a linguagem mais clara, lembre-se, por exemplo, que a potência 2^6, por exemplo, significa o produto

$$\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2}_{\text{6 vezes}},$$

em que a **base** 2 aparece 6 vezes como fator na multiplicação. O número 6 é o **expoente**. Sendo assim, o número 70, por exemplo, pode ser decomposto em potências de 2 do seguinte modo:

$$70 = 64 + 6 = 64 + 4 + 2 = 2^6 + 2^2 + 2^1.$$

Portanto, 70 é escrito como 1000110 no sistema de numeração binário.

Solução. A potência de 2 *mais próxima e menor que* 2.018 é $1.024 = 2^{10}$. Tomando a diferença, temos

$$2.018 - 1.024 = 2.018 - 1.018 - 6 = 1.000 - 6 = 994.$$

Agora, a potência de 2 mais próxima e menor que 994 é $512 = 2^9$. A diferença, agora, é dada por

$$994 - 512 = 482.$$

Desta vez, aproximamos 482 por $256 = 2^8$, com diferença dada por $482 - 256 = 226$. Por sua vez, 226 é aproximado por $128 = 2^7$, com diferença igual a 98. Procedendo *iterativamente* deste modo, temos

$$98 = 64 + 34 = 2^6 + 34$$
$$34 = 32 + 2 = 2^5 + 2^1.$$

Concluímos que

$$2.018 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1.$$

A alternativa correta é a de letra (d), ou seja, 7 parcelas. ■

Observação 1.4 Decorre da solução que 2.018 é escrito no sistema de numeração binário, ou de **base** 2, como

$$11111100010.$$

Exercício 1.44 — Circulo Matemático Moscou. O que é maior, a soma de todos os números pares de 0 a 100 ou a soma de todos os números ímpares de 1 a 99? Por quanto?

Solução. Veja que a soma de todos os pares de 0 a 100 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &0 + 2 + 4 + \ldots + 98 + 100 \\ &= (1 + 1) + (3 + 1) + \ldots + (97 + 1) + (99 + 1) \\ &= 1 + 3 + \ldots + 97 + 99 + (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{50 \text{ vezes}}). \end{aligned}$$

Concluímos que a soma dos números pares de 0 a 100 é igual a soma dos números ímpares de 1 a 99 *mais* 50. ■

Exercício 1.45

Na adição ao lado, símbolos iguais representam um mesmo algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes. Substitua esses símbolos por algarismos, de modo que a adição tenha sentido.

$$\begin{array}{r} \triangle \\ \triangle \\ +\ \square \\ \hline \square\,\triangle \end{array}$$

Solução. Observe que a adição acima parece uma equação. De fato, fazendo uso das propriedades do sistema de numeração decimal, a adição equivale a

$$\triangle + \triangle + \square = 10\times\square + \triangle,$$

ou seja, a $\triangle = 9\times\square$. Como $\triangle$ é um algarismo, vale no máximo 9. Portanto, devemos necessariamente ter $\square = 1$, pois, se $\square$ fosse maior que 1, então $\triangle$ seria um número de dois algarismos, o que não pode ocorrer; e se $\square = 0$, teríamos $\square = \triangle = 0$, ou seja, os algarismos seriam iguais, o que também não pode ocorrer. Assim, $\triangle = 9$. ■

Exercício 1.46 — OBM. A adição a seguir está incorreta.

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

Entretanto, se substituirmos todas as ocorrências de certo algarismo a por outro algarismo b, a conta ficará correta. Qual é o valor de $a+b$?

(a) 6. (b) 7. (c) 8. (d) 9.

Solução. Começamos executando o algoritmo da adição, para descobrir a partir de qual coluna a soma está incorreta. A primeira coluna dá direita nos dá $6+0=6$, o que é correto. A coluna a seguir traz $8+3=11$, o que nos faz, no resultado, escrever 1 na coluna das dezenas e levar 1 para a coluna das centenas, o que é correto. A seguir, somamos $1+5+4=10$, escrevemos 0 no total e levamos 1 para a próxima coluna da direita. A soma da próxima coluna então é $1+2+9=12$, e vai 1 de novo, o que também é correto. Na adição feita na quinta coluna aparece o primeiro erro, pois $1+4+2=7$, mas, no resultado, há um algarismo 1 nessa coluna. Assim, na quinta coluna temos de trocar ou o algarismo 4, ou o algarismo 2 ou o algarismo 1.

O algarismo 1 não pode ser trocado diretamente por um número à nossa escolha, pois ele vem da soma da coluna anterior. Veja que em uma soma com apenas 2 parcelas, o número que vai de uma coluna para outra só pode ser 0 ou 1: a soma de dois algarismos é no máximo 18 e a esta soma adicionamos no máximo 1, que vem da coluna que o antecede. Logo, só teríamos chance de trocar esse 1 por 0, mas isso não resolve o problema na coluna da dezena de milhar.

Se trocarmos o 4, devemos trocá-lo por 8, pois $1+8+2=11$, o que estraga a adição feita na terceira coluna, ou seja, na coluna das centenas. Se trocarmos o 2, devemos trocá-lo por 6, pois $1+4+6=11$. Veja que isso não estraga a adição da quarta coluna, pois $1+6+9=16$, nem a da sexta coluna, pois $1+7+8=16$. Assim, essa é a substituição indicada, a qual nos dá

$$\begin{array}{r} 746\,586 \\ +869\,430 \\ \hline 1616\,016 \end{array}$$

Portanto, $a=2$ e $b=6$, de forma que $a+b=8$. A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 1.47

Na conta ao lado, cada letra representa um algarismo não nulo. Qual é o algarismo representado pela letra C?

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{U} & \mathrm{F} & \mathrm{C} \\ + & & \mathrm{U} & \mathrm{F} \\ \hline & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

(a) 1. (b) 4. (c) 5. (d) 6. (e) 7.

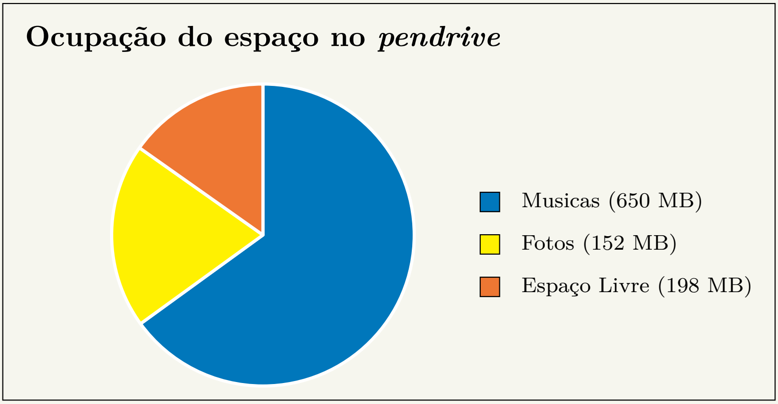
Solução. Sabendo que os algarismos são todos não nulos, podemos observar que:

- Somando os algarismos das unidades, obtemos $\mathrm{C}+\mathrm{F}=11$, ou seja, C e F são tais que na casa das unidades do resultado fica um e vai um;

- Somando os algarismos das dezenas, obtemos $1 + \mathrm{F} + \mathrm{U} = 10$, ou seja, F e U são tais que na casa das dezenas do resultado fica zero e vai um;
- Somando os algarismos das centenas, obtemos $1 + \mathrm{U} = 5$.

Assim, $\mathrm{U} = 5 - 1 = 4$, $\mathrm{F} = 10 - 1 - \mathrm{U} = 5$ e $\mathrm{C} = 11 - \mathrm{F} = 6$. Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 1.48 — PISA (adaptado). Um *pendrive* é um pequeno periférico removível que permite o armazenamento de dados. Ivan possui um *pendrive* com capacidade de 1 GB, que é equivalente a 1000 MB, para arquivar suas músicas e fotos. O diagrama abaixo apresenta a ocupação atual do espaço de seu *pendrive*:



Ivan deseja transferir um álbum de fotos de 350 MB para seu *pendrive*, porém o espaço não é suficiente. Ele não quer apagar fotos, mas gostaria de apagar, no máximo, dois álbuns de músicas. Eis os tamanhos dos álbuns de músicas arquivadas no *pendrive* de Ivan:

Álbum	Tamanho
1	100 MB
2	75 MB
3	80 MB
4	55 MB
5	60 MB
6	80 MB
7	75 MB
8	125 MB

Apagando no máximo dois álbuns de músicas Ivan pode liberar espaço suficiente em seu *pendrive* para adicionar o álbum de fotos?

(a) Não. Ivan só conseguirá liberar espaço se apagar todos os álbuns de músicas.
(b) Não. Ivan só conseguirá liberar espaço se apagar pelo menos três álbuns de músicas.
(c) Sim. Ivan conseguirá liberar espaço, mas a única opção é apagar os álbuns de músicas 1 e 8.
(d) Sim. Ivan conseguirá liberar espaço, mas as únicas opções são apagando os álbuns de músicas 1 e 8, 3 e 8 ou 6 e 8.
(e) Sim. Ivan conseguirá liberar espaço, e as opções são apagar os álbuns de músicas 1 e 8, 3 e 8, 6 e 8, 2 e 8 ou 7 e 8.

Solução. No diagrama lê-se que *pendrive* de Ivan tem 152 MB de espaço livre. Assim, para transferir o álbum de 350 MB ele precisa apagar $350 - 152 = 198$ MB. Para satisfazer o problema, Ivan precisa escolher, no máximo, dois álbuns de músicas que somem, pelo menos, 198 MB. Observando a tabela, vê-se que cada um dos pares de álbuns apresentados no item (e) somam 200 MB, pelo menos. Logo este é o item correto. ■

Exercício 1.49 Pedro e seu pai, em certo momento, tinham idades com algarismos invertidos: Pedro tinha 14 anos, enquanto seu pai tinha 41 anos. Supondo que isso aconteceu em 1998, em que ano essa coincidência voltou a acontecer?

Exercício 1.50 — UECE 2019.1. Considere a soma dos números inteiros, ímpares e positivos, agrupados do seguinte modo: $1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + \ldots$ O grupo de ordem n é formado pela soma de n inteiros positivos, ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que, a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a

(a) 1223. (b) 1331. (c) 1113. (d) 1431.

2 Multiplicação e Divisão

Nesta seção, vamos voltar à história de nosso amigo João e seu esforço para comprar uma motoneta.

> **Problema 1** João resolveu financiar a compra de uma motoneta que custaria R$ 10.590,00 à vista. Caso pague uma entrada de R$ 5.190,00 e 24 parcelas mensais, iguais a R$ 256,00, quanto pagará de juros ao todo nesse financiamento?

Solução. Ao fim dos 24 meses, João pagará o valor inicial, que é uma entrada de R$ 5.190,00, e pagará *mais* 24 **vezes** a parcela de R$ 256,00, isto é,

$$\underbrace{256 + 256 + \ldots + 256}_{24 \text{ vezes}},$$

ou seja, precisamos somar *repetidas* parcelas, cada uma delas igual a 256. Esta adição de 24 parcelas repetidas (idênticas), pode ser escrita como a **multiplicação**

$$24 \times 256$$

dos números naturais 24 e 256. Usaremos um *algoritmo* (uma sequência de passos) para calcular o *produto*, isto é, o resultado da multiplicação. O primeiro passo é usar a *comutatividade* e a *distributividade* da multiplicação com relação à adição, decompondo a parcela 24 em $20 + 4$:

$$\begin{aligned} 256 \times 24 &= 256 \times (20 + 4) \\ &= 256 \times 20 + 256 \times 4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para calcular a parcela 256×4, decompomos 256 em $200 + 50 + 6$ e usamos, uma vez mais, a distributividade:

$$\begin{aligned} 256 \times 4 &= (200 + 50 + 6) \times 4 \\ &= 200 \times 4 + 50 \times 4 + 6 \times 4 \\ &= 800 + 200 + 20 + 4 \\ &= 1.000 + 24 = 1.024. \end{aligned} \tag{2.2}$$

O penúltimo passo do algoritmo é calcular 256 ×20:

$$\begin{aligned} 256\times 20 &= 256\times 2\times 10 = (200+50+6)\times 2\times 10 \\ &= (200\times 2 + 50\times 2 + 6\times 2)\times 10 \\ &= (400+100+12)\times 10 \\ &= 512\times 10 = 5.120. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na primeira linha dos cálculos acima, usamos a *associatividade* da multiplicação. Finalmente, somamos os resultados em 2.2 e 2.3 para obter

$$\begin{aligned} 256\times 24 &= 256\times 20 + 256\times 4 \\ &= 1.024 + 5.120 = 6.144. \end{aligned} \tag{2.4}$$

■

Observação 2.1 É importante notar que há várias formas de efetuar a multiplicação, ou seja, não há uma única maneira de executar o algoritmo da multiplicação! Deve-se apenas ficar atento ao uso adequado das propriedades fundamentais, o que garante que o resultado obtido estará correto. Por exemplo, temos uma estratégia alternativa para calcular o produto acima, na qual, utilizando a *associatividade* da multiplicação, calculamos

$$256\times 20 = 256\times 2\times 10 = 512\times 10 = 5.120.$$

Em seguida, usando a *distributividade* em relação à adição, obtemos

$$256\times 4 = (250+6)\times 4 = 250\times 4 + 6\times 4 = 1.000 + 24 = 1.024.$$

Assim, somando os dois resultados, temos

$$256\times 24 = 256\times 20 + 256\times 4 = 5.120 + 1.024 = 6.144.$$

Outra abordagem, para simplificar as contas feitas nessas multiplicações, combina divisões e multiplicações. Por exemplo,

$$24\times 250 = 24\times 1.000 \div 4 = 24.000 \div 4 = 6.000,$$

e

$$24{\times}6 = 4{\times}6{\times}6 = 4{\times}36 = 2{\times}2{\times}36 = 2{\times}72 = 144.$$

Pode-se, ainda, empregar decomposições diferentes das que apresentamos acima, envolvendo *subtrações* e *divisões*, como em

$$\begin{aligned} 256{\times}24 &= 256{\times}(25-1) = 256{\times}25 - 256{\times}1 \\ &= (256{\times}100) \div 4 - 256 = 25.600 \div 4 - 256 \\ &= (24.000 + 1.600) \div 4 - 256 = 6.000 + 400 - 256 \\ &= 6.000 + 144 = 6.144. \end{aligned}$$

Outro algoritmo seria aplicar, duplamente, a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} 256{\times}24 &= (25{\times}10 + 6){\times}(2{\times}10 + 4) \\ &= 25{\times}10{\times}2{\times}10 + 6{\times}2{\times}10 + 25{\times}10{\times}4 + 6{\times}4 \\ &= 50{\times}100 + 12{\times}10 + 100{\times}10 + 24 \\ &= 6.000 + 120 + 24 = 6.144. \end{aligned}$$

Essas abordagens alternativas permitem efetuar, corretamente, as multiplicações de forma mais rápida e segura, porque envolvem contas mais fáceis de checar. Além disso, sugerem estratégias úteis de **cálculo mental**.

Agora, estudaremos a divisão de um número natural por outro, diferente de zero. Para reforçar nosso entendimento da divisão euclidiana, consideremos, agora, a divisão de 6.561 por 24. O algoritmo da divisão neste caso, poderia ser executado da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
6.561 \div 24 &= (6.500 + 61) \div 24 = (65\times 100 + 61) \div 24 \\
&= [(48 + 17)\times 100 + 61] \div 24 = (48\times 100) \div 24 + (17\times 100 + 61) \div 24 \\
&= 2\times 100 + (176\times 10 + 1) \div 24 \\
&= 2\times 100 + ((168 + 8)\times 10 + 1) \div 24 \\
&= 2\times 100 + (168\times 10) \div 24 + (8\times 10 + 1) \div 24 \\
&= 2\times 100 + 7\times 10 + (72 + 9) \div 24 \\
&= 2\times 100 + 7\times 10 + 72 \div 24 + 9 \div 24 \\
&= 2\times 100 + 7\times 10 + 3 + 9 \div 24 = 273 + 9 \div 24.
\end{aligned}
$$

Podemos organizar os passos do algoritmo da divisão com o uso do diagrama denominado **método da chave**:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 6 & 5 & 6 & 1 & 2\ 4 \\ \cline{6-6}
- & 4 & 8 & & & 2\ 7\ 3 \\ \cline{2-3}
 & 1 & 7 & 6 & & \\
- & 1 & 6 & 8 & & \\ \cline{2-4}
 & & & 8 & 1 & \\
 & & - & 7 & 2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 9 &
\end{array}
$$

Observamos que as várias etapas, ou seja, as diversas divisões sucessivas, aparecem naturalmente quando efetuamos a multiplicação do divisor pelo quociente, usando as suas decomposições e a distributividade:

$$
\begin{aligned}
24\times 273 = 24\times(200 + 70 + 3) &= 24\times 2\times 100 + 24\times(70 + 3) \\
&= 4800 + 24\times 7\times 10 + 24\times 3 \\
&= 4800 + 1680 + 72 = 6.552
\end{aligned}
$$

e $6.552 + 9 = 6.561$.

