MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2021

2

Aritmética Elementar II

Operações Aritméticas com Frações
Números Decimais
Operações com Números Decimais

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica
UFC/FUNCAP/SEDUC

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO
SISEDU
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED
CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Sumário

1 Operações Aritméticas com Frações 1

1.1 Adição e Subtração 1

1.2 Exercícios resolvidos e propostos 16

1.3 Multiplicação e Divisão 40

1.3.1 Exercícios resolvidos e propostos 47

2 Números Decimais 63

2.1 Representação Decimal 63

2.2 Comparando Números Decimais 68

2.3 Multiplicação e Divisão por Potências de 10 71

2.4 Grandezas e Medidas 73

2.5 Algoritmo da Divisão e Representação Decimal 82

2.6 Frações como Porcentagens 85

2.7 Exercícios Propostos 91

3 Operações com Números Decimais 121

3.1 Adição e Subtração de Decimais 121

3.1.1 Exercícios resolvidos e propostos 128

3.2 Multiplicação e Divisão de Decimais 141

3.2.1 Exercícios resolvidos e propostos 145

1 Operações Aritméticas com Frações

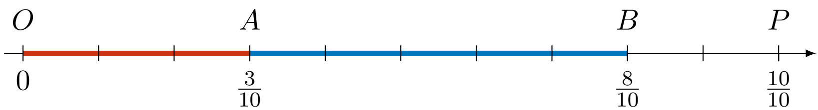
Com a introdução dos números fracionários, surge também a necessidade de fazer operações básicas — adição, subtração, multiplicação e divisão — com esses números. Inclusive, você já deve ter encontrado diversas situações em seu cotidiano que envolvem operações com frações. Neste material, apresentaremos várias situações-problema cujas soluções remetem às operações com números fracionários. A partir daí, explicaremos os algoritmos utilizados para realizar tais operações.

1.1 – Adição e Subtração

Iniciamos com o seguinte problema.

> **Problema 1** Fernando percorreu $\frac{3}{10}$ do percurso total previsto para uma viagem de automóvel na primeira hora. Na segunda hora, ele percorreu mais $\frac{5}{10}$ do percurso. Qual a fração do percurso total que foi percorrida nas duas primeiras horas de viagem?

Solução. Na reta numérica abaixo, o segmento OP representa o percurso total previsto para a viagem. Esse segmento foi dividido em 10 partes iguais, portanto, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{10}$ do percurso. O segmento OA corresponde ao trecho que foi percorrido na primeira hora da viagem e o segmento AB corresponde ao trecho percorrido na segunda hora. Assim, o segmento OB corresponde ao que foi percorrido nas duas primeiras horas.



Assim, temos

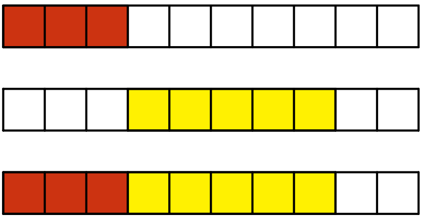
$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10},$$

ou seja, foram percorridos $\frac{8}{10}$ do percurso total nas duas primeiras horas da viagem. ■

Outro modo de interpretar a adição $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}$ é o seguinte.

Exercício 1.1 Os irmãos Alex e Bruno ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Alex comeu $\frac{3}{10}$ da barra e Bruno comeu $\frac{5}{10}$ da barra. Que fração da barra os dois comeram juntos?

Solução. Observe a figura, onde estão representadas a barra, dividida em 10 partes iguais, e as frações comidas pelos irmãos.



$= \frac{3}{10} \longrightarrow$ Alex

$= \frac{5}{10} \longrightarrow$ Bruno

$= \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} \longrightarrow$ Alex e Bruno

Na barra de cima, estão pintadas 3 das 10 partes, representando os $\frac{3}{10}$ da barra comidos por Alex. Na barra do meio, estão pintadas 5 das 10 partes, representando os $\frac{5}{10}$ da barra comidos por Bruno. Na barra de baixo, juntamos as partes comidas por Alex e Bruno, totalizando 8 das 10 partes da barra. Portanto,

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{3+5}{10} = \frac{8}{10},$$

ou seja, Alex e Bruno comeram, juntos, $\frac{8}{10}$ da barra de chocolate. ■

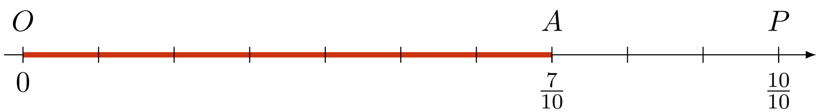
De modo geral, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para somá-las.

Adição de frações com um mesmo denominador: a soma de duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a soma dos numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações.

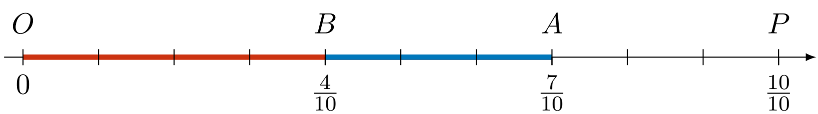
Agora, considere o problema

> **Problema 2** Nando percorreu $\frac{7}{10}$ do trajeto da sua casa até a escola, quando percebeu que tinha esquecido o livro de matemática em casa. Voltou $\frac{3}{10}$ desse mesmo trajeto quando encontrou com o seu pai, que já tinha percebido o esquecimento e resolveu ir até a escola entregar o livro ao filho. Que fração do trajeto da casa de Nando até a escola o pai já tinha percorrido quando os dois se encontraram?

Solução. Na reta numérica abaixo, o segmento OP representa o trajeto completo da casa de Nando até a escola. Esse segmento foi dividido em 10 partes iguais, logo, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{10}$ do trajeto. O ponto A representa o ponto onde Nando notou que tinha esquecido o livro, ou seja, o segmento OA corresponde ao trecho que Nando percorreu até o ponto onde percebeu o esquecimento do livro, que corresponde $\frac{7}{10}$ do trajeto de sua casa à escola.



O ponto B representa o ponto de encontro de Nando com o seu pai, ou seja, o segmento AB corresponde ao trecho que Nando percorreu de volta: $\frac{3}{10}$ do percurso total, desde o ponto onde notou o esquecimento, até o encontro com o seu pai.



Assim,

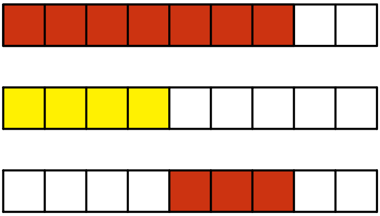
$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4 \div 2}{10 \div 2} = \frac{2}{5},$$

ou seja, o encontro entre Nando e seu pai aconteceu quando o pai tinha percorrido $\frac{2}{5}$ do trajeto de casa até a escola. ■

Veja também o seguinte exercício.

Exercício 1.2 Os irmãos Alex e Bruno ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Alex e Bruno comeram, juntos, $\frac{7}{9}$ da barra. Se $\frac{4}{9}$ é a fração da barra comida por Alex, que fração corresponde à parte comida por Bruno?

Solução. Observe a figura abaixo, onde estão representadas a barra dividida em 9 partes iguais, a fração comida em conjunto pelos dois irmãos e a fração comida por Alex.



$= \frac{7}{9} \longrightarrow$ Alex e Bruno

$= \frac{4}{9} \longrightarrow$ Alex

$= \frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3}{9} \longrightarrow$ Bruno

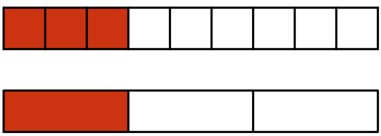
Na barra de cima, estão pintadas 7 das 9 partes, representado os $\frac{7}{9}$ da barra que foram comidos pelos dois irmãos juntos. Na barra do meio, estão pintadas 4 das 9 partes, representando os $\frac{4}{9}$ da barra comidos por Alex (sozinho). Na barra de baixo, subtraímos a parte comida por Alex (sozinho), da parte comida pelos dois irmãos juntos, mostrando que Bruno comeu 3 das 9 partes. Desse modo,

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Podemos, ainda, simplificar a fração $\frac{3}{9}$, dividindo numerador e denominador por 3:

$$\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}.$$

Assim, Bruno comeu, sozinho, $\frac{1}{3}$ da barra. A próxima figura traz uma representação geométrica para a simplificação acima. Antes de prosseguir, certifique-se de que você a entendeu.



$= \frac{3}{9}$

$= \frac{1}{3}$

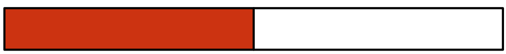
De modo análogo ao que foi feito no caso da adição, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para subtraí-las.

> **Subtração de frações com um mesmo denominador:** a diferença entre duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a diferença entre os numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações.

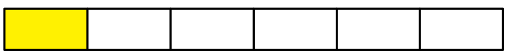
Os próximos exercícios trazem situações de adição e subtração de frações que *não possuem um mesmo denominador*.

> **Exercício 1.3** Paulo contratou João para pintar o muro de sua propriedade. João pintou $\frac{1}{2}$ do muro no primeiro dia de trabalho. No segundo dia, como teve de sair mais cedo para levar seu filho ao médico, João pintou apenas $\frac{1}{6}$ do muro. Que fração do muro João pintou nos dois primeiros dias de trabalho?

Solução. Representando o muro por uma barra, dividindo essa barra em 2 partes iguais e tomando 1 delas, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{2}$, que é exatamente a porção do muro que foi pintada no primeiro dia de trabalho.

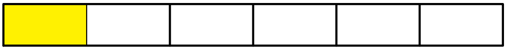
 $= \frac{1}{2}$

Dividindo essa mesma barra em 6 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{6}$, exatamente a parte do muro pintada no segundo dia.

 $= \frac{1}{6}$

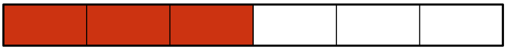
Agora, precisamos calcular a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ para obter a fração do muro pintada nos dois primeiros dias.

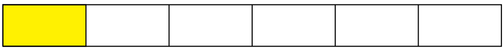
 $= \frac{1}{2}$

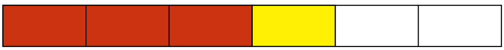
 $= \frac{1}{6}$

 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = ?$

Como essas frações não têm um mesmo denominador, a ideia é encontrar frações equivalentes a cada uma delas, as quais possuam um mesmo denominador, sendo isso o mesmo que fazemos para comparar frações. Depois, soma-se as frações equivalentes e simplifica-se o resultado. Para isso, vamos dividir cada metade da barra de cima, representando a fração $\frac{1}{2}$, em 3 partes iguais. Assim, de acordo com a próxima figura, a barra ficará dividida em 6 partes. A parte destacada maior corresponde a três dessas partes, ou seja, pode ser representada pela fração $\frac{3}{6}$.

 $= \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

 $= \frac{1}{6}$

 $= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

Portanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3},$$

ou seja, João pintou $\frac{2}{3}$ do muro nos dois primeiros dias.

■

Em geral, quando duas frações não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para somá-las.

Adição de frações com denominadores distintos: para somar duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas; em seguida, somamos essas frações. Por exemplo,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}.$$

Recomendamos os vídeos do Portal da OBMEP[1] e da Academia Khan[2] sobre adição de frações com denominadores diferentes.

Portal da OBMEP:[1]

Academia Khan:[2]

Observação 1.1 Aqui, vale uma revisão sobre como encontrar as duas frações equivalentes às frações dadas. Veja que a dificuldade é achar um denominador para essas frações. Para isso, observamos que esse denominador deve ser um múltiplo dos denominadores das duas frações originais: 4 e 6, no exemplo acima. Então, precisamos achar um número que seja múltiplo de 4 e 6 ao mesmo tempo. Uma possibilidade totalmente válida seria tomar, como denominador, o número $4 \times 6 = 24$; isso daria as frações $\frac{18}{24}$, equivalente a $\frac{3}{4}$, e $\frac{4}{24}$, equivalente a $\frac{1}{6}$. No entanto, a possibilidade 12 é mais econômica, exatamente porque 12 é o *mínimo múltiplo comum* de 4 e 6. Teremos mais a dizer sobre isso mais adiante. Por enquanto, recomendamos as atividades na página da Academia Khan[3].

Academia Khan[3]

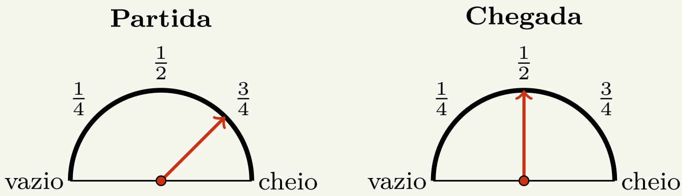
[3] https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/

[1] https://www.youtube.com/watch?v=8j2IXOiDh7U

[2] https://www.youtube.com/watch?v=gm2CUaewlaI

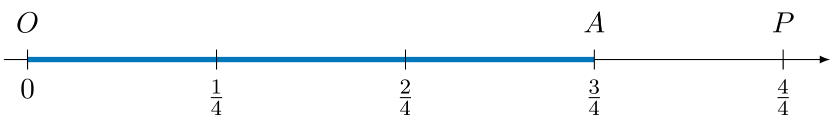
pre-algebra-fractions/pre-algebra-visualizing-equiv-frac/e/equivalent-fractions--number-lines-

Exercício 1.4 — CMF - adaptada. No painel de um automóvel há um marcador que indica a quantidade de combustível no tanque. Através de um ponteiro, o marcador indica a fração de combustível existente no tanque em relação à capacidade máxima. Quando o ponteiro aponta para a posição *cheio*, isso significa que o tanque está completamente cheio de combustível. As figuras abaixo representam o marcador de combustível no momento da partida e no momento da chegada de uma viagem.

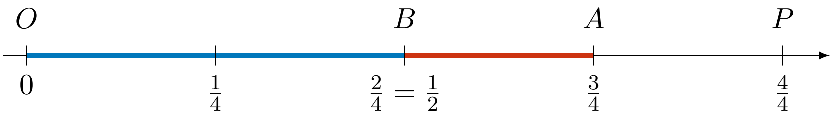


Que fração do tanque de combustível foi utilizada na viagem?

Solução. Veja que, no momento da partida, o tanque estava com $\frac{3}{4}$ da sua capacidade e, na chegada, estava com $\frac{1}{2}$ da sua capacidade. Assim, a fração que representa o total de gasolina gasto na viagem é dada pela diferença $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. O segmento OP na reta numérica abaixo representa o tanque cheio de combustível. Dividindo esse segmento em 4 segmentos iguais, cada um desses segmentos corresponde a $\frac{1}{4}$ do tanque. Logo, o segmento OA corresponde a $\frac{3}{4}$, fração do tanque que estava ocupada por combustível no momento da partida.



Agora, veja que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Assim, marcamos o ponto B, em que OB corresponde à fração do tanque ocupada por combustível no momento da chegada.



Portanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Logo, $\frac{1}{4}$ é a fração do tanque de combustível utilizada na viagem. ■

Mais uma vez, de modo análogo ao que foi feito para a adição, quando as frações não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para subtraí-las.

Subtração de frações com denominadores distintos: para calcular a diferença entre duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas; em seguida, calculamos a diferença entre essas frações. Por exemplo,

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}.$$

Mais uma vez recomendamos os vídeos do Portal da OBMEP[4] e da Academia Khan[5], agora sobre subtração de frações com denominadores diferentes.

Portal da OBMEP:[4]

Academia Khan:[5]

A ideia geral para encontrar frações equivalentes às dadas e com um mesmo denominador é a mesma que observamos no caso da adição:

[4] https://www.youtube.com/watch?v=OGhzT-sHRj0

[5] https://www.youtube.com/watch?v=fvyx-l6poPM

começamos procurando um denominador que seja múltiplo dos dois denominadores das frações iniciais: por exemplo, seu MMC.

Exercício 1.5 A professora Juliana presenteou as alunas Bruna e Bia, medalhistas em uma olimpíada de Matemática, com uma caixa cheia de livros. Elas decidiram que Bruna, por ter conquistado uma medalha de ouro, ficaria com um terço dos livros, e Bia, por ter conquistado uma medalha de prata, ficaria com um quarto dos livros. Além disso, o restante dos livros seria doado à biblioteca da escola.

(a) Que fração representa a quantidade de livros que Bruna e Bia receberam juntas?

(b) Que fração representa a quantidade de livros que foram doados à biblioteca?

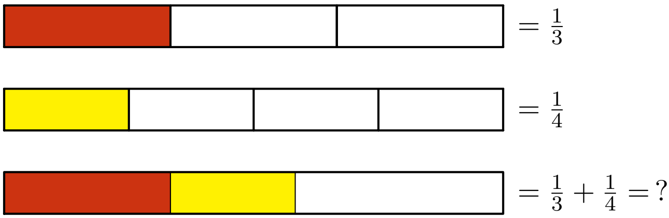
Solução. Vamos representar o total de livros contidos na caixa por uma barra. Dividindo essa barra em 3 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{3}$, parte dos livros que coube à Bruna.

$= \frac{1}{3}$

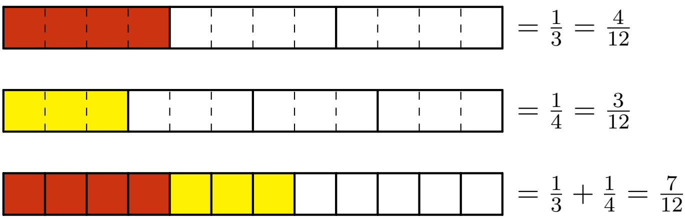
Dividindo a mesma barra em 4 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{4}$, parte dos livros que coube à Bia.

$= \frac{1}{4}$

Para responder o item (a), devemos somar as frações correspondentes às quantidades de livros recebidos pelas duas colegas. Observe a figura abaixo, onde estão representadas as frações da caixa de livros recebidas por Bruna e Bia separadamente, bem como a fração que representa o total de livros recebidos pelas duas juntas. Não fica claro quanto vale a soma.



Uma vez que as barras, representando a caixa de livros, não foram divididas em quantidades iguais de partes nas duas figuras, não podemos somar as frações diretamente. Entretanto, como $\text{MMC}(3,4) = 12$, podemos subdividir as barras de modo que cada uma passe a ter 12 pedaços iguais. Para isso, podemos subdividir cada uma das 3 partes da primeira barra em 4 pedaços iguais; e cada uma das 4 partes da segunda barra em 3 pedaços iguais, conforme a próxima representação.



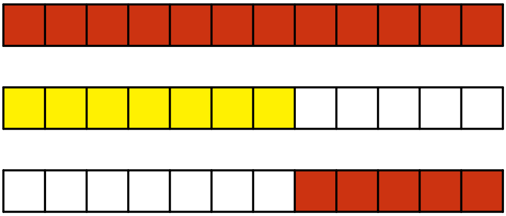
Assim, obtemos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$ equivalentes, respectivamente, às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, dadas no enunciado. Então, para somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, somamos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Assim, a fração que corresponde à quantidade de livros recebidos por Bruna e Bia, juntas, é $\frac{7}{12}$: a resposta para o item (a).

Finalmente, para descobrir a fração da caixa que representa os livros doados à biblioteca, devemos subtrair $\frac{7}{12}$, que é a quantidade de livros recebidos por Bruna e Bia, de 1, que representa a barra cheia.

Observe que, na barra de cima temos uma primeira fração que representa o total de livros na caixa, na barra do meio temos uma segunda fração que representa a quantidade de livros recebidos pelas duas alunas e, na barra de baixo, temos uma terceira fração que dá a



diferença entre a primeira e a segunda, ou seja, temos a fração

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}.$$

Portanto, a fração que representa os livros que foram doados à biblioteca é $\frac{5}{12}$: a resposta para o item (b). ■

Observação 1.2 Conforme observamos anteriormente, podemos somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ executando os seguintes passos.

(a) Encontramos uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$, multiplicando numerador e denominador pelo denominador da fração $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 4}{3\times 4} = \frac{4}{12}.$$

(b) Encontramos uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$, multiplicando numerador e denominador pelo denominador da fração $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{12}.$$

(c) Somamos as frações encontradas, que agora possuem um mesmo denominador:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Agora, tomando como exemplo a soma

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8}$$

e procedendo de maneira semelhante, temos

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 8}{6\times 8}+\frac{3\times 6}{8\times 6}=\frac{8}{48}+\frac{18}{48}=\frac{8+18}{48}=\frac{26}{48}.$$

Por outro lado, observando que

$$\mathrm{MMC}(6,8)=24,\ \ 24\div 6=4\ \text{ e }\ 24\div 8=3,$$

vemos que também é possível encontrar frações equivalentes a $\frac{1}{6}$ e a $\frac{3}{8}$, com um mesmo denominador, multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração por 4 e o numerador e o denominador da segunda por 3. Assim fazendo, temos

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 4}{24}+\frac{3\times 3}{24}=\frac{4}{24}+\frac{9}{24}=\frac{13}{24}.$$

Conforme já observamos, a diferença entre os dois métodos anteriormente descritos é que, em muitos casos, utilizando o MMC dos denominadores das frações originais, a fração obtida para a soma é uma forma simplificada daquela que seria obtida utilizando o produto dos denominadores.

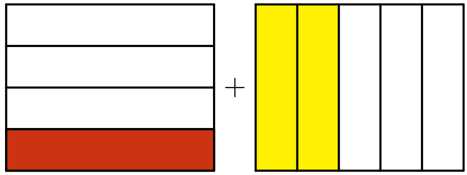
Exercício 1.6 Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram $\frac{1}{4}$ do percurso na primeira hora, $\frac{2}{5}$ do percurso na segunda hora e 14 quilômetros na terceira e última hora de passeio. Quantos quilômetros tem o percurso total do passeio?

(a) 14. (b) 16. (c) 40. (d) 36.

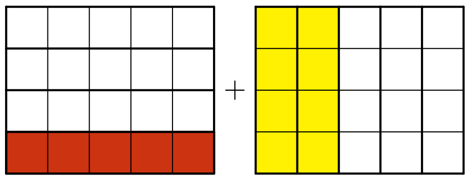
Solução. A ideia para resolver o problema é calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora de passeio. Isto porque já sabemos o valor, 14 quilômetros, da distância percorrida durante a terceira hora. Como veremos, esses dados, em conjunto, nos permitirão calcular o total do percurso.

Para calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora, devemos somar as frações correspondentes ao total percorrido na primeira e segunda horas e, em seguida, subtrair o resultado de 1 inteiro, que corresponde ao percurso total do passeio.

Para somar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, vamos proceder, como antes, encontrando duas frações, uma equivalente a $\frac{1}{4}$ e outra equivalente a $\frac{2}{5}$, as quais tenham denominadores iguais. Na figura seguinte mostramos uma maneira diferente de visualizar este método.



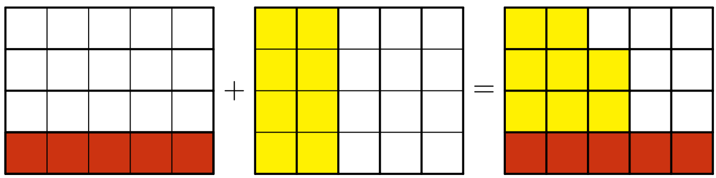
Ainda não há como somar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, pois o retângulo, que representa todo o percurso percorrido pelos ciclistas, foi dividido em 4 partes na figura da esquerda e em 5 partes na figura da direita. Entretanto, podemos representar as mesmas frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ subdividindo, cada $\frac{1}{4}$ da figura da esquerda, em 5 partes iguais e, cada $\frac{1}{5}$ da figura da direita, em 4 partes iguais. Note que, na figura a seguir, isso equivale a dividir o retângulo da esquerda em cinco *colunas* iguais e o da direita em quatro *linhas* iguais.



Agora, observe que as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{20}$ são **equivalentes**, bem como as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$. Além disso, é fácil somar as frações $\frac{5}{20}$ e $\frac{8}{20}$, pois ambas são frações de um inteiro que foi dividido em uma mesma quantidade de partes: $(5\times4 = 4\times5 = 20$ partes$)$. Assim,

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20},$$

fração representada na última figura abaixo.

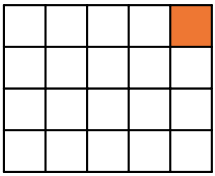


Observemos, agora, que resta a fração $1 - \frac{13}{20}$ para completar o percurso, com

$$1 - \frac{13}{20} = \frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20},$$

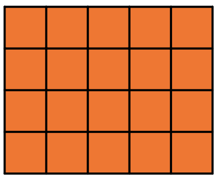
sendo essa fração a parte não pintada do lado direito da igualdade da figura anterior. De fato, o percurso completo foi dividido em 20 quadradinhos dos quais 7 não foram marcados.

Por fim, lembre-se que essa fração, $\frac{7}{20}$, corresponde aos 14 quilômetros percorridos na terceira hora de passeio. Portanto, a fração $\frac{1}{20}$, correspondente ao quadrado menor pintado na figura seguinte, equivale a $14 \div 7 = 2$ quilômetros.



$= \frac{1}{20} \longleftrightarrow 14 \div 7 = 2$ quilômetros

Logo, o percurso total, que tem 20 quadrados, corresponde a $20 \times 2 = 40$ quilômetros, conforme a sua ilustração na próxima figura. ■



$= \frac{20}{20} \longleftrightarrow 20 \times 2 = 40$ quilômetros

Observação 1.3 Resumidamente, a soma das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ foi calculada do seguinte modo.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}.$$

1.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 1.7 Representе geometricamente as operações com frações listadas abaixo utilizando setores circulares (“pizzas”) ou barras.

(a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$.

(b) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$.

(c) $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$.

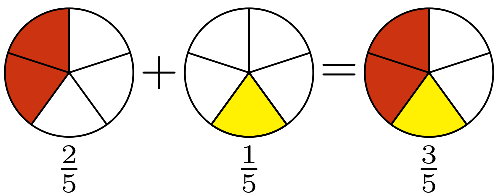
(d) $\frac{4}{7} - \frac{1}{7}$.

(e) $\frac{5}{5} - \frac{2}{5}$.

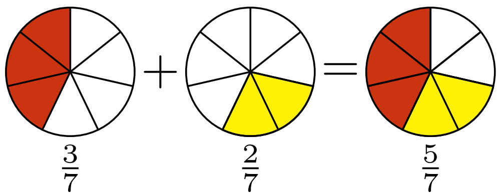
(f) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$.

Solução. As figuras abaixo mostram as representações geométricas das operações utilizando “pizzas”.

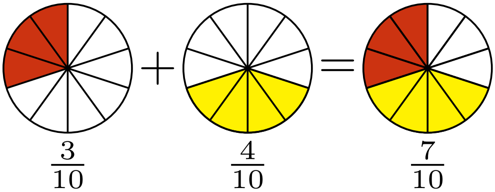
(a)



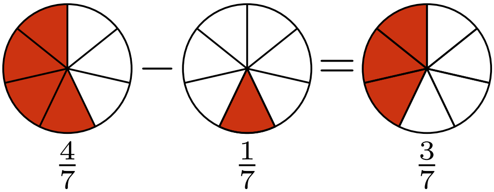
(b)



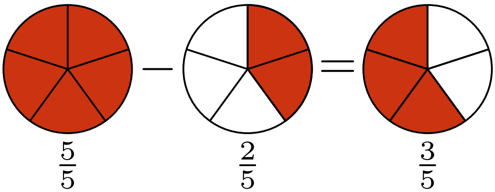
(c)



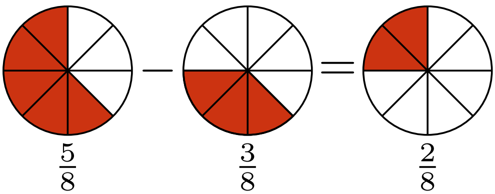
(d)



(e)

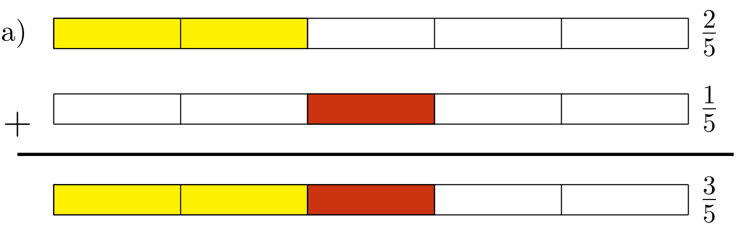


(e)

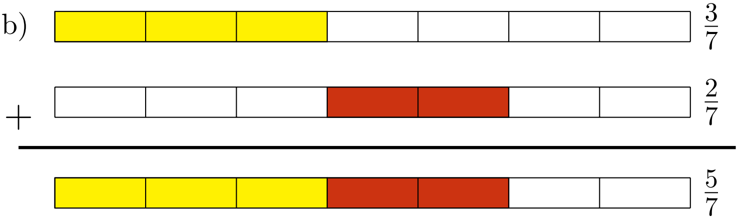


Já as representações utilizando barras são mostradas nas próximas figuras.

(a)



(b)

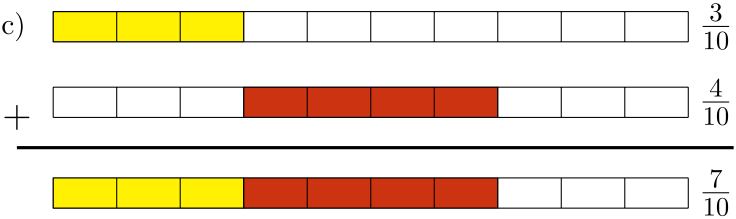


$\frac{3}{7}$

$+\ \frac{2}{7}$

$\frac{5}{7}$

(c)

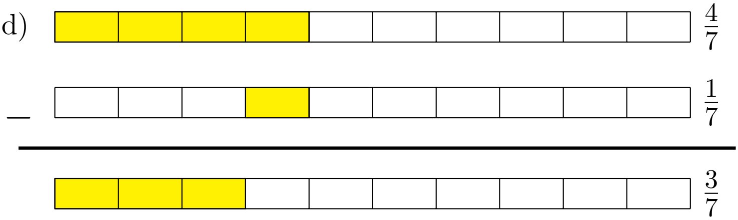


$\frac{3}{10}$

$+\ \frac{4}{10}$

$\frac{7}{10}$

(d)

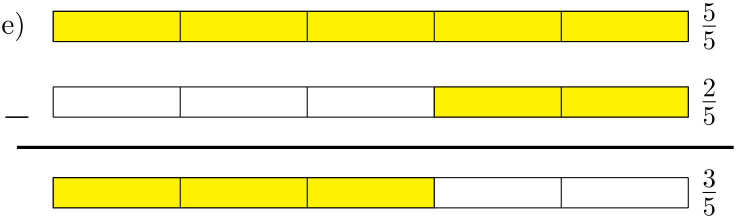


$\frac{4}{7}$

$-\ \frac{1}{7}$

$\frac{3}{7}$

(e)

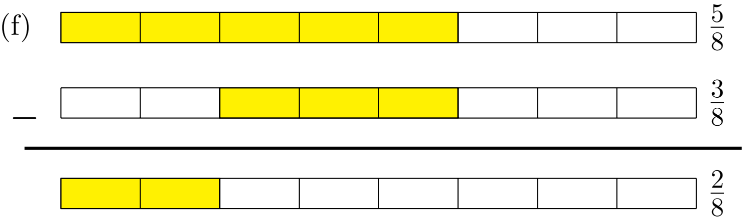


$\frac{5}{5}$

$-\ \frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$

(f)



■

Exercício 1.8 Numa pizzaria, Gabriel comeu $\frac{5}{8}$ de uma pizza e Nando comeu $\frac{2}{8}$ da mesma pizza.

(a) Que fração da pizza os dois comeram juntos?
(b) Quem comeu mais pizza, João ou Carlos?
(c) Que fração de pizza um deles comeu a mais que o outro?

Solução. (a) A fração da pizza que os dois comeram juntos é igual à soma das frações que cada um deles comeu, ou seja,

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5+2}{8} = \frac{7}{8}.$$

(b) Para determinar quem comeu mais pizza, devemos verificar qual das frações $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{8}$ é a maior. Como as duas têm o mesmo denominador, a maior é $\frac{5}{8}$, pois é a que possui o maior numerador. Assim,

$$\frac{5}{8} > \frac{2}{8},$$

ou seja, Gabriel comeu mais pizza que Nando.

(c) A fração da pizza que Gabriel comeu a mais que Nando é igual à diferença entre $\frac{5}{8}$, fração comida por Gabriel, e $\frac{2}{8}$, fração comida por Nando, ou seja,

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}.$$

■

Exercício 1.9 João encheu o tanque do seu carro. Gastou $\frac{2}{5}$ do tanque para ir de casa ao trabalho durante a semana e $\frac{1}{5}$ do tanque para passear no final de semana. Que fração do tanque restou?

Exercício 1.10 Utilizando tinta de cor azul, Adamastor pintou $\frac{2}{10}$ da área de um muro, inicialmente pintado na cor branca, no primeiro dia de trabalho; $\frac{3}{10}$ da área do muro no segundo dia e $\frac{4}{10}$ no terceiro dia. No quarto dia, Adamastor percebeu uma diferença na tonalidade da tinta que foi utilizada e teve de repintar de branco $\frac{1}{10}$ da área do muro, relativa à parte que ficou pintada de cor diferente. Que fração do muro ficou pintada de azul após o quarto dia de trabalho?

(a) $\frac{2}{5}$.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) $\frac{7}{10}$.

(d) $\frac{4}{5}$.

(e) $\frac{9}{10}$.

Solução. Devemos somar as frações das áreas do muro pintadas, de azul, nos três primeiros dias e subtrair, do resultado, a fração do muro que foi pintada de branco no quarto dia. Portanto, a fração do muro que ficou pintada de azul após o quarto dia de trabalho é

$$\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{2+3+4-1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 1.11 Mariana está lendo um livro de romance que tem 150 páginas. Ontem ela leu 59 e hoje ela leu 25 das páginas desse livro.

(a) Que fração das páginas do livro Mariana já leu?
(b) Que fração representa as páginas que Mariana ainda não leu?

Solução. (a) Ontem Mariana leu $\frac{59}{150}$ e hoje $\frac{25}{150}$ das páginas do livro. Logo, a fração do livro que Mariana já leu é

$$\frac{59}{150}+\frac{25}{150}=\frac{59+25}{150}=\frac{84}{150}=\frac{84\div 6}{150\div 6}=\frac{14}{25}.$$

(b) Por outro lado, a fração do livro que Mariana ainda não leu é igual a

$$\frac{25}{25}-\frac{14}{25}=\frac{11}{25}.$$

■

Exercício 1.12 Gabi foi às compras e gastou $\frac{1}{3}$ do dinheiro que possuía, restando-lhe, ainda, R$ 240,00. Quanto Gabi possuía antes de ir às compras?

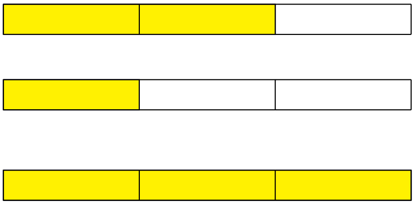
(a) R$ 80,00.
(b) R$ 120,00.
(c) R$ 240,00.
(d) R$ 360,00.
(e) R$ 480,00.

Solução. Como Gabi gastou $\frac{1}{3}$ do que tinha com as compras, a fração do dinheiro que lhe restou foi $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Representamos na reta numérica abaixo a fração $\frac{2}{3}$, que corresponde aos R$ 240,00 que restaram.

Na próxima reta numérica, podemos observar a representação geométrica de $\frac{1}{3}$, que correspode a R$ 240,00 $\div\, 2 =$ R$ 120,00.

Finalmente, na reta numérica logo abaixo, podemos observar a representação geométrica de $\frac{3}{3}$, que correspode a $3 \times$R$ 120,00 = R$ 360,00.

Logo, Gabi tinha R$ 360,00 antes de fazer as compras, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(d)**.
Uma representação geométrica alternativa para as frações envolvidas nesse problema é a seguinte.



$\frac{2}{3} \longrightarrow$ R$ 240,00

$\frac{1}{3} \longrightarrow$ R$ 240,00 $\div$ 2 = R$ 120,00

$\frac{3}{3} \longrightarrow$ $3 \times$R$ 140,00 = R$ 360,00

■

Exercício 1.13 — Canguru. Numa classe, os alunos nadam somente ou dançam somente ou fazem as duas coisas. Três quintos dos alunos da classe nadam e três quintos dançam. Há exatamente cinco alunos que fazem as duas coisas, isto é, nadam e dançam. Quantos alunos há na classe?

(a) 15.
(b) 20.
(c) 25.
(d) 30.
(e) 35.

Solução. Somando as frações que representam os alunos que nadam e os alunos que dançam, obtemos

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}.$$

Note que a fração $\frac{6}{5}$ é maior que a fração $\frac{5}{5}$, que representa o total de alunos na classe. De fato, a diferença $\frac{6}{5} - \frac{5}{5} > 0$ ocorre porque a fração que corresponde aos alunos que praticam as duas atividades foi somada duas vezes, tanto na fração dos alunos que nadam quanto na fração dos alunos que dançam. Assim, essa diferença corresponde aos alunos que praticam as duas atividades. Logo,

$$\frac{1}{5} \longrightarrow 5 \text{ alunos.}$$

$$\frac{5}{5} \longrightarrow 5{\times}5 = 25 \text{ alunos.}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Sequência 2

Exercício 1.14 Encontre os resultados das operações com frações listadas abaixo.

(a) $\frac{7}{5} + \frac{2}{3}$.

(b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$.

(c) $\frac{4}{8} + \frac{2}{3}$.

(d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$.

(e) $\frac{3}{7} - \frac{1}{6}$.

(f) $\frac{1}{8} - \frac{1}{9}$.

(g) $\frac{7}{5} - \frac{2}{3}$.

(h) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$.

Solução. Encontrando frações equivalentes às frações que compõem as somas e que tenham um mesmo denominador, obtemos

(a) $\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=\frac{7\times 3}{5\times 3}+\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{21}{15}+\frac{10}{15}=\frac{21+10}{15}=\frac{31}{15}$.

(b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\times 3}{4\times 3}+\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$.

(c) $\frac{4}{8}+\frac{2}{3}=\frac{4\times 3}{8\times 3}+\frac{2\times 8}{3\times 8}=\frac{12}{24}+\frac{16}{24}=\frac{12+16}{24}=\frac{28}{24}=\frac{28\div 4}{24\div 4}=\frac{7}{6}$.

(d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{1\times 4}{2\times 4}+\frac{3\times 2}{4\times 2}+\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=\frac{4+6+5}{8}=\frac{15}{8}$.

(e) $\frac{3}{7}-\frac{1}{6}=\frac{3\times 6}{7\times 6}-\frac{1\times 7}{6\times 7}=\frac{18}{42}-\frac{7}{42}=\frac{18-7}{42}=\frac{11}{42}$.

(f) $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{1\times 9}{8\times 9}-\frac{1\times 8}{9\times 8}=\frac{9}{72}-\frac{8}{72}=\frac{1}{72}$.

(g) $\frac{7}{5}-\frac{4}{3}=\frac{7\times 3}{5\times 3}-\frac{4\times 5}{3\times 5}=\frac{21}{15}-\frac{20}{15}=\frac{21-20}{15}=\frac{1}{15}$.

(h) $\frac{3}{5}-\frac{4}{9}=\frac{3\times 9}{5\times 9}-\frac{4\times 5}{9\times 5}=\frac{27}{45}-\frac{20}{45}=\frac{7}{45}$.

■

Exercício 1.15 Se $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{4}{9}$ e $z=\frac{1}{5}$, calcule as seguintes expressões.

(a) $x+y$.
(b) $x-z$.
(c) $y+x-z$.
(d) $x+y+z$.

Solução. Substituindo os valores de x, y e z nas expressões algébricas, obtemos as seguintes expressões numéricas.

(a)

$$x+y=\frac{3}{2}+\frac{4}{9}=\frac{3\times 9}{2\times 9}+\frac{4\times 2}{9\times 2}=\frac{27}{18}+\frac{8}{18}=\frac{27+8}{18}=\frac{35}{18}.$$

(b)

$$x-z=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3\times 5}{2\times 5}-\frac{1\times 2}{5\times 2}=\frac{15}{10}-\frac{2}{10}=\frac{15-2}{10}=\frac{13}{10}.$$

(c)

$$y + x - z = \frac{4}{9} + \frac{3}{2} - \frac{1}{5} = \frac{4\times2\times5}{9\times2\times5} + \frac{3\times9\times5}{2\times9\times5} - \frac{1\times9\times2}{5\times9\times2}$$

$$= \frac{40}{90} + \frac{135}{90} - \frac{18}{90} = \frac{40 + 135 - 18}{90} = \frac{157}{18}.$$

(d)

$$x + y + z = \frac{3}{2} + \frac{4}{9} + \frac{1}{5} = \frac{3\times9\times5}{2\times9\times5} + \frac{4\times2\times5}{9\times2\times5} + \frac{1\times9\times2}{5\times9\times2}$$

$$= \frac{135}{90} + \frac{40}{90} + \frac{18}{90} = \frac{135 + 40 + 18}{90} = \frac{193}{18}.$$

■

Exercício 1.16 Calcule o valor da expressão numérica

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right).$$

Exercício 1.17 — UFMG - adaptado. Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Se o sorvete de chocolate comprado por Paula estivesse em um único pote, a que fração desse pote ele corresponderia?

(a) $\frac{2}{5}$. (b) $\frac{3}{5}$. (c) $\frac{5}{12}$. (d) $\frac{5}{6}$.

Solução. Um dos potes continha quantidades iguais de chocolate, creme e morango, logo, a fração correspondente à quantidade de chocolate é $\frac{1}{3}$. O outro pote continha quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha, assim, a fração correspondente à quantidade de chocolate é $\frac{1}{2}$. Como os dois potes continham as mesmas quantidades de sorvete, as frações de chocolate nos dois potes são frações de uma mesma unidade, logo, se todo o sorvete de chocolate estivesse em um único pote, a fração desse pote que ele corresponderia é

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

Exercício 1.18 Três amigas planejavam preencher um álbum de figurinhas da copa. Karla contribuiu com $\frac{1}{6}$, Paula com $\frac{2}{3}$ e Cristina contribuiu com $\frac{1}{8}$ das figurinhas.

(a) Supondo que não havia figurinhas repetidas, que fração do álbum foi preenchida com as contribuições das três amigas?
(b) Que fração ainda falta preencher para completar o álbum?

Solução. (a) Supondo que não havia figurinhas repetidas, a fração do álbum, que foi preenchida com as contribuições das três amigas, é igual à soma

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{8}=\frac{1\times 4}{6\times 4}+\frac{2\times 8}{3\times 8}+\frac{1\times 3}{8\times 3}=\frac{4}{24}+\frac{16}{24}+\frac{3}{24}=\frac{4+16+3}{24}=\frac{23}{24}.$$

(b) A fração que ainda falta preencher, para completar o álbum, é

$$\frac{24}{24}-\frac{23}{24}=\frac{1}{24}.$$

■

Exercício 1.19 No dia do lançamento de um prédio residencial, $\frac{1}{3}$ dos apartamentos foram vendidos e $\frac{1}{6}$ foram reservados. Que fração corresponde aos apartamentos que não foram vendidos ou reservados?

Exercício 1.20 Maurício fez um suco misto de laranja e acerola. Ele misturou metade de um copo de suco de acerola com $\frac{1}{3}$ do mesmo copo de suco de laranja. Calcule a fração que falta para ter o copo cheio.

(a) $\frac{5}{6}$. (b) $\frac{1}{6}$. (c) $\frac{2}{5}$. (d) $\frac{1}{3}$. (e) $\frac{2}{3}$.

Exercício 1.21 — ENEM. Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares. Do total de lugares, reservou $\frac{2}{5}$ das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, $\frac{3}{8}$ para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele. Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

(a) 27.
(b) 40.
(c) 45.
(d) 74.
(e) 81.

Solução. O enunciado diz que $\frac{2}{5}$ das vagas foram reservadas para as pessoas que residem na capital, logo, a quantidade de vagas reservadas para essas pessoas é

$$\frac{2}{5} \cdot 120 = \frac{120}{5} \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48.$$

Por outro lado, $\frac{3}{8}$ das vagas são reservadas para as pessoas que moram no interior. Desse modo, o total de vagas reservadas para essas pessoas é

$$\frac{3}{8} \cdot 120 = \frac{120}{8} \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45.$$

Como o restante das vagas está reservado para as pessoas que residem fora do estado, essa quantidade é igual a

$$120 - (48 + 45) = 120 - 93 = 27.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Uma solução alternativa para o problema 1.21 consiste em somar as frações referentes às vagas reservadas para pessoas da capital e do interior, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, respectivamente; calcular a fração que corresponde às vagas reservadas para pessoas de fora do estado de São Paulo, que é a fração faltando para completar uma unidade; e calcular essa última fração de 120. Com efeito,

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{2\times 8}{5\times 8}+\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{16+15}{40}=\frac{31}{40};$$

$$\frac{40}{40}-\frac{31}{40}=\frac{9}{40};$$

$$\frac{9}{40}\cdot 120=\frac{120}{40}\cdot 9=3\cdot 9=27.$$

Exercício 1.22 — Unesp. Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar $2/5$ da estrada e a outra os 81 km restantes, a extensão dessa estrada é de:

(a) 125 km.
(b) 135 km.
(c) 142 km.
(d) 145 km.
(e) 160 km.

Exercício 1.23 — CMRJ. O valor da expressão numérica

$$\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}$$

é

(a) 1. (b) $\frac{63}{64}$. (c) $\frac{31}{32}$. (d) $\frac{15}{16}$. (e) $\frac{7}{8}$.

Solução. Temos:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{\frac{8}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{\frac{16}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{\frac{32}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{\frac{64}{63}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}+\frac{1}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{8}+\frac{1}{\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{15}}{8}+\frac{1}{\cancel{31}}\cdot\frac{\cancel{31}}{8}+\frac{1}{\cancel{63}}\cdot\frac{\cancel{63}}{8}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$

$$=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}$$

$$=\frac{63}{64}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Sequência 3

Exercício 1.24 — Canguru. Partindo da extremidade esquerda de um cano, uma formiguinha andou $\frac{2}{3}$ do seu comprimento. Uma joaninha, que havia partido da extremidade direita do mesmo cano, andou $\frac{3}{4}$ do comprimento deste. Nessa situação, qual fração do comprimento do cano representa a distância entre os dois bichinhos?

(a) $\frac{3}{8}$. (b) $\frac{1}{12}$. (c) $\frac{5}{7}$. (d) $\frac{1}{2}$. (e) $\frac{5}{12}$.

Exercício 1.25 — Canguru. Numa escola, $\frac{2}{3}$ dos alunos gostam de Matemática e $\frac{3}{4}$ dos alunos gostam de Português. Qual é a menor fração que pode representar os alunos que gostam de ambas as matérias?

(a) $\frac{1}{12}$.
(b) $\frac{5}{12}$.
(c) $\frac{1}{2}$.
(d) $\frac{5}{7}$.

(e) $\frac{8}{9}$.

Solução. A soma das frações que representam as quantidades de alunos que gostam de Matemática e de Português é

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}.$$

Desse modo, pelo menos

$$\frac{17}{12}-\frac{12}{12}=\frac{17-12}{12}=\frac{5}{12}$$

dos alunos gostam de ambas as matérias, pois se r é a fração dos alunos que gostam de ambas as matérias, devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-r\leq 1 &\Longrightarrow \frac{17}{12}-r\leq 1\\ &\Longrightarrow r\geq \frac{17}{12}-\frac{12}{12}\\ &\Longrightarrow r\geq \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

A fração que representa a quantidade de alunos que gostam de ambas as matérias é maior que $\frac{5}{12}$ quando há alunos que não gostam de nenhuma das duas. ■

Exercício 1.26 — CMM - adaptado. Sávio fez uma pesquisa com os moradores de seu condomínio sobre a prática de coleta seletiva de lixo. Ele constatou que $\frac{3}{4}$ dos entrevistados praticam esse tipo de coleta e $\frac{1}{5}$ dos entrevistados sequer sabem o que isso significa. Dessa maneira, a fração que representa a quantidade de pessoas que sabem o que significa a coleta seletiva mas não a praticam é:

(a) $\frac{1}{4}$. (b) $\frac{1}{9}$. (c) $\frac{1}{10}$. (d) $\frac{1}{15}$. (e) $\frac{1}{20}$.

Solução. Uma vez que $\frac{3}{4}$ dos estrevistados praticam a coleta seletiva, a fração que representa a quantidade de entrevistados que não a praticam é

$$\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Agora, dentre os entrevistados que não praticam a coleta seletiva, há os que sabem e os que não sabem o que ela significa. Uma vez que a fração dos que não sabem o que esse tipo de coleta significa é igual a $\frac{1}{5}$, a fração que representa os que sabem o que significa a coleta seletiva, mas não a praticam, é

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1\times5}{4\times5} - \frac{1\times4}{5\times4} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}.$$

Assim, a alternativa correta é da letra **(e)**. ■

Exercício 1.27 — CMPA. Os animais de um pequeno zoológico se dividem em três classes: mamíferos, aves e répteis. Sabe-se que, do total de animais desse zoológico, $\frac{2}{5}$ são mamíferos, $\frac{3}{8}$ são aves e os 270 animais restantes são répteis. A quantidade total de animais desse zoológico é igual a:

(a) 930.
(b) 1200.
(c) 1330.
(d) 1470.
(e) 1540.

Solução. A fração que representa a soma das quantidades de mamíferos e aves é

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2\times8}{5\times8} + \frac{3\times5}{8\times5} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40}.$$

Logo, a fração que representa os animais restantes, ou seja, os répteis, é

$$\frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}.$$

Portanto,

$$\frac{9}{40} \longrightarrow 270 \text{ animais}$$

$$\frac{1}{40} \longrightarrow 270 \div 9 = 30 \text{ animais}$$

$$\frac{40}{40} \longrightarrow 40\times30 = 1200 \text{ animais}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 1.28 — Canguru. Miguel tem cães, vacas, gatos e cangurus no seu sítio. Ao todo são 24 animais, sendo que $\frac{1}{8}$ deles são cães, $\frac{3}{4}$ **não** são vacas e $\frac{2}{3}$ **não** são gatos. Quantos cangurus há no sítio?

(a) 4.
(b) 5.
(c) 6.
(d) 7.
(e) 8.

Solução. A quantidade de cães é igual a

$$\frac{1}{8} \cdot 24 = \frac{24}{8} = 3.$$

Como $\frac{3}{4}$ representa a quantidade de animais que não são vacas, a fração que representa a quantidade de vacas é $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Assim, a quantidade de vacas é igual a

$$\frac{1}{4} \cdot 24 = 6.$$

De modo similar, uma vez que $\frac{2}{3}$ representa a quantidade de animais que não são gatos, a fração que representa a quantidade de gatos é $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Logo, a quantidade de gatos é igual a

$$\frac{1}{3} \cdot 24 = 8.$$

Portanto, a quantidade de gangurus é igual a

$$24 - (3 + 6 + 8) = 24 - 17 = 7.$$

A alternativa correta é a da letra **(d)**.

Solução alternativa: a quantidade de cães é igual a

$$\frac{1}{8} \cdot 24 = \frac{24}{8} = 3.$$

Já a quantidade de animais que não são vacas, isto é, são cães, gatos ou cangurus, é igual a

$$\frac{3}{4} \cdot 24 = \frac{24}{4} \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18.$$

Desse modo, a soma das quantidades de gatos e cangurus é igual a

$$18 - 3 = 15.$$

Por outro lado, a quantidade de animais que não são gatos, ou seja, são cães, vacas ou cangurus, é igual a

$$\frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{24}{3} \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16.$$

Logo, a soma das quantidades de vacas e cangurus é igual a

$$16 - 3 = 13.$$

Assim, a soma da quantidade de vacas com a quantidade de gatos com o dobro da quantidade de cangurus é igual a

$$15 + 13 = 28.$$

Agora, a soma das quantidades de vacas, gatos e cangurus é igual a

$$24 - 3 = 21.$$

Portanto, a quantidade de cangurus é igual a

$$28 - 21 = 7.$$

A alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 1.29 Certa quantia foi repartida entre três pessoas da seguinte maneira: a primeira recebeu $\frac{2}{3}$ da quantia mais R$ 5,00; a segunda recebeu $\frac{1}{5}$ da quantia mais R$ 12,00; e a terceira recebeu o restante, no valor de R$ 15,00. Qual a quantia que foi repartida?

(a) R$ 32,00.
(b) R$ 120,00.
(c) R$ 160,00.
(d) R$ 240,00.
(e) R$ 300,00.

Solução. Uma vez que R\$ 5,00 + R\$ 12,00 = R\$ 17,00 e

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2\times5}{3\times5}+\frac{1\times3}{5\times3}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15},$$

as duas primeiras pessoas receberam, juntas, $\frac{13}{15}$ da quantia mais R\$ 17,00. Desse modo, a quantia que coube à terceira pessoa, somada com R\$ 17,00, ou seja, R\$ 17,00 + R\$ 15,00 = R\$ 32,00, corresponde à fração

$$\frac{15}{15}-\frac{13}{15}=\frac{15-13}{15}=\frac{2}{15},$$

extamente o que falta para completar a fração unidade ($1=\frac{15}{15}$), representando o total da quantia que foi repartida. Portanto, temos

$$\frac{2}{15}\longrightarrow \text{R\$ } 32{,}00$$

$$\frac{1}{15}\longrightarrow \text{R\$ } 32{,}00\div 2=\text{R\$ } 16{,}00$$
$$\frac{15}{15}\longrightarrow 15\times\text{R\$ } 16{,}00=\text{R\$ } 240{,}00$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 1.30 Uma fortuna foi repartida entre três filhos do seguinte modo: uma filha solteira recebeu $\frac{3}{7}$ da herança mais R\$ 8000,00; o filho menor recebeu $\frac{3}{8}$ mais R\$ 5000,00 e a filha casada recebeu os R\$ 42.000,00 restantes. Quanto recebeu o filho menor?

Exercício 1.31 Uma torneira enche um tanque em 6 horas e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Sabendo que o tanque encontra-se vazio, se as duas torneiras foram abertas ao mesmo tempo, em quantas horas elas encherão o tanque?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{6}$ do tanque e a outra enche $\frac{1}{3}$ do mesmo tanque. Desse modo, se as duas forem abertas ao mesmo tempo, em 1 hora encherão

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

do tanque. Logo, se o tanque estiver vazio e as torneiras forem abertas juntas, o tanque estará completamente cheio em 2 horas. ■

Exercício 1.32 Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas, sozinha, enche o tanque em 7 horas. Em quanto tempo a outra torneira, sozinha, encheria o tanque?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{4}$ do tanque e as duas juntas enchem $\frac{1}{7}$ do mesmo tanque. Desse modo, em 1 hora, a outra torneira encherá

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{1\times 7}{4\times 7}-\frac{1\times 4}{7\times 4}=\frac{7}{28}-\frac{4}{28}=\frac{7-4}{28}=\frac{3}{28}$$

do tanque. Assim, essa torneira enche $\frac{3}{28}$ do tanque em 60 minutos. Logo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{3}{28}\longrightarrow 60\,\text{min}$$

$$\frac{1}{28}\longrightarrow 60\,\text{min}\div 3=20\,\text{min}$$

$$\frac{28}{28}\longrightarrow 28\times 20\,\text{min}=560\,\text{min}$$

Ou seja, a segunda torneira, sozinha, enche completamente o tanque em $560\,\text{min}=9\,\text{h}20\,\text{min}$. ■

Sequência 4

Exercício 1.33 — OBMEP. Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=\frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a+b$?

(a) 5. (b) 7. (c) 14. (d) 20. (e) 31.

Solução. Veja que

$$\frac{31}{33}=\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=\frac{a\times 3}{11\times 3}+\frac{b\times 11}{3\times 11}=\frac{3a}{33}+\frac{11b}{33}=\frac{3a+11b}{33}.$$

Assim, $3a + 11b = 31$. Desse modo, procuramos um múltiplo de 3 positivo que somado a um múltiplo de 11, também positivo, resulte em 31. Como $31 - 11 = 20$ não é múltiplo de 3 e $31 - 22 = 9$ é múltiplo de 3, obtemos

$$3a = 9 \Longrightarrow a = 3$$

e

$$11b = 22 \Longrightarrow b = 2.$$

Portanto, $a + b = 5$. A alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 1.34 — OBMEP. Elisa tem 46 livros de Ciências e outros de Matemática e Literatura. Sabendo que um nono dos seus livros são de Matemática e um quarto são de Literatura, quantos livros de Matemática ela possui?

(a) 23. (b) 18. (c) 8. (d) 9. (e) 36.

Solução. A fração que representa a somas das quantidades de livros de Matemática e de Lietratura que Elisa possui é

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{4+9}{36} = \frac{13}{36}.$$

Assim, a fração que corresponde aos livros e Ciências é

$$\frac{36}{36} - \frac{13}{36} = \frac{36-13}{36} = \frac{23}{36}.$$

Desse modo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{23}{36} \longrightarrow 46 \text{ livros}$$

$$\frac{1}{36} \longrightarrow 46 \div 23 = 2 \text{ livros}$$

$$\frac{36}{36} \longrightarrow 36{\times}2 = 72 \text{ livros}$$

Portanto, Elisa possui ao todo 72 livros, logo, a quantidade de livros de Matemática que ela possui é

$$\frac{1}{9} \cdot 72 = \frac{72}{9} = 8.$$

A alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Não é necessário encontrar o total de livros que Elisa possui antes de encontrar a quantidade de livros de Matemática que ela possui. De fato, como $\frac{1}{9}$ dos livros que ela possui são de Matemática e $\frac{1}{9} = \frac{1\times4}{9\times4} = \frac{4}{36}$, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{23}{36} \longrightarrow 46 \text{ livros}$$

$$\frac{1}{36} \longrightarrow 46 \div 23 = 2 \text{ livros}$$

$$\frac{4}{36} \longrightarrow 4\times2 = 8 \text{ livros}$$

Assim Elisa possui 8 livros de Matemática.

Exercício 1.35 Duas torneiras enchem um tanque em 6 e 7 horas, respectivamente. Há um ralo no fundo do tanque, que o esvazia completamente em exatamente 2 horas, se o tanque estiver cheio e as torneiras fechadas. Estando o tanque cheio e abrindo-se as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{6}$ do tanque e a outra enche $\frac{1}{7}$ do mesmo tanque. Abertas simultaneamente, em 1 hora, as duas enchem

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1\times7}{6\times7} + \frac{1\times6}{7\times6} = \frac{7}{42} + \frac{6}{42} = \frac{6+7}{42} = \frac{13}{42}.$$

Por outro lado, o ralo esvazia $\frac{1}{2}$ do tanque em 1 hora, pois necessita de 2 horas para esvaziá-lo completamente. Agora, como $\frac{1}{2} = \frac{21}{42} > \frac{13}{42}$, o ralo, em cada hora, retira mais água do que o que as torneiras conseguem colocar. Desse modo, se o tanque estiver cheio, com os ralos e torneiras abertos, o tanque ficará vazio. De fato, em $1\,\text{h} = 60\,\text{min}$, a fração de água que o tanque terá perdido é

$$\frac{1}{2} - \frac{13}{42} = \frac{21}{42} - \frac{13}{42} = \frac{8}{42} = \frac{8\div2}{42\div2} = \frac{4}{21}.$$

Assim, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{4}{21} \longrightarrow 60\,\text{min}$$

$$\frac{1}{21} \longrightarrow 60\,\text{min} \div 4 = 15\,\text{min}$$
$$\frac{21}{21} \longrightarrow 21{\times}15\,\text{min} = 315\,\text{min}$$

Portanto, com os ralos e torneiras abertos e o tanque completamente cheio, depois de $315\,\text{min} = 5\,\text{h}15\,\text{min}$ o tanque ficará completamente vazio. ■

Exercício 1.36 Três torneiras, abertas simultaneamente, enchem um tanque em 8 horas. A primeira e a segunda torneiras são capazes de encher o tanque em 18 e 24 horas, respectivamente. Quantas horas a terceira torneira levaria para encher o tanque sozinha?