2.1 – Múltiplos e divisores

Exercício 2.1 Encontre todos os fatores ou divisores dos números 90 e 675

Solução. Uma forma de determinar múltiplos e divisores, e de explicar essas divisões, exatas é através da **fatoração**: fatorar um dado número significa escrevê-lo como produto de seus divisores ou *fatores*. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} 90 &= 2\times 45 \\ &= 2\times 3\times 15 \\ &= 2\times 3\times 3\times 5. \end{aligned}$$

Note que a sequência de fatorações para na terceira linha, pois os números $2, 3$ e 5 já "não podem" mais ser divididos: de modo mais claro, cada um desses números tem como divisores apenas o número 1 e o próprio número. São exemplos dos denominados **números primos**.

Um número natural é *primo* quando tem dois, e apenas dois, fatores positivos: o número 1 e o próprio número. Alguns exemplos de números primos são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, bem como os números 1.597 e 2.147.483.647 — como verificar isso? Observe que o número 1 *não é primo* pois tem um único fator positivo, o próprio número 1. Um número *composto* é um número natural, diferente de 0 e 1, que não é primo. Por exemplo, $6 = 2\times 3$ é um número composto.

Portanto, concluímos que o número 90 é fatorado em seus *fatores primos*, de forma única, a menos da ordem dos fatores, como

$$90 = 2\times 3\times 3\times 5.$$

Esta fatoração explica as divisões *exatas* de 90 por seus divisores ou fatores. De fato, temos

$$\frac{90}{3} = \frac{2\times \color{red}{3}\times 3\times 5}{\color{red}{3}} = 2\times 3\times 5 = 30.$$

De forma similar, temos

$$\frac{90}{5} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{5} = 2\times 3\times 3 = 18.$$

Além dos fatores primos 2, 3 e 5, o número 90 tem outros fatores ou divisores, *compostos* por esses fatores primos. A saber,

$$\begin{aligned}
&2\times 3 = 6,\ \ 2\times 5 = 10,\ \ 3\times 3 = 9,\ \ 3\times 5 = 15,\\
&2\times 3\times 3 = 18,\ \ 2\times 3\times 5 = 30,\ \ 3\times 3\times 5 = 45 \ \text{ e}\\
&2\times 3\times 3\times 5 = 90.
\end{aligned}$$

Observe que os todos os divisores de 90 devem ter fatores primos que sejam fatores primos de 90: um número que tiver um fator primo, que não seja um dos fatores de 90, não pode ser um divisor de 90. Além disso, cada um destes fatores, quando aparece no divisor, aparece no máximo o mesmo número de vezes em que aparece em 90. Por exemplo, temos

$$\frac{90}{15} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{3\times 5} = 2\times 3 = 6 \qquad \text{e} \qquad \frac{90}{18} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{2\times 3\times 3} = 5.$$

No entanto, observe que $12 = 2\times 2\times 3$ tem 2 fatores primos iguais a 2 e não apenas 1, como 90. Logo,

$$\frac{90}{12} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{2\times 2\times 3}$$

não é uma divisão exata, ou seja, tem resto diferente de zero:

$$\frac{90}{12} = \frac{84+6}{12} = 7 + \frac{6}{12},$$

o que é uma forma de escrever

$$90 = 12\times 7 + 6.$$

Para fixar esses fatos, vejamos mais um exemplo, onde fatoramos o número 675, ou seja, escrevemos esse número como produto de seus divisores, ou *fatores*, primos:

$$\begin{aligned}
675 &= 3\times 225\\
&= 3\times 3\times 75\\
&= 3\times 3\times 3\times 25\\
&= 3\times 3\times 3\times 5\times 5.
\end{aligned}$$

Aqui, também, a fatoração para com os fatores 3 e 5, que já não podem ser divididos por outros fatores menores, além de 1. Obtivemos, deste modo, a fatoração de 675 em *fatores primos*. Uma vez que

$$675 = 3\times3\times3\times5\times5,$$

observamos que $3\times3\times5 = 45$ é um divisor de 675. No entanto, $5\times5\times5 = 125$ não é divisor de 675, visto que tem 3 fatores iguais a 5, enquanto 675 tem apenas 2 fatores iguais a 5. De fato,

$$\frac{675}{125} = \frac{625+50}{125} = 5 + \frac{50}{125},$$

o que pode ser escrito na forma da divisão euclidiana como

$$675 = 125\times5 + 50.$$

■

Exercício 2.2 Encontre o mínimo múltiplo comum de 90 e 675.

Solução. Lembremos que as fatorações desses números em *fatores primos* são dadas por

$$90 = 2\times3\times3\times5 \text{ e}$$
$$675 = 3\times3\times3\times5\times5.$$

Portanto, qualquer múltiplo comum a 90 e 675 deve ter, *pelo menos*, 1 fator primo igual a 2, 3 fatores primos iguais a 3 e 2 fatores primos iguais a 5, isto é, deve ter, no mínimo, o fator

$$2\times3\times3\times3\times5\times5 = 1.350.$$

Este é o *mínimo múltiplo comum* de 90 e 675, ou seja, $\text{MMC}(90, 675) = 1.350$. Perceba que o produto de 90 e 675

$$90\times675 = (2\times3\times3\times5)\times(3\times3\times3\times5\times5) = 2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5$$

não é o mínimo múltiplo comum desses dois números. De fato, para obter o MMC de 90 e 675, devemos "eliminar" 2 fatores iguais a 3 e 1 fator igual a 5 do produto, obtendo

$$\frac{2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5}{3\times3\times5} = 2\times3\times3\times3\times5\times5 = 1.350 = \text{MMC}(90, 675).$$

Observe que o número $3{\times}3{\times}5 = 45$ é um *divisor comum* de 90 e 675. De fato, é o maior ou *máximo divisor comum* de 90 e 675, o que denotamos por

$$\mathrm{MDC}(90{,}675) = 45.$$

Logo, neste caso,

$$\frac{90{\times}675}{\mathrm{MDC}(90,675)} = \mathrm{MMC}(90,675). \tag{2.5}$$

■

Com base no exercício acima, formulamos o seguinte **teorema**.

O MMC e o MDC de dois números naturais m e n, diferentes de zero, estão relacionados da seguinte forma

$$\frac{m{\times}n}{\mathrm{MDC}(m{,}n)} = \mathrm{MMC}(m{,}n) \tag{2.6}$$

ou, equivalentemente,

$$m{\times}n = \mathrm{MMC}(m{,}n){\times}\,\mathrm{MDC}(m{,}n). \tag{2.7}$$

Podemos *induzir* duas regras práticas a partir desses exemplos:

- para determinar o MMC de dois números, multiplicamos *todos* os fatores primos desses dois números, elevados às *maiores* potências em que aparecem em cada número;
- para determinar o MDC de dois números, multiplicamos os fatores primos *comuns* desses dois números, elevados às *menores* potências em que aparecem em cada número.

2.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 2.3 Calcule os seguintes produtos usando diferentes estratégias.

(a) 2020×2020. (b) 2019×2021. (c) 365×24. (d) 99×999.

Solução. a) Temos

$$\begin{aligned}2020\times 2020 &= (2000+20)\times(2000+20)\\ &= 2000\times 2000 + 2000\times 20 + 20\times 2000 + 20\times 20\\ &= 4000000 + 80000 + 400 = 4080400.\end{aligned}$$

b) Agora,

$$\begin{aligned}2019\times 2021 &= (2020-1)\times(2020+1)\\ &= 2000\times 2000 + \cancel{2020\times 1} - \cancel{1\times 2020} - 1\times 1\\ &= 2020\times 2020 - 1 = 4080400 - 1 = 4080399.\end{aligned}$$

c) Podemos calcular este produto da forma

$$\begin{aligned}365\times 24 &= 360\times 24 + 5\times 24 = 12\times 30\times 12\times 2 + 10\times 12\\ &= 144\times 2\times 30 + 120 = 288\times 30 + 120 = 8640 + 120 = 8760.\end{aligned}$$

De outro modo, calculamos

$$\begin{aligned}365\times 24 &= 365\times 2\times 12 = (600+130)\times 12 = 7200 + 130\times 12\\ &= 7200 + 120\times 12 + 10\times 12 = 7200 + 1440 + 120\\ &= 7200 + 1560 = 8760.\end{aligned}$$

d) Desta vez, calculamos

$$\begin{aligned}99\times 999 &= 99\times(1000-1) = 99000 - 99 = 90000 + 9000 - 99\\ &= 90000 + 8900 + 100 - 99 = 90000 + 8900 + 1 = 98901,\end{aligned}$$

resultado que pode ser obtido também da forma

$$\begin{aligned}99\times 999 &= (100-1)\times 999 = 99900 - 999 = 99000 - 99\\ &= 98900 + 100 - 99 = 98900 + 1 = 98901.\end{aligned}$$

■

Exercício 2.4 Efetue as seguintes divisões usando diferentes estratégias.

(a) $40044 \div 6$. (b) $40046 \div 6$. (c) $40044 \div 12$. (d) $40046 \div 39$.

Solução. a) Temos

$$\begin{aligned} 40044 &= 36000 + 4000 + 44 = 36000 + 3600 + 400 + 44 \\ &= 36000 + 3600 + 360 + 40 + 44 \\ &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 4 + 44 \\ &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 48 \\ &= 6\times 6000 + 6\times 600 + 6\times 60 + 6\times 6 + 6\times 8 \\ &= 6\times(6000 + 600 + 6 + 8) = 6\times 6674. \end{aligned}$$

Assim $40044 \div 6 = 6.674$.
b) Com isto, calculamos

$$40046 = 40044 + 2 = 6\times 6674 + 2,$$

que é uma divisão não exata com quociente 6674 e resto 2.
c) Observe que $12 = 6\times 2$. Assim, dividir 40044 por 12 significa dividir inicialmente por 6 e, em seguida, dividir o resultado por 2. Assim

$$\frac{40044}{12} = \frac{6\times 6674}{6\times 2} = \frac{6674}{2} = 3337.$$

Podemos obter este resultado diretamente, calculando, como antes

$$\begin{aligned} 40044 &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 48 \\ &= 12\times 3000 + 12\times 300 + 12\times 30 + 12\times 3 + 12\times 4 \\ &= 12\times(3000 + 300 + 30 + 7) = 12\times 3337. \end{aligned}$$

Uma terceira forma de calcular esta divisão é observar que $12 = 4\times 3$: dividimos 40044 por 4, obtendo 10011 e, em seguida, dividimos este resultado por 3, obtendo

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \cline{7-7}
- & 9 & & & & & 3\,3\,3\,7 \\ \cline{1-2}
 & 1 & 0 & & & & \\
 & - & 9 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 1 & & & \\
 & & - & 9 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 1 & & \\
 & & - & 2 & 1 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

■

Exercício 2.5 Uma grande escola organizou seus alunos do Ensino Médio em 18 turmas de 35 alunos. Se fossem igualmente agrupados em 15 turmas, quantos alunos haveria por turma?

Solução. O número total de alunos é dado por

$$18\times 35 = 6\times 3\times 5\times 7 = 15\times 6\times 7 = 15\times 42.$$

Portanto, os alunos podem ser reagrupados em 15 turmas com 42 alunos cada. Note que não é preciso efetuar o produto para resolvermos o problema! De todo modo, temos, facilmente $18\times 35 = 9\times 2\times 35 = 9\times 70 = 630$ alunos. ■

Exercício 2.6 Em uma divisão, o divisor é 29 e o quociente é igual a 15. Sabendo que o resto dessa divisão é o maior possível, qual é o valor do dividendo?

(a) 239. (b) 293. (c) 449. (d) 463. (e) 827.

Solução. Em uma divisão por 15, o maior resto possível é 14. Assim, o dividendo é igual a $15\times 29 + 14$. Para calcular este valor, efetuamos estas operações da seguinte forma, que não é única.

$$15\times 29 + 14 = 15\times 29 + 15 - 1 = 15\times 30 - 1 = 450 - 1 = 449$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (c) ■

Exercício 2.7 Carla ganhou de presente de aniversário o Jogo da Vida. Depois de jogar uma partida, ela somou suas notas e descobriu que tinha 6050 reais. Como nesse jogo há somente notas de 100 reais, de 10 reais e de 1 real, Carla pode ter ganho

(a) 6 notas de 100 reais e 5 notas de 1 real.
(b) 6 notas de 100 reais e 5 notas de 10 reais.
(c) 60 notas de 100 reais e 5 notas de 1 real.
(d) 60 notas de 100 reais e 5 notas de 10 reais.
(e) 600 notas de 10 reais e 50 notas de 10 reais.

Exercício 2.8 A área de um retângulo é igual a $180\,\text{cm}^2$. Se a sua altura mede 12 cm, qual é a medida de sua base?

(a) 8 cm
(b) 10 cm
(c) 12 cm
(d) 14 cm
(e) 15 cm

Exercício 2.9 Uma empresa tem 50 funcionários. O gasto com cada funcionário é de R$ 990,00, com salário, e mais R$ 330,00, com cesta básica. Quanto essa empresa gasta com seus funcionários?

(a) R$ 76.000,00
(b) R$ 66.000,00
(c) R$ 65.000,00
(d) R$ 49.500,00
(e) R$ 16.500,00

Solução. Podemos resolver o problema de diversas maneiras. Por exemplo, podemos começar somando os custos com cada funcionário, isto é, calculando

$$990 + 330 = 1320$$

e, em seguida, multiplicar o resultado por 50. Uma vez que $50 = 100 : 2$, temos

$$1320 \times 50 = 1320 \times 100 \div 2 = 660 \times 100 = 66.000 \text{ reais,}$$

o que corresponde à alternativa (b). ■

Exercício 2.10 Em Borgeslândia, existe uma biblioteca com 50.070 livros disponíveis. Todos estão dispostos em estantes, que comportam 610 livros cada. Quantas estantes completamente cheias são necessárias para guardar todos esses livros? Quantos livros devem ficar na estante que não estará completa?

Solução. Apresentando a divisão $50070 \div 610$ usando o método da chave, temos

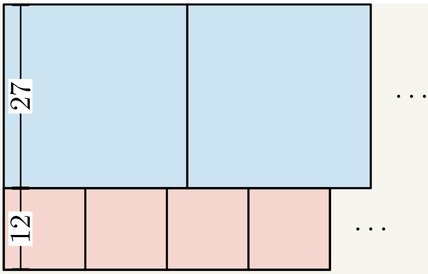
$$\begin{array}{r|l} 5\,0\,0\,7\,0 & 6\,1\,0 \\ \cline{2-2} -\,4\,8\,8\,0 & 8\,2 \\ \cline{1-1} 1\,2\,7\,0 & \\ -\,1\,2\,2\,0 & \\ \cline{1-1} 5\,0 & \end{array}$$

Para verificar estes cálculos, efetuando a multiplicação do quociente pelo divisor, e somando o produto obtido ao resto, temos

$$\begin{aligned} 82 \times 610 + 50 &= 80 \times 610 + 2 \times 610 + 50 = 48800 + 1220 + 50 \\ &= 48800 + 1270 = 50070 \end{aligned}$$

Concluímos que serão usadas 82 estantes completamente cheias, cada uma com 610 livros, e 1 estante com apenas 50 livros. ■

Exercício 2.11 Para revestir uma região retangular, utilizamos placas quadradas de 27 centímetros de lado e placas quadradas menores, com 12 centímetros de lado, até que as laterais estejam perfeitamente alinhadas, conforme a seguinte figura sugere.



Qual será o comprimento dessa região retangular?

(a) 54 (b) 108 (c) 216 (d) 324

Solução. As placas estarão perfeitamente alinhadas pela *primeira vez* em um comprimento que seja o primeiro múltiplo comum de 12 e de 27 centímetros. Ou seja, o comprimento que buscamos é o *mínimo múltiplo comum* de $12 = 2^2 \times 3$ e $27 = 3^3$, dado por

$$\mathrm{MDC}(12, 27) = 2^2 \times 3^3 = 36 \times 3 = 108 \text{ centímetros},$$

o que corresponde a $108 : 27 = 4$ placas de lado maior alinhadas a $108 : 12 = 9$ placas de lado menor.

Portanto, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Obs

Lembre da notação de potências: por exemplo, a **potência** 2^6 significa o produto

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

em que o fator 2 (chamado base) aparece 6 vezes. O número 6 é chamado **expoente**. Observe as propriedades relativas ao produto e ao quociente de potências com mesma base: no produto de potências com mesa base, conserva-se a base comum e somam-se os expoentes, e no quociente de potências com mesa base, conserva-se a base comum e subtraem-se se os expoentes, como nos seguintes exemplos.

$$2^3 \times 2^6 = 2^9$$

e

$$2^9 : 2^3 = 2^6.$$

Exercício 2.12 A luz emitida pelo Sol chega à Terra em aproximadamente 8 minutos a uma velocidade aproximada de 300.000 quilômetros por segundo. Qual das potências de 10 abaixo melhor *aproxima* a distância percorrida pela luz do Sol à Terra em quilômetros?

(a) 1.000.000.000
(b) 100.000.000
(c) 10.000.000
(d) 1.000.000
(e) 100.000

Solução. Em 8 minutos, temos $8\times60 = 480$ segundos, tempo em que a luz percorre

$$\begin{aligned} 300000\times480 &= 3\times48\times10^5\times10 = 144\times10^6 \\ &\approx 100\times10^6 = 10^8 \text{ quilômetros.} \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (a). ■

Exercício 2.13 O Sol tem diâmetro de 1.392.700 quilômetros e Júpiter é o maior planeta do Sistema Solar com diâmetro de 139.820 quilômetros. Qual a razão aproximada entre os diâmetros do Sol e de Júpiter?

(a) 1.000.000
(b) 10.000
(c) 1000
(d) 100
(e) 10

Solução. A razão entre os diâmetros de Júpiter e da Terra é aproximada por

$$\frac{1.392.700}{139.820} \approx \frac{139\times10^4}{139\times10^3} = 10.$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (e). ■

Exercício 2.14 — ENEM 2020. Segundo indicação de um veterinário, um cão de pequeno porte, nos dois primeiros meses de vida, deverá ser alimentado diariamente com 50 g de suplemento e tomar banho quatro vezes por mês. O dono de um cão de pequeno porte, seguindo orientações desse veterinário, utilizou no primeiro mês os produtos/serviços de um determinado pet shop, em que os preços estão apresentados no quadro.

Produtos/serviços	Preço (R$)
Suplemento	R$ 8,00 (pacote de 500 g)
Banho	R$ 30,00 (preço unitário)

No mês subsequente, o fabricante reajustou o preço do suplemento, que, nesse pet shop, passou a custar R$ 9,00 cada pacote de 500 g. Visando manter o mesmo gasto mensal para o dono do cão, o gerente do pet shop decidiu reduzir o preço unitário do banho. Para efeito de cálculos, considere o mês comercial de 30 dias.

Disponível em: http://carodinheiro.blogfolha.uol.com.br. Acesso em: 20 jan. 2015 (adaptado).

Nessas condições, o valor unitário do banho, em real, passou a ser

(a) R$ 27,00.
(b) R$ 29,00.
(c) R$ 29,25.
(d) R$ 29,50.
(e) R$ 29,75.

Solução. Com uma ração diária de 50 gramas de suplemento, o cão consome $30\times 50 = 1.500$ gramas de suplemento por mês (de 30 dias). Como um pacote de suplemento contém 500 gramas, são necessários 3 pacotes por mês, uma vez que $1500 \div 500 = 3$. Visto que cada pacote custava 8,00, o valor gasto com suplemento era igual a $3\times 8 = 24$ reais.

Por outro lado, com os 4 banhos mensais, o dono gastava $4\times 30 = 120$ reais. Logo, o gasto mensal total era igual a $24 + 120 = 144$ reais. Com o pacote de suplemento passando a custar 9 reais, o gasto com o suplemento passa a ser $3\times 9 = 27$ reais. Sobrariam, então,

$144 - 27 = 117$ reais para os 4 banhos. Dividindo 117 por 4 temos

$$117 = 116 + 1 = 4 \times 29 + 1,$$

ou seja, quociente 29 e resto 1, o que nos dá 29 reais e 25 centavos.

Portanto, a alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 2.15 — ENEM 2020. Na central nuclear de Angra dos Reis, os resíduos produzidos em duas décadas de operações somam quase 446 toneladas de combustível usado, que permanecerá radioativo durante milhares de anos. O Ibama condicionou o início da operação de Angra 3, previsto para 2014, à aprovação de um projeto de depósito definitivo. A Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) se comprometeu a apresentar, até 2010, um modelo de depósito para armazenar o lixo radioativo por 500 anos, em vez de milhares de anos.

Época, 8 set. 2008 (adaptado).

Supondo que a taxa de produção de combustível permaneça constante e que seja necessário certo volume V para o armazenamento das 446 toneladas já produzidas, qual é o volume mínimo aproximado que um depósito deve ter para armazenar o lixo radioativo produzido em 500 anos?

(a) $25\,V$.
(b) $149\,V$.
(c) $1340\,V$.
(d) $11150\,V$.
(e) $14887\,V$.

Solução. Uma *década* equivale a 10 anos, duas décadas a 20 anos. Logo, 500 anos são equivalentes $500 \div 20 = 25$ vezes duas décadas. Portanto, em 500 anos teremos *proporcionalmente* 25 vezes mais material radioativo do que em duas décadas. Assim, é preciso ter 25 vezes o volume V. Portanto, a alternativa correta é a de letra (a). ■

Sequência 2

Exercício 2.16 Se dividirmos o número 4284 por 6, a divisão será exata. Mas, se dividirmos por 60, qual será o resto?

(a) 20. (b) 22. (c) 23. (d) 24. (e) 34.

Solução. Observamos que é possível decompor 4.284 em múltiplos de 6. Vejamos

$$4.284 = 4.200+60+24 = 6\times700+6\times10+6\times4 = 6\times(700+10+4) = 6\times714.$$

Portanto, temos uma divisão *exata* $4.284 \div 6 = 714$. A mesma decomposição pode ser agrupada em múltiplos de 60:

$$\begin{aligned} 4.284 &= 4.200 + 60 + 24 = 60\times70 + 60\times1 + 24 = 60\times(70 + 1) + 24 \\ &= 60\times71 + 24. \end{aligned}$$

Como $24 < 60$, concluímos que, na divisão de 4.284 por 60, temos quociente 71 e *resto* 24.

Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 2.17 Qual é a diferença entre o quociente e o resto da divisão de 272 por 7?

(a) 1. (b) 3. (c) 32. (d) 38. (e) 265.

Solução. Para efetuar a divisão de 272 por 7, calculamos, sucessivamente, as seguintes divisões.

$$\begin{aligned} 272 &= 210 + 62 = 7\times30 + 62 \\ &= 7\times30 + 56 + 6 = 7\times30 + 7\times8 + 6 \\ &= 7\times38 + 6. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o quociente desta divisão é 38 e o resto é 6, com a diferença entre os dois dada por $38 - 6 = 32$, o que corresponde à alternativa (c). ■

Observação 2.2 As contas que fizemos acima podem ser apresentadas usando o “método da chave”, tornando o algoritmo da divisão mais familiar a quem está acostumado a este formato de representá-lo:

$$\begin{array}{rr|l} & 2\,7\,2 & 7 \\ \cline{3-3} - & 2\,1 & 3\,8 \\ \cline{2-2} & 6\,2 & \\ - & 5\,6 & \\ \cline{2-2} & 6 & \end{array}$$

Esta **não** é a única forma de efetuar esta divisão. Podemos, por exemplo, *aproximar* o dividendo 272 pelo múltiplo de 7 mais próximo e maior, que é 280. Assim, temos

$$\begin{aligned} 272 &= 280 - 8 = 7\times 40 - 8 = 7\times 40 - 14 + 6 \\ &= 7\times 40 - 7\times 2 + 6 = 7\times 38 + 6. \end{aligned}$$

Exercício 2.18 Uma campanha beneficente recebeu 56 caixas, cada uma contendo 24 latas de leite em pó. a) Quantas latas de leite em pó foram recebidas, ao todo? b) Caso a campanha houvesse recebido 1356 latas de leite em pó, quantas caixas iguais, com capacidade para 24 latas, seriam necessárias para guardar todas as latas? Alguma caixa ficaria com menos latas?

Solução. a) Basta efetuarmos a multiplicação 56×24. Para tanto, podemos usar a distributividade da multiplicação em relação à adição de números naturais, obtendo

$$\begin{aligned} 56\times 24 &= (50+6)\times(20+4) = 50\times 20 + 50\times 4 + 6\times 20 + 6\times 4 \\ &= 1000 + 200 + 120 + 24 = 1344. \end{aligned}$$

Portanto, foram recebida, ao todo, 1.344 latas. Para resolvermos o problema b), simplesmente observamos que

$$1356 = 1344 + 12 = 24\times 56 + 12,$$

ou seja, seriam usadas 56 caixas cheias e mais 1 caixa contendo apenas 12 latas, em vez de 24. Trata-se de uma divisão *não* exata, com resto igual a 12. ■

Exercício 2.19 Uma empresa doou 250.880 quilogramas de alimentos para serem distribuídos por igual em 256 comunidades. Quantos quilogramas serão distribuídos a cada comunidade?

Solução. Uma vez mais, basta efetuarmos a divisão de 250.880 por 256:

$$\begin{array}{r|l}
2\,5\,0\,8\,8\,0 & 2\,5\,6 \\ \cline{2-2}
-\,\underline{2\,3\,0\,4} & 9\,8\,0 \\
2\,0\,4\,8 & \\
-\,\underline{2\,0\,4\,8} & \\
0\,0 & \\
-\quad\underline{\,0} & \\
0 &
\end{array}$$

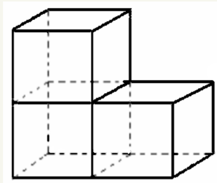
Cada uma das 256 comunidades receberá 980 quilogramas de alimentos. ■

Observação 2.3 Observamos que, fatorando tanto o dividendo quanto o divisor em seus fatores primos, obtemos $250.880 = 2^{10}{\times}5{\times}7^2$ e $256 = 2^8$. Estas fatorações facilitam bastante a divisão, visto que

$$\frac{250.880}{256} = \frac{2^{10}{\times}5{\times}7^2}{2^8} = 2^2{\times}5{\times}7^2 = 980.$$

Exercício 2.20 — UNICAMP.

A figura ao lado foi construída com lápis de madeira novos, sem apontar. Cada um desses lápis tem 22 centímetros de comprimento, e foi colado nas extremidades, sem sobreposição, de maneira que o lado (aresta) de cada quadrado seja um desses lápis. Calcule quantos centímetros de lápis foram utilizados para construir a estrutura.



Solução. A solução deste exercício tem duas etapas. A primeira consiste na contagem da quantidade de lápis usados para construir a estrutura. Tal contagem pode ser feita diretamente da figura, onde se vê que foram utilizados 28 lápis: 10 na parte frontal, 10 na parte posterior e 8 ligando a face frontal à face posterior da estrutura. Como cada lápis mede 22 cm, no total foram utilizados

$$28\times 22 = 28\times(20+2) = 560 + 56 = 616$$

centímetros de lápis. ■

Exercício 2.21 Qual é o MDC e o MMC dos números 64, 96 e 840?

Solução. Para calcular o MDC, e o MMC, desses números, consideramos suas fatorações em primos. Temos $64 = 2^6$, $96 = 2^5\times 3$ e $840 = 2^3\times 3\times 5\times 7$. Assim, os números 2, 3, 5, 7 são os únicos números primos que são fatores de pelo menos um dos números 64, 96 e 840. Logo, o MDC tem os fatores comuns aos 3 números, elevados aos *menores* expoentes. Assim,

$$\text{MDC}(64, 96, 840) = 2^3 = 8.$$

Já o MMC é dado pelo produto de *todos* os fatores, elevados aos *maiores* expoentes. Portanto,

$$\text{MMC}(64, 96, 840) = 2^6\times 3\times 5\times 7 = 6.720.$$

■

Exercício 2.22 Qual é o MMC e o MDC dos números 420, 576 e 3388?

Sequência 3

Exercício 2.23 — ENEM 2020- adaptado. Para aumentar a arrecadação de seu restaurante, que cobra por quilograma, o proprietário contratou um cantor e passou a cobrar, dos clientes, um valor fixo de couvert artístico, além do valor da comida. Depois, analisando as planilhas do restaurante, verificou-se em um dia que 30 clientes consumiram um total de 10 kg de comida, em um período de 1 hora, sendo que dois desses clientes pagaram R\$ 50,00 e R\$ 34,00, consumindo 500 g e 300 g, respectivamente. Qual foi a arrecadação obtida pelo restaurante nesse período de 1 hora, em real?

(a) 800,00
(b) 810,00
(c) 820,00
(d) 1100,00
(e) 2700,00

Solução. Note que, aumentando 200 gramas no peso da comida, o valor, com o couvert incluído, passa de R\$ 34,00 para R\$ 50,00. Portanto, 200 gramas de comida equivalem a $50 - 34 = 16$ reais. Note que, como o couvert é fixo, ele foi subtraído nessa conta. Assim, 100 gramas correspondem, *proporcionalmente*, a 8 reais. Um consumo de 10 quilogramas, ou seja, 10.000 gramas, equivale a 100×100 gramas. Logo, o valor desses 10 quilogramas é

$$100 \times 8 = 800 \text{ reais.}$$

Da mesma forma, 500 gramas de comida custariam $5 \times 8 = 40$ reais. Concluímos, que o couvert custa $50 - 40 = 10$ reais *por cliente*. Os trinta clientes, juntos, pagaram $30 \times 10 = 300$ de couvert. Logo, os 30 clientes pagaram, ao todo, $800 + 300 = 1.100$ reais. Portanto, a alternativa correta é a da letra (d). ■

Exercício 2.24 Em uma árvore de Natal, as lâmpadas verdes piscam a cada 5 segundos, as lâmpadas vermelhas a cada 3 segundos, as lâmpadas azuis a cada 6 segundos e as lâmpadas amarelas a cada 8 segundos. De quantos em quantos segundos as quatro lâmpadas acendem ao mesmo tempo?

(a) 120 segundos
(b) 150 segundos
(c) 180 segundos
(d) 210 segundos
(e) 240 segundos

Exercício 2.25 Em uma escola de bairro, foram distribuído 144 cadernos, 192 lápis e 216 borrachas, de modo que o maior número possível de alunos fosse contemplado e todos recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo número de lápis e o mesmo número de borrachas. Como não houve sobra de material, qual o número de cadernos que cada aluno recebeu?

(a) 6 cadernos
(b) 8 cadernos.
(c) 9 cadernos
(d) 12 cadernos
(e) 24 cadernos

Exercício 2.26 A fatoração completa de 600 é $2^a \times 3^b \times 5^c$. Qual é o valor de $a + b + c$?

(a) 4. (b) 5. (c) 6. (d) 8. (e) 9.

Exercício 2.27 Detemine todos os divisores do número 504.

Solução. Fatorando 504 em seus fatores primos, temos

$$\begin{aligned}504 &= 2{\times}252\\ &= 2{\times}2{\times}126\\ &= 2{\times}2{\times}2{\times}63\\ &= 2{\times}2{\times}2{\times}3{\times}21\\ &= 2{\times}2{\times}2{\times}3{\times}3{\times}7 = 2^3{\times}3^2{\times}7.\end{aligned}$$

Portanto, os divisores do número 504 têm a decomposição em fatores primos da forma $2^a{\times}3^b{\times}7^c$, onde o expoente a vai de 0 a 3, o expoente b vai de 0 a 2 e o expoente c pode ser 0 ou 1. São, portanto,

$$(3+1){\times}(2+1){\times}(1+1) = 24 \text{ divisores.}$$

A lista desses divisores é a seguinte

1	2	3	7		
$2{\times}2$	$2{\times}3$	$2{\times}7$	$3{\times}3$	$3{\times}7$	
$2{\times}2{\times}2$	$2{\times}2{\times}3$	$2{\times}2{\times}7$	$2{\times}3{\times}3$	$2{\times}3{\times}7$	$3{\times}3{\times}7$
$2{\times}2{\times}2{\times}3$	$2{\times}2{\times}2{\times}7$	$2{\times}2{\times}3{\times}3$	$2{\times}2{\times}3{\times}7$	$2{\times}3{\times}3{\times}7$	
$2{\times}2{\times}2{\times}3{\times}3$	$2{\times}2{\times}2{\times}3{\times}7$	$2{\times}2{\times}3{\times}3{\times}7$			
$2{\times}2{\times}2{\times}3{\times}3{\times}7.$					

■

Exercício 2.28 Demonstre, sem efetuar divisões, que 2685 é um múltiplo de 3.