Exercício 1.37 Felipe e Lucas, encarregados de uma obra, fariam todo o trabalho em 12 dias. No fim do quarto dia de trabalho, Felipe adoeceu e Lucas concluiu o trabalho sozinho, gastando mais 10 dias. Em quanto tempo Lucas faria o trabalho se tivesse trabalhado sozinho desde o início?

Solução. Como os dois fariam todo o trabalho em 12 dias, em 4 dias eles fizeram $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ do trabalho. No fim do quarto dia, restavam $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ do trabalho para serem executados. Como Lucas levou 10 dias para concluir os $\frac{2}{3}$ que faltavam, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{2}{3} \longrightarrow 10 \text{ dias}$$

$$\frac{1}{3} \longrightarrow 10 \div 2 = 5 \text{ dias}$$
$$\frac{3}{3} \longrightarrow 3{\times}5 = 15 \text{ dias}$$

Assim, Lucas faria o trabalho em 15 dias se tivesse trabalhado sozinho desde o início. ■

Exercício 1.38 — CMM - adaptado. Lucas e Lauro estavam correndo numa mesma pista circular. Eles iniciaram a corrida ao mesmo tempo, do mesmo ponto de partida, porém em sentidos contrários. Em um determinado momento, os dois pararam, sem que ainda tivessem passado um pelo outro. Lucas já tinha percorrido $\frac{1}{2}$ do comprimento total da pista e Lauro tinha percorrido $\frac{1}{6}$ do comprimento total, mais 110 metros. Se, no momento da parada, a distância entre eles era de 90 metros, qual o comprimento total desta pista de corrida?

(a) 210 metros.
(b) 240 metros.
(c) 246 metros.
(d) 400 metros.
(e) 600 metros.

Solução. Veja que eles saíram em sentidos contrários e ainda não haviam se enconrado no momento em que ocorreu a parada. Assim, se somarmos as distâncias que os dois percorreram e a distância entre eles no momento da parada, obteremos o comprimento da pista. Mas observe que Lucas ja havia percorrido $\frac{1}{2}$ do comprimento da pista e Lauro $\frac{1}{6}$ do mesmo comprimento mais 110 m. Agora, uma vez que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4\div 2}{6\div 2}=\frac{2}{3}$$

e

$$\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3},$$

a fração $\frac{1}{3}$ corresponde a $110\,\text{m}+90\,\text{m}=200\,\text{m}$. Assim, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{1}{3}\longrightarrow 200\,\text{m}$$

$$\frac{3}{3}\longrightarrow 3\times 200\,\text{m}=600\,\text{m}$$

Portanto, concluímos que a pista possui 600 m, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ∎

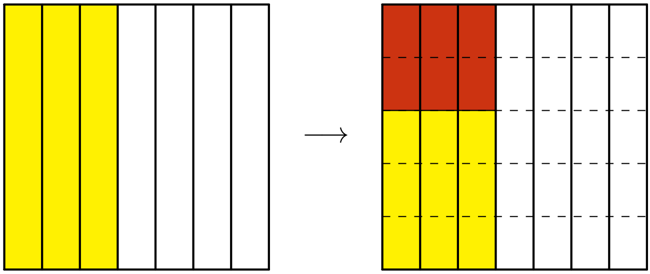
Exercício 1.39 Dois caminhões tanques, completamente cheios com uma mistura de álcool e gasolina, despejam totalmentes suas cargas num mesmo reservatório vazio de um posto de combustíveis. Num dos tanques, a mistura continha $1/12$ de álcool, e no outro, a mistura continha $1/16$ de álcool. Qual a fração de álcool nesse reservatório depois de despejadas as duas cargas?

1.3 – Multiplicação e Divisão

Dando continuidade ao estudo das operações com números fracionários, apresentamos agora um exemplo que está relacionado com a *multiplicação de frações*.

Exercício 1.40 Dona Josefa fez uma torta de frango para distribuir com seus queridos vizinhos. Ela pensou em dar $\frac{3}{7}$ da torta para Dona Francisca, a sua vizinha da direita. Porém, quando a torta estava no forno, o cheiro se espalhou pela vizinhança e ela teve que refazer a distribuição para contemplar um número maior de vizinhos. Decidiu, então, dar a Dona Francisca apenas $\frac{2}{5}$ da fração que tinha pensado em dar inicialmente. Depois de refeita a divisão, que fração da torta Dona Francisca recebeu?

Solução. A torta pode ser representada por um quadrado, que inicialmente foi dividido em sete partes iguais, pelos cortes verticais. Pintamos 3 dessas partes, representando a fração da torta que Dona Francisca receberia inicialmente: $\frac{3}{7}$ = "3 retângulos". Em seguida, cada um desses retângulos é dividido em 5 partes iguais, pelos cortes horizontais, gerando retângulos pequenos. Assim, o quadrado fica dividido em $5 \times 7 = 35$ desses últimos retângulos. Agora, a fração da torta que a Dona Francisca recebeu corresponde a $\frac{2}{5}$ da parte originalmente pintada. Por isso, realçamos, numa cor mais escura, dois dos cinco retângulos menores de cada retângulo vertical pintado anteriormente, totalizando $2 \times 3 = 6$ retângulos realçados. Então, em termos do total de retângulos menores, a fração dos realçados é igual a $\frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}$.



Graças ao raciocínio acima, definimos o produto $\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}$ como

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7} = \frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} = \frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}.$$

Assim, Dona Francisca recebeu $\frac{6}{35}$ da torta, depois que Dona Josefa refez a divisão. ■

De modo geral, temos a seguinte regra.

Multiplicação de Frações: o produto de duas frações é a fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas. Por exemplo,

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{2} = \frac{5\times 3}{8\times 2} = \frac{15}{16}.$$

Não esquecendo que

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{2} \quad \text{é} \quad \frac{5}{8} \quad \text{de} \quad \frac{3}{2},$$

ou seja, multiplicando duas frações, estamos calculando uma fração de outra fração.

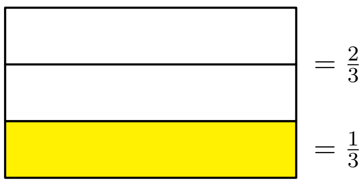
Os vídeos do Portal da OBMEP[6] e da Academia Khan[7] são boas referâncias sobre a multiplicação de frações.

Portal da OBMEP:[6] *Academia Khan:*[7]

Exercício 1.41 Clotilde distribuiu certa quantidade de bombons de chocolate a seus três sobrinhos. Tobias, o mais velho dos três, recebeu $\frac{1}{3}$ do total de bombons. Adalberto, o mais jovem, recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou depois que Tobias recebeu a sua parte. André recebeu os 16 bombons restantes. Adalberto deu $\frac{1}{6}$ de seus bombons a Marcela, sua namorada. Quantos bombons Marcela recebeu?

(a) 42. (b) 2. (c) 12. (d) 14.

Solução. Tobias recebeu $\frac{1}{3}$ do total de bombons. Podemos representar geometricamente essa fração através da figura abaixo, na qual a parte dos bombons que coube a Tobias está pintada de amarelo.



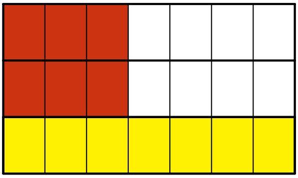
Depois que Tobias pegou a sua parte, restaram $\frac{2}{3}$ do total de bombons, que estão representados na figura pelas duas partes brancas. Então, Adalberto recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou, ou seja, recebeu

$$\frac{3}{7}\times\frac{2}{3} = \frac{6}{21}.$$

Para representar essa fração, dividimos cada retângulo horizontal em 7 retângulos menores, e pintamos de uma cor mais escura, em

[6] https://www.youtube.com/watch?v=gp4j12S7twM
[7] https://www.youtube.com/watch?v=Pl4XSlG5zAw

cada uma das duas linhas brancas, 3 desses 7 retângulos menores, pois Adalberto recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou. O resultado é mostrado na próxima figura.



$= \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{21}$

$= \frac{1}{3} = \frac{7}{21}$

Sendo assim, as partes de Tobias e Adalberto somadas correspondem a todos os retângulos pintados:

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{21} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21} = \frac{13}{21}.$$

Desse modo, os oito retângulos que ficaram brancos na última figura correspondem à fração

$$\frac{21}{21} - \frac{13}{20} = \frac{8}{21}$$

do todo. Tais 8 retângulos correspondem aos 16 bombons que André recebeu. Então, cada retângulo, $\frac{1}{21}$ dos bombons, é o mesmo que 2 bombons. Portanto, Clotilde distribuiu ao todo $21 \times 2 = 42$ bombons, como essa conclução ilustrada na seguinte sequência de três figuras.

Desses 42 bombons, $\frac{6}{21}$ foram para Adalberto. Uma vez que

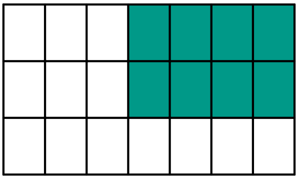
$$\frac{6}{21} \times 42 = 6 \times \frac{42}{21} = 6 \times 2 = 12,$$

concluímos que Adalberto recebeu 12 bombons. Além disso, ele deu $\frac{1}{6}$ de seus bombons para Marcela. Como

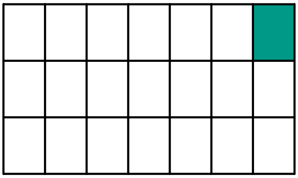
$$\frac{1}{6} \times 12 = \frac{12}{6} = 2,$$

podemos afirmar que Marcela recebeu 2 bombons. ■

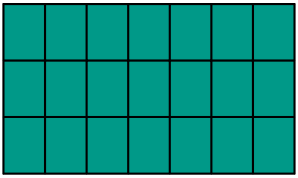
O próximo exemplo está relacionado com a *divisão de frações*.



$= \frac{8}{21} \longleftrightarrow$ 16 bombons



$= \frac{1}{21} \longleftrightarrow 16 \div 8 = 2$ bombons



$= \frac{21}{21} \longleftrightarrow 21 \cdot 2 = 42$ bombons

Exercício 1.42 André possui um sítio, localizado na cidade de Canindé. No sítio, há uma vaca que produz exatamente 5 litros de leite todos os dias. André divide o leite produzido em garrafas de capacidade $\frac{1}{3}$ de litro e as distribui com os parentes e amigos mais próximos. Quantas garrafas de leite são produzidas por dia no sítio de André?

Solução. Conceitualmente, precisamos dividir 5 litros por $\frac{1}{3}$ de litro, sendo essa uma divisão de um inteiro por uma fração: $5 \div \frac{1}{3}$. Na figura abaixo, cada uma das caixas numeradas de 1 a 5 representa um litro de leite.

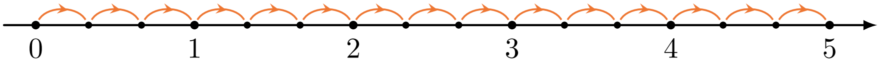
Como as garrafas têm capacidade de $\frac{1}{3}$ de litro, cada litro de leite enche exatamente 3 garrafas: algebricamente, temos $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Portanto, os 5 litros de leite enchem $5{\times}3 = 15$ garrafas, o que pode ser contado na figura. ■

Observando a solução do problema acima, percebemos que

$$5 \div \frac{1}{3} = 5{\times}\frac{3}{1} = 15.$$

Também podemos utilizar a reta numérica para interpretar geometricamente a divisão $5 \div \frac{1}{3} = 5{\times}3 = 15$. Imagine que estamos caminhando sobre a reta e desejamos ir de 0 a 5 dando passos de tamanho $\frac{1}{3}$.

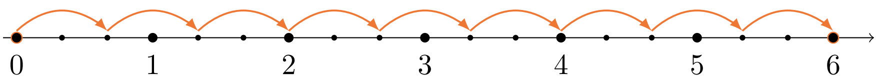


Observe, pela figura anterior, que são necessários 3 passos para percorrer cada um dos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, e $[4, 5]$. Logo, são necessários $5{\times}3 = 15$ passos para ir de 0 a 5. Portanto,

$$5 \div \frac{1}{3} = 5{\times}3 = 15.$$

De modo análogo, $6 \div \frac{2}{3}$ representa a quantidade de passos que devemos dar se desejamos ir de 0 a 6 utilizando passos de tamanho $\frac{2}{3}$. Mas veja que, neste caso, são necessários 3 passos de tamanho $\frac{2}{3}$ para percorrer 2 unidades inteiras, ou seja, para cada um dos intervalos $[0, 2]$, $[2, 4]$ e $[4, 6]$. Portanto, são necessários $\frac{6}{2}{\times}3 = 6{\times}\frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ passos para ir de 0 a 6, ou seja,

$$6 \div \frac{2}{3} = 6{\times}\frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$



Para apresentar uma interpretação geométrica para a divisão $1 \div \frac{5}{13}$, procuraremos uma resposta para a pergunta: quantos segmentos de medida $\frac{5}{13}$ cabem em um segmento de medida 1? Para responder a essa pergunta, primeiro note que

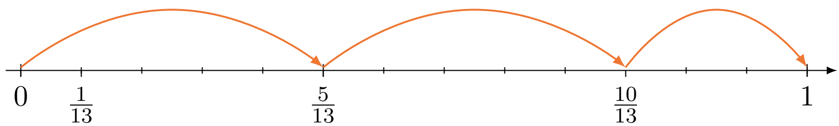
$$\begin{array}{r|l} 1\,3 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

Assim,

$$\left(2 + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = 1,$$

ou seja,

$$1 \div \frac{5}{13} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$



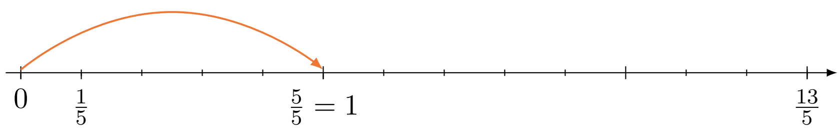
Agora, se $0 < p < n$ são números naturais, então, dividindo n por p, encontramos números naturais q e r tais que $0 \leq r < p$ e $n = qp + r$. Também aqui, obtemos

$$\left(q + \frac{r}{p}\right) \cdot \frac{p}{n} = 1,$$

o que implica

$$1 \div \frac{p}{n} = \frac{n}{p}.$$

Por outro lado, podemos interpretar geometricamente a divisão $1 \div \frac{13}{5}$ através da seguinte figura.



Na figura, a unidade foi dividida em 5 intervalos de medida $\frac{1}{5}$ e a fração $\frac{13}{5}$ corresponde a 13 desses intervalos. Assim, $\frac{5}{13}$ da fração $\frac{13}{5}$ correspondem a 5 desses intervalos menores, cuja medida é $\frac{1}{5}$. Logo, concluímos que $1 \div \frac{13}{5} = \frac{5}{13}$.

Mais geralmente, temos a seguinte regra.

Divisão de Frações: para dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda. Por exemplo,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12}$$

e

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{1 \times 3}{5 \times 1} = \frac{3}{5}.$$

Mais uma vez, recomendamos os vídeos do Portal da OBMEP[8] e da Academia Khan[9] sobre a divisão de frações.

Portal da OBMEP:[8]

Academia Khan:[9]

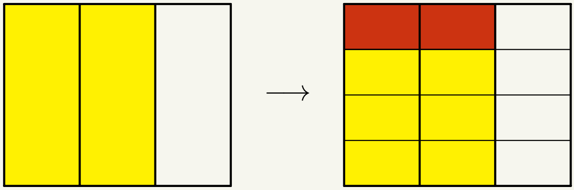
1.3.1 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

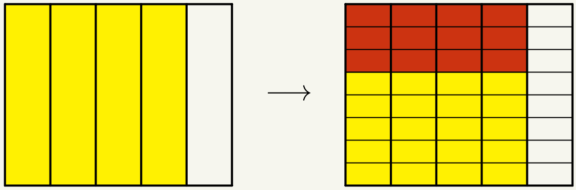
Exercício 1.43 Em cada um dos itens abaixo, a parte pintada de cor clara no retângulo da esquerda representa uma fração e a parte pintada de cor mais escura no retângulo da direita representa o produto dessa fração por uma segunda fração. Encontre as duas frações e calcule seu produto.

[8] https://www.youtube.com/watch?v=xJeIS-nY1U4&t=25s
[9] https://www.youtube.com/watch?v=aW8Vfy1egbc

(a)



(b)



Solução. (a) A parte mais clara no retângulo da esquerda representa a fração $\frac{2}{3}$. No retângulo da direita, a parte mais escura representa $\frac{1}{4}$ da parte mais clara no retângulo da esquerda. Assim, a figura representa o produto

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}.$$

(b) A parte mais clara no retângulo da esquerda representa a fração $\frac{4}{5}$, enquanto a parte mais escura no retângulo da direita representa $\frac{3}{8}$ da parte mais clara no retângulo da esquerda. Logo, a figura representa o produto

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{40}.$$

■

Exercício 1.44 Calcule

(a) $8\times\frac{1}{4}$.

(b) $\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}$.

(c) $\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}$.

(d) $\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{7}$.

(e) $\frac{1}{2}\div 2$.

(f) $3\div\frac{5}{3}$.

(g) $\frac{7}{4}\div\frac{7}{5}$.

(h) $\frac{9}{11}\div\frac{13}{22}$.

Solução. Temos:

(a)

$$8\times\frac{1}{4}=\frac{8}{1}\times\frac{1}{4}=\frac{8\times 1}{1\times 4}=\frac{8}{4}=2.$$

(b)

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{3\times 1}{8\times 7}=\frac{3}{56}.$$

(c)

$$\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{4\times 9}{3\times 8}=\frac{36\div 12}{24\div 12}=\frac{3}{2}$$

(d)

$$\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{3\times 7\times 4}{4\times 3\times 7}=\frac{84}{84}=1.$$

(e)

$$\frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times 1}{2\times 2}=\frac{1}{4}.$$

(f)

$$3\div\frac{5}{3}=\frac{3}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times 3}{1\times 5}=\frac{9}{5}.$$

(g)

$$\frac{7}{4} \div \frac{7}{5} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{7 \times 5}{4 \times 7} = \frac{35 \div 7}{28 \div 7} = \frac{5}{4}.$$

(h)

$$\frac{9}{11} \div \frac{13}{22} = \frac{9}{11} \times \frac{22}{13} = \frac{9 \times 22}{11 \times 13} = \frac{198 \div 11}{143 \div 11} = \frac{18}{13}.$$

■

Para tornar mais simples os cálculos efetuados em uma multiplicação de frações, podemos dividir, por um mesmo número natural, o numerador de uma das frações e o denominador de outra, procedimento esse chamado de **simplificação**. Do mesmo modo, em uma divisão de frações, podemos dividir os seus numeradores por um mesmo número natural e, também, podemos dividir os seus denominadores por um mesmo número natural. Lembre-se que, para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda. Logo, quando transformamos a divisão dessas frações em uma multiplicação, o numerador da segunda fração vira denominador e o seu denominador vira numerador. Por exemplo, com relação aos itens (d) e (h), do exercício 1.44, temos

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{7}} = 1$$

e

$$\frac{9}{11} \div \frac{13}{22} = \frac{9}{11 \div 11} \div \frac{13}{22 \div 11} = \frac{9}{1} \div \frac{13}{2} = \frac{9}{1} \times \frac{2}{13} = \frac{9 \times 2}{13 \times 1} = \frac{18}{13}.$$

Exercício 1.45 Carlos passa $\frac{1}{4}$ do dia estudando. Do tempo que passa estudando, ele utiliza $\frac{1}{3}$ para estudar Matemática. Que fração do dia Carlos utiliza para estudar Matemática?

Solução. Carlos estuda Matemática durante $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$ do dia. ■

Exercício 1.46 Joana gastou $\frac{3}{4}$ de sua mesada na cantina da escola. Do total que gastou na cantina, $\frac{3}{7}$ foram gastos com doces. Que fração de sua mesada Joana gastou com doces?

Exercício 1.47 Quantas garrafas com capacidade de $\frac{2}{3}$ de litro são necessárias para distribuir 30 litros de suco?

Solução. A quantidade de garrafas com capacidade de $\frac{2}{3}$ de litro necessárias para distribuir os 30 litros de suco é

$$30 \div \frac{2}{3} = \frac{30 \div 2}{1} \div \frac{2 \div 2}{3} = 15 \div \frac{1}{3} = 15 \times 3 = 45.$$

■

Exercício 1.48 Numa corrida de revezamento, as equipes devem percorrer um total de $\frac{9}{2}$ quilômetros e cada atleta deve percorrer $\frac{3}{4}$ de quilômetro. Quantos atletas cada equipe deve ter?

Sequência 2

Para o próximo exercício, observe que, na presença de adições ou subtrações juntamente com multiplicações ou divisões, as multiplicações e divisões têm, por convenção, prioridade de execução sobre as adições e subtrações, sendo esse procedimento conhecido como **ordem de precedência** da multiplicação e da divisão sobre a adição e subtração.

Exercício 1.49 Calcule:

(a) $1 - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$.

(b) $1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{4} - 4$: atenção ao uso de frações mistas!

(c) $\frac{3}{5} - \frac{5}{6} \div 6$.

(d) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \div 4$.

Exercício 1.50 Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza e José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou. Que fração da pizza foi comida por José?

Solução. Uma vez que Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ da pizza, restaram $\frac{8}{8}-\frac{1}{8}=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$ da pizza. Assim, como José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou, a fração da pizza que ele comeu foi

$$\frac{2}{7}\times\frac{7}{8}=\frac{2\div 2}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{8\div 2}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Portanto, José comeu $\frac{1}{4}$ da pizza. ■

Se a multiplicação das frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{8}$ é feita sem os cancelamentos e simplificações, obtemos

$$\frac{2}{7}\times\frac{7}{8}=\frac{2\times 7}{7\times 8}=\frac{14}{56}.$$

Veja que obtivemos como resposta a fração $\frac{14}{56}$, que é equivalente a $\frac{1}{4}$, uma vez que $\frac{14\div 14}{56\div 14}=\frac{1}{4}$. A vantagem de fazer os cancelamentos e simplificações, antes de efetuar a multiplicação, é que os cálculos ficam mais simples.

Exercício 1.51 Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza e José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou. Que fração da pizza os dois comeram juntos?

Exercício 1.52 A família de Jaime bebe água em copos cuja capacidade é $\frac{2}{5}$ de litro. Se o garrafão de água que estão utilizando ainda tem $5\frac{3}{5}$ de litros de água, quantos copos eles ainda poderão encher completamente?

Solução. Inicialmente, veja que $5\frac{3}{5}=\frac{5\times 5+3}{5}=\frac{28}{5}$. Logo, ainda há $\frac{28}{5}$ litros de água no garrafão. Dividindo essa quantidade em copos com capacidade de $\frac{2}{5}$ de litro, obtemos um total de

$$\frac{28}{5}\div\frac{2}{5}=\frac{28}{\cancel{5}}\div\frac{2}{\cancel{5}}=28\div 2=14 \text{ copos.}$$

Assim, a família de Jaime ainda poderá encher, completamente, 14 copos com a água que resta no garrafão. ∎

Exercício 1.53 O pai de Bruna a presenteou com alguns doces na última sexta-feira. No sábado, ela comeu metade dos doces que ganhou e no domingo comeu a metade do que havia restado no sábado. Que fração da quantidade total de doces Bruna comeu no domingo?

Exercício 1.54 O pai de Maria a presenteou com alguns doces na última sexta-feira. Ela comeu metade dos doces que tinha no sábado e metade do que restou no domingo. Que fração da quantidade total de doces Maria comeu durante o fim de semana?

Exercício 1.55 A fazenda de Armando produziu 270 litros de leite durante a última semana. Ele utilizou $\frac{2}{3}$ dessa quantidade para fazer queijo e o restante vendeu em garrafas de capacidade de $\frac{1}{2}$ de litro. Quantas garrafas de leite Armando vendeu?

Exercício 1.56 Fernando construiu sua casa em $\frac{3}{7}$ de seu lote. Dias depois, plantou frutas em $\frac{1}{3}$ do restante. Calcule a fração do terreno destinada ao plantio de frutas.

Exercício 1.57 — Canguru. Num teatro infantil, um sexto da audiência era de adultos e dois quintos das crianças eram de meninos. Qual fração da audiência era de meninas?

(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{1}{5}$. (e) $\frac{2}{5}$.

Solução. Uma vez que $\frac{1}{6}$ da audiência era formada por adultos, $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{6}$ da audiência era composta por crianças. Como $\frac{2}{5}$ das crianças eram meninos, $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ das crianças eram meninas.

Assim, a fração da audiência composta por meninas era

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{3\div 3}{5\div 5}\times\frac{5\div 5}{6\div 3}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 1.58 — Canguru. Um oitavo dos convidados de um casamento eram crianças. Três sétimos dos adultos convidados eram homens. Que fração dos convidados eram mulheres adultas?

(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{5}$. (d) $\frac{1}{7}$. (e) $\frac{3}{7}$.

Sequência 3

Exercício 1.59 — OBMEP. Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito $1/3$ da obra e no segundo mês mais $1/3$ do que faltava. A que fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola?

(a) $1/3$.
(b) $4/9$.
(c) $1/2$.
(d) $2/3$.
(e) $5/6$.

Solução. Depois de concluído o primeiro $\frac{1}{3}$ da obra no primeiro mês, restaram $\frac{2}{3}$. Assim, no segundo mês foram concluídos $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ da obra. Assim, a fração da obra da escola concluída nos dois primeiros meses é

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1\times 3}{3\times 3}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}.$$

Logo, a fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola é

$$\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}.$$

■

Exercício 1.60 Uma caixa possui 64 biscoitos. Em cada um dos dias da semana passada, de segunda a sexta-feira, Artur comeu metade dos biscoitos que havia na caixa. Quantos biscoitos restaram?

Solução. Como em cada dia Artur come a metade dos biscoitos, a quantidade de biscoitos que resta na caixa é igual à quantidade de biscoitos que ele comeu. Assim, na segunda, Artur comeu $\frac{1}{2}\times 64 = 32$ biscoitos, na terça comeu $\frac{1}{2}\times 32 = 16$; na quarta $\frac{1}{2}\times 16 = 8$; na quinta $\frac{1}{2}\times 8 = 4$ e na sexta $\frac{1}{2}\times 4 = 2$. Portanto, restaram 2 biscoitos na caixa. ■

Exercício 1.61 — Fundação Carlos Chagas - adaptado. João trabalhou ininterruptamente por 2 horas e 50 minutos na digitação de um texto. Sabendo que ele concluiu essa tarefa quando eram decorridos 11/16 do dia, contados a partir das 0 h, podemos afirmar que ele iniciou a digitação do texto às

(a) 13h 40min.
(b) 13h 20min.
(c) 13h.
(d) 12h 20min.
(e) 12h 10min.

Solução. Como 1 dia tem 24 horas e cada hora tem 60 minutos, 1 dia possui $24\times 60 = 1440$ minutos. Assim, João finalizou a tarefa $\frac{11}{16}\times 1440 = \frac{1440}{16}\times 11 = 90\times 11 = 990$ minutos depois de 0 h. Agora, veja que $990 = 60\times 16 + 30$, conforme o seguinte algoritmo de divisão.

$$\begin{array}{r|l} 9\ 9\ 0 & 6\ 0 \\ \cline{2-2} 3\ 9\ 0 & 1\ 6 \\ 3\ 0 & \end{array}$$

Logo, João comcluiu o texto às 16h 30min. Subtraindo 2h 50min de 16h 30min, obtemos 16h 30min, conforme o algoritmo de subtracao abaixo.

$$\begin{array}{crr} & 16\text{h} & 30\text{min} \\ - & 2\text{h} & 50\text{min} \\ \hline & 13\text{h} & 40\text{min} \end{array}$$

Portanto, João iniciou a digitação às 13h 40min. Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 1.62 — OBM. Carlos fez uma viagem de 1210 km, sendo 7/11 de aeroplano, 2/5 do restante de trem, 3/8 do novo resto de automóvel e os demais quilômetros a cavalo. Calcule quantos quilômetros Carlos percorreu a cavalo.