Solução. Temos

$$\begin{aligned}2.685 &= 2.000 + 600 + 80 + 5\\ &= 2{\times}(999+1) + 6{\times}(99+1) + 8{\times}(9+1) + 5\\ &= 2{\times}999 + 6{\times}99 + 8{\times}9 + 2 + 6 + 8 + 5\\ &= \text{“múltiplo de 3”} + 21.\end{aligned}$$

A última linha tem a soma de dois múltiplos de 3, que é, portanto, um múltiplo de 3. ■

Exercício 2.29 Calcule o *resto* da divisão de 2687 por 9 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned}2.687 &= 2.000 + 600 + 80 + 7\\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 7\\ &= 2\times999 + 6\times99 + 8\times9 + 2 + 6 + 8 + 7\\ &= 2\times999 + 6\times99 + 8\times9 + 2\times9 + 5\\ &= 2\times999 + 6\times99 + 10\times9 + 5 = \text{“múltiplo de 9”} + 5.\end{aligned}$$

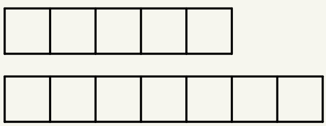
Depois da última igualdade, temos um múltiplo de 9 e um número menor que 9, que, por definição, é o resto: 5. ■

Exercício 2.30 — OBMEP 2019. Os estudantes de uma escola foram divididos em equipes de 8 meninas e 5 meninos cada uma. Se nessa escola há 60 meninas a mais do que meninos, qual é o número total de estudantes?

(a) 130 (b) 260 (c) 390 (d) 520 (e) 650

Solução. Cada equipe, formada por 8 meninas e 5 meninos, tem 13 alunos. O total de alunos é dado, portanto, pelo produto do número de equipes por 13. Por outro lado, a diferença entre o número de meninas e o número de meninos em cada equipe é igual a $8 - 5 = 3$. Assim, o número de equipes, multiplicado por 3, é igual a 60, que é a diferença total entre o número de meninas e o número de meninos. Concluímos que há $60 \div 3 = 20$ equipes. Portanto, deduzimos que há $20\times13 = 260$ alunos. A alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 2.31 — Revista Canguru - 2020, p. 44. Bia tem várias peças de comprimento 5 e de comprimento 7, como estas:



Juntando e enfileirando essas peças, Bia consegue obter peças maiores com diferentes comprimentos. Qual dos comprimentos a seguir ela **não** vai conseguir obter fazendo isso?

(a) 10 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solução. Bia pode obter comprimentos que são somas de múltiplos de 5 e de múltiplos de 7. Este é o caso de $10 = 5\times 2$, $12 = 5 + 5$, $14 = 7\times 2$ e $15 = 5\times 3$. Mas *não* é o caso de 13. De fato, o múltiplo de 5 mais próximo de, e menor que, 13 é 10. Subtraindo, não obtemos um múltiplo de 7, visto que $13 - 10 = 3$. Da mesma forma, o múltiplo de 7 mais próximo de, e menor que, 13 é o próprio 7. Subtraindo, não obtemos um múltiplo de 5, visto que $13 - 7 = 6$. ■

Exercício 2.32 Um pequeno agricultor pode ensacar sua produção de café, que é inferior a 100 quilogramas, em sacos de 18 quilogramas, deixando 7 quilogramas de fora. Uma alternativa é usar sacos de 20 quilogramas para ensacar o café, deixando apenas 1 quilograma de fora. Qual a produção de café do agricultor em quilogramas?

Solução. Os múltiplos de 18 menores que 100 e maiores que 0 são $18, 36, 54, 72, 90$. Portanto, as possíveis quantidades de café produzido são

$$18 + 7 = 25,\ \ 36 + 7 = 43,\ \ 54 + 7 = 61,\ 72 + 7 = 79,\ 90 + 7 = 97.$$

Subtraindo 1 quilograma de cada um dos números desta relação, o único múltiplo de 20 que temos é $61 - 1 = 60$. Logo a quantidade de café produzida pelo agricultor é de 61 quilogramas. ■

Exercício 2.33 — ENEM 2014. Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos. Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de N, diferentes de N, é

(a) $x \cdot y \cdot z$
(b) $(x+1) \cdot (y+1)$
(c) $x \cdot y \cdot z - 1$
(d) $(x+1) \cdot (y+1) \cdot z$
(e) $(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) - 1$

Obs Aqui, estamos usando $\cdot$ para simbolizar a multiplicação: isto é, $3 \cdot 5$ significa o produto 3×5.

Solução. Os divisores de N devem ter apenas os fatores $2, 5$ e 7 e sua fatoração deve ser da forma $2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, onde o expoente a está entre 0 e x — $x+1$ possibilidades, o expoente b está entre 0 e y — $y+1$ possibilidades — e o expoente c deve ser igual a 0 – apenas 1 possibilidade. Esta última afirmação vem do fato de que $z = 0$, pois N **não** é múltiplo de 7. Observe que, como N é múltiplo de $10 = 2 \times 5$, deve haver pelo menos um fator igual a 2 e pelo menos um fator igual a 5 na fatoração de N. Portanto, devemos ter $x \geq 1$ e $y \geq 1$. De qualquer forma, o número total de divisores de N é dado por

$$(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1).$$

Excluindo o próprio N, ficamos com $(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) - 1$ divisores, o que corresponde à alternativa (e). ■

Exercício 2.34 — ENEM 2020. Após o término das inscrições de um concurso, cujo número de vagas é fixo, foi divulgado que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas, nesta ordem, era igual a 300. Entretanto, as inscrições foram prorrogadas, inscrevendo-se mais 4 000 candidatos, fazendo com que a razão anteriormente referida passasse a ser igual a 400. Todos os candidatos inscritos fizeram a prova, e o total de candidatos aprovados foi igual à quantidade de vagas. Os demais candidatos foram reprovados. Nessas condições, quantos foram os candidatos reprovados?

(a) 11960 (b) 11970 (c) 15960 (d) 15970 (e) 19960

Solução. O número anterior de candidatos era igual a 300 vezes o número de vagas. Esse número aumentou com mais 4.000 inscritos e passou a ser 400 vezes o número de vagas. Portanto, 300 vezes o número de vagas *mais* 4.000 resulta em 400 vezes o número de vagas. Assim, 4.000 candidatos equivalem a 100 vezes o número de vagas. Concluímos que havia 40 vagas, apenas. O número final de candidatos inscritos foi, portanto,

$$400 \times 40 = 16.000.$$

Como havia 40 vagas e foram preenchidas, o número de candidatos reprovados foi $16.000 - 40 = 15.960$, o que corresponde à alternativa (c). ■

Exercício 2.35 — FUVEST 1987. A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Solução. Se m e n são esses dois números inteiros, o cubo de sua soma é expandido como segue:

$$\begin{aligned}(m+n)^3 &= (m+n)\cdot(m+n)\cdot(m+n)\\ &= m^3 + 3\cdot m^2\cdot n + 3\cdot m\cdot n^2 + n^3,\end{aligned}$$

em que o primeiro termo corresponde à única forma de termos 3 fatores iguais a m, o segundo a termos apenas 1 fator igual a n, o terceiro a termos apenas 1 fator igual a m e o último à única forma de termos 3 fatores iguais a n. A soma dos cubos de m e n é dada por

$$m^3 + n^3.$$

A diferença entre o **cubo da soma** e a **soma dos cubos** é, portanto, igual a

$$3\cdot m^2\cdot n + 3\cdot m\cdot n^2 = 3\cdot m\cdot n\cdot(m+n),$$

um múltiplo de 3. A única alternativa que corresponde a um múltiplo de 3 é a de letra (c). ■

Exercício 2.36 — FUVEST 2000. Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivos e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um número ímpar?

(a) $2x + 3y$
(b) $3x + 2y$
(c) $xy + 1$
(d) $2xy + 2$
(e) $x + y + 1$

Solução. Como x e y são inteiros positivos consecutivos, um deles é par e o outro é ímpar. Portanto, sua soma $x + y$ é ímpar: prove! Assim, $x + y + 1$ é par. Já o número

$$2xy + 2 = 2(xy + 1)$$

é, obviamente, um múltiplo de 2, ou seja, é par. Se x é o número ímpar e y o par, o número $2x + 3y$ é par. Se x é o número par e y o ímpar, o número $3x + 2y$ é par. Por fim, o produto xy dos dois números é par, pois um deles é par. Assim, $xy + 1$ é, necessariamente, um número impar. A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 2.37 — UFC 1999. Determine o número inteiro n que satisfaz simultaneamente às seguintes condições

i) n está compreendido entre 6.000 e 7.000;
ii) n dividido por 35, ou por 45, ou por 50 deixa sempre resto 11.

Exercício 2.38 — FUVEST 2001. Uma senhora tinha entre trinta e quarenta ações para dividir igualmente entre todos os seus netos. Num ano, quanto tinha 3 netos, se a partilha fosse feita, deixaria 1 ação sobrando. No ano seguinte, nasceu mais um neto e, ao dividir igualmente entre os quatro netos o mesmo número de ações, ela observou que sobrariam 3 ações. Nesta última situação, quantas ações receberá cada neto?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Exercício 2.39 — FUVEST 1997. O menor número natural n, diferente de zero, que torna o produto de 3888 por n um cubo perfeito é

(a) 6 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 24

Solução. O número 3.888 é fatorado da forma

$$3.888 = 2^4 \times 3^5.$$

Multiplicando este número por $2^2 \times 3 = 12$, temos

$$12 \times 3.888 = 2^{4+2} \times 3^{5+1} = 2^6 \times 3^6 = (2^2 \times 3^2)^3,$$

ou seja, obtemos o cubo do número $2^2 \times 3^2 = 36$.

Portanto, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Sequência 4

Exercício 2.40 — FUVEST 2017. Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b. Constituem dois inteiros positivos equivalentes os números

(a) 8 e 9.
(b) 9 e 11.
(c) 10 e 12.
(d) 15 e 20.
(e) 16 e 25.

Exercício 2.41 — KangoTreino 2020. 800 zarcs valem o mesmo do que 100 zercs. 100 zarcs equivalem a 250 zircs. Quantos zercs correspondem a 100 zircs?

(a) 2. (b) 5. (c) 10. (d) 25. (e) 50.

Solução. Note que 1.000 zircs, ou seja, 4×250 zircs, valem $4\times 100 = 400$ zarcs. Como 800 zarcs valem 100 zercs, $400 = 800 \div 2$ zarcs equivalem a $100 \div 2 = 50$ zercs. Concluímos, com esta cadeia de equivalências, que 1.000 zircs valem 50 zercs. Portanto, $100 = 1.000 \div 10$ zircs valem $50 \div 10 = 5$ zercs. Logo, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 2.42 — ENEM 2020 - adaptado. Uma microempresa produz um tipo de agenda personalizada para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R\$ 7,00, sendo comercializada em pacotes com 40 agendas, que são vendidos por R\$ 600,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R\$ 12.800,00, que não depende do número de agendas produzidas.

Qual é o número mínimo de pacotes de agendas, que devem ser vendidos mensalmente, para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

(a) 36 (b) 40 (c) 280 (d) 305 (e) 320

Solução. O custo do pacote de 40 agendas é $40\times 7 = 280$ reais. Vendendo um pacote por 600 reais, a microempresa tem *lucro* de $600 - 280 = 320$ reais. Portanto, para compensar os custos fixos mensais, é preciso que sejam vendidos, no mínimo,

$$\frac{12.800}{320} = 40 \text{ pacotes.}$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 2.43 — UECE 2018. Se $p_1, p_2, \ldots, p_{18}$ são números inteiros positivos, primos, e distintos, e se $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{18}$, então o número de divisores de p, inteiros, positivos e distintos entre si é igual a

(a) 2^{18}.
(b) $2^{18} - 1$.
(c) $2^{18} + 1$.
(d) $2^{18} + 2$.

Solução. Os fatores primos dos divisores de p, maiores que 1, são, necessariamente, fatores primos de p. Cada um desses fatores primos, $p_1, \ldots, p_{18}$, **pode ou não** aparecer na fatoração do divisor. Assim, para cada um dos 18 fatores primos, temos somente duas possibilidades: que não seja fator do divisor; ou que seja fator, mas apareça uma única vez. Assim, pelo **princípio multiplicativo** da contagem, o número de possíveis divisores é

$$\underbrace{2\times2\times\ldots\times2}_{18 \text{ vezes}} = 2^{18}.$$

Devemos subtrair desta conta o divisor *trivial* 1, que corresponde ao caso em que todos os fatores primos são elevados a 0. Assim, a resposta correta é $2^{18} - 1$, ou seja, o número na opção (b). ■

Exercício 2.44 — ENEM 2021. Um marceneiro visitou 5 madeireiras para comprar tábuas que lhe permitissem construir 5 prateleiras de formato retangular, de dimensões iguais a 30 cm de largura por 120 cm de comprimento cada, tendo como objetivo minimizar a sobra de madeira, podendo, para isso, fazer qualquer tipo de emenda. As dimensões das tábuas encontradas nas madeireiras estão descritas no quadro.

Madeireira	Largura (cm)	Comprimento (cm)
I	40	100
II	30	110
III	35	120
IV	25	150
V	20	200

Em qual madeireira o marceneiro deve comprar as tábuas para atingir seu objetivo?

(a) I (b) II (c) III (d) IV (e) V

Exercício 2.45 — Círculos de Matemática da OBMEP - adaptado. Sabendo-se que $998.001\times17 = 16.966.017$, qual das alternativas corresponde a um múltiplo de 17?

(a) 16.966.011.
(b) 16.966.015.
(c) 16.966.021.
(d) 16.966.025.
(e) 16.966.034.

Exercício 2.46 — G1 - IFBA 2017 e Espm 2016. Na multiplicação ao lado, cada letra representa um algarismo do sistema decimal de numeração. O valor de $A+B+C+D$ é:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ \times \quad\;\; 9 \\ \hline 7\,D\,C\,6 \end{array}$$

(a) 22. (b) 20. (c) 24. (d) 21. (e) 23.

Solução. O produto $9\times C$ deve ser um número que tem 6 como algarismo das unidades. Como $0 \le C \le 9$, a única possibilidade é $C = 4$, com o que teríamos $9\times C = 36$. Agora, devemos ter um algarismo B tal que $9\times B + 3$ seja um número cujo algarismo das unidades é $C = 4$. Logo, a única possibilidade é $B = 9$, de modo que $9\times B + 3 = 81 + 3 = 84$. Por fim, o produto $9\times A$, somado com 8, deve ser um número cujo algarismo das dezenas seja 7. Há apenas uma escolha possível, a saber, $A = 7$, para a qual teríamos $9\times A + 8 = 63 + 8 = 71$. Concluímos que $A = 7$ e $D = 1$. Portanto, $A + B + C + D = 7 + 9 + 4 + 1 = 21$. A resposta correta é (d). ■

Exercício 2.47 Mostre que o produto 135×375 é um quadrado perfeito.

Obs Um *quadrado perfeito* é um número da forma n^2 ou $n\times n$, onde n é um número natural.

Exercício 2.48 — UECE 2019. Se o resto da divisão do número inteiro positivo b por 7 é igual a 5, então o resto da divisão do número $b^2 + b + 11$ por 7 é igual a

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Solução. Dividindo b por 7, temos resto 5. Logo, b tem a forma

$$b = \text{“um múltiplo de 7”} + 5.$$

Assim, **verifique que**

$$\begin{aligned} b^2 &= \text{“um múltiplo de 7”} + 25 = \text{“um múltiplo de 7”} + 21 + 4 \\ &= \text{“um múltiplo de 7”} + 4. \end{aligned}$$

Logo, $b^2 + b + 1$ tem a decomposição

$$\begin{aligned} b^2 + b + 1 &= \text{“um múltiplo de 7”} + 4 + \text{“um múltiplo de 7”} + 5 + 1 = \\ &= \text{“um múltiplo de 7”} + 7 + 3 \\ &= \text{“um múltiplo de 7”} + 3. \end{aligned}$$

Portanto, o resto da divisão deste número por 7 é igual a 3, o que corresponde à alternativa (b). ■

Exercício 2.49 — Canguru 2017 - Prova J. Repetindo um par de algarismos ab três vezes, escrevemos um número de seis algarismos. Este número é divisível por qual dos números a seguir?

(a) 2 (b) 5 (c) 9 (d) 11 (e) 13

Exercício 2.50 — OBM. Letícia vendeu todos os seus CDs de videogames para três amigos, que lhe pagaram, respectivamente, R\$ 240,00, R\$ 180,00 e R\$ 320,00. Todos os CDs tinham o mesmo preço. Quantos CDs tinha Letícia, no mínimo?

(a) 20. (b) 21. (c) 25. (d) 28. (e) 37.