Solução. Carlos percorreu $\frac{7}{11}$ do percurso total da viagem de aeroplano e $\frac{2}{5}\times(\frac{11}{11}-\frac{4}{11})=\frac{2}{5}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{55}$ de trem. Somando as frações correspondentes a essas duas partes da viagem, obtemos

$$\frac{7}{11}+\frac{8}{55}=\frac{7\times5}{11\times5}+\frac{8}{55}=\frac{35}{55}+\frac{8}{55}=\frac{43}{55}.$$

Ainda restam $\frac{55}{55}-\frac{43}{55}=\frac{12}{55}$. Assim, a fração do percurso que Carlos percorreu de automóvel é

$$\frac{3}{8}\times\frac{12}{55}=\frac{3}{8\div4}\times\frac{12\div4}{55}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{55}=\frac{9}{110}.$$

Somando as frações correspondentes aos trechos percorridos de aeroplano, trem e automóvel temos

$$\frac{43}{55}+\frac{9}{110}=\frac{43\times2}{55\times2}+\frac{9}{110}=\frac{86}{110}+\frac{9}{110}=\frac{95}{110}.$$

Desse modo, Carlos percorreu $\frac{110}{110}-\frac{95}{110}=\frac{15}{110}$ do percurso a cavalo. Portanto, ele percorreu $\frac{15}{110}\times1210=\frac{1210}{110}\times15=11\times15=165$ km a cavalo. ■

Sequência 4

Exercício 1.63 — OBMEP. Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?

$$\frac{10}{7}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$$

(a) 2. (b) 3. (c) 4. (d) 5. (e) 7.

Solução. Veja que $10 = 7\times1 + 3$, conforme a divisão abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 1\,0 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

Daí,

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}.$$

Mas $4 = 3\times2 + 1$, conforme a nova divisão abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{10}{7} &= 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Assim, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ∎

Exercício 1.64 No pátio de uma montadora há carros de cinco cores: preto, branco, vermelho, azul e prata. Metade dos carros são pretos e um quinto dos carros são brancos. De cada uma das outras três cores, há números iguais de carros. Sabendo-se que existem 42 carros vermelhos, quantos carros brancos há no pátio?

Solução. Dos carros que se encontram no pátio da montadora, $\frac{1}{2}$ são pretos e $\frac{1}{5}$ são brancos. Assim, a fração que corresponde ao total de carros pretos ou brancos é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1\times5}{2\times5} + \frac{1\times2}{5\times2} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

Desse modo, a fração que corresponde aos carros que não são pretos nem brancos é

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Agora, como há quantidades iguais das outras três cores, a fração que corresponde à quantidade de carros de cada uma dessas cores é

$$\frac{3}{10} \div 3 = \frac{3 \div 3}{10} \div 3 \div 3 = \frac{1}{10} \div 1 = \frac{1}{10}.$$

Como há 42 carros vermelhos, quantidade que corresponde a $\frac{1}{10}$ do total de carros no pátio da montadora, concluímos as seguintes correspondências.

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 42 \text{ carros}$$

$$\frac{10}{10} \longrightarrow 10 \times 42 = 420 \text{ carros}$$

Logo, há 420 carros no pátio. Os carros brancos correspondem a $\frac{1}{5}$ do total de carros no pátio, ou seja, a quantidade de carros brancos é

$$\frac{1}{5} \times 420 = 84 \text{ carros}.$$

■

Uma vez que a a fração que corresponde aos carros vermelhos é conhecida, podemos proceder do seguinte modo alternativo para encontrar a quantidade de carros brancos.

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 42 \text{ carros}$$

$$\frac{2}{10} \longrightarrow 2 \times 42 = 84 \text{ carros}$$

Note que $\frac{2 \div 2}{10 \div 2} = \frac{1}{5}$. Logo, a quantidade de carros brancos é igual a 84.

Exercício 1.65 A metade de um muro é pintada de vermelho, um terço do que não é pintado de vermelho, é pintado de verde, e o restante é pintado de azul. A parte pintada de azul mede 160 cm de comprimento. Qual o comprimento da parte pintada de vermelho?

Exercício 1.66 Uma herança em dinheiro foi distribuída entre quatro irmãos. Ao primeiro, coube $\frac{2}{3}$ do total, enquanto o segundo recebeu $\frac{3}{4}$ do restante. Ao terceiro coube $\frac{1}{33}$ da soma das partes dos dois primeiros. Por fim, o quarto recebeu R\$ 15.000,00. Quanto recebeu cada um dos herdeiros?

Exercício 1.67 — OBMEP - adaptada. Uma loja de roupas reduziu em $\frac{1}{10}$ o preço de uma camiseta, mas não conseguiu vendê-la. Na semana seguinte, reduziu em $\frac{1}{5}$ o novo preço, e a camiseta foi vendida por R\$ 54,00. Qual era o preço original da camiseta?

Solução. Quando a loja reduziu em $\frac{1}{10}$ o preço da camiseta, o novo preço passou a ser $\frac{10}{10} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ do preço original. Depois da nova redução de $\frac{1}{5}$ do novo preço, o preço da camiseta passou a ser $\frac{4}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{4 \div 2}{5} \times \frac{9}{10 \div 2} = \frac{2 \times 9}{5 \times 5} = \frac{18}{25}$ do preço orginal. Portanto, $\frac{18}{25}$ do preço original corresponde a R\$ 54,00. Desse modo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{18}{25} \longrightarrow 54$$

$$\frac{1}{25} \longrightarrow 54 \div 3 = 18$$

$$\frac{25}{25} \longrightarrow 25 \times 3 = 75$$

Concluímos, assim, que o preço original da camiseta era R\$ 75,00. ■

Exercício 1.68 Douglas tem uma caixa de tomates. No domingo, $\frac{1}{8}$ dos tomates da caixa estragaram; na segunda-feira, estragou $\frac{1}{3}$ do que sobrou no domingo. Sobraram 70 tomates em boas condições. Qual o total de tomates que havia na caixa?

Exercício 1.69 — FUVEST. O valor numérico da expressão $\frac{a+b}{1-ab}$ para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$ é:

(a) 5. (b) 1. (c) 0. (d) 3. (e) 6.

Exercício 1.70 — VUNESP - adaptado. Dois irmãos, João e Tomás, compraram, cada um, uma barra de chocolate. João dividiu sua barra em três pedaços iguais e pegou um. Depois, dividiu este pedaço em dois iguais e comeu um deles. Já Tomás dividiu sua barra em dois pedaços iguais e pegou um. Depois, dividiu este pedaço em três iguais e comeu um deles. Sabendo que as barras eram do mesmo tipo, quem comeu mais?

(a) João, porque a metade é maior que a terça parte.
(b) Tomás.
(c) Não se pode decidir, porque não se conhece o tamanho das barras de chocolate.
(d) Os dois comeram a mesma quantidade de chocolate.
(e) Não se pode decidir, porque a barra de chocolate não é redonda.

Exercício 1.71 — ESA-86. Uma loja vendeu $2/5$ de uma peça de tecido e depois $5/12$ do restante. O que sobrou foi vendido por R$ 1400,00. Sabendo-se que o tecido foi vendido a R$ 5,00 o metro, o comprimento inicial da peça era de:

(a) 200 m.
(b) 400 m.
(c) 800 m.
(d) 1200 m.
(e) 1600 m.

Exercício 1.72 — CMF. Para o Desfile Cívico-Militar de 7 de setembro, o Colégio Militar de Fortaleza precisou deslocar o Batalhão Escolar para a Avenida Beira-Mar. Esse deslocamento foi realizado utilizando-se 18 ônibus com 50 lugares cada um. Em $\frac{1}{3}$ dos ônibus, $\frac{1}{10}$ dos lugares ficaram livres. Em $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus, dois lugares ficaram livres em cada um. Nos demais ônibus, ficou um lugar livre em cada um. Pode-se afirmar que o efetivo deslocado para a Avenida Beira-Mar poderia ter sido transportado em:

(a) 16 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.
(b) 16 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.
(c) 16 ônibus e sobrariam exatamente três lugares livres em um ônibus.
(d) 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.
(e) 17 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.

Solução. Vamos calcular o total de pessoas que foram à avenida Beira-mar para participar do desfile. Como $\frac{1}{3}\times 18 = \frac{18}{3} = 6$ e $\frac{1}{10}\times 50 = \frac{50}{10} = 5$, 6 ônibus foram à Beira-mar com 45 lugares ocupados. Agora, veja que $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus correspondem a $\frac{3}{4}\times 12 = \frac{12}{4}\cdot 3 = 3\times 3 = 9$ ônibus, os quais foram à Beira-mar com 48 lugares ocupados. Os 3 ônibus restantes foram à Beira-mar com 49 lugares ocupados. Assim, o total de pessoas que foram ao desfile é

$$\begin{aligned} 6\times 45 + 9\times 48 + 3\times 49 &= 6\times(50-5) + 9\times(50-2) + 3\times(50-1) \\ &= 18\times 50 - (6\times 5 + 9\times 2 + 3\times 1) \\ &= 900 - 51 \\ &= 849. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Portanto, fica claro que a alternativa correta é a da letra **(d)**, ou seja, o efetivo do CMF poderia ser transportado em 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus. ■

Exercício 1.73 — CMF. Doze amigas resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. Metade do aluguel foi pago no dia da assinatura do contrato, sendo o valor dividido igualmente por todas as doze amigas. O restante deveria ser pago no dia em que chegassem à casa, porém, no dia do passeio, três amigas desistiram.

O restante do valor do aluguel teve, então, de ser dividido igualmente apenas entre aquelas amigas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceram foi de:

(a) $\frac{7}{72}$. (b) $\frac{1}{18}$. (c) $\frac{1}{24}$. (d) $\frac{1}{6}$. (e) $\frac{2}{9}$.

Solução. A metade do aluguel que foi paga no dia da assinatura do contrato foi dividida igualmente para as 12 amigas, logo, cada uma delas pagou $\frac{1}{2} \div 12 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$ do valor do aluguel. Já a segunda metade, foi igualmente dividida, no dia da chegada à casa, somente entre as amigas que compareceram. Assim, cada uma das nove amigas que compareceram pagou mais $\frac{1}{2} \div 9 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ do valor do aluguel. Portanto, a fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceram foi

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{1 \times 3}{24 \times 3} + \frac{1 \times 4}{18 \times 4} = \frac{3}{72} + \frac{4}{72} = \frac{7}{72}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Observação 1.4 Recomendamos todas as atividades propostas no Portal da OBMEP[10] sobre operações aritméticas básicas com frações.

Portal da OBMEP[10]

10 https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=28

2 Números Decimais

2.1 – Representação Decimal

No caderno anterior, aprendemos que uma mesma fração pode ser representada de várias maneiras distintas. Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$, ou seja, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ são *formas equivalentes* de representar a mesma fração (o mesmo número). A equivalência $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ é especialmente importante, porque o denominador da segunda fração é uma potência de 10. Qualquer fração cujo denominador seja uma potência de 10 é chamada **fração decimal**. Nesta seção, estenderemos a representação decimal de números naturais às frações decimais. Iniciamos com o seuinte exercício.

Exercício 2.1 Qual a representação decimal da fração $\frac{378\,549}{100}$?

Solução. Decompondo o número 378 549, obtemos

$$378\,549 = 3\times10^5 + 7\times10^4 + 8\times10^3 + 5\times10^2 + 4\times10^1 + 9\times10^0,$$

Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{378\,549}{100} &= \frac{3\times10^5 + 7\times10^4 + 8\times10^3 + 5\times10^2 + 4\times10^1 + 9\times10^0}{10^2}\\ &= \frac{3\times10^5}{10^2} + \frac{7\times10^4}{10^2} + \frac{8\times10^3}{10^2} + \frac{5\times10^2}{10^2} + \frac{4\times10^1}{10^2} + \frac{9\times10^0}{10^2}\\ &= 3\times10^3 + 7\times10^2 + 8\times10^1 + 5\times10^0 + 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{10^2}.\end{aligned}$$

Da última igualdade, segue que

$$\frac{378549}{100} = 3785 + 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{10^2}.$$

Utilizamos, então, a notação

$$3785{,}49$$

para representar a fração decimal $\frac{378\,549}{100}$, e dizemos que 3785,49 é a **representação decimal** de $\frac{378\,549}{100}$. Veja que a vírgula foi utilizada para separar os grupos de 1, 10, 10^2 e 10^3 dos grupos de $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{10^2}$. ■

Para escrever a parte que está à direita da vírgula, na decomposição de uma fração decimal, podemos utilizar as **potências de 10 com expoentes negativos**

$$\begin{aligned}10^{-1} &= \frac{1}{10},\\ 10^{-2} &= \frac{1}{10^2},\\ 10^{-3} &= \frac{1}{10^3},\\ 10^{-4} &= \frac{1}{10^4},\end{aligned}$$

e assim por diante. Logo, podemos escrever

$$378\,549 = 3\times10^3 + 7\times10^2 + 8\times10^1 + 5\times10^0 + 4\times10^{-1} + 9\times10^{-2}.$$

Vejamos outro exercício:

Exercício 2.2 Escreva a representação decimal da fração $\frac{68}{100}$.

Solução. Repetindo o raciocínio empregado no exercício 2.1, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{68}{100} &= \frac{6\times10^1 + 8\times10^0}{10^2}\\ &= \frac{6\times10^1}{10^2} + \frac{8}{10^2}\\ &= 6\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{10^2}\\ &= 6\times10^{-1} + 8\times10^{-2}\\ &= 0\times10^0 + 6\times10^{-1} + 8\times10^{-2} = 0{,}68.\end{aligned}$$

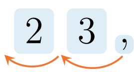
■

Observando com atenção os exercícios 2.1 e 2.2, percebemos que os algarismos que aparecem nas decomposições das frações decimais são os mesmos que aparecem nas representações decimais dos seus numeradores, exceto pelo zero antes da vírgula, quando a fração é menor que 1. Assim, na prática, para escrever a representação decimal de uma fração decimal, basta posicionar corretamente a vírgula. Para isso, note que, em cada exemplo, o número de algarismos à direita da vírgula é igual ao expoente da potência de 10 que aparece no denominador da fração. Desse modo, basta deslocar a vírgula para a esquerda um número de ordens igual a esse expoente.

Exercício 2.3 Qual é a representação decimal da fração $\frac{23}{100}$?

(a) 23. (b) 2,3. (c) 0,23. (d) 0,023.

Solução. Como estamos dividindo 23 por $100 = 10^2$, a vírgula imaginária após o 3 deve ser deslocada duas casas para a esquerda, conforme a figurinha que segue. Como 23 tem apenas dois algarismos, precisamos acrescentar um zero à esquerda. Desse modo, a representação decimal de $\frac{23}{100}$ é 0,23, e a alternativa correta é a da letra **(c)**.



■

Podemos obter facilmente a representação decimal de qualquer fração equivalente a uma fração decimal. Como ilustração, veja os dois seguintes exemplos. Temos

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5,$$

ou seja, 0,5 é a representação decimal da fração $\frac{1}{2}$. Da mesma forma,

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 25}{4\times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

As representações decimais das frações decimais são chamadas **números decimais**. As frações $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ e $\frac{1}{10\,000}$ são chamadas **um décimo**, **um centésimo**, **um milésimo** e **um décimo de milésimo**, respectivamente.

Agora, faremos mais alguns exercícios para fixar as ideias apresentadas até aqui.

Exercício 2.4 Encontre as representações decimais das frações abaixo, utilizando frações equivalentes a elas e cujos denominadores sejam potências de 10.

(a) $\frac{7}{2}$. (b) $\frac{3}{4}$. (c) $\frac{30}{25}$. (d) $\frac{13}{125}$.

Solução. Inicialmente, observe que qualquer potência de 10 é formada pelo produto de potências de 2 e de 5 com os mesmos expoentes.

(a) Assim, para achar uma fração equivalente a $\frac{7}{2}$ e cujo denominador seja uma potência de 10, é suficiente multiplicar seu numerador e seu denominador por 5, obtendo-se $\frac{35}{10}$. Por fim, para achar a representação decimal de $\frac{35}{10}$, basta mover a vírgula, que nesse caso é imaginária, uma única casa para a esquerda. Portanto,

$$\frac{7}{2} = \frac{7\times 5}{2\times 5} = \frac{35}{10} = 3{,}5.$$

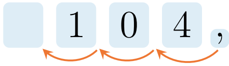
(b) Em relação à fração $\frac{3}{4}$, como seu denominador, $4 = 2^2$, tem dois fatores 2, devemos multiplicá-lo por $25 = 5^2$ para obter uma potência de 10: $100 = 4\times 25 = 2^2\times 5^2$. Assim,

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times 25}{4\times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

(c) Do mesmo modo,

$$\frac{30}{25} = \frac{30\times 4}{25\times 4} = \frac{120}{100} = 1{,}20.$$

(d) Finalmente, como $125 = 5^3$ e $2^3 = 8$, temos



$$\frac{13}{125} = \frac{13\times 8}{125\times 8} = \frac{104}{1000} = 0{,}104.$$

■

Exercício 2.5 — Canguru. Qual igualdade abaixo é a correta?

(a) $\frac{4}{1} = 1{,}4$.

(b) $\frac{5}{2} = 2{,}5$.

(c) $\frac{6}{3} = 3{,}6$.

(d) $\frac{7}{4} = 4{,}7$.

(e) $\frac{8}{5} = 5{,}8$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1} &= 4,\\
\frac{5}{2} &= \frac{5\times 5}{2\times 5} = \frac{25}{10} = 2{,}5,\\
\frac{6}{3} &= 2,\\
\frac{7}{4} &= \frac{7\times 25}{4\times 25} = \frac{175}{100} = 1{,}75,\\
\frac{8}{5} &= \frac{8\times 2}{5\times 2} = \frac{16}{10} = 1{,}6.
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa que apresenta uma igualdade correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 2.6 — OBM. Qual é o primeiro algarismo não nulo, após a vírgula, na representação decimal do número $\frac{1}{5^{12}}$?

Solução. Utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido para resolver os exercícios anteriores, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração do enunciado por $2^{12} = 4096$. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{1}{5^{12}} = \frac{2^{12}}{5^{12}\times 2^{12}} = \frac{4096}{10^{12}} = 0{,}000000004096.$$

Portanto, o primeiro algarismo não nulo após a vírgula é igual a 4. ■

Observação 2.1 Suponha que o denominador de uma fração irredutível possua algum fator primo diferente de 2 e de 5, como é o caso de $\frac{5}{12}$, cujo denominador tem, além do fator primo 2, um fator primo 3. No próximo caderno, que trata dos números reais, veremos que ainda será possível obter uma representação decimal para esse tipo de fração. No entanto, esta será dada por uma **dízima periódica**.

2.2 – Comparando Números Decimais

Em nossas vidas, desde muito cedo, aprendemos naturalmente a comparar números. Por exemplo, quando fazemos uma lista com os nomes e as idades dos membros de nossa família, a partir do mais jovem até o mais velho, estamos comparando as idades dessas pessoas. Veja que, quando dois desses membros viveram uma mesma quantidade de anos, teremos de verificar quem tem mais meses de vida a fim de saber quem é mais velho. Se eles também possuírem a mesma quantidade de meses de vida, então teremos de verificar quem tem mais dias, e assim por diante, passando a comparar horas, minutos, segundos e frações do segundo, caso seja necessário.

Para **comparar dois números decimais**, procedemos de maneira semelhante: inicialmente comparamos as partes inteiras dos números, e será maior o número que tiver a maior parte inteira. Mas, se as partes inteiras forem iguais, o maior dos números será o que tiver o maior algarismo na casa dos décimos. Permanecendo a igualdade, será maior o número que tiver o maior algarismo na casa dos centésimos. Se a igualdade ainda permanecer, o maior número será o que tiver o maior algarismo na casa dos milésimos, e assim por diante. Vejamos alguns exemplos.

---

[0]https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=12

Exercício 2.7 Qual dos números decimais é maior: 45,956 ou 45,965?

Solução. Veja que os números possuem a mesma parte inteira (45) e a mesma quantidade de décimos (9). Entretanto, o algarismo dos centésimos do número 45,965 é igual a 6, enquanto o algarismo dos centésimos do número 45,956 é igual a 5. Portanto, o número 45,965 é maior que o número 45,956, o que denotamos em símbolos escrevendo

$$45{,}965 > 45{,}956.$$

■

Exercício 2.8
A tabela ao lado mostra as alturas, em metros, dos cinco atletas que compõem o time de basquete do terceiro ano do Colégio Matemágico. Construa uma tabela, similar a que foi apresentada acima, dos alunos com as suas respectivas alturas em ordem crescente.

Aluno	Altura
André	1,89
Pedro	1,97
Fernando	1,93
Gabriel	2,03
Miguel	1,85

Solução.
Comparando as alturas conforme discutido anteriormente, notamos que a lista correta das alturas dos alunos em ordem crescente é $1{,}85 < 1{,}89 < 1{,}93 < 1{,}97 < 2{,}03$. Desse modo, organizando os alunos em uma tabela de acordo com as suas alturas em ordem crescente, obtemos a tabela ao lado.

Aluno	Altura
Miguel	1,85
André	1,89
Fernando	1,93
Pedro	1,97
Gabriel	2,03

■

Exercício 2.9 — PISA - adaptado. Em uma competição de velocidade, o “tempo de reação” é o intervalo de tempo entre o disparo inicial da pistola e o momento em que o atleta deixa o local de largada. O “tempo final” inclui o tempo de reação mais o tempo da corrida. A tabela abaixo apresenta o tempo de reação e o tempo final de 8 corredores em uma corrida de velocidade de 100 metros.

Raia	Tempo de reação (segundos)	Tempo final (segundos)
1	0,147	10,09
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	Não terminou a corrida
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,08
8	0,193	10,13

Em qual das raias correu o atleta que teve o menor tempo de reação?

Solução. Vamos construir outra tabela, organizando em ordem crescente de acordo com os tempos de reação.

Raia	Tempo de reação (segundos)	Tempo final (segundos)
2	0,136	9,99
1	0,147	10,09
7	0,174	10,08
4	0,180	Não terminou a corrida
8	0,193	10,13
3	0,197	9,87
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04

Logo, o atleta que teve o menor tempo de reação foi o que competiu na raia 2. ■

2.3 – Multiplicação e Divisão por Potências de 10

Nos primeiros anos da escola, aprendemos que, ao multiplicar um número natural por 10, o resultado é obtido acrescentando-se um zero à direita do número original. Como exemplo, temos a figura abaixo.

$$7298{\times}10 = 72980.$$

De forma análoga, quando **multiplicamos** um número decimal por 10, o resultado é obtido deslocando-se a vírgula *uma casa* para a direita. Como exemplo, temos a figura abaixo.

$$\boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{5}\,,\,\boxed{3}\ \boxed{2}\ {\times}10 = \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\,,\,\boxed{2}$$

Por outro lado, quando **dividimos** um número decimal por 10, o resultado é obtido deslocando-se a vírgula *uma casa* para a esquerda. Como exemplo, temos a figura abaixo.

$$\boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{9}\,,\,\boxed{2}\ \boxed{3}\ {\div}10 = \boxed{1}\ \boxed{5}\,,\,\boxed{9}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$$

A justificativa para a validade de tais regras é dada pelas representações decimais dos números envolvidos. Por exemplo, temos

$$895{,}32 = 8{\times}10^2 + 9{\times}10^1 + 5{\times}10^0 + 3{\times}\frac{1}{10^1} + 2{\times}\frac{1}{10^2},$$

de forma que

$$895{,}32{\times}10 = \left(8{\times}10^2 + 9{\times}10^1 + 5{\times}10^0 + 3{\times}\frac{1}{10} + 2{\times}\frac{1}{10^2}\right){\times}10.$$

Então, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos

$$895{,}32{\times}10 = 8{\times}10^3 + 9{\times}10^2 + 5{\times}10^1 + 3{\times}10^0 + 2{\times}\frac{1}{10} = 8953{,}2.$$

Da mesma forma, como

$$159{,}23 = 1{\times}10^2 + 5{\times}10^1 + 9{\times}10^0 + 2{\times}\frac{1}{10^1} + 3{\times}\frac{1}{10^2},$$

temos

$$
\begin{aligned}
159{,}23 \div 10 &= \left(1\times 10^2 + 5\times 10^1 + 9\times 10^0 + 2\times\frac{1}{10^1} + 3\times\frac{1}{10^2}\right) \div 10\\
&= \left(1\times 10^2 + 5\times 10^1 + 9\times 10^0 + 2\times\frac{1}{10^1} + 3\times\frac{1}{10^2}\right) \times\frac{1}{10}\\
&= 1\times 10^1 + 5\times 10^0 + 9\times\frac{1}{10^1} + 2\times\frac{1}{10^2} + 3\times\frac{1}{10^3}\\
&= 15{,}923.
\end{aligned}
$$

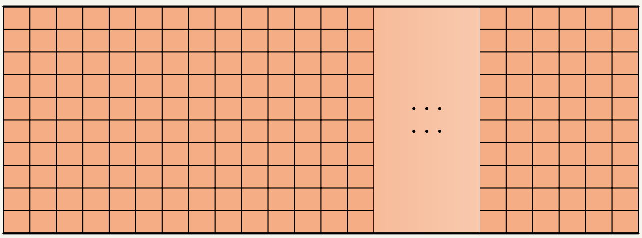
Exercício 2.10 Arthur tem um pedaço de fita amarela de 16 metros de comprimento, o qual deseja dividir em 100 pedaços de mesmo tamanho, para decorar caixas de presente que serão postas à venda no armarinho de sua mãe. Qual o comprimento de cada pedaço, representado na forma decimal, admitindo-se que não haverá perda de material?

Solução. Para calcular o comprimento de cada pedaço, devemos efetuar a divisão $16 \div 100$. Repetindo o raciocínio utilizado acima, devemos deslocar a vírgula, que se encontra à direita do 6, duas casas para a esquerda. Assim, obtemos

$$16 \div 100 = 0{,}16.$$

Logo, cada pedaço deve ter 0,16 metro, que é o mesmo que 16 centímetros. ■

Exercício 2.11 Um muro é formado por 10 fileiras horizontais de tijolos. Na figura abaixo, podemos ver um pedaço desse muro.



Sabendo que os tijolos têm a forma de quadrados de 25 centímetros de lado e que a primeira fileira horizontal é formada por exatamente 100 tijolos, calcule o comprimento e a altura do muro, em metros.

Solução. Inicialmente, veja que 25 cm correspondem a 0,25 metro. Assim, para calcular a altura do muro, devemos calcular $0{,}25\times 10$ e, para calcular o comprimento do muro, devemos calcular $0{,}25\times 100$. Portanto, o muro tem $0{,}25\times 10 = 2{,}5$ metros de altura e $0{,}25\times 100 = 25$ metros de comprimento. ■

2.4 – Grandezas e Medidas

Exercício 2.12 As formigas-faraó, também conhecidas como formigas do acúcar, possuem, em média, 0,2 centímetros de comprimento. Qual é o comprimento médio dos indivíduos dessa espécie em milímetros?

(a) 200 mm.
(b) 20 mm.
(c) 2 mm.
(d) 0,02 mm.
(e) 0,002 mm.

Solução. Temos que 1 centímetro corresponde a 10 milímetros, portanto,

$$0{,}2\,\text{cm} = 0{,}2\times 10\,\text{mm} = 2\,\text{mm}.$$

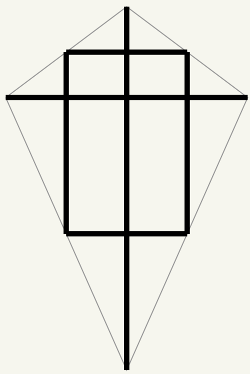
Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

O metro (m) é a unidade de comprimento básica do Sistema Internacional de Medidas (SI). Multiplicando o metro por potências de 10 com expoentes positivos, obtemos os seus múltiplos. De modo similar, multiplicando o metro por potências de 10 com expoentes negativos, obtemos os seus submúltiplos. Os múltiplos e submúltiplos são denominados utilizando prefixos apropriados, de acordo com a potência de 10 que multiplicamos pelo metro para obter cada um. Por exemplo, 1 quilômetro correspode a $10^3\text{m} = 1000\,\text{m}$, uma vez que o prefixo “kilo” indica que a unidade padrão foi multiplicada por 1000. Na tabela abaixo, apresentamos os principais múltiplos e submúltiplos do metro.

quilômetro	10^3m
hectômetro	10^2m
decâmetro	10m
decímetro	10^{-1}m
centímetro	10^{-2}m
milímetro	10^{-3}m

Tabela 2.1: múltiplos e submúltiplos do metro.

Exercício 2.13 — Canguru - adaptado. Martinho fez uma pipa utilizando uma tira fina de bambu que foi dividida em seis pedaços. Dois pedaços, um de comprimento 120 cm, e outro de 80 cm, foram usados para as diagonais. Os outros quatro pedaços foram usados para conectar os pontos médios dos lados da pipa, conforme a seguinte figura.



Qual era o comprimento da tira de bambu antes dos cortes?

(a) 3,0 m.
(b) 3,7 m.
(c) 4,0 m.

(d) 4,1 m.
(e) 4,5 m.

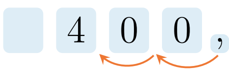
Solução. Os comprimentos de dois pedaços são conhecidos: 120 cm e 80 cm. Os demais pedaços formam um retângulo. Logo, a soma dos seus comprimentos é igual ao perímetro do retângulo. É fácil ver, utilizando conguência de triângulos, por exemplo, que a medida, de cada lado vertical do retângulo, é igual à metade do comprimento da diagonal vertical (pedaço de bambu que mede 120 cm) e a medida, de cada lado horizontal do retângulo, é igual à metade do comprimento da diagonal horizontal (pedaço de bambu que tem medida 80 cm). Assim, um dos lados do retângulo mede $120\,\text{cm} \div 2 = 60\,\text{cm}$ e o outro lado mede $80\,\text{cm} \div 2 = 40\,\text{cm}$. Desse modo, o perímetro desse retângulo é igual a

$$2\times(60\,\text{cm} + 40\,\text{cm}) = 2\times 100\,\text{cm} = 200\,\text{cm}.$$

Portanto, o comprimento da tira é

$$120\,\text{cm} + 800\,\text{cm} + 200\,\text{cm} = 400\,\text{cm}.$$

Agora, temos de saber a quantos metros correspondem 400 cm. Para fazer essa transformação, temos de multiplicar 400 por 10^{-2}, que é o mesmo que dividir 400 por $10^2 = 100$. Como vimos na seção anterior, na prática, para dividir um número por 100, deslocamos a vírgula duas casas para a esquerda, ou seja, de um valor igual ao expoente de 10^2. Assim,



$$400\,\text{cm} = 4{,}00\,\text{m} = 4\,\text{m}.$$

Logo, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

A figura abaixo é um dispositivo prático para fazer transformações entre unidades de comprimento. De fato, para transformar de uma unidade para outra, basta deslocar a vírgula, para a direita ou para a esquerda, tantas casas quantos sejam os saltos, para a direita ou para a esquerda, necessários para ir de uma unidade para a outra. É claro que a regra de funcionamento desse dispositivo está associada à regra que utilizamos para multiplicar e dividir por potências de 10, que foi desenvolvida na seção anterior.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Por exemplo, para transformar 4,351 dam em dm basta deslocar a vírgula duas casas para a direita, pois, para ir da posição do dam até a posição do dm, são necessários dois saltos para a direita. Logo, 4,351 dam = 435,1 dm.