Exercício 2.51 — Canguru 2017 - Prova J. Numa sala há quatro crianças com menos de 18 anos e com idades diferentes. Se o produto de suas idades é 882, qual é a soma dessas idades?

(a) 23 (b) 25 (c) 27 (d) 31 (e) 33

3 Frações: conceitos iniciais

Começamos, nesta seção, nosso estudo das *frações* com probleminhas simples que nos mostram a necessidade de ampliarmos o conjunto de números que usamos, até agora restrito aos números naturais e inteiros.

Na escola, usamos frações para simbolizar o resultado de uma divisão como $15 \div 6$, que expressamos como a fração

$$\frac{15}{6}.$$

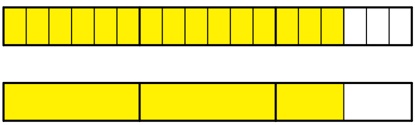
Lembremos que, ao dividir 15 por 6, obtemos um quociente 2 e um *resto* 3, ou seja,

$$15 = 6{\times}2 + 3.$$

Dividindo o resto 3 pelo divisor 6, não obtemos um número inteiro e sim um número fracionário

$$\frac{3}{6}$$

que podemos interpretar como uma *parte* de uma unidade. É bastante comum visualizarmos esta operação de divisão e as frações usando **barras** como na figura a seguir



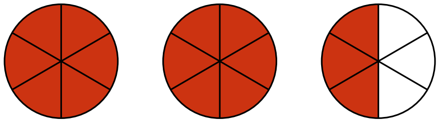
$$= \frac{15}{6}$$

$$= 2 + \frac{3}{6}$$

em que a primeira barra é dividida em retângulos menores, *agrupados* de 6 em 6. Portanto, 15 unidades equivalem a 2 *grupos* de 6 e **parte** de outro grupo de 6, que corresponde a 3 das 6 unidades neste grupo. A segunda barra representa esses 2 grupos de 6 e a fração do terceiro grupo. Observe que a **unidade de medida** na segunda barra é 6 vezes *maior* do que na primeira.

Podemos também visualizar e interpretar as frações em termos de **gráficos de setores** ou **pizzas**, para dar-lhes um nome mais atraente:

se cada unidade ou pizza é dividida em seis partes iguais — fatias, 15 dessas partes podem ser representadas na seguinte figura,



em que as 15 fatias destacadas correspondem a 2 pizzas inteiras e $\frac{3}{6}$ da terceira, ou seja, as 3 fatias das 6 em que cortamos a terceira.

Em resumo, seja usando barras ou pizzas, temos a fração $\frac{3}{6}$ vem da divisão $15 \div 6$ que calculamos em termos de frações como

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6},$$

Vejamos um problema, relacionado a *unidades de medida* de comprimento ou distância em que frações como esta podem surgem naturalmente.

> **Problema 2** Uma medida tradicional de comprimento (distância), usada pelos habitantes da zona rural, é a **légua**. Se 1 légua corresponde a 6 quilômetros, quantas léguas correspondem a 15 quilômetros?

Para resolvermos o problema 2, consideramos as duas retas numéricas abaixo, em que os números na primeira indicam distâncias em quilômetros e os números na segunda, distância em léguas.

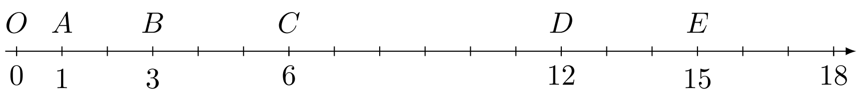


Figura 3.1: Distâncias em quilômetros.

Figura 3.2: Distâncias em léguas.

Comparando essas escalas, vemos que

- o ponto C corresponde a uma distância de 6 quilômetros ou 1 légua,
- o ponto D corresponde a uma distância de 12 quilômetros ou 2 léguas,
- o ponto A corresponde a uma distância de 1 quilômetro ou $\frac{1}{6}$ de légua,
- o ponto B corresponde a uma distância de 3 quilômetros ou $\frac{3}{6}$ de légua e
- o ponto E corresponde a uma distância de 15 quilômetros ou $\frac{15}{6}$ léguas,

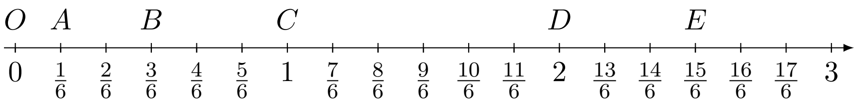


Figura 3.3: Conversão de quilômetros em léguas: 1 quilômetro é igual a $\frac{1}{6}$ de légua e 1 légua é igual a 6 quilômetros.

As **frações**

$$0 = \frac{0}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{6} = 1, \quad \frac{7}{6}, \ldots$$

lidas como "um sexto", "dois sextos", e assim por diante, representam pontos que dividem a reta numérica em segmentos de comprimentos iguais. Por exemplo, a distância entre os pontos O e C, igual a 1 milha, é 6 *vezes maior* do que a distância do ponto O ao ponto A, que é igual à **fração**

$$\frac{1}{6}$$

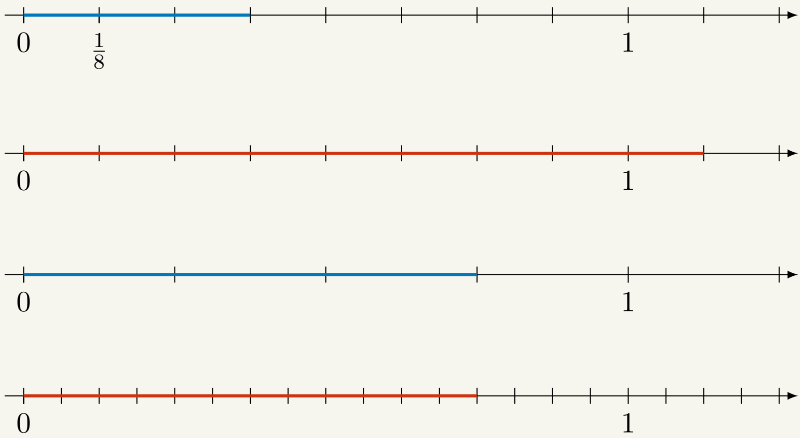
de milha. Assim,

$$6 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Da mesma forma, a distância entre os pontos O e B é dada pela fração $\frac{3}{6}$ e é 3 vezes maior do que a distância entre os pontos O e A, ou seja,

$$3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Exercício 3.1 Escreva a fração correspondente aos segmentos destacados (mais escuros) nas retas numéricas abaixo.



Solução. Na primeira figura, o segmento de 0 a 1 está *particionado* em 8 segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{8}$. O segmento destacado tem 3 vezes esse comprimento. Portanto, mede

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Na segunda figura, o segmento destacado é 3 vezes maior do que aquele destacado na figura anterior e 9 vezes maior do que o segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Logo, sua medida é igual a

$$3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8}\quad \text{ou}\quad 9\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$$

Observamos que

$$\frac{9}{8}=\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{8}.$$

Na terceira figura, o segmento de 0 a 1 é particionado em 4 segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{4}$. Deste modo, o segmento destacado equivale a 3 segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$, isto é, mede $\frac{3}{4}$. Observe que cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ tem o dobro do comprimento do segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Portanto,

$$\frac{3}{4}=3\times\frac{1}{4}=3\times 2\times\frac{1}{8}=\frac{6}{8}.$$

Logo, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ indicam o mesmo comprimento:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Dizemos, assim, que são frações **equivalentes**.

Na última figura, temos um segmento destacado de mesmo comprimento que o da terceira figura. Note que, na terceira figura, cada um dos 4 segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 é 4 vezes maior do que os segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 na quarta figura, onde a unidade está dividida em 16 partes iguais. Logo, cada um dos segmentos menores na quarta figura mede

$$\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$$

e o segmento destacado mede

$$12 \times \frac{1}{16} = \frac{12}{16}.$$

Comparando os segmentos destacados na terceira e quarta figuras, concluímos que suas medidas são iguais, isto é,

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16},$$

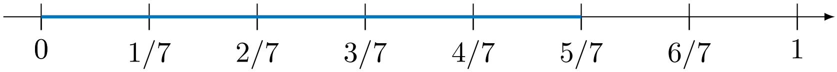
encontrando mais um exemplo de frações equivalentes. ■

A este respeito, considere a seguinte situação-problema, em que as frações representam uma grandeza bem diferente de comprimento ou distância. Mesmo assim, usaremos sua *representação* como pontos na reta numérica.

Exercício 3.2 Em uma prova, um aluno acertou 15 questões, o que corresponde a $\frac{5}{7}$ do total de questões. Nesta prova havia quantas questões?

(a) 20. (b) 21. (c) 28. (d) 30. (e) 35.

Solução. Vamos representar o total de questões da prova pelo segmento de reta entre os pontos 0 e 1 na reta numérica. Sendo assim, particionamos esse segmento em 7 segmentos de mesmo comprimento e destacamos 5 desses segmentos para representar o total de questões respondidas corretamente.



Como 5 dos segmentos menores correspondem a 15 questões, cada um desses segmentos corresponde a $15 \div 5 = 3$ questões. Isso pode ser visualizado, na próxima figura, **particionando** cada segmento menor em 3 partes e observando que, agora, cada parte corresponde a uma questão. Portanto, os 7 segmentos, que representam o total de questões da prova, correspondem a $7{\times}3 = 21$ questões.

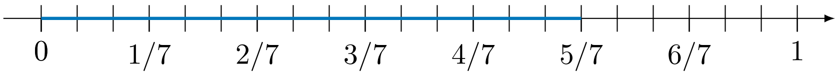


Figura 3.4: $\frac{5}{7}$ do segmento ou 15 questões.

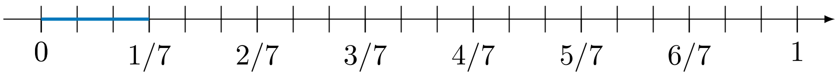


Figura 3.5: $\frac{1}{7}$ do segmento ou 3 questões.

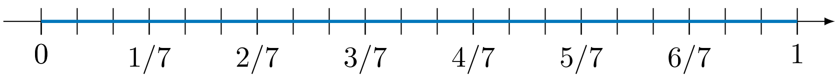


Figura 3.6: $\frac{7}{7}$ do segmento, o segmento inteiro ou $7{\times}3 = 21$ questões.

Logo, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Observação 3.1 Uma forma de denotar frações em que o numerador é maior que o denominador — frações inadequadamente chamadas de *impróprias* — é escrevê-las como uma soma, mas omitindo o sinal $+$. No exemplo anterior, tínhamos

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4},$$

que foi denotada por

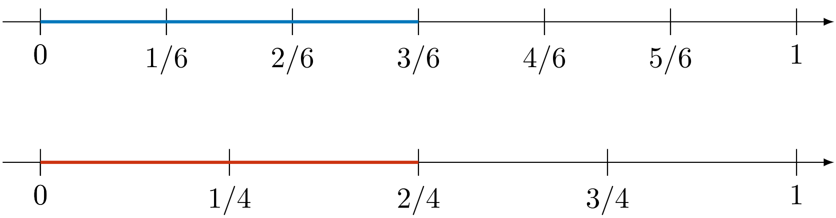
$$2\frac{1}{4}.$$

3.1 – Frações equivalentes

Diferentes frações podem representar uma mesma quantidade — uma mesma parte ou porção de unidade. Esta frase ficará mais precisa quando estudarmos os chamados **números racionais**. Por ora, vamos entender geometricamente o que significa esta afirmação. Dizemos que as frações

$$\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6}$$

são **equivalentes** por representarem o mesmo ponto na reta numérica. De fato, temos



Duas frações equivalentes representam o mesmo ponto nestas retas e, portanto, o mesmo comprimento, medido desde o ponto 0. Temos, então, uma igualdade ou **equivalência** de frações:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}.$$

Note que se multiplicarmos cada um dos lados dessa igualdade por 12, que é um *múltiplo comum* de 4 e 6, a igualdade se mantém:

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times\frac{3}{6}.$$

Esta segunda igualdade é verdadeira, pois, do lado esquerdo, temos

$$12 \times \frac{2}{4} = 12 \times 2 \times \frac{1}{4} = 2 \times 12 \times \frac{1}{4} = 2 \times 3 = 6,$$

enquanto o lado direito é dado por

$$12 \times \frac{3}{6} = 12 \times 3 \times \frac{1}{6} = 3 \times 12 \times \frac{1}{6} = 3 \times 2 = 6.$$

Como a segunda igualdade é verdadeira, a primeira também o é. Logo, "comprovamos" que as frações são equivalentes.

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar algumas **regras práticas** para verificar se duas frações são equivalentes.

Observação 3.2 Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** a natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. Assim, temos

$$\frac{m}{n} = \frac{m \times a}{n \times a}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}.$$

Neste caso, a deve ser um *divisor ou fator comum* de m e n.

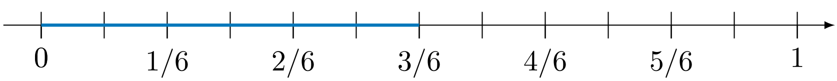
Por exemplo, no caso das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, multiplicando *tanto* o numerador *quanto* o denominador por 3 e por 2, respectivamente, obtemos

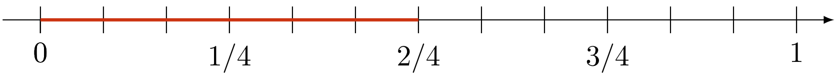
$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

e

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12},$$

o que corresponde, na reta, a particionarmos cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes e cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ em 2 partes, conforme representado nas seguintes figuras.





Note que os comprimentos realçados nos dois segmentos são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações.

Uma infinidade de frações equivalentes a uma dada fração pode ser obtida, portanto, multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, multiplicando-os por 2, 3, 4, e assim por diante, temos

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots$$

Da mesma forma, divisões sucessivas do numerador e denominador (isto é, *simplificações* das frações) produzem uma sequência de frações equivalentes

$$\ldots = \frac{32}{20} = \frac{24}{15} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

em que a última é **irredutível**. Isto significa que 5 e 8 não têm *divisores comuns* além de 1. Portanto, não há mais como dividir, com resto 0, tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número. Lembremos, de nosso estudo anterior, que, neste caso, dizemos que 5 e 8 são *primos entre si*, ou seja, MDC(5,8) = 1.

Exercício 3.3 Qual das frações abaixo **não** é equivalente a $\frac{12}{18}$.

(a) $\frac{6}{9}$. (b) $\frac{10}{16}$. (c) $\frac{4}{6}$. (d) $\frac{8}{12}$. (e) $\frac{2}{3}$.

Solução. Uma possibilidade é simplificar as frações dadas, obtendo

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}.$$

Logo, $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes a $\frac{12}{18}$. Por outro lado,

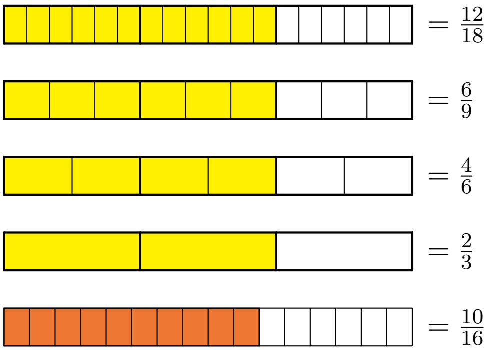
$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 2}{12 \div 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\frac{8}{12}$ também é equivalente a $\frac{12}{18}$. Finalmente,

$$\frac{10}{16} = \frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}.$$

Mas, como $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ são frações irredutíveis diferentes, concluímos que $\frac{10}{16}$ e $\frac{12}{18}$ não são equivalentes. Portanto, a alternativa que apresenta uma fração que não é equivalente a $\frac{12}{18}$ é a letra (b).

Para entendermos esses cálculos geometricamente, representemos as frações utilizando **barras** de mesmo comprimento, como nas figuras abaixo, particionadas em 18, 9,6,3 ou 16 partes iguais, respectivamente:

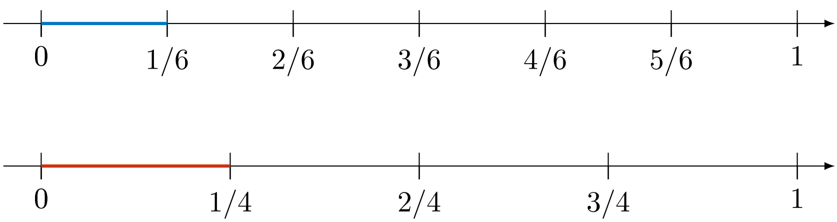


Uma solução alternativa seria verificar as equivalências de $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$, o que também pode ser feito para as frações dos itens (c), (d), (e), calculando os produtos $12{\times}9$ e $6{\times}18$: como $12{\times}9 = 108 = 6{\times}18$, as frações $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes. Da mesma forma, $\frac{12}{18}$ não é equivalente a $\frac{10}{16}$ porque $12{\times}16 = 192$ e $10{\times}18 = 180$, logo, $12{\times}16 \neq 10{\times}18$.