Exercício 2.14 — ENEM. A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado. Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

(a) 8.
(b) 80.
(c) 800.
(d) 8000.
(e) 80000.

Solução. O hectare (ha) é uma unidade de utilizada para medir áreas rurais que corresponde a $1\,\mathrm{hm}^2$. Assim, temos que $1\mathrm{ha} = 1\,\mathrm{hm}^2 = 10.000\,\mathrm{m}^2$. Logo,

$$8\mathrm{ha} = 8\,\mathrm{hm}^2 = 8\times 10.000\,\mathrm{m}^2 = 80.000\,\mathrm{m}^2.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

O metro quadrado (m^2) é a unidade de área básica do Sistema Internacional de Medidas (SI). Lembrando que $1\,\mathrm{m}^2$ corresponde a àrea de um quadrado de 1 m de lado e que 1 m = 10 dm, obtemos

$$1\,\mathrm{m}^2 = 10\,\mathrm{dm}\times 10\,\mathrm{dm} = 100\,\mathrm{dm}^2.$$

Por outro lado, lembrando agora que 1 m = 0,1 dam, obtemos

$$1\,\mathrm{m}^2 = 0{,}1\,\mathrm{dam}\times 10\,\mathrm{dam} = 0{,}01\,\mathrm{dam}^2.$$

Seguindo com esse procedimento, obtemos a tabela abaixo, que apresenta os principais múltiplos e submúltiplos do metro quadrado.

quilômetro quadrado	$10^6 m^2$
hectômetro quadrado	$10^4 m^2$
decâmetro quadrado	$10^2 m^2$
decímetro quadrado	$10^{-2} m^2$
centímetro quadrado	$10^{-4} m^2$
milímetro quadrado	$10^{-6} m^2$

Tabela 2.2: múltiplos e submúltiplos do metro quadrado.

De modo similar ao que foi feito para os múltiplos e submúltiplos do metro, também há um dispositivo prático para fazer transformações entre os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado. De fato, para transformar de uma unidade para outra, basta deslocar a vírgula, para a direita ou para a esquerda, um número de casas que é igual ao dobro do número de saltos, para a direita ou para a esquerda, necessários para ir de uma unidade para a outra. Neste caso, a mudança de uma unidade para a unidade vizinha corresponde a uma multiplicação ou divisão por 10^2. Por isso, o número de deslocamentos da vírgula é igual ao dobro do número de saltos.

km^2 hm^2 dam^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2

Por exemplo, para transformar $0{,}45333\,km^2$ em dam^2, deslocamos a vírgula quatro casas para a direita, uma vez que, para ir de km^2 para dam^2, são necessários dois saltos para a direita. Assim,

$$0{,}45333\,km^2 = 4533{,}3\,dam^2.$$

Exercício 2.15 — ENEM - adaptado. É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou $4{,}2\,m^3$ de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 20.000 embalagens de mesma capacidade. Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?

(a) 0,21.
(b) 2,1.
(c) 21.
(d) 210.
(e) 2100.

Antes de apresentar uma solução para o exercício 2.15, vamos recordar as principais unidades de volume e como é feita a conversão entre essas unidades.

A unidade básica de volume, do Sistema Internacional de medidas (SI), é o **metro cúbico** (m^3). Uma vez que $1\,\mathrm{m}^3$ corresponde ao volume de um cubo de $1\,\mathrm{m}$ de aresta e que $1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm}$, obtemos

$$1\,\mathrm{m}^3 = 10\,\mathrm{dm}\times 10\,\mathrm{dm}\times 10\,\mathrm{dm} = 1000\,\mathrm{dm}^3.$$

Analogamente, como $1\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{dam}$, também obtemos

$$1\,\mathrm{m}^3 = 0{,}1\,\mathrm{dam}\times 10\,\mathrm{dam}\times 10\,\mathrm{dam} = 0{,}001\,\mathrm{dam}^2.$$

Seguindo com esse procedimento, obtemos a tabela abaixo, que apresenta os principais múltiplos e submúltiplos do metro cúbico.

quilômetro cúbico	$10^9\mathrm{m}^3$
hectômetro cúbico	$10^6\mathrm{m}^3$
decâmetro cúbico	$10^3\mathrm{m}^3$
decímetro cúbico	$10^{-3}\mathrm{m}^3$
centímetro cúbico	$10^{-6}\mathrm{m}^3$
milímetro cúbico	$10^{-9}\mathrm{m}^3$

Tabela 2.3: múltiplos e submúltiplos do metro cúbico.

Também há um dispositivo prático para fazer transformações entre os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico, assim como para o metro e para o metro quadrado. Neste caso, para transformar de uma unidade para outra, basta deslocar a vírgula, para a direita ou para a esquerda, um número de casas que é igual ao triplo do número de saltos, para a direita ou para a esquerda, necessários para ir de uma unidade para a outra. A mudança de uma unidade para a unidade vizinha corresponde a uma multiplicação ou divisão por 10^3, por isso o número de deslocamentos da vírgula é igual ao triplo do número de saltos.

km^3 hm^3 dam^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3

Por exemplo, para transformar $3{,}453\,m^3$ em dm^3, deslocamos a vírgula três casas para a direita, uma vez que para ir de m^3 para dm^3 é necessário apenas um salto para a direita. Logo,

$$3{,}453\,m^3 = 3453\,dm^3.$$

Ainda no Sistema Internacional de Medidas (SI), a unidade básica de capacidade é o **litro** (L). A tabela abaixo apresenta os seus principais múltiplos e submúltiplos

quilolitro	10^3L
hectolitro	10^2L
decalitro	10L
decílitro	10^{-1}L
centilitro	10^{-2}L
mililitro	10^{-3}L

Tabela 2.4: múltiplos e submúltiplos do litro.

Com o auxílio da figura abaixo, podemos mudar de um múltiplo ou submúltiplo do litro para outro deslocando a vírgula, para a direita ou para a esquerda, tantas casas quantos sejam os saltos, para a direita ou para a esquerda, necessários para ir de uma unidade para a outra. O procedimento aqui é análogo ao que foi feito no caso dos múltiplos e submúltiplos do metro.

kL hL daL L dL cL mL

Solução. Como m^3 e dm^3 são unidades vizinhas e dm^3 está à direita de m^3, temos que $4{,}2\,m^3 = 4200\,dm^3$. Por outro lado, $1\,dm^3 = 1\,L$, logo, $4{,}2\,m^3 = 4200\,L$. Além disso, $1\,L = 1000\,mL$, o que implica

$$4200\,L = 4200\times1000\,mL = 4.200.000\,mL.$$

Agora, dividindo esses 4.200.000 mL igualmente em 20.000 embalagens, obtemos 4.200.000 mL = 20.000 ×210 mL, conforme o algoritmo abaixo.

$$
\begin{array}{r|l}
4\,2\,0\,0\,0\,0\,0 & 2\,0\,0\,0\,0 \\ \cline{2-2}
-\underline{4\,0\,0\,0\,0} & 2\,1\,0 \\
2\,0\,0\,0\,{\color{red}0} & \\
-\underline{2\,0\,0\,0\,0} & \\
{\color{red}0} &
\end{array}
$$

Portanto, cada embalagem deve conter 210 mL de leite.

■

Vejamos outro exercício.

Exercício 2.16 — ENEM. As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

Disponível em: www.noticiasagricolas.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

(a) $4{,}129 \times 10^3$.
(b) $4{,}129 \times 10^6$.
(c) $4{,}129 \times 10^9$.
(d) $4{,}129 \times 10^{12}$.
(e) $4{,}129 \times 10^{15}$.

No Sistema Internacional de Medidas, a unidade básica de medida de massa é o **quilograma** (kg). Originalmente, o grama era a unidade básica de medida de massa, mas perdeu o posto para o quilograma. A tabela abaixo apresenta os principais múltiplos e submúltiplos do grama.

quilograma	10^3g
hectograma	10^2g
decagrama	10g
decigrama	10^{-1}g
centigrama	10^{-2}g
miligrama	10^{-3}g

Tabela 2.5: múltiplos e submúltiplos do grama.

Outra unidade de medida de massa bastante utilizada é a **tonelada** (t), que corresponde a mil quilogramas e é aceita no Sistema Internacional de Medidas. Temos, assim, $1\text{t} = 10^3\text{kg}$.

Também é possível fazer conversões entre unidades de medidas, deslocando a vírgula de acordo com a quantidade de saltos necessários para ir de uma unidade para outra, conforme o diagrama abaixo.

kg hg dag g dg cg mg

Agora, voltamos à solução do exercício 2.16.

Solução. Primeiro, observando ser 1 milhão igual a $1.000.000 = 10^6$, temos que 4,129 milhões de toneladas é igual a

$$4{,}129 \times 10^6 = 4.129.000 \quad \text{toneladas.}$$

Como cada tonelada corresponde a $1.000\text{kg} = 10^3\text{kg}$, para transformar a quantidade, de tonelada para quilograma, devemos multiplicar $4{,}129 \times 10^6$ pela potência de 10 correspondente a uma tonelada, que é 10^3. Portanto, obtemos $4{,}129 \times 10^6 \times 10^3 = 4{,}129 \times 10^9$ quilogramas como resposta, que é a alternativa da letra **(c)**.

■

Uma boa fonte de material teórico, exercícios e vídeo-aulas sobre unidades de medidas de comprimentos, áreas e volumes está disponível nos *links* Unidades de medida de comprimentos e de áreas[1] e em Unidades de medida de volumes[2].

Comprimentos e Áreas:[1] *Volumes:*[2]

2.5 – Algoritmo da Divisão e Representação Decimal

Outra maneira de descobrir a forma decimal de uma fração é através do uso do algoritmo da divisão. Para entendermos essa afirmação, considere o seguinte exercício.

Exercício 2.17 A festa de aniversário de Joaquim será realizada no próximo sábado. Dona Sônia, mãe de Joaquim, comprou 25 pacotes de balas para distribuir com os convidados no dia da festa. Sabendo que todos os pacotes tiveram o mesmo preço e que Dona Sônia gastou um total de 23 reais com as balas, calcule o preço de cada pacote.

Solução. É claro que cada pacote custou $\frac{23}{25}$ de 1 real; desse modo, precisamos encontrar a forma decimal da fração $\frac{23}{25}$. Inicialmente, observe que (ainda) não podemos efetuar a divisão ordinária, pois $23 < 25$. Então, transformamos 23 em $230\times\frac{1}{10}$ (230 décimos) e, em seguida, dividimos 230 por 25 utilizando o algoritmo da divisão (inteira), obtendo

$$230 = 25\times 9 + 5.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 23 \text{ unidades} &= 230\times\frac{1}{10} = (25\times 9 + 5)\times\frac{1}{10} = 25\times\frac{9}{10} + \frac{5}{10} \\ &= 25\times 9 \text{ décimos} + 5 \text{ décimos}. \end{aligned}$$

[1] https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=54
[2] https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=56

Pensamos em "9 décimos = 0,9" como *quociente parcial* e "5 décimos = 0,5" como *resto parcial* da divisão de 23 por 25. Dividindo ambos os lados da equação acima por 25, temos

$$\frac{23}{25} \text{ unidades} = 9 \text{ décimos} + \frac{5 \text{ décimos}}{25}.$$

Ainda restam 5 décimos para dividir por 25. Novamente, como não é possível efetuar a divisão ordinária de 5 por 25, observamos que

$$5 \text{ décimos} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50 \text{ centésimos}.$$

Agora, podemos efetuar a divisão por 25:

$$\frac{5 \text{ décimos}}{25} = \frac{50 \text{ centésimos}}{25} = 2 \text{ centésimos} = 0{,}02.$$

Logo,

$$\frac{23}{25} = 9 \text{ décimos} + 2 \text{ centésimos} = 0{,}9 + 0{,}02 = 0{,}92.$$

Portanto, cada pacote de balas custou R$ 0,92. ■

Observação 2.2 9 décimos+2 centésimos = 0,92, já que o primeiro dígito à direta da vírgula representa os décimos e o segundo dígito representa os centésimos. Contudo, é comum se confundir ao fazer a soma no formato $0{,}9 + 0{,}02 = 0{,}92$. No Módulo seguinte veremos que ao montar um dispositivo de adição com números decimais, precisamos alinhar a posição das vírgulas dos dois números. Além disso, como 9 décimos é o mesmo que 90 centésimos, temos que $0{,}9 = 0{,}90$. Daí, temos o seguinte algoritmo.

$$\begin{array}{r} 0{,}9\ 0 \\ +\ 0{,}0\ 2 \\ \hline 0{,}9\ 2 \end{array}$$

Dispositivo prático da divisão não inteira.

Para efetuarmos a mesma divisão do Exercício 2.17, executamos os seguintes passos, conforme a ilustração na figura que os acompanha.

(a) Começamos efetuando a divisão inteira de 23 por 25, cujo quociente é 0 e cujo resto é o próprio 23.
(b) Em seguida, acrescentamos um 0 à direita do resto, obtendo 230, e, ao mesmo tempo, uma vírgula após o quociente 0.
(c) Continuamos, efetuando a divisão inteira de 230 por 25, obtendo quociente 9, que é escrito logo após a vírgula colocada no item anterior, e resto 5.
(d) Novamente, como não podemos efetuar imediatamente uma divisão inteira de 5 por 25, acrescentamos um 0 à direita do resto 5.
(e) Executamos a divisão inteira de 50 por 25, obtendo quociente 2, que é escrito logo após o 9 obtido como quociente anterior, e resto 0.
(f) Como chegamos a um resto igual a 0, o processo para, e obtemos o *quociente decimal* 0,92.

À esquerda, representamos os passos acima em detalhes. À direita, mostramos uma maneira resumida de registrar essas operações, na qual escrevemos apenas os restos de cada divisão e efetuamos, mentalmente, a subtração do resto anterior pelo quociente.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2 & 3 & & \underline{2\ 5} \\
- & \underline{} & \underline{0} & & 0{,}9\ 2 \\
 & 2 & 3 & 0 & \\
- & \underline{2} & \underline{2} & \underline{5} & \\
 & & 5 & 0 & \\
 & - & \underline{5} & \underline{0} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr|l}
2 & 3 & & \underline{2\ 5} \\
2 & 3 & 0 & 0{,}9\ 2 \\
 & 5 & 0 & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

Exercício 2.18 Carlos fez um total de 7 litros de suco de caju e distribuiu tudo em 8 garrafas idênticas, as quais ficaram completamente cheias. Qual é a capacidade de cada garrafa escrita em sua representação decimal?

Solução. A capacidade de cada garrafa é igual a $\frac{7}{8}$ de 1 litro. Efetuando a divisão, obtemos $\frac{7}{8} = 0{,}875$. Os dispositivos abaixo mostram duas formas diferentes de representar o procedimento de divisão. Use o que você pensar ser o mais conveniente.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 7 & & & 8 \\ \cline{5-5}
- & \underline{0} & & & 0{,}8\,7\,5 \\
 & 7 & 0 & & \\
- & \underline{6} & \underline{4} & & \\
 & & 6 & 0 & \\
 & - & \underline{5} & \underline{6} & \\
 & & 4 & 0 & \\
 & - & \underline{4} & \underline{0} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
7 & & & & 8 \\ \cline{5-5}
7 & 0 & & & 0{,}8\,7\,5 \\
 & 6 & 0 & & \\
 & & 4 & 0 & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Portanto, a capacidade de cada garrafa é 0,875 litro, o que é o mesmo que 875 millilitros. ■

2.6 – Frações como Porcentagens

Na seção anterior, vimos que frações, cujos denominadores são potências de 10, admitem representações decimais que generalizam as representações decimais dos números naturais. Agora, vamos nos concentrar em frações de um tipo ainda mais particular, aquelas que possuem **denominador igual a 100**. Faremos uso do símbolo %, que é denominado símbolo de **porcentagem** (ou **percentagem**), para denotar tais frações. O símbolo % pode ser pensado como outra representação para a fração $\frac{1}{100}$. Assim, por exemplo,

$$\frac{50}{100} = 50 \times \frac{1}{100} = 50\%$$

e

$$100\% = 100 \times \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1.$$

As porcentagens têm uso difundido em diversos tipos de situações do cotidiano. De fato, é comum escutarmos, no dia-a-dia, por exemplo, as seguintes frases.

(A) A loja *Tudo Barato* está realizando uma promoção na qual seus produtos estão sendo vendidos com **um desconto de 30**%. Qual o novo custo de uma mercadoria de 50 reais nessa promoção?
(B) Foram entrevistadas 260 pessoas. Cerca de **40**% das pessoas entrevistadas disseram que leem mais de um livro por mês.
(C) Joaquim fez um teste com 35 questões e obteve **80**% de acertos.

Perceba que, em todos esses casos, estamos trabalhando com frações. Especificamente, vejamos a seguir o que cada uma das frases acima significa *em termos de frações*.

(A) O *desconto* de 30% no preço de 50 reais, significa

$$30\%\times 50 = \frac{30}{100}\times 50 = \frac{1500}{100}\times = 15 \text{ reais.}$$

Assim, ele pagará 15 reais *a menos* que o preço original, ou seja, ele pagará 35 reais pela mercadoria: $50 - 15 = 35$.

(B) Na situação (B) fazemos

$$40\%\times 260 = \frac{40}{100}\times 260 = \frac{10400}{100} = 104.$$

Assim, 104 pessoas disseram que leem mais de um livro por mês.

(C) Por fim, na situação (C), Joaquim acertou

$$80\%\times 35 = \frac{80}{100}\times 35 = 28 \text{ questões.}$$

Observação 2.3 Quando calculamos uma porcentagem, a operação que deve ser realizada é a multiplicação.

A seguir, resolvemos mais alguns exercícios sobre este assunto, aproveitando para introduzir outros tantos conceitos importantes.

Exercício 2.19 Enquanto esperava o download de um aplicativo em seu celular, Gabriel notou que 30% do total de 70 megabytes já haviam sido baixados. Quantos megabytes foram baixados até aquele momento?

Solução. Devemos calcular 30% de 70, ou seja,

$$\frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}}\times 70 = \frac{3\times 70}{10} = \frac{21\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 21.$$

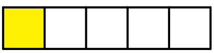
Portanto, o percentual de 30% do total do aplicativo, que foi baixado até aquele momento, corresponde a 21 megabytes. ■

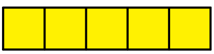
Exercício 2.20 Um zoológico tem 14 araras. A quantidade de araras corresponde a 20% do total de aves do zoológico. Qual é a quantidade total de aves do zoológico?

Solução. Cuidado, neste exercício os 20% estão sendo aplicados ao total de aves do zoológico, não ao número 14. Assim, representando por T o total de aves, temos que $20\%\times T = 14$. Para entender como resolver isso, encontramos a fração que 20% representa observando que

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{20 \div 20}{100 \div 20} = \frac{1}{5}.$$

Desse modo, temos as seguintes correspondências.

 $= \frac{1}{5}$ das aves $= 14$ aves.

 $= \frac{1}{5}$ das aves $= 70$ aves.

De fato, cada quadradinho representa 14 aves. Logo, os 5 quadrados representam $5\times 14 = 70$ aves. Portanto, o zoológico possui um total de 70 aves. ■

Exercício 2.21 Do total de 200 trufas produzidas ontem pela chocolateria de Dona Dulce, 30 eram de morango, 80 de cupuaçu, 50 de maracujá e as demais eram de limão. Qual a porcentagem de trufas de limão?

(a) 60%. (b) 40%. (c) 25%. (d) 20%. (e) 15%.

Solução. Veja que a quantidade de trufas de limão é igual a

$$200 - (30 + 80 + 50) = 200 - 160 = 40.$$

Assim, a fração que representa a quantidade de trufas de limão sobre o total é $\frac{40}{200}$. Para representar isso como percentual, queremos uma fração equivalente com denominador 100. Veja que

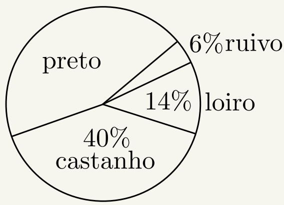
$$\frac{40}{200} = \frac{20}{100} = 20\%.$$

A seguir, damos uma **solução alternativa**, observando quantas trufas correspondem à fração $\frac{1}{100}$. Isso nos diz o valor de um *ponto percentual*, ou seja, de 1% do total. Temos que

$$\frac{100}{100} \text{ corresponde a 200 trufas. Logo,}$$
$$\frac{1}{100} \text{ corresponde a } 200 \div 100 = 2 \text{ trufas.}$$

Ou seja, quaisquer 2 (duas) trufas correspondem a 1% do total de trufas. Com isso, as 40 trufas de limão correspondem a $40 \div 2 = 20\%$. Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 2.22 Uma pesquisa levantou as cores dos cabelos de 1200 pessoas. Os resultados obtidos são mostrados no diagrama a seguir:



Pergunta-se: quantas das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto?

Solução. Para resolver este exercício, começamos observando que $100\% = \frac{100}{100}$ representa o total de pessoas entrevistadas, isto é, 1200 pessoas. Agora, veja que

$$6\% + 14\% + 40\% = \frac{6}{100} + \frac{14}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Logo, o percentual de pessoas com cabelo preto é

$$100\% - 60\% = \frac{100}{100} - \frac{60}{100} = \frac{40}{100} = 40\%,$$

ou seja, 40% de uma total de 1200 pessoas. Consequentemente,

$$40\% \times 1200 = \frac{40}{100} \times 1200 = 480$$

das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto. ■

Observação 2.4 Um diagrama circular como o do exercício anterior, no qual várias porcentagens estão representadas por *setores circulares* de *aberturas* proporcionais às mesmas, é conhecido como um **gráfico de pizza** ou, ainda, um **gráfico de setores**. Uma grande vantagem dos gráficos de setores reside no fato de que eles transmitem rapidamente uma ideia das porcentagens envolvidas. Eles são, essencialmente, uma outra maneira de representar porcentagens

Exercício 2.23 — OBM. Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, o qual era composto de 20% de polpa de fruta e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é de polpa?

Solução. Veja que $1\,\mathrm{L} = 1000\,\mathrm{mL}$, ou seja, 1 litro é igual 1000 millilitros, e $20\% = \frac{1}{5}$. Assim em cada litro de suco temos $\frac{1}{5} \times 1000\,\mathrm{mL} = 200\,\mathrm{mL}$ de polpa. Agora, uma vez que a mistura terá volume total de

$4\,\mathrm{L} = 4000\,\mathrm{mL}$, concluímos que a fração que representa a quantidade de polpa nessa mistura deve ser igual a

$$\frac{200}{4000} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

Portanto, 5% do volume final corresponde à polpa de fruta. ■

Exercício 2.24 Após o Natal, a dona de uma loja de roupas resolveu fazer uma liquidação e vender todas as suas peças com 20% de desconto. Maria cuida de um orfanato e, por isso, foi à loja comprar uma grande quantidade de roupas. Sabendo da causa social, a dona da loja lhe ofereceu um desconto extra de 10%, sobre os novos preços praticados. Em relação ao preço original, qual a porcentagem de desconto recebido por Maria?

Solução. Seja p o preço inicial de uma peça de roupa. Receber um desconto de 20% significa pagar 80% do valor: $100\% - 20\% = 80\%$. Assim, após o primeiro desconto, o valor da roupa passou a ser $80\%\,p = \frac{80}{100} \times p$. O segundo desconto é de 10% sobre o preço anunciado após a aplicação do desconto ordinário. Portanto, Marta pagou $100\% - 10\% = 90\%$ do preço anunciado. Assim, o valor final da roupa será

$$\frac{90}{100} \times \frac{80}{100} p = \frac{72}{100} p = 72\%\,p.$$

Portanto, Maria pagou 72% do preço original (p). Logo, ela recebeu um desconto total de $100\% - 72\% = 28\%$.

É importante observa que o desconto **não** foi de $20\% + 10\% = 30\%$, como se poderia pensar a princípio. ■

Observação 2.5 No Exercício 2.24, outra estratégia válida é atribuir um preço qualquer, digamos 100 reais, à peça de roupa e, a partir daí, calcular os descontos sucessivos sobre esse preço.

Exercício 2.25 — OBM - adaptado. Películas protetoras para vidros são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Se colocarmos uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, calcule a redução de radiação solar para quem se encontra no interior do ambiente.

Solução. Argumentando de maneira análoga à solução do exercício anterior, temos que o vidro, com a aplicação da película, deixa passar um percentual de

$$\frac{70}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{63}{100} = 63\%$$

do total de radiação solar percebido ao ar livre. Portanto, quem se encontra no interior do ambiente recebe a radiação solar com uma redução de $100\% - 63\% = 37\%$. ■

Obs

Descontos ou acréscimos sucessivos sempre devem ser considerados como operações de multiplicação. Assim, **é um erro comum pensarmos que descontos ou acréscimos sucessivos devem ser somados**. Os exercícios 2.24 e 2.25 têm o papel de esclarecer esse fato.

2.7 – Exercícios Propostos

Sequência 1

Exercício 2.26 A leitura correta de 0,021 é

(a) vinte e um décimos.
(b) vinte e um centésimos.
(c) vinte e um décimos de milésimos.
(d) vinte e um milésimos.

Solução. Veja que

$$
\begin{aligned}
0{,}021 &= 0\times 1 + 0\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 1\times\frac{1}{1000}\\
&= \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}\\
&= \frac{20}{1000} + \frac{1}{1000}\\
&= \frac{21}{1000},
\end{aligned}
$$

ou seja, a leitura correta de 0,021 é vinte e um milésimos. Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 2.27 O número 0,0001 é o mesmo que

(a) um centésimo.
(b) $\frac{1}{1000}$.
(c) $\frac{1}{10.000}$.
(d) um centésimo de milésimo.

Exercício 2.28 Dentre as operações listadas abaixo, a única que apresenta resultado correto é a opção

(a) $58987 \div 1000 = 589{,}87$.
(b) $0{,}502 \div 1000 = 502$.
(c) $68{,}53\times 10 = 6{,}853$.
(d) $145{,}3\times 100 = 14530$.
(e) $500{,}03 \div 1000 = 5{,}0003$.

Solução. De acordo com o que apresentamos sobre multiplicação e divisão por potências de 10, temos:

(a)

$\boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{,}$ $\qquad$ $58987 \div 1000 = 58{,}987$.

(b)

			0	,	5	0	2

$0{,}502 \div 1000 = 0{,}000502.$

(c)

6	8	,	5	3

$68{,}53 \times 10 = 685{,}3.$

(d)

1	4	5	,	3	

$145{,}3 \times 100 = 14530.$

(e)

	5	0	0	,	0	3

$500{,}03 \div 1000 = 0{,}50003.$

Portanto a única opção correta é a da letra (d).

■

Exercício 2.29 Utilize algarismos para representar cada um dos números decimais abaixo.

(a) Nove inteiros e quatro décimos.
(b) Quarenta e dois inteiros e trinta e oito milésimos.
(c) Sessenta e nove centésimos.
(d) Cento e vinte e quatro centésimos.
(e) Vinte inteiros e cinco milésimos.
(f) Trezentos e trinta e cinco milésimos.
(g) Setenta e seis centésimos.
(h) Um décimo de milésimo.

Solução. Temos

(a) $9 + \frac{4}{10} = 9{,}4.$

(b) $42 + \frac{38}{1000} = 42{,}038.$

(c) $\frac{69}{100} = 0{,}69.$

(d) $\frac{124}{100} = \frac{100}{100} + \frac{24}{100} = 1{,}24.$

(e) $20 + \frac{5}{1000} = 20{,}005.$

(f) $\frac{335}{1000} = 0{,}335.$

(g) $\frac{76}{100} = 0{,}76.$

(h) $\frac{1}{10} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001.$

■

Exercício 2.30 Encontre a representação decimal de cada uma das frações abaixo relacionadas.

(a) $\frac{3}{5}$. (e) $\frac{21}{20}$. (i) $\frac{90}{125}$.
(b) $\frac{8}{16}$. (f) $\frac{9}{6}$. (j) $\frac{180}{750}$.
(c) $\frac{3}{25}$. (g) $\frac{12}{150}$. (k) $\frac{1}{625}$.
(d) $\frac{14}{20}$. (h) $\frac{6}{60}$. (l) $\frac{144}{15}$.