■

3.2 – Comparando frações

Vejamos o exemplo em que $n = 4$ e $N = 6$:



Observe que cada um dos 6 segmentos entre 0 e 1 na primeira reta têm comprimento menor que cada um dos 4 segmentos entre 0 e 1 na segunda reta. Logo,

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4}.$$

Note que o ponto na reta numérica representado pela fração $\frac{1}{4}$ fica **à direita** do ponto representado pela fração $\frac{1}{6}$.

Observação 3.3 Dadas duas frações com **mesmo numerador** e denominadores diferentes, a maior fração é a de **menor denominador**. Dadas duas frações com **mesmo denominador** e numeradores diferentes, a maior fração é a de **maior numerador**. Por exemplo, observando as retas numéricas acima, comprovanos que

$$\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}.$$

O próximo passo é justificar desigualdades da forma

$$\frac{2}{6} < \frac{3}{4}.$$

Note que, multiplicando cada um dos lados da desigualdade por 12, que é *múltiplo comum* de 4 e 6, mantemos a desigualdade com

$$12\times\frac{2}{6} < 12\times\frac{3}{4},$$

onde o lado esquerdo é dado por

$$12\times\frac{2}{6} = 12\times2\times\frac{1}{6} = 2\times12\times\frac{1}{6} = 2\times\frac{12}{6} = 2\times2 = 4$$

enquanto o lado direito é calculado como

$$12\times\frac{3}{4} = 12\times3\times\frac{1}{4} = 3\times12\times\frac{1}{4} = 3\times\frac{12}{4} = 3\times3 = 9,$$

ou seja, obtemos $4 < 9$, que é uma desigualdade verdadeira. Concluímos que a desigualdade inicial é também verdadeira.

Observação 3.4 Para verificar a desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q},$$

basta multiplicar cada um dos lados da desigualdade por um múltiplo comum dos denominadores n e q: por exemplo, o $\mathrm{MMC}(n, q)$.

Podemos usar algumas "regras práticas" para comparar ou ordenar frações. Por exemplo, para verificar a desigualdade

$$\frac{5}{8} < \frac{4}{6}$$

substituímos cada uma das frações da desigualdade por frações equivalentes, com mesmo denominador. O **denominador comum** pode ser, por exemplo, o *mínimo múltiplo comum* $\mathrm{MMC}(6{,}8) = 24$. Temos, então, as seguintes equivalências

$$\frac{5\times 3}{8\times 3} = \frac{15}{24}$$

e

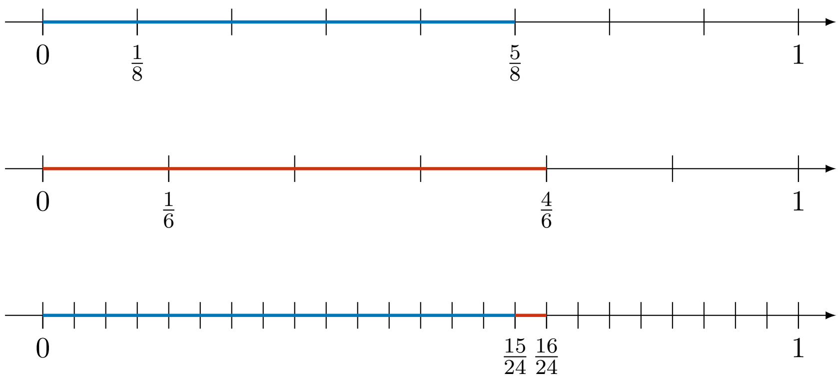
$$\frac{4\times 4}{6\times 4} = \frac{16}{24}.$$

Assim, a desigualdade que queremos verificar torna-se

$$\frac{15}{24} < \frac{16}{24},$$

que é uma desigualdade verdadeira.

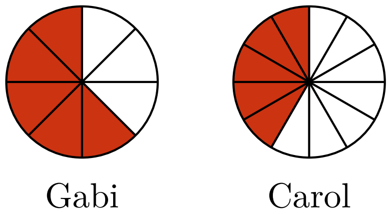
Podemos explicar essa comparação geometricamente com as seguintes retas numéricas:



Note que, da primeira para a terceira reta, cada segmento de comprimento $\frac{1}{8}$ foi particionado em 3 partes, cada uma com comprimento igual a $\frac{1}{24}$, enquanto que, da segunda para a terceira reta, cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ foi particionado em 4 partes, cada uma com comprimento também igual a $\frac{1}{24}$.

Exercício 3.4 Em uma pizzaria, todas as pizzas têm o mesmo sabor e o mesmo tamanho. Entretanto, cada pizza pode ser dividida em 8 ou em 12 pedaços iguais. Na semana passada, as amigas Gabi e Carol foram a essa pizzaria. Gabi pediu uma pizza dividida em 8 pedaços e comeu 5 desses pedaços. Carol pediu uma pizza dividida em 12 pedaços e também comeu 5 pedaços. Qual das duas comeu mais pizza?

Solução. Gabi comeu $\frac{5}{8}$ e Carol comeu $\frac{5}{12}$ de uma pizza, como representado nas seguintes figuras:



Como $8{\times}12 = 96$, temos que

$$\frac{5}{8} = \frac{5{\times}12}{8{\times}12} = \frac{60}{96} \quad \text{e} \quad \frac{5}{12} = \frac{5{\times}8}{12{\times}8} = \frac{40}{96}.$$

Assim, $\frac{5}{8}$ é equivalente a $\frac{60}{96}$ e $\frac{5}{12}$ é equivalente a $\frac{40}{96}$. Portanto, como $\frac{60}{96} > \frac{40}{96}$, concluímos que

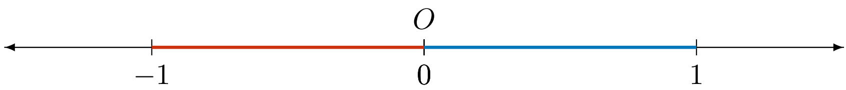
$$\frac{5}{8} > \frac{5}{12},$$

ou seja, Gabi comeu mais pizza que Carol. ■

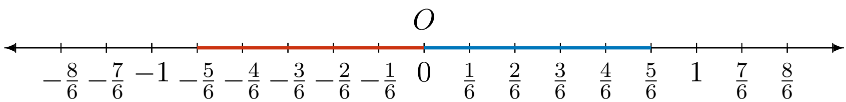
Observação 3.5 No exercício acima, observe que as duas amigas comeram o mesmo número de pedaços de pizza. Entretanto, os pedaços da pizza de Gabi eram maiores que os pedaços da pizza de Carol, pois a pizza de Gabi foi dividida em 8 pedaços mas a de Carol foi dividida em 12 pedaços. Portanto, sem fazer contas, podemos afirmar que $\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$. Lembremos: quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior delas é a que possui o **menor** denominador.

3.3 – Os números racionais na reta numérica

Vimos anteriormente que números inteiros opostos correspondem a pontos à mesma distância do ponto O, chamado **origem** e que corresponde a zero. Portanto, um número inteiro e seu *oposto* ou *simétrico* são associados a pontos em posições *simétricas* na reta, com relação à origem O. Por exemplo, os números 1 e -1 são opostos um do outro e são representados na reta como na figura abaixo.



Podemos fazer o mesmo com respeito a frações positivas e seus *opostos* ou *simétricos*. Vejamos o exemplo das frações $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \ldots$ e seus opostos ou simétricos $-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \ldots$

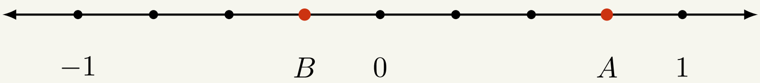


O *conjunto* das frações positivas, o zero e as frações negativas formam os **números racionais** na reta numérica. Estudaremos isso de modo mais preciso mais adiante.

Observação 3.6 Frações, tanto positivas quanto negativas, podem ser comparadas e ordenadas na reta numérica: na orientação usual da reta, da esquerda para a direita, quanto mais à direita uma fração estiver, maior ela será. Sendo assim, e observando o exemplo acima, temos

$$-\frac{3}{6} < -\frac{2}{6} < -\frac{1}{6} < 0 < \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6}.$$

Exercício 3.5 As frações representadas pelas letras A e B na reta numérica desenhada abaixo são, respectivamente, iguais a



(a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

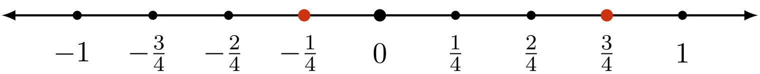
(b) $\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$.

(c) $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$.

(d) $-\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

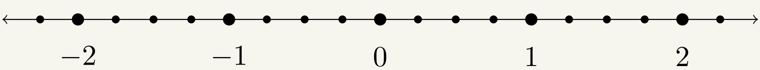
(e) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

Solução. Observe que o segmento de 0 a 1 foi particionado em 4 segmentos menores e de mesmo tamanho. Assim, os pontos marcados sobre a reta, e pertencentes ao segmento de 0 a 1, representam as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ — também podemos escrever $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Como o segmento de -1 a 0 foi também particionado em 4 segmentos de mesmo tamanho, os pontos marcados na reta e pertencentes ao segmento de -1 a 0 representam as frações $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{4}$ e $-\frac{1}{4}$ — também podemos escrever $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Veja a figura abaixo:

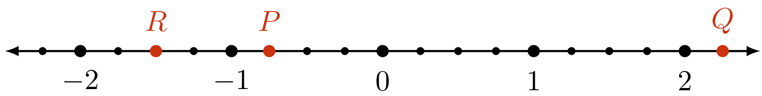


Logo, $A = \frac{3}{4}$ e $B = -\frac{1}{4}$, ou seja, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 3.6 Localize os pontos $P = -\frac{3}{4}$, $Q = \frac{9}{4}$ e $R = -\frac{3}{2}$ na reta numérica abaixo.



Solução. Outra vez, temos que os segmentos de comprimento unitário estão particionados, cada um, em 4 segmentos de mesmo comprimento. Assim, a distância entre dois pontos consecutivos é sempre igual a $\frac{1}{4}$. Desse modo, para marcar o ponto $P = -\frac{3}{4}$ basta contar, a partir do zero, 3 "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ para a *esquerda*. Para marcar $\frac{9}{4}$, basta contar 9 "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ para a *direita*. Já para o ponto $R = -\frac{3}{2}$, primeiro observamos que $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4}$; assim, para marcar R, basta contar 6 "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ para a esquerda.



Note que

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Logo, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ (2 inteiros e um quarto). Desse modo, podemos dar 1 "passo" de tamanho $\frac{1}{4}$ à direita do 2 para chegar ao ponto $\frac{9}{4}$. De maneira similar, $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4} = -1\frac{2}{4}$, ou seja, dando dois "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ à esquerda, a partir de -1, chegamos ao ponto $-\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. ■

3.4 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 3.7 Represente geometricamente as seguintes frações, usando setores circulares ("pizzas") ou barras.

(a) $\frac{3}{5}$.

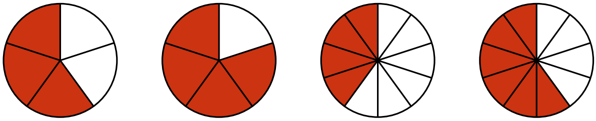
(b) $\frac{4}{5}$.

(c) $\frac{4}{10}$.

(d) $\frac{6}{10}$.

Em seguida, coloque as frações em ordem crescente.

Solução. A figura seguinte traz as representações geométricas das frações usando "pizzas".



$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$

Observe, a partir dessas figuras, que $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, o que é natural, visto que a primeira fração corresponde a 3 partes dentre 5 enquanto a segunda equivale a 4 partes dentre 5. Portanto, a segunda fração corresponde a *mais partes*. De modo similar, deduzimos que $\frac{4}{10} < \frac{6}{10}$. Também com base nas figuras observe que $\frac{4}{10} < \frac{4}{5}$. De fato, a primeira fração corresponde a 4 unidades divididas em 10 partes enquanto a segunda equivale a 4 unidades, mas divididas em 5 partes e, portanto, em *partes maiores*. Finalmente, note que $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ representam a mesma fração da pizza. Portanto, essas frações são equivalentes: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Utilizando barras, as frações poderiam ser representadas do seguinte modo:

$= \frac{3}{5}$

$= \frac{4}{5}$

$= \frac{4}{10}$

$= \frac{6}{10}$

As barras deixam ainda mais claro que

$$\frac{4}{10} < \frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{4}{5}.$$

■

Exercício 3.8 Calcule o resultado das seguintes divisões usando frações:

(a) $\frac{11}{5}$. (b) $\frac{12}{5}$. (c) $\frac{13}{5}$. (d) $\frac{14}{5}$.

Em seguida, represente as frações utilizando segmentos da reta numérica. De quais números naturais essas frações estão *mais próximas*?

Solução. Dividindo 11 por 5, obtemos quociente 2 e resto 1, visto que

$$11 = 10 + 1 = 5 \times 2 + 1.$$

Logo

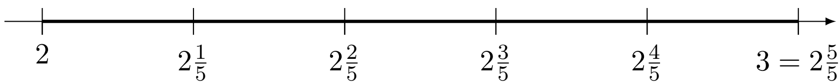
$$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}.$$

Da mesma forma, concluímos que

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \qquad \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \qquad \frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

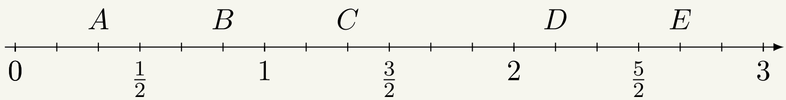
Logo, estas frações estão *localizadas* na reta numérica entre os pontos correspondentes a 2 e 3, uma vez que

$$2 < 2 + \frac{1}{5} < 2 + \frac{2}{5} < 2 + \frac{3}{5} < 2 + \frac{4}{5} < 2 + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3.$$



Concluímos que as frações $2\frac{1}{5}$ e $2\frac{2}{5}$ estão mais próximas do número natural 2 e as frações $2\frac{3}{5}$ e $2\frac{4}{5}$ estão mais próximas do número natural 3. ■

Exercício 3.9 Associe a cada um dos pontos A, B, C, D e E uma das frações nas alternativas seguintes:



(a) $\frac{13}{6}$ (b) $\frac{16}{12}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{10}{12}$ (e) $\frac{2}{6}$

Exercício 3.10 Calcule as seguintes frações:

(a) $\frac{1}{5}$ de 75. (b) $\frac{2}{5}$ de 75. (c) $\frac{3}{5}$ de 75. (d) $\frac{4}{5}$ de 75.

Em seguida, represente as frações utilizando barras.

Solução. Observamos que dividindo 75 em 5 partes iguais, cada uma dessas partes corresponde a $\frac{1}{5}$ de 75, ou seja, é igual a

$$\frac{1}{5}\times 75 = \frac{75}{5} = 15.$$

Somando estas 5 partes, temos $5\times 15 = 75$. Somando 2 dessas partes, obtemos

$$\frac{2}{5}\times 75 = 2\times\frac{75}{5} = 2\times 15 = 30.$$

Da mesma forma, calculamos

$$\frac{3}{5}\times 75 = 3\times 15 = 45$$

e

$$\frac{4}{4}\times 75 = 4\times 15 = 60.$$

Representando essas **frações de** 75, utilizando barras, temos as seguintes ilustrações.

■

Exercício 3.11 Em um conjunto de 75 alunos, 30 são torcedores do Ceará e 45 são torcedores do Fortaleza. a) Quais frações do total de alunos representam os *subconjuntos* de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza? b) Qual a *razão* entre as quantidades de torcedores do Ceará e de torcedores de Fortaleza?

Solução. A **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Ceará é igual a

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Ceará”}}{\text{“total de alunos”}} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$$

e a **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Fortaleza é dada por

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Fortaleza”}}{\text{“total de alunos”}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}.$$

Note que $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$. A **razão** entre a quantidade de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza é dada por

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Fortaleza”}}{\text{“total de alunos torcedores do Ceará”}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}.$$

■

Exercício 3.12 Quais das frações abaixo são equivalentes a $\frac{16}{10}$?

(a) $\frac{16+2}{10+2}$ (b) $\frac{16:2}{10:2}$ (c) $\frac{8\times4}{5\times4}$ (d) $\frac{64:4}{40:4}$ (e) $\frac{16-2}{10-2}$

Justifique sua resposta com cálculos e com representações geométricas das frações.

Exercício 3.13 Em uma turma da primeira série, há 6 alunas para cada 5 alunos. Esta *proporção* será a mesma caso ingressem exatamente mais 2 alunos e mais 2 alunas nesta turma? E caso dobrássemos o número de alunos e o número de alunas? Justifique sua respostas com cálculos, barras, pizzas ou segmentos da reta numérica, conforme preferir.

Exercício 3.14 Localize as seguintes frações na reta numérica.

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{12}{9}$ (d) $\frac{12}{3}$ (e) $\frac{3}{12}$

Exercício 3.15 Compare e ordene as seguintes frações.

(a) $\frac{52}{25}$ (b) $\frac{52}{24}$ (c) $\frac{55}{25}$ (d) $\frac{52}{55}$ (e) $\frac{55}{52}$

Exercício 3.16 Calcule as seguintes frações.

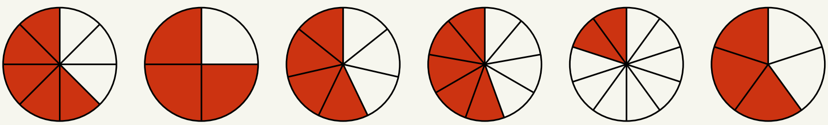
(a) $\frac{3}{4}$ de 180
(b) $\frac{4}{3}$ de 180
(c) $\frac{12}{3}$ de 180
(d) $\frac{3}{12}$ de 180

Exercício 3.17 Simplifique as seguintes frações, obtendo suas formas *irredutíveis*.

(a) $\frac{27}{125}$ (b) $\frac{144}{81}$ (c) $\frac{60}{128}$ (d) $\frac{145}{250}$ (e) $\frac{62}{58}$

Exercício 3.18 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas barras na seguinte figura?

Exercício 3.19 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas “pizzas” na seguinte figura?



Exercício 3.20 — KangoTreino 4 - 2020. Qual é o valor da expressão

$$\frac{2020+2020+2020+2020+2020}{2019+2019+2019+2019+2019}?$$

(a) $\frac{1}{2020}$
(b) $\frac{2021}{2019}$
(c) $1+\frac{1}{2019}$
(d) $\frac{20}{19}$
(e) 5

Sequência 2

Exercício 3.21 Uma coleção tem 300 selos.

(a) 100 selos correspondem a que fração da coleção?
(b) 200 selos correspondem a que fração da coleção?
(c) 60 selos correspondem a que fração da coleção?
(d) 180 selos correspondem a que fração da coleção?

Exercício 3.22 — SAT - adaptado. A tabela seguinte classifica 103 elementos químicos como metais, metalóides ou não-metais, e como sólidos, líquidos e gasosos em temperatura e pressão normais.

	Sólidos	Líquidos	Gasosos	Total
Metais	77	1	0	78
Metalóides	7	0	0	7
Não-metais	6	1	11	18
Total	90	2	11	103

Que fração de sólidos e líquidos na tabela são metalóides?

Exercício 3.23 Em cada alternativa, ponha as frações em ordem crescente.

(a) $\frac{9}{7}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{9}{20}$ e $\frac{9}{13}$.

(b) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{13}$.

(c) $\frac{8}{20}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{15}$ e $\frac{20}{25}$.

(d) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$.

Em seguida, localize essas frações na reta numérica.

Exercício 3.24 Numa prova de Matemática havia 15 exercícios.

(a) José errou 5 exercícios dessa prova. Escreva a fração que representa o número de erros cometidos por José em relação ao total de questões da prova.
(b) Obtenha também a fração que representa o número de acertos de José.
(c) Henrique errou $\frac{1}{5}$ dos exercícios dessa prova. Quantos exercícios ele acertou?

Solução. A fração que representa a *razão* entre o número de erros cometidos por José e o número total de questões da prova é

$$\frac{\text{“número de erros”}}{\text{“número total de questões”}} = \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3}.$$

Logo, podemos dizer que José errou $\frac{1}{3}$ das questões da prova. De fato, dividindo o número total de 15 questões em 3 partes iguais, temos partes com 5 questões, exatamente o número de questões em que José cometeu erros. Também concluímos que ele acertou 10 questões, ou seja, os outros $\frac{2}{3}$ da prova.

Agora, dividindo o número total de questões em 5 partes iguais, obtemos partes com 3 questões cada. Ou seja, $\frac{1}{5}$ do número de questões equivale a 3 questões. Essa foi a quantidade de acertos de Henrique. ■

Exercício 3.25 Para encher $\frac{3}{4}$ de uma piscina são necessários 30.000 litros de água. Qual é a capacidade da piscina?

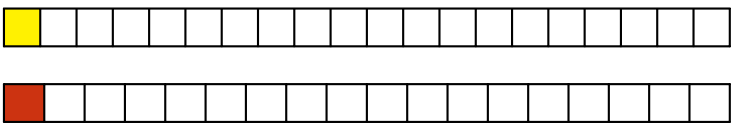
Solução. Se $\frac{3}{4}$ da capacidade da piscina correspondem a 30.000 litros, $\frac{1}{4}$ corresponde a $30.000 \div 3 = 10.000$ litros. Portanto, a capacidade total da piscina, ou seja, os $\frac{4}{4}$ de sua capacidade, corresponde a $4 \times 10.000 = 40.000$ litros.

■

Exercício 3.26 Vinte amigos resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. O valor do aluguel deveria ser dividido igualmente entre todos eles. No entanto, no dia do passeio, dois dos vinte amigos desistiram, de forma que o valor do aluguel teve de ser dividido igualmente apenas entre aquelas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada um dos amigos que compareceu é

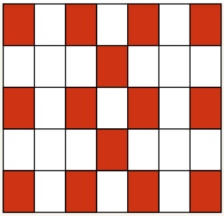
(a) $\dfrac{1}{20}$. (b) $\dfrac{18}{20}$. (c) $\dfrac{1}{10}$. (d) $\dfrac{1}{18}$. (e) $\dfrac{2}{18}$.

Solução. As barras abaixo representam a divisão do aluguel entre 20 pessoas e entre $20 - 2 = 18$ pessoas:



Com menos pessoas para dividir o aluguel, a fração que cada um deve pagar aumentou de $\frac{1}{20}$ para $\frac{1}{18}$. ■

Exercício 3.27 Qual a forma irredutível da fração correspondente à região pintada de vermelho na bandeira representada abaixo?



Exercício 3.28 Mateus e Guilherme trabalham na mesma empresa e recebem o mesmo salário. Mateus economiza $\frac{1}{6}$ do seu salário, enquanto Guilherme economiza $\frac{2}{11}$. Qual dos dois consegue economizar mais?

Solução. Basta observarmos que $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Como

$$\frac{2}{12} < \frac{2}{11},$$

concluímos que Mateus economiza *menos* que Guilherme. ■

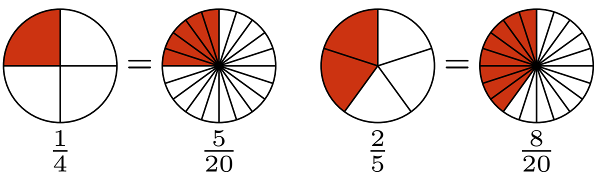
Exercício 3.29 César gastou $\frac{1}{4}$ da mesada na compra de um livro e $\frac{2}{5}$ na compra de duas revistas.

(a) Qual das compras foi a mais cara?
(b) Se César tinha 120 reais, com quantos reais ele ficou?

Solução. Observe que o mínimo múltiplo comum aos denominadores 4 e 5 é 20, o produto dos dois — vimos antes que isso ocorre por que 3 e 5 não tem fatores comuns, isto é, são primos entre si. Portanto, temos as seguintes equivalências de frações

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 5}{4\times 5} = \frac{5}{20} \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20},$$

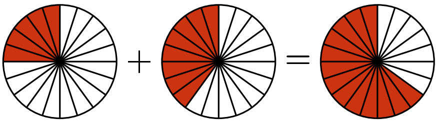
representada nas seguintes "pizzas":



Concluímos que as duas revistas, juntas, são mais caras que o livro. Além disso, *somando* as frações da mesada representadas pelas duas compras, deduzimos que César gastou

$$\frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$$

de sua mesada. Representando essa soma com "pizzas", temos



$\frac{5}{20}$ $\frac{8}{20}$ $\frac{13}{20}$

Como a mesada é de 120 reais, $\frac{1}{20}$ da mesada é igual a $120 \div 20 = 6$ reais. Logo, $\frac{13}{20}$ da mesada equivalem a $13 \times 6 = 78$ reais. Portanto, após as compras, César ficou com $120 - 78 = 120 - 80 + 2 = 42$ reais. Note que esses 42 reais restantes correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} \text{ da mesada.}$$

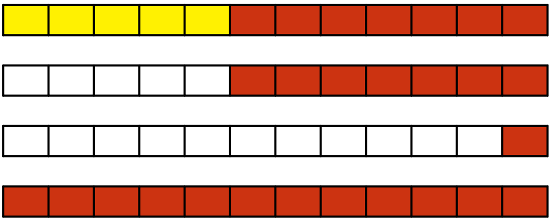
De fato, como $\frac{1}{20}$ da mesada são 6 reais, $\frac{7}{20}$ dela são $7 \times 6 = 42$ reais. ■

Exercício 3.30 Fernando juntou $\frac{5}{12}$ das figurinhas de um álbum de jogadores de futebol. Ainda faltam 63 figurinhas para completar o álbum. Quantas figurinhas tem o álbum completo?

Solução. As 63 figurinhas que *faltam* correspondem a

$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

do total de figurinhas do álbum completo. Logo, $\frac{1}{12}$ do total de figurinhas equivale a $63 : 7 = 9$ figurinhas. Portanto, o álbum completo tem $12 \times 9 = 108$ figurinhas. Representemos esta solução com o uso de barras.



$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

$\frac{7}{12}$ do todo $= 63$

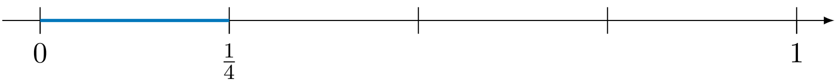
$\frac{1}{12}$ do todo $= \frac{63}{7} = 9$

$\frac{12}{12}$ do todo $= 12{\times}9 = 108$

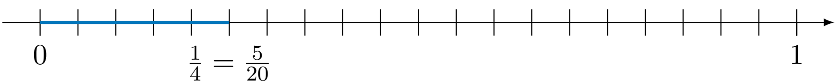
■

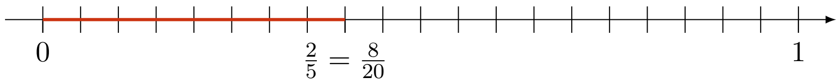
Exercício 3.31 Na última eleição para a prefeitura da cidade de Numeropólis, os candidatos Arquimedes e Euclides obtiveram, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ do total de votos válidos. Sabendo que o restante do total de votos válidos, ou seja, 6.300 votos, foi dado ao candidato Tales, pergunta-se: quantos votos cada um dos candidatos recebeu? Qual dos três candidatos foi eleito?

Solução. Representemos as frações de votos válidos dos candidatos Arquimedes e Euclides por pontos na reta numérica como segue

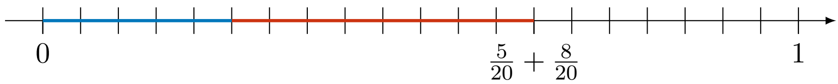


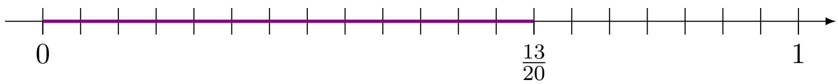
Particionando cada um dos 4 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na primeira reta em 5 partes iguais e cada um dos 4 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na primeira reta em 5 partes iguais, obtemos





Somando essas duas frações, obtemos





Esses $\frac{13}{20}$ dos votos válidos correspondem ao total de votos dos candidatos Arquimedes e Euclides. Logo, os votos válidos restantes, do candidato Tales, correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

dos votos. Assim, $\frac{7}{20}$ dos votos equivalem a 6.300 votos. Portanto, $\frac{1}{20}$ dos votos é igual a $6.300 \div 7 = 900$. Assim, o total de votos é igual a $12 \times 900 = 10.800$ votos. Concluímos que a distribuição de votos válidos foi a seguinte:

(a) votos recebidos por Arquimedes: $\frac{5}{20}$ dos votos válidos, ou $5 \times 900 = 4.500$ votos;

(b) votos recebidos por Euclides: $\frac{8}{20}$ dos votos válidos, ou $8 \times 900 = 7.200$ votos;

(c) votos recebidos por Tales: $\frac{7}{20}$ dos votos válidos, ou $7 \times 900 = 6.300$ votos,

o que comprova que Euclides foi o candidato vencedor. ■

Sequência 3

Exercício 3.32 — Revista Canguru 2020. Qual das frações a seguir tem o maior valor?

(a) $\frac{8+5}{3}$ (b) $\frac{8}{3+5}$ (c) $\frac{3+5}{8}$ (d) $\frac{8+3}{5}$ (e) $\frac{3}{8+5}$

Solução. Note que as frações em (b) e (c) são ambas iguais a 1, uma vez que

$$\frac{3+5}{8}=\frac{8}{8}=1 \qquad \text{e} \qquad \frac{8}{3+5}=\frac{8}{8}=1.$$

Além disso, a fração em (e) é menor que 1, pois

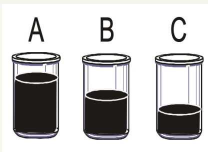
$$\frac{3}{8+5}=\frac{3}{13}<1.$$

Finalmente, comparemos as frações em (a) e (d), ambas *maiores* que 1. Temos

$$\frac{8+5}{3}=\frac{13}{3}=\frac{65}{15} \qquad \text{e} \qquad \frac{8+3}{5}=\frac{11}{5}=\frac{33}{15}.$$

Concluímos que a fração na alternativa (a) é maior que a fração na alternativa (d) e, portanto, é a maior das cinco. ■

Exercício 3.33 — Banco OBMEP 2006.
Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração a seguir. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume de líquido contido nos frascos A, B e C, nesta ordem?



(a) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}$.

(b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

(c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{2}{4}$.

(d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}$.

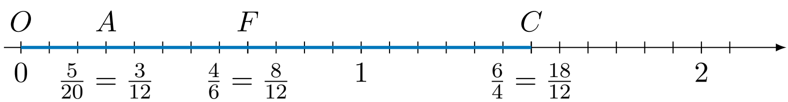
(e) $\frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$.

Exercício 3.34 — ENEM 2014. André, Carlos e Fábio estudam em uma mesma escola e desejam saber quem mora mais perto da escola. André mora a cinco vinte avos de um quilômetro da escola. Carlos mora a seis quartos de um quilômetro da escola. Já Fábio mora a quatro sextos de um quilômetro da escola.

A ordenação dos estudantes de acordo com a ordem decrescente das distâncias de suas respectivas casas à escola é

(a) André, Carlos e Fábio.
(b) André, Fábio e Carlos.
(c) Carlos, André e Fábio.
(d) Carlos, Fábio e André.
(e) Fábio, Carlos e André.

Solução. Representemos na seguinte reta numéricas as distâncias das casas de André, o ponto A, Carlos, ponto C, e Fábio, o ponto F, à escola , o ponto O (origem), que são, respectivamente, dadas pelas frações $\frac{5}{20}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{4}{6}$:



Para comparar essas distâncias, observamos, primeiro, que

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} < 1 < \frac{6}{4}$$

Além disso, $\frac{4}{6} < 1 < \frac{6}{4}$ e

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Logo, a ordem crescente deve ser $\frac{5}{20} < \frac{4}{6} < \frac{6}{4}$, o que corresponde à alternativa (b).

Observação 3.7 Para verificar esta ordem de outro modo, podemos usar as seguintes equivalências das frações:

$$\frac{4}{6} = \frac{4\times2}{6\times2} = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{6}{4} = \frac{6\times3}{4\times3} = \frac{18}{12}.$$

Temos também

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} = \frac{1\times3}{4\times3} = \frac{3}{12}.$$

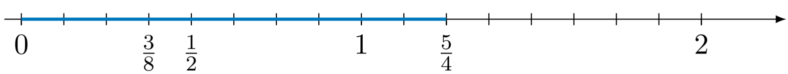
Assim, uma vez que $\frac{3}{12} < \frac{8}{12} < \frac{18}{12}$, como representado na reta, comprovamos a resposta que já tínhamos deduzido.