Solução. Temos

(a) $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

(b) $\frac{8}{16} = \frac{8\div8}{16\div8} = \frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$

(c) $\frac{3}{25} = \frac{3\times4}{25\times4} = \frac{12}{100} = 0{,}12.$

(d) $\frac{14}{20} = \frac{14\div2}{20\div2} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$

(e) $\frac{21}{20} = \frac{21\times5}{20\times5} = \frac{105}{100} = 1{,}05.$

(f) $\frac{9}{6} = \frac{9\div3}{6\div3} = \frac{3}{2} = \frac{3\times5}{2\times5} = \frac{15}{10} = 1{,}5.$

(g) $\frac{12}{150} = \frac{12\div6}{150\div6} = \frac{2}{25} = \frac{2\times4}{25\times4} = \frac{8}{100} = 0{,}08.$

(h) $\frac{6}{60} = \frac{6\div6}{60\div6} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

(i) $\frac{90}{125} = \frac{90\div5}{125\div5} = \frac{18}{25} = \frac{18\times4}{25\times4} = \frac{72}{100} = 0{,}72.$

(j) $\frac{180}{750} = \frac{180 \div 30}{750 \div 30} = \frac{6}{25} = \frac{6\times4}{25\times4} = \frac{24}{100} = 0{,}24.$

(k) $\frac{1}{625} = \frac{1\times16}{625\times16} = \frac{16}{10000} = 0{,}0016.$

(l) $\frac{144}{15} = \frac{144 \div 3}{15 \div 3} = \frac{48}{5} = \frac{48\times2}{5\times2} = \frac{96}{10} = 9{,}6.$

■

Exercício 2.31 Que alternativa traz a representação decimal da fração $\frac{35}{1000}$?

(a) 0,35.
(b) 3,5.
(c) 0,035.
(d) 35.

Exercício 2.32 Escreva os números decimais abaixo em forma de fração irredutível.

(a) 0,4.
(b) 0,40.
(c) 1,25.
(d) 1,4.
(e) 12,5.
(f) 0,52.
(g) 12,25.
(h) 3,75.
(i) 14,625.
(j) 0,250.
(k) 0,125.
(l) 100,13.

Exercício 2.33 Classifique cada uma das afirmações abaixo, sobre o número decimal 495,8732, como verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique suas respostas.

( ) O algarismo 7 ocupa a ordem dos décimos, ou seja, seu valor corresponde a $7\times\frac{1}{10}$.
( ) O valor do algarismo 9 corresponde a $9\times10 = 90$ unidades.
( ) O número é formado por 4 centenas, 9 dezenas, 5 unidades, 8 décimos, 7 centésimos e 2 milésimos.
( ) O algarismo 2 representa $2\times\frac{1}{10.000}$.
( ) $495{,}8732 = 400 + 90 + 5 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10000}$.

Exercício 2.34 Fábio e Gregório são sócios em uma empresa de transporte de cargas. De acordo com o capital investido, Fábio fica com 60% dos lucros e Gregório com 40%. Se, no ano de 2020, a empresa teve um lucro total de 80 mil reais, que valor coube a cada sócio?

Solução. Fábio ficou com $60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ e Gregório com $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ dos lucros. Assim, a parte que coube a Fábio é

$$\frac{3}{5}\times 80000 = \frac{80000}{5}\times 3 = 16000\times 3 = 48000 \text{ reais}$$

e a parte que coube a Gregório é

$$\frac{2}{5}\times 80000 = \frac{80000}{5}\times 2 = 16000\times 2 = 32000 \text{ reais.}$$

■

Exercício 2.35 Juca está participando de uma corrida de bicicleta e já percorreu um quinto da distância prevista. A fração do percurso que Juca já percorreu pode ser representada pelo número decimal

(a) 0,2. (b) 0,5. (c) 1,2. (d) 1,5.

Exercício 2.36 Qual das expressões numéricas abaixo corresponde ao número decimal 200,805?

(a) $2\times 100 + 8\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100}$.

(b) $2\times 10 + 8\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{1000}$.

(c) $2\times 100 + 8\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{1000}$.

(d) $2\times 10 + 8\times\frac{1}{100} + 5\times\frac{1}{1000}$.

(e) $2\times 100 + 8\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{10000}$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 200{,}805 &= 200 + 0{,}8 + 0{,}005 \\ &= 2\times 100 + 8\times 0{,}1 + 5\times 0{,}001 \\ &= 2\times 100 + 8\times \frac{1}{10} + 5\times \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Exercício 2.37 Considere as representações decimais abaixo relacionadas

I. $\frac{3}{10} = 0{,}3$;

II. $\frac{4}{5} = 0{,}4$;

III. $\frac{1}{4} = 0{,}25$;

IV. $\frac{49}{1000} = 0{,}049$.

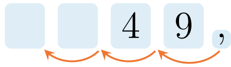
Quais delas estão corretas?

(a) Apenas I e II.
(b) Apenas I e III.
(c) Apenas II e III.
(d) Apenas I, III e IV.
(e) I, II, III e IV.

Solução.

- É claro que $\frac{3}{10} = 0{,}3$, pois, nesse caso, a vírgula deve ser deslocada uma casa para a esquerda. Assim, a igualdade em I está **correta**.
- Veja que
$$\frac{4}{5} = \frac{4\times 2}{5\times 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$
Logo, a igualdade apresentada em II está **incorreta**.
- Utilizando a mesma ideia empregada no item anterior, temos
$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 25}{4\times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$
Assim, a igualdade apresentada em III está **correta**.

- Finalmente, para encontrar a representação decimal da fração $\frac{49}{1000}$, devemos deslocar, três casas para a esquerda, a vírgula imaginária após o 9, completando com um zero à esquerda do 4 para obter 0,049. Portanto, a igualdade em IV também está **correta**.



Desse modo, concluímos que a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Sequência 2

Exercício 2.38 Escreva cada número decimal abaixo como soma de um número inteiro com uma fração compreencdida entre 0 e 1.

(a) 8,3.
(b) 4,67.
(c) 12,31.
(d) 1,329.
(e) 48,2347.

Solução. Temos

(a) $8{,}3 = 8 + \frac{3}{10}$.

(b) $4{,}67 = 4 + \frac{67}{100}$.

(c) $12{,}31 = 12 + \frac{31}{100}$.

(d) $1{,}329 = 1 + \frac{329}{1000}$.

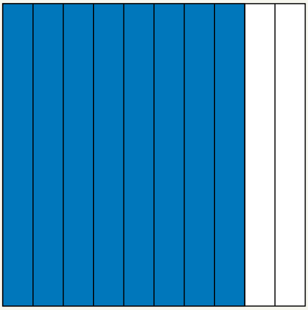
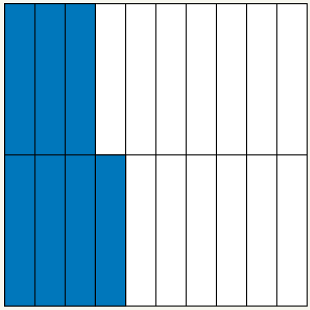
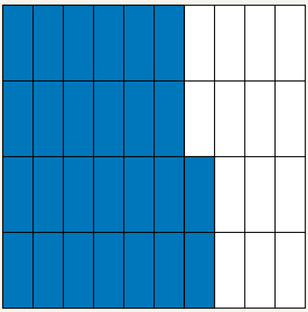
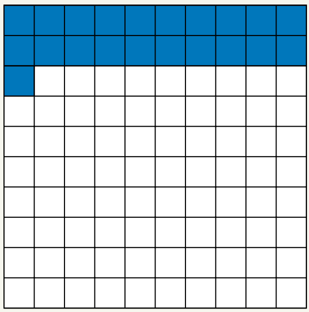
(e) $48{,}2347 = 48 + \frac{2347}{10000}$.

■

Exercício 2.39 Estima-se que, em cada grupo de 10 habitantes do planeta Terra, uma pessoa seja canhota. Qual o percentual de canhotos na população mundial?

Exercício 2.40 Em cada uma das figuras a seguir, admita que as larguras e os comprimentos de todos os retângulos menores são iguais. Para cada figura, expresse a área pintada de azul como

(a) uma fração irredutível.
(b) um número decimal.
(c) uma porcentagem.

I

II

III

IV


Solução. Expressando as quatro figuras como frações irredutíveis, temos

I $\frac{8 \div 2}{10 \div 2} = \frac{4}{5}$,

II $\frac{7}{20}$,

III $\frac{26 \div 2}{40 \div 2} = \frac{13}{20}$ e

IV $\frac{21}{100}$.

Agora, expressando as quatro figuras como um número decimal, temos

I $\frac{8}{10} = 0{,}8$,

II $\frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35$,

III $\frac{13 \times 5}{20 \times 5} = \frac{65}{100} = 0{,}65$ e

IV $\frac{21}{100} = 0{,}21$.

Finalmente, expressando as quatro figuras como porcentagens, temos

I $\frac{8 \times 10}{10 \times 10} = \frac{80}{100} = 80\%$,

II $\frac{7}{20} \frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 35\%$,

III $\frac{13 \times 5}{20 \times 5} = \frac{65}{100} = 65\%$ e

IV $\frac{21}{100} = 21\%$.

■

Exercício 2.41 Ponha os números listados na tabela abaixo em ordem crescente.

4,325	4,333	3,231	2,964	4,523
3,512	2,946	3,219	2,899	3,521

Solução. A lista dos números decimais em ordem crescente é a seguinte.

1º	2,899	6º	3,512
2º	2,946	7º	3,521
3º	2,964	8º	4,325
4º	3,219	9º	4,333
5º	3,231	10º	4,523

■

Exercício 2.42 — Canguru - adaptado. Qual das seguintes multiplicações fornece o maior produto?

(a) $4{,}4 \times 7{,}77$.
(b) $5{,}5 \times 6{,}66$.
(c) $7{,}7 \times 4{,}44$.
(d) $8{,}8 \times 3{,}33$.
(e) $9{,}9 \times 2{,}22$.

Solução. Veja que

(a) $4{,}4 \times 7{,}77 = 4 \times 7 \times 1{,}1 \times 1{,}11 = 28 \times 1{,}1 \times 1{,}11$;
(b) $5{,}5 \times 6{,}66 = 5 \times 6 \times 1{,}1 \times 1{,}11 = 30 \times 1{,}1 \times 1{,}11$;
(c) $7{,}7 \times 4{,}44 = 7 \times 4 \times 1{,}1 \times 1{,}11 = 28 \times 1{,}1 \times 1{,}11$;
(d) $8{,}8 \times 3{,}33 = 8 \times 3 \times 1{,}1 \times 1{,}11 = 24 \times 1{,}1 \times 1{,}11$; e
(e) $9{,}9 \times 2{,}22 = 9 \times 2 \times 1{,}1 \times 1{,}11 = 18 \times 1{,}1 \times 1{,}11$.

Desse modo, o maior produto é $5{,}5 \times 6{,}66$. Logo, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 2.43 Por quanto devemos multiplicar o valor representado pelo algarismo 8, no número 38,472, para obtermos o valor representado pelo algarismo 8, no número 235,98?

(a) 1000. (b) 100. (c) 10. (d) $\frac{1}{10}$. (e) $\frac{1}{100}$.

Solução. O algarismo 8 em 38,472 vale 8 unidades, enquanto o algarismo 8 em 235,98 vale $0{,}08 = 8 \times \frac{1}{100}$. Assim, multiplicando o valor representado pelo algarismo 8, no número 38,472, por $\frac{1}{100}$, obtemos o valor representado pelo algarismo 8, no número 235,98. Logo, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

Exercício 2.44 Quais das representações abaixo são equivalentes a cinco décimos?

( ) $\frac{5}{10}$. ( ) 0,50%. ( ) 0,5.

( ) $\frac{5}{100}$. ( ) 5%. ( ) 5.

( ) $\frac{1}{2}$. ( ) 50%. ( ) 50.

Exercício 2.45 Em uma questão da prova de Matemática, a professora Amélia pediu para que os alunos representassem o número 0,05 em forma de fração. Mariana respondeu $\frac{5}{10}$, Fabiano $\frac{10}{5}$, Fernanda $\frac{5}{100}$ e Marcela respondeu $\frac{5}{1000}$. Qual deles respondeu corretamente?

Exercício 2.46 A fração $\frac{3}{4}$ também pode ser representada por

(a) 0,3. (b) 0,4. (c) 0,63. (d) 0,75.

Exercício 2.47 Uma representação para número decimal 0,025 é

(a) 2,5%. (b) 25% (c) 0,25%. (d) 0,025%.

Exercício 2.48 — ENEM. Uma empresa, especializada em conservação de piscinas, utiliza um produto para tratamento da água, cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da sua borda. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada à água dessa piscina, de modo a atender às suas especificações técnicas, é

(a) 11,25.
(b) 27,00.
(c) 28,80.
(d) 32,25.
(e) 49,50.

Solução. Como a lâmina d'água é mantida a $50\,\text{cm} = 0{,}50\,\text{m}$ da borda da piscina, seu nível é de $1{,}70\,\text{m} - 0{,}50\,\text{m} = 1{,}2\,\text{m}$. Consequentemente, a piscina contém $1{,}2\times 3\times 5 = 18\,\text{m}^3 = 18.000\,\text{dm}^3 = 18.000\,\text{L}$ de água. Como deve-se acrescentar $1{,}5\,\text{mL}$ do produto a cada $1000\,\text{L}$ de água na piscina, a quantidade desse produto, em mililitros, que deve ser acrescentada, é igual a

$$\frac{18\cancel{000}}{1\cancel{000}}\times 1{,}5 = 18\times 1{,}5 = 27\,\text{mL}.$$

■

Sequência 3

Exercício 2.49 Em um zoológico há 300 animais. Sabe-se que 30% dos animais do zoológico são mamíferos e que 20% dos mamíferos são macacos. Quantos macacos há no zoológico?

Solução. No zoológico há

$$30\%\times 300 = \frac{30}{100}\times 300 = \frac{300}{100}\times 30 = 3\times 30 = 90$$

mamíferos. Assim, há

$$20\%\times 90 = \frac{20}{100}\times 90 = \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}}\times 9\cancel{0} = 2\times 9 = 18$$

macacos. ■

Exercício 2.50 Fernando levou 15% menos tempo do que Tobias para dar uma volta completa na pista de atletismo do colégio em que estudam. Se Tobias conseguiu completar a sua volta em 2 minutos e

20 segundos, quanto tempo Fernando levou para completar a volta?

Exercício 2.51 Por orientação de uma nutricionista, pelo menos 30% dos carboidratos que compõem a dieta diária de Giselle devem ser formados por grãos integrais. Hoje ela ingeriu 210 gramas de carboidratos, dos quais 52,5 gramas eram compostos por grãos integrais. Giselle cumpriu a meta estabelecida pela nutricionista?

Solução. Veja que

$$30\% \times 210 = \frac{30}{100} \times 210 = \frac{3\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} \times 21\cancel{0} = 3 \times 21 = 63.$$

Logo, os 52,5 g de grãos integrais, ingeridos por Giselle, não cumprem a meta estabelecida pelo nutricionista, uma vez que $52{,}5 < 63$. ■

Exercício 2.52 Joaquim foi ao supermercado fazer compras com seu pai. Ele perguntou ao pai se ainda faltavam muitos itens para finalizar a lista de compras, após o que o pai respondeu: "nós já pegamos 35% dos itens da nossa lista". Joaquim olhou para o carrinho e contou 21 itens. Quantos itens constavam da lista de compras?

Solução. Se 21 itens correspondem a $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ do total de itens da lista de compras, então temos as seguintes correspondências.

$$\frac{7}{20} \longrightarrow 21 \text{ itens}$$

$$\frac{1}{20} \longrightarrow 21 \div 7 = 3 \text{ itens}$$

$$\frac{20}{20} \longrightarrow 20 \times 3 = 60 \text{ itens}$$

Assim, a lista de compras era composta por 60 itens. ■

Exercício 2.53 Observe as desigualdades abaixo:

(I) $10{,}001 < 9{,}99$.
(II) $2{,}09 > 1{,}9$.
(III) $9{,}01 < 0{,}901$.
(IV) $\frac{1}{4} > 0{,}28$.

Podemos afirmar que:

(a) I e II estão corretas.
(b) II está errada.
(c) apenas I e III estão erradas.
(d) apenas II está correta.
(e) II e III estão corretas.

Exercício 2.54 — CMF. Um funcionário da Empresa Delta, por ter sido o destaque do ano, recebeu, em fevereiro de 2017, um aumento de 25% em seu salário. Esse funcionário, por ter sido promovido de cargo, recebeu, em fevereiro de 2018, mais um aumento de 25% sobre o salário atual. Após esses dois aumentos, seu salário de janeiro de 2017 teve um acréscimo percentual total de

(a) 50%.
(b) 52,55%.
(c) 56,25%.
(d) 57,75%.
(e) 58%.

Solução. Note que $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Assim, depois do primeiro aumento, o salário passou a ser $1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ do salário inicial. Depois do segundo aumento, o salário passou a ser $\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5 \times 4}{4 \times 4} + \frac{5}{16} = \frac{20}{16} + \frac{5}{16} = \frac{25}{16}$ do salário que o funcionário recebia antes de fevereiro de

2017. Agora,

$$\begin{aligned}\frac{25}{16} &= 1+\frac{9}{16}\\ &= 1+\frac{9\times 625}{16\times 625}\\ &= 1+\frac{5625}{10000}\\ &= 1+0{,}5625.\end{aligned}$$

Portanto, após esses dois aumentos, o salário de janeiro de 2017 teve um acréscimo percentual total de 56,25%, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Exercício 2.55 Uma piscina tem 10 metros de largura, 25 metros de comprimento e 3 metros de profundidade. No início da semana, a piscina encontrava-se totalmente cheia. No final da mesma semana, parte da água evaporou e a piscina ficou com apenas 600 mil litros de água. Que porcentagem da água evaporou?

Exercício 2.56 Por causa do baixo movimento durante o mês de outubro de 2019, uma loja ofereceu um desconto de 30% no preço de determinado video-game. Em dezembro, com o aquecimento das vendas gerado pelo Natal, o dono da loja resolveu reajustar em 30% o preço praticado em outubro. Em relação ao preço original — preço cobrado antes do desconto aplicado em outubro, o preço praticado pela loja em dezembro é

(a) Igual, pois primeiro foi aplicado um desconto de 30% e depois um reajuste de 30%.
(b) 9% menor.
(c) 9% maior.
(d) 91% menor.
(e) 91% maior.

Solução. Depois do desconto de $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$, o novo preço passou a ser $1 - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ do preço original. Com o aumento de 30% aplicado em dezembro, o novo preço passou a ser

$$\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{7\times 10}{10\times 10}+\frac{21}{100}=\frac{70}{100}+\frac{21}{100}=\frac{91}{100}$$

do preço original. Logo, uma vez que $\frac{91}{100}=1-\frac{9}{100}$, o preço aplicado em dezembro é 9% menor que o preço original. Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 2.57 Antônio almoça na cantina da repartição em que trabalha e o custo diário de sua refeição é R$ 26,00. Ele sempre pede um copo de suco de laranja para acompanhar o almoço, no valor de R$ 4,00. Pelo serviço, Antônio sempre deixa uma gorjeta de 10% sobre o valor total consumido. Se Antônio almoça na cantina de segunda a sexta-feira, sempre repetindo o mesmo cardápio, qual é seu gasto semanal, incluindo a gorjeta?

Sequência 4

Exercício 2.58 — CMF. O campo de futebol da Arena Castelão tem 106 metros de comprimento por 68 metros de largura. Ele foi coberto, em 2012, por placas de grama de formato retangular, com dimensões 200 centímetros de comprimento e 100 centímetros de largura. Este serviço ocorreu em 20 dias. Nos 5 primeiros dias, foram colocadas 25% das placas utilizadas para cobrir o gramado. Quantas placas de grama foram colocadas nos últimos 15 dias?

(a) 2577. (b) 2652. (c) 2703. (d) 2754. (e) 2763.

Solução. Uma vez que 200 cm = 2 m e 100 cm = 1 m, a área de cada uma das placas de grama que foram utilizadas para cobrir o campo é $2\times 1=2\,\mathrm{m}^2$. Por outro lado, o campo, que tem formato retangular e dimensões 68 m e 106 m, tem área igual a $68\times 106\mathrm{m}^2$. Logo, a quantidade de placas necessárias para cobrir completamente o gramado é

$$\frac{68\times 106}{2}=34\times 106=3604.$$

Agora, como $25\% = \frac{1}{4}$, a quantidade de placas colocadas nos cinco primeiros dias é igual a

$$\frac{3604}{4} = 901.$$

Daí, $3604 - 901 = 2703$ placas foram colocadas nos últimos 15 dias de trabalho. Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**.

■

Exercício 2.59 — CMF. Uma fábrica produz parafusos de 2,6 cm de medida. Podem ser comercializados os parafusos que, por algum problema no processo de produção, tiverem no mínimo 2,47 cm e no máximo 2,73 cm de medida. Em um certo dia, verificou-se que uma máquina estava desregulada e foram produzidos parafusos com cinco tamanhos diferentes: 2,70 cm; 2,49 cm; 2,66 cm; 2,08 cm e 2,50 cm. Os parafusos que não poderão ser comercializados por essa fábrica, por não estarem dentro das medidas estabelecidas, são os que possuem medida igual a

(a) 2,70 cm.
(b) 2,49 cm.
(c) 2,66 cm.
(d) 2,08 cm.
(e) 2,50 cm.

Exercício 2.60 — ENEM. O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.[a]

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

(a) R$ 900,00.
(b) R$ 1200,00.
(c) R$ 2100,00.
(d) R$ 3900,00.

(e) R$ 5100,00.

[a] Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 de abril 2010 (adaptado).

Solução. Perceba que o imposto será pago sobre o lucro, ou seja, sobre R$ 34.000,00 − R$ 26.000,00 = R$ 8000,00. Desse modo, como 15% de 8000 é igual a

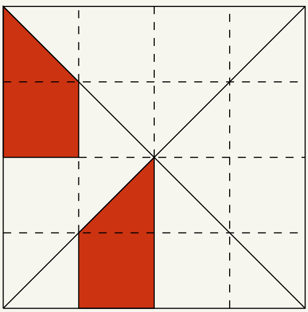
$$\frac{15}{1\cancel{00}}\times 80\cancel{00} = 15\times 80 = 1200,$$

concluímos que o contribuinte pagará R$ 1200,00 de imposto. Logo, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 2.61 — CMF. Dos 2000 funcionários de uma empresa multinacional, 60% são do sexo feminino. Além disso, 640 homens são de nacionalidade brasileira e 25% das mulheres são estrangeiras. O total de funcionários da empresa, de ambos sexos, que são estrangeiros é um número múltiplo de

(a) 12. (b) 17. (c) 23. (d) 30. (e) 50.

Exercício 2.62 — Banco OBMEP. Na figura a seguir, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Que porcentagem do quadrado maior a região pintada cobre?



Solução. ■

Exercício 2.63 — Banco OBMEP. Em um certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

(a) 2%.
(b) 4%.
(c) 10%.
(d) 12%.
(e) 12,2%.

Solução. Denotando por P o preço (comum) de uma dúzia de ovos e de 10 maçãs, temos que os preços desses itens, depois de uma semana, são iguais a $(1 - 0{,}02)P = 0{,}98P$ e $(1 + 0{,}10)P = 1{,}1P$, respectivamente. Assim, o preço de uma dúzia de ovos e 10 maçãs, que antes era $2P$, passou a ser $0{,}98P + 1{,}1P = (0{,}98 + 1{,}1)P = 2{,}08P$. Agora, veja que

$$2{,}08P = 1{,}04 \times 2P = (1 + 0{,}04) \times 2P.$$

Portanto, o aumento sobre o preço de uma dúzia de ovos e 10 maçãs foi de 4%. Logo, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Uma solução alternativa para o exercício acima é atribuir um mesmo preço – 100 reais, por exemplo – aos produtos, que têm o mesmo preço. Daí, depois de uma semana, uma dúzia de ovos passa a custar 98 reais e 10 maçãs passam a custar 110 reais, ou seja, o preço dos dois itens saltou de 200 reais para $98 + 110 = 208$ reais. Agora é só calcular o aumento percentual de 208 reais sobre 200 reais, que é igual a 4%.

Exercício 2.64 — Banco OBMEP. Na cidade de Trocalândia, 20% dos gatos pensam que são cachorros e 25% dos cachorros pensam que são gatos. Certo dia, um psicólogo veterinário resolve testar todos os gatos e cachorros de Trocalândia, verificando que 30% do total pensava ser gato. Que proporção dos animais testados era de cães?

Solução. Vamos denotar por C a quantidade de cães e por G a quantidade de gatos. Assim, $0{,}2G$ é a quantidade de gatos que pensam que são cães e $0{,}8G$ é a quantidade de gatos que sabem que são gatos. Por outro lado, $0{,}25C$ é a quantidade de cães que pensam ser gatos. Logo, o total de animais que pensam que são gatos é $0{,}8G + 0{,}25C$. Mas, de acordo com o psicólogo, essa quantidade é igual a $0{,}3(C + G)$. Portanto, $0{,}8G + 0{,}25C = 0{,}3C + 0{,}3G$. Como

$$\begin{aligned} 0{,}8G + 0{,}25C = 0{,}3C + 0{,}3G &\iff 0{,}8G - 0{,}3G = 0{,}3C - 0{,}25C \\ &\iff 0{,}5G = 0{,}05C \\ &\iff 10G = C, \end{aligned}$$

a proporção de cães era de

$$\frac{C}{C+G} = \frac{10G}{10G+G} = \frac{10G}{11G} = \frac{10}{11}.$$

■

Exercício 2.65 — ENEM. Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

(a) R\$ 15,00.
(b) R\$ 14,00.
(c) R\$ 10,00.
(d) R\$ 5,00.
(e) R\$ 4,00.

Exercício 2.66 — ENEM. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

(a) 105 peças.
(b) 120 peças.
(c) 210 peças.
(d) 243 peças.
(e) 420 peças.

Solução. Vamos deixar todos os comprimentos em centímetros porque, com isso, só fazemos uma conversão e asseguramos que todos os comprimentos têm valores inteiros. Observe que $2\,\text{m} = 200\,\text{cm}$. Como o problema requer que as tábuas sejam cortadas, sem deixar sobras, em pedaços de um mesmo comprimento $l < 200\,\text{cm}$, o valor de l em centímetros deve ser o maior divisor comum a 540, 810 e 1080 menor que 200. A quantidade de peças por tábua é, então, $540/l$, $810/l$, e $1080/l$. Aplicando o método das divisões sucessivas, encontramos $\text{MDC}(540{,}810{,}1080) = \text{MDC}(540{,}810) = 270$. Assim, l é o maior divisor de 270 menor que 200, ou seja, $l = \frac{270}{2} = 135$. Desse modo, o número total de peças é igual a

$$\begin{aligned}
&40\times\frac{540}{135} + 30\times\frac{810}{135} + 10\times\frac{1080}{135}\\
&= 40\times4 + 30\times6 + 10\times8\\
&= 160 + 180 + 80\\
&= 420.
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

Exercício 2.67 — ENEM. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras 3,10 mm, 3,021 mm, 2,96 mm, 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

(a) 2,099.
(b) 2,96.
(c) 3,021.
(d) 3,07.
(e) 3,10.

Solução. Para resolver esse problema, deve-se escolher, dentre as cinco medidas de espessura disponíveis, aquela que é a mais próxima de 3 mm. Como todas as espessuras são dadas em milímetros, vamos tomar o valor absoluto, ou seja, o módulo, da diferença entre cada um desses valores e 3 para saber qual é a espessura mais próxima de 3 mm. Temos

$$\begin{aligned} |3-2{,}099| &= 0{,}901, \\ |3-2{,}96| &= 0{,}04, \\ |3-3{,}021| &= 0{,}021, \\ |3-3{,}07| &= 0{,}07 \text{ e} \\ |3-3{,}10| &= 0{,}1. \end{aligned}$$

O menor dos números encontrados acima é 0,021. Logo a alternativa correta é a da letra **(c)**, que indica a lente de 3,021 mm como a que deve ser adquirida. ■

Exercício 2.68 — ENEM. Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos.

Garrafa I: 0,15 litro.
Garrafa II: 0,30 litro.
Garrafa III: 0,75 litro.
Garrafa IV: 1,50 litro.
Garrafa V: 3,00 litros.

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame. Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) IV.
(e) V.

Solução. Inicialmente, vamos expressar as capacidades das garrafas em mililitros. Como $1\,\text{L} = 1000\,\text{mL}$, obtemos as seguintes medidas.

Garrafa I: $0{,}15\,\text{L} = 0{,}15 \times 1000\,\text{mL} = 150\,\text{mL}$.
Garrafa II: $0{,}35\,\text{L} = 0{,}35 \times 1000\,\text{mL} = 350\,\text{mL}$.
Garrafa III: $0{,}75\,\text{L} = 0{,}75 \times 1000\,\text{mL} = 750\,\text{mL}$.
Garrafa IV: $1{,}50\,\text{L} = 1{,}50 \times 1000\,\text{mL} = 1500\,\text{mL}$.
Garrafa V: $3{,}00\,\text{L} = 3{,}00 \times 1000\,\text{mL} = 3000\,\text{mL}$.

A paciente deve ingerir $150\,\text{mL}$ de água a cada meia hora, por 10 horas, esvaziando completamente o conteúdo de duas garrafas que ela comprou. Assim, a paciente deve ingerir 20 copos d'água durante as 10 horas, pois são 2 copos a cada hora, o que dá um total de $20 \times 150\,\text{mL} = 3000\,\text{mL}$. Portanto, a paciente deve comprar duas garrafas de $\frac{3000}{2} = 1500\,\text{mL}$, ou seja, duas garrafas do tipo IV. Logo, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 2.69 — ENEM. Uma empresa europeia construiu um avião solar, objetivando dar uma volta ao mundo utilizando somente energia solar. O avião solar tem comprimento AB igual a $20\,\text{m}$ e uma envergadura de asas CD igual a $60\,\text{m}$. Para uma feira de ciências, uma equipe de alunos fez uma maquete desse avião. A escala utilizada pelos alunos foi de 3 : 400. A envergadura CD na referida maquete, em centímetro, é igual a

(a) 5.
(b) 20.
(c) 45.
(d) 55.
(e) 80.