■

Exercício 3.35 — ENEM 2016. Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de 1/2, 3/8 e 5/4. Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

(a) 1/2, 3/8, 5/4.
(b) 1/2, 5/4, 3/8.
(c) 3/8, 1/2, 5/4.
(d) 3/8, 5/4, 1/2.
(e) 5/4, 1/2, 3/8

Solução. Note que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Portanto, temos a representação das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$, na reta numérica, como segue.

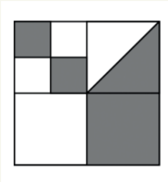


Logo, a ordem correta é a que aparece na alternativa (c).

■

Exercício 3.36 Determine a localização e a distância entre os pontos na reta numérica que representam as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{4}$. Faça o mesmo para as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Exercício 3.37 — Revista Canguru 2020. Num desses quadrados menores também foi desenhada uma diagonal.



Qual fração do quadrado original foi escurecida?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Exercício 3.38 — Banco OBMEP. Qual dos números a seguir está situado entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{6}$. (b) $\frac{4}{3}$. (c) $\frac{5}{2}$. (d) $\frac{4}{7}$. (e) $\frac{1}{4}$.

Solução. Inicialmente, observamos que

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$$

De fato, multiplicando ambos os lados dessa desigualdade pelo *múltiplo comum* 20 — múltiplo comum dos denominadores, temos, do lado esquerdo

$$20\times\frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

e, do lado direito,

$$20\times\frac{3}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

De modo similar, demonstra-se que

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$$

bastando, para isso, multiplicar ambos os lados pelo múltiplo comum 20, obtendo $5 < 8$.

Agora, observamos que

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{2}{5}.$$

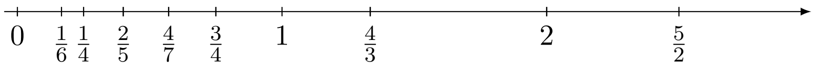
Além disso, ambas as frações $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ são maiores que 1 e, portanto, maiores que $\frac{3}{4}$. Resta, portanto, verificarmos se $\frac{4}{7}$ *está entre* $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Temos

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$$

uma vez que, multiplicando os dois lados da desigualdade por 35, obtemos $2{\times}7 = 14 < 5{\times}4 = 20$. Do mesmo modo, para verificar que

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{4},$$

multiplicamos ambos os lados da desigualdade por 28, obtendo $16 < 21$. Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). Para finalizar, representemos estas cinco frações na reta numérica de acordo com a figura que segue.



$\blacksquare$

Exercício 3.39 Em cada planeta do Sistema Solar, um ano (período orbital) pode ser definido como o número de dias terrestres para que o planeta complete uma volta em torno do Sol. Vejamos, na tabela que segue, a duração aproximada dos anos em alguns planetas.

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte
Dias	88	225	365	686

Um ano em Mercúrio corresponde, aproximadamente, a qual fração de um ano em Marte ?

Solução. Note que 1 (um) ano em Mercúrio corresponde a 88 dias na Terra:

$$1 \text{ “ano Mercuriano”} = 88 \text{ “dia Terrestre”}.$$

Por outro lado, 88 dias na terra correspondem a 88/686 de um ano em Marte:

$$88 \text{ “dia Terrestre”} = \frac{88}{686} \text{ “ano Marciano”}.$$

Logo, deduzimos que

$$1 \text{ “ano Mercuriano”} = \frac{88}{686} \text{ “ano Marciano”}.$$

Esta fração pode ser simplificada:

$$\frac{88 \div 2}{686 \div 2} = \frac{44}{343}.$$

Com a possibilidade de *aproximar* esta fração por

$$\frac{40}{320} = \frac{1}{8},$$

podemos afirmar que 1 ano em Mercúrio corresponde, aproximadamente, a $\frac{1}{8}$ de ano em Marte ou, equivalentemente, que 1 ano em Marte equivale a 8 anos em Mercúrio!

Observação 3.8 Esta é uma boa aproximação, visto que, dividindo 686 por 88, obtemos

$$\frac{686}{88} = \frac{616+70}{88} = \frac{616}{88} + \frac{70}{88} = 7 + \frac{70}{88},$$

ou seja, temos 7 anos e um **excesso** de 70 dias — dentro de 88 dias — ou

$$\frac{686}{88} = \frac{704-18}{88} = \frac{704}{88} - \frac{18}{88} = 8 - \frac{18}{88},$$

ou seja, temos 8 anos e uma **falta** de apenas 18 dias — dentro de 88 dias.

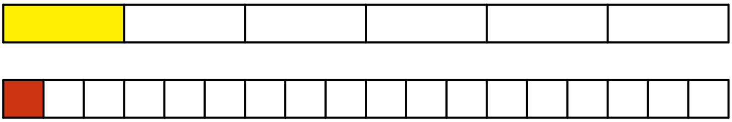
■

Exercício 3.40 — Banco OBMEP 2006. A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, $\frac{1}{3}$ são meninas. Além disso, 4 meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

Solução. De acordo com o enunciado, $\frac{1}{6}$ dos alunos usam óculos. Desses, $\frac{1}{3}$ são meninas e, portanto, $\frac{2}{3}$ são meninos, o que corresponde a 4 alunos. Observe que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ é dado por

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

De fato, dividindo $\frac{1}{6}$ em três partes iguais, temos $\frac{1}{18}$. Veja o modelo deste cálculo usando barras:



Voltando à resolução do problema, concluímos que $\frac{1}{18}$ do total de alunos equivale a 4 alunos. Logo, o número total de alunos é igual a $18 \times 4 = 72$ alunos. ■

Exercício 3.41 — ENEM 2020 - Segunda aplicação. Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que $\frac{1}{4}$ dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto $\frac{2}{3}$ das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens. A fração que representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa é

(a) $\frac{1}{8}$. (b) $\frac{3}{11}$. (c) $\frac{11}{24}$. (d) $\frac{2}{3}$. (e) $\frac{8}{11}$.

Solução. Metade, ou seja, $\frac{1}{2}$, dos que têm ensino médio corresponde a $\frac{1}{4}$ dos homens. A outra metade dos que têm ensino médio corresponde a $\frac{2}{3}$ das mulheres. Concluímos que

$$\frac{2}{3} \text{ do "total de mulheres"} = \frac{1}{4} \text{ do "total de homens"},$$

ou seja,

$$\frac{1}{3} \text{ do "total de mulheres"} = \frac{1}{8} \text{ do "total de homens".}$$

Logo, o número total de mulheres é igual a

$$3\times\frac{1}{8} \text{ do "total de homens",}$$

ou seja,

$$\frac{3}{8} \text{ do "total de homens".}$$

Portanto, o número total de funcionários é igual a

$$\begin{aligned}
&\text{"total de homens"} + \text{"total de mulheres"} \\
&\qquad = \text{"total de homens"} + \frac{3}{8} \text{ do "total de homens"} \\
&\qquad = \left(1+\frac{3}{8}\right) \text{ do "total de homens"} \\
&\qquad = \frac{11}{8} \text{ do "total de homens".}
\end{aligned}$$

Assim, o número de homens corresponde a $\frac{8}{11}$ do número total de funcionários, o que corresponde à letra (e).

■

Exercício 3.42 — ENEM 2010. Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

(a) O jogador I, porque acertou $3/4$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $2/3$ dos chutes.

(b) O jogador I, porque acertou $4/3$ dos chutes, enquanto que o jogador II acertou 2/3

(c) O jogador I, porque acertou 3/4 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 3/4 dos chutes.
(d) O jogador I, porque acertou 12/25 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/3 dos chutes.
(e) O jogador I, porque acertou 9/25 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/5 dos chutes.

Solução. O jogador I acertou 45 dos 60 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{45}{60}$ ou

$$\frac{45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{3}{4},$$

enquanto o jogador II acertou 50 dos 75 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{50}{75}$ ou

$$\frac{50 \div 25}{75 \div 25} = \frac{2}{3}.$$

Uma vez que

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

concluímos que o jogador I deve ser o escolhido por ter acertado 3/4 dos seus chutes, ao passo que o jogador II acertou 2/3 dos seus chutes. Portanto, a alternativa (a) é correta.

■

Exercício 3.43 — ENEM 2014. Um clube de futebol abriu inscrições para novos jogadores. Inscreveram-se 48 candidatos. Para realizar uma boa seleção, deverão ser escolhidos os que cumpram algumas exigências: os jogadores deverão ter mais de 14 anos, estatura igual ou superior à mínima exigida e bom preparo físico. Entre os candidatos, 7/8 têm mais de 14 anos e foram pré-selecionados. Dos pré-selecionados, 1/2 têm estatura igual ou superior a mínima exigida e, destes, 2/3 têm bom preparo físico.

A quantidade de candidatos selecionados pelo clube de futebol foi

(a) 12. (b) 14. (c) 16. (d) 32. (e) 42.

Exercício 3.44 — OBMEP 2019. Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

(a) Ela ficará preenchida em 7/8 de sua capacidade.
(b) Ela ficará preenchida em 8/13 de sua capacidade.
(c) Ela ficará preenchida em 5/8 de sua capacidade.
(d) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
(e) Ela vai transbordar.

Solução. Pelo enunciado, a capacidade da caneca pequena equivale a $\frac{3}{5}$ da capacidade da caneca média e esta, por sua vez, equivale a $\frac{5}{8}$ da capacidade da caneca grande. Assim, 1 caneca pequena teria capacidade igual a de

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\times 1 \text{ “caneca média”} &= \frac{3}{5}\times\frac{5}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= \frac{3}{5}\times 5\times\frac{1}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= 3\times\frac{1}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= \frac{3}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}.\end{aligned}$$

Portanto, 1 caneca pequena e 1 caneca média, juntas, têm capacidade equivalente a de

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)\times 1 \text{ “caneca grande”} &= \frac{8}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= 1 \text{ “caneca grande”}.\end{aligned}$$

Portanto, (d) é a alternativa correta.

■

Exercício 3.45 — ENEM 2016. Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão).

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Solução. *Concentração* de fibras significa a fração a quantidade de fibras em gramas **por** quantidade de pão em gramas, isto é, a **fração** ou **razão**

$$\frac{\text{“quantidades de gramas de fibras”}}{\text{“quantidade de gramas de pão”}}.$$

Para as marcas A, B, C, D e E, respectivamente, essas concentrações são iguais a

$$\frac{2}{50} \qquad \frac{5}{40} \qquad \frac{5}{100} \qquad \frac{6}{90} \qquad \frac{7}{70}$$

Note que $\frac{5}{100} < \frac{5}{40}$, pois temos mesmos numeradores e denominador menor na maior fração. Logo, a resposta não pode ser a marca C. Obsrve também que

$$\frac{6}{90} = \frac{6 \div 3}{90 \div 3} = \frac{2}{30} > \frac{2}{50}.$$

Portanto, a marca A também não é a de maior concentração de fibras. Agora, as frações das marcas B e E são equivalentes, respectivamente, a

$$\frac{5 \div 5}{40 \div 5} = \frac{1}{8} \qquad \text{e} \qquad \frac{7 \div 7}{70 \div 7} = \frac{1}{10}.$$

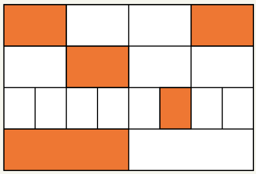
Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$, concluímos que a marca E não é a resposta. Resta, assim, compararmos as concentrações de fibras das marcas B e D, ou seja, as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{30}$, respectivamente. Temos

$$\frac{2}{30} = \frac{1}{15} < \frac{1}{8}.$$

Logo, concluímos que a marca B é a que tem maior concentração de fibras.

■

Exercício 3.46 Uma bandeira está dividida em 4 faixas horizontais de igual largura e cada faixa está dividida em duas, quatro ou oito partes iguais, conforme indicado na figura abaixo. Qual é a fração correspondente à área pintada de amarelo?



Sequência 4

Exercício 3.47 — Canguru 2020 - Prova S. Se C cachorros pesam Q quilogramas e E elefantes pesam o mesmo que M cachorros, quantos quilogramas pesa um elefante?

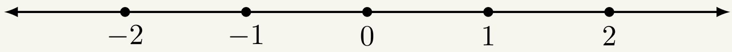
(a) $\frac{E \times M}{C \times Q}$. (b) $\frac{C \times Q}{E \times M}$. (c) $\frac{Q \times E}{C \times M}$. (d) $\frac{Q \times M}{C \times E}$. (e) $\frac{C \times M}{Q \times E}$.

Solução. Se C cachorros pesam Q quilogramas, 1 cachorro pesa $\frac{Q}{C}$ quilogramas e M cachorros pesam $M \times \frac{Q}{C}$ quilogramas. Como este é o peso de E elefantes, um elefante pesa

$$\frac{1}{E} \times M \times \frac{Q}{C} = \frac{Q \times M}{C \times E},$$

o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 3.48 Localize (aproximadamente) os pontos $P = -\frac{7}{3}$, $Q = \frac{5}{4}$, $R = -\frac{6}{5}$ e $S = \frac{5}{2}$ na reta numérica desenhada abaixo.



Exercício 3.49 — OCM 1990. Qual das frações é maior $\frac{2753}{2235}$ ou $\frac{2743}{2225}$? Justifique (sem efetuar divisões).

Exercício 3.50 — CMF - adaptado. A 2ª fase de uma maratona de Matemática de uma escola será realizada no próximo sábado. Os alunos classificados para essa fase são aqueles que, na primeira fase, acertaram no mínimo 16 das 20 questões da prova. Observe os resultados obtidos por alguns alunos na 1ª fase:

(I) Augusto não respondeu $\frac{1}{10}$ das questões da prova e errou o dobro do número de questões que não respondeu.
(II) Daniela acertou $\frac{3}{5}$ das questões da prova.
(III) Francisco acertou metade das questões de 1 a 10. No restante da prova, seu desempenho foi melhor: ele acertou $\frac{4}{5}$ das questões de 11 a 20.
(IV) Jorge errou $\frac{3}{20}$ das questões da prova.
(V) Carolina acertou 4 questões a mais do que Augusto.

Pode-se afirmar que os únicos alunos classificados para a 2ª fase da maratona foram:

(a) Augusto e Francisco.
(b) Daniela e Jorge.
(c) Jorge e Carolina.
(d) Augusto e Daniela.
(e) Francisco e Carolina.

Exercício 3.51 — CMF. Um fabricante de perfumes resolveu fazer uma pesquisa para verificar a preferência do público feminino sobre os perfumes por ele comercializados. Cada mulher entrevistada poderia escolher apenas um perfume. O resultado da pesquisa encontra-se na tabela a seguir:

Perfume	20 a 29 anos	30 a 39 anos	40 a 49 anos
Cheiro Bom	30	12	36
Aroma Suave	27	16	24
Fragrância Forte	15	52	28

Com base nos resultados obtidos, é correto afirmar que:

(a) $\frac{1}{8}$ das mulheres entrevistadas preferem o perfume Cheiro Bom.

(b) $\frac{1}{3}$ das mulheres entrevistadas têm de 30 a 39 anos.

(c) $\frac{5}{8}$ das mulheres de 30 a 39 anos preferem o perfume Fragrância Forte.

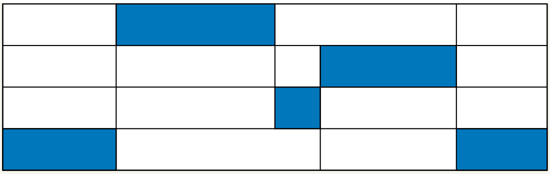
(d) $\frac{1}{4}$ das mulheres de 40 a 49 anos preferem o perfume Aroma Suave.

(e) $\frac{2}{3}$ das mulheres entrevistadas têm de 20 a 29 anos.

Exercício 3.52 Uma lata cheia de tinta pesa 13 kg. Se retirarmos metade da tinta contida na lata, ela passará a pesar 8 kg. Qual é o peso da lata vazia?

(a) 5 quilogramas.
(b) 10 quilogramas.
(c) 2 quilogramas.
(d) 3 quilogramas.
(e) 21 quilogramas.

Exercício 3.53 — Banco OBMEP - adaptada. A figura mostra um retângulo maior dividido em 18 retângulos menores, com diferentes tamanhos e todos com a mesma largura. Que fração do retângulo maior representa a parte pintada de azul?



Exercício 3.54 — Canguru 2020 - Prova S. Qual é o valor de

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020}$$

(a) 2020 (b) 3030 (c) 4040 (d) 6060 (e) 7070

Solução. Observe que $2020 = 2\times1010$ e $3030 = 3\times1010$. Assim,

$$\frac{1010^2 + (2\times1010)^2 + (3\times1010)^2}{2\times1010} = \frac{1010 + 4\times1.010 + 9\times1.010}{2}$$
$$= 7\times1010 = 7070.$$

Logo, a alternativa correta é a de letra (e). ■