Solução. Como $1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$, temos que a envergadura CD do avião é igual a $60\,\text{m} = 60\times 100\,\text{cm} = 6000\,\text{cm}$. Agora, uma vez que a escala da maquete é $3 : 400$, cada 3 unidades de comprimento na maquete correspondem a 400 dessas unidades no avião. Desse modo, se x é a envergadura do avião na maquete, então $\frac{x}{6000} = \frac{3}{400}$. Observe que o valor de x será dado em centímetros, pois 6000, na expressão acima, se refere ao valor da envergadura do avião nessa unidade de medida, conforme vimos acima. Mas,

$$\frac{x}{6000} = \frac{3}{400} \quad \text{implica} \quad x = \frac{3\times 60\cancel{00}}{4\cancel{00}} = \frac{180}{4} = 45.$$

Logo, a alternativa correta e a da letra **(c)**. ■

Exercício 2.70 — ENEM. O veículo terrestre mais veloz já fabricado até hoje é o Sonic Wind LSRV, que está sendo preparado para atingir a velocidade de $3000\,\text{km/h}$. Ele é mais veloz do que o Concorde, um dos aviões de passageiros mais rápidos já feitos, que alcança $2330\,\text{km/h}$.

BASILIO, A. Galileu, mar. 2012 (adaptado).

Para percorrer uma distância de $1000\,\text{km}$, o valor mais próximo da diferença, em minuto, entre os tempos gastos pelo Sonic Wind LSRV e pelo Concorde, em suas velocidades máximas, é

(a) 0,1.
(b) 0,7.
(c) 6,0.
(d) 11,2.

(e) 40,2.

Solução. O problema nos informa a velocidade máxima de dois veículos e nos pede para calcular a diferença de tempo que esses veículos levam, em suas velocidades máximas, para percorrer a distância de 1000 km. Assim, vamos calcular quanto tempo cada veículo leva para percorrer 1000 km e calcular, em minutos, a diferença entre esses tempos. Como uma hora tem 60 minutos, o LSRV percorre 3000 km em 60 minutos e o Concorde percorre 2330 km nos mesmos 60 minutos. Logo, o LSRV leva

$$\frac{1\cancel{000}\times 60}{3\cancel{000}} = \frac{60}{3} = 20\,\text{min}$$

para percorrer 1000 km, enquanto o Concorde leva

$$\frac{100\cancel{0}\times 60}{233\cancel{0}} = \frac{6000}{233} \cong 26\,\text{min}.$$

Portanto, a diferença entre o maior e o menor tempo é de aproximadamente $26 - 20 = 6$ min, ou seja, a alternativa da letra **(c)** fornece a melhor aproximação para essa diferença. ■

Exercício 2.71 — ENEM. Uma caixa d'água em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura, necessita de higienização. Nessa operação, a caixa precisará ser esvaziada em 20 min, no máximo. A retirada da água será feita com o auxílio de uma bomba de vazão constante, em que vazão é o volume do líquido que passa pela bomba por unidade de tempo. A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

(a) 2.
(b) 3.
(c) 5.
(d) 12.
(e) 20.

Solução. Como a caixa d'água tem o formato de paralelepípedo reto retângulo, o seu volume é dado pelo produto das suas dimensões, ou seja, é gual a $4{\times}3{\times}2 = 24\,\text{m}^3$. Como sabemos, $1\,\text{m} = 10\,\text{dm}$, logo $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{L}$. Daí, $24\,\text{m}^3 = 24.000\,\text{L}$. Agora, note que o problema pede a vazão mínima para esvaziar o tanque no tempo estipulado. Essa vazão, que é dada por $\dfrac{\text{capacidade}}{\text{tempo}}$, é mínima quando é considerado o máximo intervalo de tempo tolerado para o escoamento, ou seja, $20\,\text{min} = 20{\times}60\,\text{s} = 1200\,\text{s}$. Assim, a vazão de escoamento mínima é igual a $\frac{24000}{1200} = 20\,\text{L/s}$ e, portanto, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

Exercício 2.72 — ENEM. Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito na relação abaixo.

Caixa 1: $86\,\text{cm}{\times}86\,\text{cm}{\times}86\,\text{cm}$.
Caixa 2: $75\,\text{cm}{\times}82\,\text{cm}{\times}90\,\text{cm}$.
Caixa 3: $85\,\text{cm}{\times}82\,\text{cm}{\times}90\,\text{cm}$.
Caixa 4: $82\,\text{cm}{\times}95\,\text{cm}{\times}82\,\text{cm}$.
Caixa 5: $80\,\text{cm}{\times}95\,\text{cm}{\times}85\,\text{cm}$.

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.

Solução. Para resolver essa questão é preciso levar em conta que as dimensões da caixa não podem ser inferiores ao comprimento da aresta do objeto cúbico, logo, a caixa 2, que tem uma das arestas com comprimento igual a 75 cm, não pode ser a caixa escolhida pelo casal.

Dentre as demais, queremos encontrar a de menor volume (para que sobre o menor espaço possível após inserido o cubo). A caixa 1 tem volume $86\,\text{cm}\times 86\,\text{cm}\times 86\,\text{cm} = 636.056\,\text{cm}^3$. Analogamente, obtemos que os volumes das caixas 3, 4 e 5 são, respetivamente, $627.300\,\text{cm}^3$, $638.780\,\text{cm}^3$ e $646.000\,\text{cm}^3$. Logo a alternativa correta é a da letra **(c)**, correspondente à caixa 3.

O procedimento que seguimos acima para resolver a questão é simples, mas envolve muitos cálculos, o que faz com que uma questão fácil como essa tenha solução demorada, sem falar na possibilidade de erro em meio a tantas contas de multiplicar. Passar muito tempo para resolver uma questão como essa geralmente contribui para piorar o desempenho no ENEM. A fim de contornar isso, a melhor alternativa é comparar diretamente o volume das caixas. Com isso em mente, começamos comparando as caixas 1 e 3. Observando primeiro suas duas últimas dimensões, temos que

$$82 \cdot 90 = (86 - 4) \cdot (86 + 4) = 86^2 - 4^2 < 86 \cdot 86.$$

Portanto,

$$85 \cdot 82 \cdot 90 < 85 \cdot 86 \cdot 86 < 86 \cdot 86 \cdot 86.$$

Logo, o volume da caixa 3 é menor que o volume da caixa 1. Comparando a caixa 3 com a caixa 4, veja que ambas possuem 82 como uma de suas dimensões e, para outras duas dimensões, temos $85 \cdot 90 = 7650$ e $82 \cdot 95 = 7790$. Logo, $85 \cdot 82 \cdot 90 < 82 \cdot 95 \cdot 82$ e, assim, a caixa 3 tem capacidade menor que a caixa 4. Enfim, para comparar a caixa 3 com a caixa 5, observe que $82 \cdot 90 < 80 \cdot 95$. Daí, $85 \cdot 82 \cdot 90 < 80 \cdot 95 \cdot 85$ e, deste modo, a caixa 3 tem menor capacidade que a caixa 5.

Um erro comum seria, simplesmente, subtrair 80 de cada uma das dimensões dos itens listados e comparar o que sobra. Nesse sentido, ao remover da caixa de dimensões $86\times 86\times 86$ um cubo de dimensões $80\times 80\times 80$, perceba que não sobra apenas o espaço $6\times 6\times 6$.

O que sobra é

$$86 \cdot 86 \cdot 86 - 80 \cdot 80 \cdot 80 = 636056 - 512000 = 124056 \neq 6 \cdot 6 \cdot 6. \quad \blacksquare$$

Exercício 2.73 — ENEM. Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de $25\,\text{cm}^3$. O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

(a) 100.
(b) 400.
(c) 1600.
(d) 6250.
(e) 10000.

Solução. Como a escala 1 : 400 é relativa a comprimentos, devemos multiplicar o volume do objeto por 400^3 para obter o volume seu volume real em centímetro cúbico. Assim, o volume real do objeto é

$$25 \times 400^3 = 1.600.000.000\,\text{cm}^3.$$

Agora, uma vez que $1\,\text{m}^3 = 1.000.000\,\text{cm}^3$, obtemos que $1.600.000.000\,\text{cm}^3 = 1600\,\text{m}^3$. Logo, a alternativa correta é a da letra **(c)**.

■

Exercício 2.74 — ENEM. Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro, em seu computador de bordo, acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: www.superdanilof1page.com.br. Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento foi

(a) $\frac{20}{0{,}075}$.

(b) $\frac{20}{0{,}75}$.

(c) $\frac{20}{7{,}5}$.

(d) $20\times 0{,}075$.

(e) $20\times 0{,}75$.

Solução. A capacidade do tanque de combustível é 100 kg, ou seja, essa é a massa do combustível que ocupa o tanque quando ele está cheio. Como a densidade da gasolina utilizada é $750\,\text{g/L} = 0{,}75\,\text{kg/L}$, a quantidade de gasolina que havia no tanque no início da corrida era $\frac{100}{0{,}75}$L. Na primeira parada, o carro havia consumido $\frac{4}{10}$ da gasolina que havia inicialmente, logo, a quantidade de gasolina que restava no tanque, em litro, era $\frac{6}{10}\times\frac{100}{0{,}75}$. Desse modo, a equipe pôs no carro um total de $\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}\times\frac{100}{0{,}75}$L. Mas observe que

$$\frac{1}{3\div 3}\times\frac{6\div 3}{1\cancel{0}}\times\frac{10\cancel{0}}{0{,}75} = 2\times\frac{10}{0{,}75} = \frac{20}{0{,}75}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

3 Operações com Números Decimais

Assim como fizemos com os números inteiros e com as frações, também é possível realizar operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números decimais. Atividades rotineiras, como fazer compras em um supermercado, remetem ao uso de tais operações. Neste material, apresentaremos diversas situações-problema a partir das quais explicaremos os algoritmos utilizados para realizar essas operações.

3.1 – Adição e Subtração de Decimais

A adição e a subtração de decimais fazem uso das mesmas propriedades da adição e subtração de inteiros: comutatividade, associatividade, distributividade e elemento neutro.

Exercício 3.1 Beto percorreu 24,53 quilômetros no primeiro trecho de uma corrida de rua. Depois de uma rápida parada para hidratação, ele percorreu outros 13,44 quilômetros, até finalizar o trajeto previsto. Quantos quilômetros Beto percorreu ao todo?

Solução. Devemos somar os decimais 24,53 e 13,41 para saber o total de quilômetros percorridos por Beto. Como

$$24{,}53 = 2\times 10 + 4\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{100}$$

e

$$13{,}44 = 1\times 10 + 3\times 1 + 4\times\frac{1}{10} + 4\times\frac{1}{100},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
24{,}53+13{,}44 &= 2\times 10+4\times 1+5\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{100}\\
&\quad +1\times 10+3\times 1+4\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{100}\\
&= (2+1)\times 10+(4+3)\times 1+(5+4)\times\frac{1}{10}+(3+4)\times\frac{1}{100}\\
&= 3\times 10+7\times 1+9\times\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{100}\\
&= 37{,}97.
\end{aligned}$$

A soma de números decimais que efetuamos acima também pode ser calculada pelo modo descrito no dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{r}
2\ 4{,}5\ 3\\
+\ 1\ 3{,}4\ 4\\
\hline
3\ 7{,}9\ 7
\end{array}$$

Portanto, Beto percorreu um total de 37,97 quilômetros. ■

O *dispositivo prático* utilizado acima é o mesmo da adição de inteiros. O principal cuidado, nesse novo procedimento, é o de posicionar as vírgulas dos dois números somados, uma sobre a outra, a fim de que a colunas fiquem corretamente alinhadas e, desse modo, possamos somar unidades com unidades, dezenas com dezenas, assim como décimos com décimos, centésimos com centésimos, etc. No caso acima isso não é um problema, pois ambos os números possuem 4 algarismos. Os próximos exercícios mostram o que fazer quando os números possuem quantidades diferentes de algarismos e trata também do "vai um", que pode ser necessário, tal qual na adição de inteiros.

Exercício 3.2 Um relógio custava R$ 125,63 no início de dezembro de 2018. Na última semana do ano, o preço do relógio teve um aumento de R$ 4,95. Quanto passou a custar o relógio após o aumento?

Solução. Note que o preço do relógio após o aumento é dado pelo resultado da adição $125{,}63 + 4{,}95$. Uma vez que

$$125{,}63 = 1\times 100 + 2\times 10 + 5\times 1 + 6\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{100} \quad \text{e}$$
$$4{,}95 = 4\times 1 + 9\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
125{,}63 + 4{,}95 &= 1\times 100 + 2\times 10 + 5\times 1 + 6\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{100}\\
&\qquad + 4\times 1 + 9\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + 2\times 10 + (5+4)\times 1 + (6+9)\times\frac{1}{10} + (3+5)\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + 2\times 10 + 9\times 1 + 15\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + 2\times 10 + 9\times 1 + (10+5)\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + 2\times 10 + (9+1)\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + 2\times 10 + (10)\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + (2+1)\times 10 + 0\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 100 + 3\times 10 + 0\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{100}\\
&= 130{,}58.
\end{aligned}$$

Observe que, posicionando vírgula sobre vírgula, essa soma também pode ser calculada de acordo com o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 1 & \\
 & 1 & 2 & 5{,}6 & 3\\
+ & & & 4{,}9 & 5\\
\hline
 & 1 & 3 & 0{,}5 & 8
\end{array}$$

Assim, após o aumento, o relógio passou a custar R\$ 130,58. ■

Exercício 3.3 Gabi foi ao açougue e comprou 2,5 quilogramas de lombo, além de 1,95 quilograma de carne moída e 3 quilogramas de filé. Quantos quilogramas de carne Gabi comprou ao todo?

Solução. Neste exercício, os números são exibidos com quantidades diferentes de casas decimais, ou seja, quantidades diferentes de algarismos à direta da vírgula. A fim de montar o dispositivo da soma, devemos tomar dois cuidados: igualar a quantidade de casas decimais e pôr todas as vírgulas alinhadas em uma mesma coluna. Observe que $3 = 3{,}00$ e $2{,}5 = 2{,}50$. Assim, somamos $2{,}5 + 1{,}95 + 3$ somando $2{,}50 + 1{,}95 + 3{,}00$, conforme o dispositivo apresentando abaixo.

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
2,5\,0 \\
1,9\,5 \\
+\,3,0\,0 \\
\hline
7,4\,5
\end{array}$$

Portanto, concluímos que Gabi comprou 7,45 quilogramas de carne ao todo. ■

De modo geral, temos o seguinte procedimento.

Adição de números decimais: para somar dois ou mais números decimais, devemos *igualar a quantidade de casas decimais*, acrescentando, quando necessário, algarismos zero à direita da vírgula imaginária ou à direita do último algarismo após a vírgula e, então, *somar os números respeitando as mesmas regras do algoritmo utilizado para somar números naturais*. Não esqueça de que *as vírgulas devem ficar alinhadas* em uma mesma coluna: vírgula embaixo de vírgula.

Vejamos mais um exemplo.

Exercício 3.4 Joaquim foi à feira e comprou algumas frutas e legumes. Ele pagou R$ 22,50 por três quilogramas de tomate, R$ 12,50 por dois quilogramas de cebola, R$ 5,80 por uma dúzia de bananas, R$ 6,79 por cinco maçãs e R$ 3,89 por um quilograma de manga espada. Quanto Joaquim gastou ao todo.

Solução. Para saber o total gasto por Joaquim, devemos somar os preços de todos os produtos que ele comprou na feira, ou seja, devemos encontrar o valor da soma 22,50 + 12,50 + 5,80 + 6,79 + 3,89 segundo o dispositivo apresentado a seguir.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,3\;\;1\;\;\;\;} \\ 2\,2,5\,0 \\ 1\,2,5\,0 \\ 5,8\,0 \\ 6,7\,9 \\ +\;\;\;3\;8\,9 \\ \hline 5\,1,4\,8 \end{array}$$

Portanto, Joaquim gastou R$ 51,48 ao todo. ■

Os próximos exemplos serão resolvidos através de subtrações de números decimais.

Exercício 3.5 O preço de uma geladeira é R$ 1499,99. João aproveitou um dia de promoção e comprou a geladeira com R$ 225,49 de desconto. Quanto ele pagou pelo eletrodoméstico?

Solução. Temos

$$1499{,}99 = 1\times 1000 + 4\times 100 + 9\times 10 + 9\times 1 + 9\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{100}.$$

e

$$225{,}49 = 2\times 100 + 2\times 10 + 5\times 1 + 4\times\frac{1}{10} + 9\times + \frac{1}{100}.$$

Desse modo, o valor que João pagou pela geladeira é igual à diferença entre 1499,99 e 225,49. Para calcular essa diferença, devemos subtrair cada algarismo que ocupa uma determinada ordem no decimal 225,49 do algarismo que ocupa a ordem correspondente no decimal 1499,99.

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
1499{,}99 - 225{,}49 &= 1\times 1000 + 4\times 100 + 9\times 10 + 9\times 1 + 9\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{100}\\
&\qquad - 2\times 100 - 2\times 10 - 5\times 1 - 4\times\frac{1}{10} - 9\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 1000 + (4-2)\times 100 + (9-2)\times 10 + (9-5)\times 1\\
&\quad + (9-4)\times\frac{1}{10} + (9-9)\times\frac{1}{100}\\
&= 1\times 1000 + 2\times 100 + 7\times 10 + 4\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 0\times\frac{1}{100}\\
&= 1274{,}50.
\end{aligned}
$$

A diferença entre números decimais encontrada acima também pode ser calculada através do seguinte dispositivo prático.

$$
\begin{array}{r}
1499{,}99\\
-\quad 225{,}49\\
\hline
1274{,}50
\end{array}
$$

Portanto, aproveitando o desconto, João pagou R\$ 1275,50 pela geladeira. ■

Exercício 3.6 A altura de uma casa era 4,52 metros. Foi construído um segundo andar e a altura da casa passou a ser 7,49 metros. Em quantos metros a altura inicial da casa foi aumentada?

Solução. O número decimal 4,52, que expressa a altura inicial da casa, em metros, pode ser decomposto como

$$4{,}52 = 4\times 1 + 5\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100}.$$

Depois de construído o segundo andar, o número decimal que representa a altura da casa, em metros, passou a ser 7,49, que pode ser decomposto como

$$7{,}49 = 7\times 1 + 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{100}.$$

Desse modo, a diferença entre 7,45 e 4,58 é igual à quantidade de metros que a casa aumentou depois que foi construído o segundo andar. Uma vez que

$$\begin{aligned} 7{,}49 - 4{,}52 = {} & 7\times 1 + 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{100} \\ & - 4\times 1 - 5\times\frac{1}{10} - 2\times\frac{1}{100}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

a ideia, agora, é subtrair cada algarismo que ocupa uma determinada ordem no decimal 4,52 do algarismo que ocupa a ordem correspondente no decimal 7,49. Entretanto, note que não podemos subtrair $5\times\frac{1}{10}$ de $4\times\frac{1}{10}$. A saída, então, é escrever

$$7\times 1 = (6+1)\times 1 = 6\times 1 + 10\times\frac{1}{10}.$$

Substituindo o 7×1 da equação 3.1, pela expressão acima, temos

$$\begin{aligned} 7{,}49 - 4{,}52 &= 6\times 1 + 10\times\frac{1}{10} + 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{100} \\ &\quad - 4\times 1 - 5\times\frac{1}{10} - 2\times\frac{1}{100} \\ &= 6\times 1 + 14\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{100} \\ &\quad - 4\times 1 - 5\times\frac{1}{10} - 2\times\frac{1}{100} \\ &= (6-4)\times 1 + (14-5)\times\frac{1}{10} + (9-2)\times\frac{1}{100} \\ &= 2\times 1 + 9\times\frac{1}{10} + 7\times\frac{1}{100} \\ &= 2{,}97. \end{aligned}$$

Na prática, calculamos a diferença acima do modo descrito no dispositivo que segue.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ \ 14} \\ \cancel{7},\ \cancel{4}\ 9 \\ -\ 4,\ 5\ 2 \\ \hline 2,\ 9\ 7 \end{array}$$

Portanto, depois da construção do segundo andar, a altura da casa aumentou 2,97 metros. ■

De modo geral, temos o seguinte procedimento.

Subtração de números decimais: para calcular a diferença entre dois números decimais, devemos *igualar a quantidade de casas decimais*, acrescentando, quando necessário, algarismos zero à direita da vírgula imaginária ou à direita do último algarismo após a vírgula e, então, subtrair os números respeitando as mesmas regras do algoritmo utilizado para calcular a diferença entre números naturais. Não esqueça de que *as vírgulas devem ficar alinhadas em uma mesma coluna*: vírgula embaixo de vírgula.

3.1.1 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 3.7 Encontre os resultados das operações listadas abaixo.

(a) $4{,}36 + 2{,}51$.
(b) $13{,}31 + 22{,}23 + 3{,}42$.
(c) $7{,}312 + 2{,}502$.
(d) $6 + 3{,}45 + 0{,}432$.
(e) $10{,}94 - 10{,}02$.
(f) $0{,}856 - 0{,}046$.
(g) $12{,}345 - 10{,}12$.
(h) $0{,}03 + 0{,}96 + 5{,}001 + 1$.

Solução. Utilizando os dispositivos práticos para adicionar ou subtrair números decimais, descritos anteriormente, obtemos os seguintes resultados.

$$\begin{array}{r} 4{,}3\ 6 \\ +\ 2{,}5\ 1 \\ \hline 6{,}8\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13,31 \\ 22,23 \\ +\ \ 3,42 \\ \hline 38,96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,312 \\ +2,502 \\ \hline 9,814 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6,000 \\ 3,450 \\ +0,432 \\ \hline 9,882 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10,94 \\ -10,02 \\ \hline 0,92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,856 \\ -0,046 \\ \hline 0,81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12,345 \\ -10,12 \\ \hline 2,225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,030 \\ 0,960 \\ 5,001 \\ +1,000 \\ \hline 6,991 \end{array}$$

■

Exercício 3.8 Cláudia preparou um bolo de fubá e canjica para a festa junina de sua filha. No bolo, ela gastou 1,5 litro de leite e, na canjica, 1,3 litro. Quantos litros de leite Cláudia gastou ao todo na preparação das comidas?

Exercício 3.9 A altura de uma casa era 3,25 metros. Foi construído um segundo andar, aumentando a altura da casa em 3,34 metros. Que altura passou a ter a casa depois da construção do segundo andar?

Solução. A altura da casa era 3,25 m antes da construção do segundo andar. Como a altura foi aumentada em 3,34 m, depois que o segundo andar foi construído, e $3{,}25 + 3{,}34 = 6{,}59$, conforme indica o dispositivo abaixo,

$$\begin{array}{r} 3{,}2\ 5 \\ +\ 3{,}3\ 4 \\ \hline 6{,}5\ 9 \end{array}$$

concluímos que, depois da construção do segundo andar, a altura da casa passou a ser de 6,59 m. ■

Exercício 3.10 Certo modelo de celular custava R\$ 549,99. A rede de lojas “Australianas” ofereceu um desconto de R\$ 138,00 durante o último fim de semana. Pedro aproveitou o desconto e comprou um celular novo, porque o que possuía estava bem ruim. Quanto Pedro pagou pelo aparelho?

Solução. O modelo de celular, que custava R\$ 549,99, teve um desconto de R\$ 138,00. Temos $549{,}99 + 138{,}00 = 411{,}99$, conforme o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 9{,}9\ 9 \\ -\ 1\ 3\ 8{,}0\ 0 \\ \hline 4\ 1\ 1{,}9\ 9 \end{array}$$

Logo, Pedro pagou R\$ 411,99 pelo aparelho. ■

Exercício 3.11 Para visitar seus avós, Fernando percorre 6,37 quilômetros de metrô e 2,21 quilômetros de bicicleta. Qual é a distância total percorrida por Fernando para visitar os avós?

Exercício 3.12 No dia em que completou 11 anos, Fernando mediu a sua altura e constatou que tinha 1,52 m. Três anos depois, ao completar 14 anos, ele mediu novamente a sua altura e percebeu que sua altura havia aumentado para 1,75 m. Quanto a altura de Fernando aumentou nesses três anos?

Sequência 2

Exercício 3.13 Encontre os resultados das operações listadas abaixo.

(a) $6{,}52 + 4{,}58$.
(b) $13{,}8 + 22{,}234 + 0{,}567$.
(c) $7{,}318 + 3{,}002$.
(d) $7{,}988 + 3{,}45 + 0{,}787$.
(e) $10{,}94 - 6{,}328$.
(f) $0{,}856 - 0{,}076$.
(g) $12{,}345 - 9{,}76$.
(h) $0{,}09 + 4{,}97 + 5{,}1 + 0{,}5$.

Solução. Utilizando os dispositivos práticos, para adição e subtração de números decimais, temos os seguintes resultados.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1\ \ } \\ 6{,}5\ 2 \\ +\quad 4{,}5\ 8 \\ \hline 1\ 1{,}1\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ 1\ 1\ } \\ 13{,}800 \\ 22{,}234 \\ +\quad 0{,}567 \\ \hline 36{,}601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 7{,}3\,1\,8 \\ +\quad 3{,}0\,0\,2 \\ \hline 1\,0{,}3\,2\,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\;\;2\,1} \\ 7{,}988 \\ 3{,}450 \\ +\quad 0{,}787 \\ \hline 12{,}225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,0{,}9\,4\,0 \\ -\,0\,6{,}3\,2\,8 \\ \hline 0\,4{,}6\,1\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}8\,5\,6 \\ -\,0{,}0\,7\,6 \\ \hline 0{,}7\,8\,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,2{,}3\,4\,5 \\ -\,0\,9{,}7\,6\,0 \\ \hline 0\,2{,}5\,8\,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\;\;1} \\ 0{,}09 \\ 4{,}97 \\ 5{,}10 \\ +\quad 0{,}50 \\ \hline 10{,}66 \end{array}$$

■

Exercício 3.14 Rita fez uma viagem de carro de Juazeiro a Fortaleza. Ela percorreu 338,7 quilômetros e parou em um posto de combustíveis para abastecer. A atendente do posto informou que ainda faltavam 205,8 quilômetros para chegar a Fortaleza. Qual é a distância total que Rita terá percorrido ao final da viagem?

Solução. A distância total percorrida por Rita será igual à soma da distância percorrida de Juazeiro até o posto com a distância percorrida do Posto até Fortaleza. Somando essas duas diantâncias, obtemos $338{,}7 + 205{,}8 = 544{,}5$, conforme o dispositivo abaixo apresentado.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1} \\ 3\,3\,8{,}7 \\ +\,2\,0\,5{,}8 \\ \hline 5\,4\,4{,}5 \end{array}$$

Portanto, Rita terá percorrido um total de 544,5 km ao final da viagem. ∎

Exercício 3.15 Para chegar à escola todas as manhãs, Gabriel percorre 29,43 quilômetros a cavalo e 8,76 quilômetros de trem. Quantos quilômetros Gabriel percorre nesse trajeto?

Exercício 3.16 Uma fábrica produz parafusos de 2,4 cm de medida. Podem ser comercializados os parafusos que, por algum problema no processo de produção, tiverem, no mínimo, 2,28 cm, e, no máximo, 2,52 cm de medida. Em um determinado dia, verificou-se que uma máquina estava desregulada e foram produzidos apenas parafusos com 1,89 cm de comprimento. Os parafusos não serão comercializados por essa fábrica, por não estarem dentro das medidas estabelecidas. Qual a diferença entre tamanho mínimo necessário para que um parafuso seja comercializado e o tamanho dos parafusos produzidos naquele dia?

Solução. O tamanho dos parafusos produzidos naquele dia é de 1,89 cm. O tamanho mínimo que um parafuso produzido pela fábrica deve ter, para que esteja no padrão para ser comercializado, é de 2,28 cm. Veja que $2{,}28 - 1{,}89 = 0{,}39$, conforme o dispositivo que segue.

$$\begin{array}{r} 2{,}2\,8 \\ -\ 1{,}8\,9 \\ \hline 0{,}3\,9 \end{array}$$

Assim, a diferença entre o tamanho mínimo necessário para que um parafuso seja comercializado e o tamanho dos parafusos produzidos naquele dia é 0,39 cm. ■

Exercício 3.17 A distância entre as cidades A e B é de 45,76 quilômetros e a distância entre as cidades B e C é de 74,48 quilômetros. Calcule a distância entre as cidades A e C, sabendo que, necessariamente, temos de passar por B para irmos de A e C?

Exercício 3.18 Laura foi a uma loja de roupas comprar um vestido para usar no casamento de uma amiga. Ela gostou de dois modelos: um vermelho longo, que custa R$ 189,92, e um preto, mais simples, que custava R$ 139,99. Quanto Laura economizará, caso escolha o modelo mais barato?

Exercício 3.19 — SARESP. João nasceu com 2,150 kg. Precisou ficar na maternidade, sob os cuidados do pediatra, até atingir 3 kg. Na maternidade, depois que nasceu, João engordou

(a) 0,850 kg.
(b) 0,950 kg.
(c) 1,150 kg.
(d) 1,850 kg.
(e) 2,100 kg.

Sequência 3

Exercício 3.20 André vai a um mercadinho que vende uma garrafa de suco de uva por R$ 4,80 e uma caixa lacrada com seis dessas garrafas por R$ 27,00. Se André comprar 8 garrafas desse suco de uva para o aniversário do seu filho, quanto ele vai gastar no mínimo?

Solução. Veja que o custo de 6 garrafas de suco, compradas a R$ 4,80 cada unidade, é de $6 \times 4{,}80 = 28{,}80$. Logo, é mais vantajoso comprar uma caixa lacrada com 6 garrafas. Desse modo, para comprar 8 carrafas com o menor custo possível, André deve gastar

$$27{,}00 + 4{,}80 + 4{,}80 = 36{,}60 \text{ reais.}$$

■

Exercício 3.21 Joaquim tinha dois pedaços de fio metálico. Um desses pedaços media 2,76 metros e outro media 3,49 metros. Ao unir os dois fios, Joaquim constatou que houve uma perda total de 0,18 metro de fio. Qual o comprimento do pedaço de fio resultante da junção dos dois pedaços que Joaquim tinha no início?

Solução. Se não houvesse perda, o comprimento do pedaço de fio resultante da união dos dois pedaços seria de $2{,}76 + 3{,}49 = 6{,}25$ metros, conforme o dispositivo que segue.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1\ \ } \\ 2{,}7\ 6 \\ +\ 3{,}4\ 9 \\ \hline 6{,}2\ 5 \end{array}$$

Como houve uma perda de 0,18 metro de fio, o comprimento do pedaço de fio, resultante da junção dos dois pedaços que Joaquim tinha no início, é de $6{,}25 - 0{,}18 = 6{,}07\,\text{m}$, conforme o dispositivo que segue.

$$\begin{array}{r} 6{,}2\ 5 \\ -\ 0{,}1\ 8 \\ \hline 6{,}0\ 7 \end{array}$$

■

Exercício 3.22 Seu Joaquim fez compras para seu restaurante. Seu caminhão pode transportar, no máximo, 2500 quilos de carga. Se ele levar 283,5 quilos de batata, 1022,25 quilos de cebola, 258,75 quilos de alho e 850 quilos de tomate, vai ser possível transportar toda essa carga de uma única vez? Se houver excesso de carga, de quantos quilos será esse excesso?

Solução. Somando toda a carga que deve ser transportada por seu Joaquim, obtemos o peso total de 2414,50 kg, conforme o dispositivo que seque.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & \\
 & & 2 & 8 & 3 & , & 5 & 0 \\
 & 1 & 0 & 2 & 2 & , & 2 & 5 \\
 & & 2 & 5 & 8 & , & 7 & 5 \\
+ & & 8 & 5 & 0 & , & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 4 & 1 & 4 & , & 5 & 0
\end{array}
$$

Desse modo, não haverá excesso de carga, uma vez que $2414{,}50 < 2500$. ■

Exercício 3.23 O supermercado "Ofertão" está com as seguintes ofertas do dia.

Biscoito doce	de R$ 3,45 por R$ 2,65
Creme de leite	de R$ 2,19 por R$ 1,49
Leite em pó	de R$ 3,80 por R$ 2,99
Arroz branco	de R$ 3,39 por R$ 2,29

João levou uma nota de R$ 20,00 e aproveitou a promoção, comprando uma unidade de cada produto que estava em oferta.

(a) Quanto João economizou, ao todo?
(b) Quanto ele recebeu de troco?

Solução. (a) Somando os preços comprados por João sem o desconto, obtemos o total de 9,42, como indica o seguinte dispositivo.

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 2\;\;3\;} \\
2,65 \\
1,49 \\
2,99 \\
+\,2,29 \\
\hline
9,42
\end{array}
$$

Por outro lado, o total gasto por João sem a promoção seria de 12,03, pelo dispositivo que segue.

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\;1\;\;2\;} \\
3,45 \\
2,19 \\
3,00 \\
+\quad 3,39 \\
\hline
12,03
\end{array}
$$

Agora, temos 20,00 − 9,42 = 2,61, pelo dispositivo abaixo.

$$
\begin{array}{r}
1\;2{,}0\;3 \\
-\,0\;9{,}4\;2 \\
\hline
0\;2{,}6\;1
\end{array}
$$

Portanto, João economizou R$ 2,61.

(b) João pagou com uma nota de R$ 20,00 e o total das compras que ele fez foi R$ 9,42.

$$
\begin{array}{r}
2\;0{,}0\;0 \\
-\,0\;9{,}4\;2 \\
\hline
1\;0{,}5\;8
\end{array}
$$

Assim, pelo dispositivo acima, o troco recebido foi de R$ 10,58. ■

Exercício 3.24 Marcela foi a uma feira de roupas em liquidação com duas notas de R$ 100,00. Ela comprou uma calça por R$ 59,90, uma saia por R$ 35,00, duas blusas por R$ 15,95, cada uma, e uma bermuda por R$ 29,99. Quanto falta para que Marcela ainda possa comprar um vestido básico de R$ 44,90?

Sequência 4

Exercício 3.25 — CMM. A aluna Ivone recebe, por semana, R$ 50,00 para seus gastos, incluindo o lanche da escola. No fim de uma determinada semana, ela verificou os seus gastos com lanches e notou que havia comprado 3 salgados, a R$ 2,00 cada; 2 fatias de bolo, a R$ 1,50 cada; 4 sucos, a R$ 1,80 cada e um refrigerante, a R$ 2,50. A quantia que lhe restou nessa semana para os demais gastos foi de

(a) R$ 31,30.
(b) R$ 18,70.
(c) R$ 7,80.
(d) R$ 42,20.
(e) R$ 21,70.

Solução. Ivone gastou com lanches o total de 18,70:

$$\begin{aligned}3\times 2{,}00 + 2\times 1{,}50 + 4\times 1{,}80 + 2{,}50 &= 6{,}00 + 3{,}00 + 7{,}20 + 2{,}50\\ &= 18{,}70.\end{aligned}$$

Como Ivone pagou com uma nota de R$ 50,00, restaram R$ 31,20, conforme o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{r} 5\ 0{,}0 \\ -\ 1\ 8{,}7 \\ \hline 3\ 1{,}3 \end{array}$$

Logo, Ivone recebeu R$ 31,30 de troco. Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.26 — CMM. André convidou alguns amigos para comemorarem o seu aniversário na cantina do colégio. Na confraternização, foram consumidos 4 pastéis a R$ 2,25 cada, 5 copos de suco a R\$ 0,75 cada e 3 sorvetes a R\$ 2,80 cada. André fez questão de pagar a conta. O valor total da conta que André pagou foi de

(a) R\$ 18,90.
(b) R\$ 26,20.
(c) R\$ 22,00.
(d) R\$ 23,75.
(e) R\$ 21,15.

Exercício 3.27 — CMM. Ana e Maria somaram as quantias de seus cofrinhos e viram que possuíam, juntas, R\$ 88,00. Durante a semana, as duas foram registrando quanto cada uma ganhou e gastou a cada dia. Na segunda-feira, Ana ganhou R\$ 7,00 e Maria gastou R\$ 5,00. Na terça-feira, as duas gastaram R\$ 3,00 cada. Na quarta, Maria ganhou R\$ 1,50 e Ana ganhou R\$ 4,50. Na quinta, Ana gastou R\$ 4,00. Na sexta, Maria deu R\$ 5,00 para Ana. No sábado, elas resolveram fazer as contas para ver quanto cada uma possuía em seu cofrinho. Perceberam, então que possuíam, juntas

(a) R\$ 91,00.
(b) R\$ 81,00.
(c) R\$ 93,00.
(d) R\$ 99,00.
(e) R\$ 86,00.

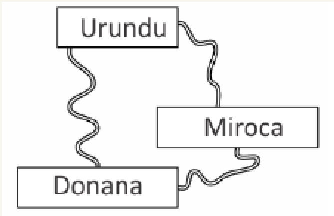
Solução. Ana e Maria tinham, juntas, R\$ 88,00. Na segunda-feira, Ana ganhou R\$ 7,00 e Maria gastou R\$ 5,00. Assim, a quantia que as duas possuíam juntas aumentou $7 - 5 = 2$ reais. Na terça-feira, as duas gastaram R\$ 3,00 cada. Logo, a quantia que possuíam reduziu $3 + 3 = 6$ reais. Na quarta, Maria ganhou R\$ 1,50 e Ana ganhou R\$ 4,50 e, assim, a quantia que as duas possuíam, juntas, aumentou $4{,}50 + 1{,}50 = 6$ reais. Na quinta, Ana gastou R\$ 4,00. Portanto, a quantia que as duas possuíam reduziu R\$ 4,00. Finalmente, na sexta, Maria deu R\$ 5,00 para Ana, o que não alterou a quantia que as duas possuíam. Deste modo, no final da semana as duas possuíam

$$88{,}00 + 2{,}00 - 6{,}00 + 6{,}00 - 4{,}00 = 86{,}00.$$

Daí, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

Exercício 3.28 — Canguru - adaptado. A figura mostra 3 cidades ligadas por estradas. De Donana para Urundu, o desvio por Miroca é 1,4 km mais longo do que a estrada direta. De Donana para Miroca, o desvio por Urundu é 4,6 km mais longo do que a estrada direta. De Urundu para Miroca, o desvio por Donana é 6,5 km mais longo do que a estrada direta. Qual é o comprimento do menor dos 3 percursos ligando diretamente 2 cidades?

(a) 2,3 km.
(b) 3,0 km.
(c) 3,7 km.
(d) 4,6 km.
(e) 6,5 km.



Solução. Suponha que um viajante faça uma viagem dando duas voltas completas pelas três cidades, dividindo o percurso em três trechos, do seguinte modo: inicialmente ele parte de Donana, passa por Urundu e faz uma parada em Miroca; depois parte de Miroca, passa por Donana e para novamente em Urundu; finalmente, parte de Urundu, passa por Miroca e finaliza as duas voltas em Donana. O primeiro trecho, de Donana a Miroca passando por Urundu, corresponde a uma viagem direta de Donana a Miroca adicionada a 4,6 km. O segundo trecho, de Miroca a Urundu passando por Donana, corresponde a uma viagem direta de Miroca a Urundu adicionada a 6,5 km. O terceiro trecho, de Urundu a Donana passando por Miroca, corresponde a uma viagem direta de Urundu a Donana adicionada a 1,4 km. Logo, duas voltas completas, pelas três cidades, correspondem a uma volta completa mais $4{,}6 + 1{,}4 + 6{,}5 = 12{,}5$ km. Desse modo, uma volta completa é um percurso total de 12,5 km. Por outro lado, como o percurso entre duas quaisquer das três cidades, passando pela terceira, corresponde ao percurso direto mais o acréscimo informado, o dobro do percurso direto mais o acréscimo é igual a 12,5km. Daí, o percurso direto entre duas cidades é igual à metade da diferença entre 12,5Km e o respectivo acréscimo. Logo, o menor percurso direto corresponde ao maior acréscimo e, portanto, o percurso direto de Miroca a Urundu, que é igual a $(12{,}5 - 6{,}5)/2 = 3\text{km}$, é o menor dos três percursos. ■

3.2 – Multiplicação e Divisão de Decimais

Exercício 3.29 Fernando comprou 6 chocolates ao preço de R\$ 2,35 cada. Quanto ele gastou ao todo?

Solução. O total gasto por Fernando é igual ao produto de 6 por 2,35. Para efetuar esse produto, note que $2{,}35 = \frac{235}{100}$. Desse modo,

$$6\times 2{,}35 = 6\times\frac{235}{100} = \frac{6\times 235}{100}.$$

Agora, efetuamos a multiplicação 6×235 do modo usual obtendo 1410 como produto, de acordo com o dispositivo que segue.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,3} \\ 235 \\ \times\quad 6 \\ \hline 1410 \end{array}$$

Logo, temos

$$6\times 2{,}35 = \frac{1410}{100} = 14{,}10.$$

Veja, no dispositivo ao lado, que podemos fazer o produto diretamente, imaginando que estamos multiplicando números naturais e, depois, posicionar a vírgula no produto de tal forma que a quantidade de ordens depois da vírgula seja igual à soma das quantidades no multiplicando e no multiplicador.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\;\;3} \\ 2{,}35 \\ \times\qquad 6 \\ \hline 14{,}10 \end{array}$$

■

Exercício 3.30 No último sábado, o preço da carne no açougue que fica próximo da casa de Augusto era R\$ 22,30 por quilograma.

Quanto Augusto pagou pelos 1,8 kg de carne que comprou naquele dia?

Solução. O valor pago por Augusto é o resultado da multiplicação $1{,}8\times 22{,}30$. Veja que

$$1{,}8\times 22{,}30 = \frac{18}{10}\times\frac{2230}{100} = \frac{18\times 2230}{1000}. \tag{3.2}$$

Multiplicando 18 por 2230, obtemos 40140 como produto.

$$\begin{array}{r} 2\,2\,3\,0 \\ \times\quad 1\,8 \\ \hline 1\,7\,8\,4\,0 \\ +2\,2\,3\,0\,0 \\ \hline 4\,0\,1\,4\,0 \end{array}$$

Assim,

$$1{,}8\times 22{,}30 = \frac{18\times 2230}{1000} = \frac{40140}{1000} = 40{,}140.$$

Desse modo, concluímos que Augusto pagou R\$ 40,14 pela carne que comprou.

Mais uma vez podemos esquecer as vírgulas por um instante e pensar que estamos multiplicando números naturais. Depois de efetuada a multiplicação devemos posicionar a vírgula no produto. Observe atentamente o produto das frações decimais na equação (3.2). Note que a quantidade de zeros no denominador do produto resultante é igual à soma das quantidades de zeros nos denominadores das frações decimais que representam o multiplicando e o multiplicador: no exemplo, "10" possui um zero, "100" possui dois zeros e, portanto, "$10\times 100 = 1000$" possui $1 + 2 = 3$ zeros. Agora, observando os números decimais que estão sendo multiplicados, 1,8 e 22,30, temos que o primeiro possui 1 cada decimal e o segundo possui 2 casas decimais. Por isso, o produto $1{,}8\times 22{,}30$ terá 3 casas decimais.

$$
\begin{array}{r}
22,30 \\
\times \quad 1,8 \\
\hline
17840 \\
+22300 \\
\hline
40,140
\end{array}
$$

■

De modo geral, temos o seguinte procedimento.

> **Multiplicação de números decimais:** para multiplicar dois ou mais números decimais, devemos *multiplicar esses números como se estivéssemos multiplicando números naturais*. Para *posicionar a vírgula no produto, basta lembrar que a quantidade de casas decimais (algarismos depois da vírgula) no produto deve ser igual à soma das quantidades de casas decimais nos dois ou mais fatores.*

Exercício 3.31 Sete amigos foram a uma pizzaria e pagaram, juntos, R$ 90,65. Sabendo que essa conta foi dividida igualmente entre os sete, quanto cada um deles pagou?

Solução. O valor pago por cada um dos amigos é igual ao quociente na divisão de 90,65 por 7. Para fazer essa conta, mais uma vez recorremos à representação de números decimais por frações decimais. Temos que

$$90{,}65 \div 7 = 90{,}65 \div 7{,}00 = \frac{9065}{100} \div \frac{700}{100} = \frac{9065}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{100}}{700} = \frac{9065}{700}.$$

Logo, o valor pago por cada um dos amigos também é igual ao quociente da divisão de 9065 por 700. Abaixo, mostramos duas maneiras diferentes de representar o algoritmo da divisão. Uma mais completa e outra resumida. Escolha aquele que você achar mais conveniente.

$$
\begin{array}{r|l}
9065 & 700 \\
\cline{2-2}
-700 & 12{,}95 \\
\cline{1-1}
2065 & \\
-1400 & \\
\cline{1-1}
6650 & \\
-6300 & \\
\cline{1-1}
3500 & \\
-3500 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
9 & 0 & 6 & 5 & & 7\,0\,0 \\ \cline{6-6}
2 & 0 & 6 & 5 & & 1\,2{,}9\,5 \\
 & 6 & 6 & 5 & 0 & \\
 & & 3 & 5 & 0\,0 & \\
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Dos dois dispositivos anteriores, concluímos que a cota que cada um dos amigos deve pagar é igual a R\$ 12,95. ■

Exercício 3.32 Um terreno tem a forma de um retângulo com área igual a 409,75 metros quadrados. Se a largura é igual a 12,5 metros, qual é o comprimento do terreno?

Solução. Como a área de um retângulo é dada pelo produto das suas dimensões, cada dimensão é igual ao quociente entre a área e a outra dimensão. Neste caso, o comprimento será igual ao quociente entre a área e a largura do terreno, ou seja, $409{,}75 \div 12{,}5$. Mas,

$$
\begin{aligned}
409{,}75 \div 12{,}5 = 409{,}75 \div 12{,}50 &= \frac{40975}{100} \div \frac{1250}{100} \\
&= \frac{40975}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{100}}{1250} = \frac{40975}{1250}.
\end{aligned}
$$

Assim, basta encontrar o quociente na divisão de 40975 por 1250. Novamente, apresentamos dois dispositivos para calcular esta divisão.

$$
\begin{array}{r|l}
40975 & 1250 \\ \cline{2-2}
-3750 & 32{,}78 \\ \cline{1-1}
3475 & \\
-2500 & \\ \cline{1-1}
9750 & \\
-8750 & \\ \cline{1-1}
10000 & \\
-10000 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
40975 & 1250 \\ \cline{2-2}
3475 & 32{,}78 \\
9750 & \\
10000 & \\
0 &
\end{array}
$$

Portanto, pela conta efetuada nos dispositivos, o comprimento do terreno é igual a 32,78 metros.

■

De modo geral, temos os seguintes procedimentos.

Divisão de números decimais: para dividir um número decimal por outro, devemos *igualar a quantidade de casas decimais desses números*, retirar as vírgulas e efetuar a divisão dos números naturais obtidos. Lembre-se como se faz a divisão entre dois inteiros: se o resto dessa divisão for diferente de zero, devemos acrescentar um zero à direita, transformando unidades em décimos, e prosseguir com a divisão. No passo seguinte, se o resto ainda for diferente de zero, acrescentamos outro zero à direita, transformando décimos em centésimos, e prosseguimos com a divisão. Continuamos esse procedimento até que o resto seja igual a zero ou até que o resto se repita. Nesse último caso, a partir do primeiro algarismo repetido, todos os demais algarismos, que aparecem entre os dois algarismos repetidos, também se repetem na mesma sequência. O primeiro grupo de algarismos, que se repretem, forma o período da *dízima periódica*, que é o resultado da divisão dos dois números. Voltaremos a falar sobre dízimas periódicas nos próximos cadernos. Por enquanto, para saber mais sobre dízimas periódicas, recomendamos as atividades do Portal da OBMEP[1].

Portal da OBMEP[1]

3.2.1 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 3.33 Efetue as multiplicações e divisões abaixo.

(a) $2{,}5\times1{,}4$.
(b) $4{,}3\times1{,}2$.
(c) $0{,}45\times3{,}5$.
(d) $3{,}25\times9{,}15$.
(e) $1{,}5\div0{,}5$.
(f) $77\div0{,}7$.
(g) $34{,}5\div10$.
(h) $10\div0{,}25$.

Solução. Temos os produtos e quocientes pelos seguintes dispositivos práticos.

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 1{,}4 \\ \hline 1\,0\,0 \\ 2\,5 \\ \hline 3{,}5\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}3 \\ \times\ 1{,}2 \\ \hline 8\,6 \\ 4\,3 \\ \hline 5{,}1\,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}4\,5 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 2\,2\,5 \\ 1\,3\,5 \\ \hline 1{,}5\,7\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}2\,5 \\ \times\ 9{,}1\,5 \\ \hline 1\,6\,2\,5 \\ 3\,2\,5 \\ 2\,9\,2\,5 \\ \hline 2\,9{,}7\,3\,7\,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,5 & 5 \\ \cline{2-2} -1\,5 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7\,7\,0 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 1\,1\,0 \\ 0\,7 & \\ -\ 7 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,4\,5 & 1\,0\,0 \\ \cline{2-2} -3\,0\,0 & 3{,}4\,5 \\ 4\,5\,0 & \\ -4\,0\,0 & \\ 5\,0\,0 & \\ -5\,0\,0 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,0\,0\,0 & 2\,5 \\ \cline{2-2} -1\,0\,0 & 4\,0 \\ \hline 0 & \end{array}$$

■

Exercício 3.34 Vinte e cinco quilogramas de café foram distribuídos em 100 pacotes iguais. Qual o peso (a massa) de café em cada pacote?

Exercício 3.35 Helena gastou 2,5 metros de tecido para fazer uma calça e uma blusa. Se Helena pagou R$ 12,00 por metro de tecido, quantos reais ela gastou com o tecido?

Solução. Helena gastou $2{,}5 \times 12{,}00 = 30{,}00$ reais, conforme o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 1\ 2 \\ \hline 5\ 0 \\ 2\ 5\ \ \\ \hline 3\ 0{,}0 \end{array}$$

■

Exercício 3.36 Certa quantidade de livros, idênticos, foi colocada sobre uma balança para calcular o valor a ser pago para entregá-los. O ponteiro da balança marcou 4,5 quilogramas. Se havia 15 livros sobre a balança, qual o peso de cada livro?

Solução. O peso de cada livro, em quilogramas, é o quociente da divisão de 4,5 por 15 e $4{,}5 \div 15 = 0{,}3$, como calculado pelo seguinte dispositivo prático.

$$\begin{array}{r|l} 4\ 5\ \ \ & 1\ 5\ 0 \\ \cline{2-2} -\ \ 0\ \ \ & 0{,}3 \\ \cline{1-1} 4\ 5\ 0 & \\ -\ 4\ 5\ 0 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Logo, o peso de cada livro é igual a 0,3 quilogramas. ■

Exercício 3.37 Neto comprou uma dezena de bilas coloridas por R$ 4,30. Sabendo que todas as bilas têm o mesmo preço, qual é o preço de cada uma?

Exercício 3.38 Em uma viagem de Quixadá à Fortaleza, o automóvel de Joaquim consumiu um total de 11,5 litros de gasolina. Se o preço do litro de gasolina no posto onde Joaquim abasteceu era R$ 4,60, quanto ele gastou com o combustível utilizado na viagem?

Exercício 3.39 — PISA. Mei-Ling, de Singapura, estava preparando-se para uma viagem de 3 meses à África do Sul como aluna de intercâmbio. Ela precisava trocar alguns dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR).

(a) Mei-Ling descobriu que a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sulafricano era

$$1 \text{ SGD} = 4{,}2 \text{ ZAR}.$$

Mei-Ling trocou 3000 dólares de Singapura por rands sul-africanos a esta taxa de câmbio. Quantos rands sul-africanos Mei-Ling recebeu?

(b) Ao retornar a Singapura após 3 meses, Mei-Ling ainda tinha 3900 ZAR. Ela trocou novamente por dólares de Singapura, observando que a taxa de câmbio tinha mudado para

$$1 \text{ SGD} = 4{,}0 \text{ ZAR}.$$

Quantos dólares de Singapura Mei-Ling recebeu?

(c) Durante estes 3 meses, a taxa de câmbio mudou de 4,2 para 4,0 ZAR por SGD. Foi vantajoso para Mei-Ling que a taxa de câmbio atual fosse de 4,0 ZAR em vez de 4,2 ZAR, quando ela trocou seus rands sul-africanos por dólares de Singapura? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

Solução. (a) Mei-Ling trocou 3000 dólares de Singapura com a taxa "1 SGD = 4,2 ZAR."

$$\begin{array}{r} 3\,0\,0\,0 \\ \times \quad 4{,}2 \\ \hline 6\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,0\,0\,0 \\ \hline 1\,2\,6\,0\,0{,}0 \end{array}$$

Assim, Mei-Ling recebeu $3000 \times 4{,}2 = 12600$ rands.

(b) Agora, utilizando a taxa "1 SGD = 4,0 ZAR", Mei-ling recebeu $3900 \div 4 = 975$ dólares de Singapura, após trocar os 3900 rands que trouxe de volta.

$$\begin{array}{r|l} 3\,9\,0\,0 & 4 \\ \cline{2-2} -3\,6 & 9\,7\,5 \\ \cline{1-1} 3\,0 & \\ -2\,8 & \\ \cline{1-1} 2\,0 & \\ -2\,0 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

(c) Veja que se Mei-Ling tivesse trocado os rands, que restaram na viagem por dólares, com a taxa "1 SGD = 4,2 ZAR", ela receberia $3900 \div 4{,}2 = 928{,}5$ dólares de Singapura.

$$\begin{array}{r|l} 3\,9\,0\,0\,0 & 4\,2 \\ \cline{2-2} -3\,7\,8 & 9\,2\,8{,}5 \\ \cline{1-1} 1\,2\,0 & \\ -\,8\,4 & \\ \cline{1-1} 3\,6\,0 & \\ -3\,3\,6 & \\ \cline{1-1} 2\,4\,0 & \\ -2\,1\,0 & \\ \cline{1-1} 3\,0 & \end{array}$$

Desse modo, foi vantajoso para Mei-Ling que a taxa de câmbio atual fosse de 4,0 ZAR em vez de 4,2 ZAR.

■

No item (c) da questão anterior, um modo alternativo de justificar a vantagem, para Mei-Ling, que a taxa de câmbio atual fosse de 4,0 ZAR em vez de 4,2 ZAR, é observar que o quociente de $3900 \div 4$ é maior que o quociente de $3900 \div 4{,}2$, porque $4{,}2 > 4$ e, quando o dividendo é mantido, se o divisor aumenta, então o quociente diminui.

Sequência 2

Exercício 3.40 A polegada é uma unidade de comprimento que corresponde a 2,54 cm. Considerando uma TV como um retângulo, o comprimento da sua diagonal, em polegadas, serve como referência para identificarmos o seu tamanho. Por exemplo, uma TV de 32 polegadas possui uma diagonal que mede 32 polegadas. Qual o comprimento, em centímetros, da diagonal de uma TV de 40 polegadas?

Exercício 3.41 Uma barra de chocolate de 300 gramas é dividida em 16 partes iguais. Se Caio comeu 2 dessas partes, quantos gramas de chocolate ele consumiu?

Solução. Cada uma das 16 partes, da barra de chocolate, pesa $300 \div 16 = 18{,}75$ gramas.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 3 & 0 & 0 & & 1\,6 \\ \cline{6-6}
- & 1 & 6 & & & 1\,8{,}7\,5 \\ \cline{2-3}
 & 1 & 4 & 0 & & \\
- & 1 & 2 & 8 & & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 2 & 0 & \\
 & - & 1 & 1 & 2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8 & 0 & \\
 & & - & 8 & 0 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1\,8{,}7\,5 \\
\times \quad\; 2 \\ \hline
3\,7\,5\,0 \\ \hline
3\,7{,}5\,0
\end{array}
$$

Como caio comeu duas partes, ele consumiu $2 \times 18{,}75 = 37{,}50$ gramas de chocolate. ■

Exercício 3.42 A milha é uma unidade usada para medir distâncias. Cada milha corresponde a aproximadamente 1,6 quilômetro. Sabendo que a distância entre Juazeiro do Norte e Fortaleza, passando por Quixeramobim, é aproximadamente 312,5 milhas e que a distância entre Fortaleza e Quixeramobim é aproximadamente 125 milhas, qual a distância aproximada entre Quixeramobim e Juazeiro do Norte?

Solução. Uma vez que a distância entre Juazeiro do Norte e Fortaleza é aproximadamente igual a 312,5 milhas e a distância entre Fortaleza e Quixeramobim é aproximadamente igual a 125 milhas, concluímos que a distância entre Juazeiro do Norte e Quixeramobim é aproximadamente igual a $312{,}5 - 125 = 187{,}5$ milhas.

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 2{,}5\ 0 \\ -\ 1\ 2\ 5{,}0\ 0 \\ \hline 1\ 8\ 7{,}5\ 0 \end{array}$$

Transformando essa distância em km, obtemos $187{,}5 \times 1{,}6 = 300$km.

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 7{,}5 \\ \times \quad\quad 1{,}6 \\ \hline 1\ 1\ 2\ 5\ 0 \\ 1\ 8\ 7\ 5\ \\ \hline 3\ 0\ 0{,}0\ 0 \end{array}$$

Portanto, a distância entre Juazeiro do Norte e Quixeramobim é aproximadamente igual a 300 km. ■

Exercício 3.43 Joana comprou 2,5 metros de tecido para fazer um vestido para a sua formatura. Se ela pagou R$ 12,50 por metro de tecido e R$ 90,00 à costureira que fez o vestido, quanto ela gastou ao todo?

Solução. Como cada metro custa 12,50 reais, 2,5 metros custam $2{,}5 \times 12{,}50 = 31{,}25$ reais.

$$\begin{array}{r}
1\,2{,}5\,0 \\
\times \quad 2{,}5 \\
\hline
6\,2\,5\,0 \\
2\,5\,0\,0 \\
\hline
3\,1{,}2\,5\,0
\end{array}$$

Logo, Joana gastou R$ 31,25 com o tecido. Além disso, ela pagou R$ 90,00 pela confecção do vestido.

$$\begin{array}{r}
3\,1{,}2\,5 \\
+ \quad 9\,0{,}0\,0 \\
\hline
1\,2\,1{,}2\,5
\end{array}$$

Assim, Joana gastou, ao todo, R$ 31,25 + R$ 90,00 = R$ 121,25. ■

Exercício 3.44 Aquiles foi à feira e pagou R$ 12,72 por uma dúzia de laranjas. Se o preço de cada unidade de laranja é o mesmo, quanto Aquiles teria pago se tivesse comprado 8 laranjas?

Solução. Observe que 12 laranjas custaram R$ 12,72.

$$\begin{array}{r|l}
1\,2\,7\,2 & 1\,2\,0\,0 \\
\cline{2-2}
-\,1\,2\,0\,0 & 1{,}0\,6 \\
\cline{1-1}
7\,2\,0\,0 & \\
-\,7\,2\,0\,0 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Logo, cada laranja custou R$ 12,72 ÷ 12 = R$ 1,06. Assim, 8 laranjas custariam 8×R$ 1,06 = R$ 8,48.

$$\begin{array}{r}
1{,}0\,6 \\
\times \quad 8 \\
\hline
8\,4\,8 \\
\hline
8{,}4\,8
\end{array}$$

Portanto, Aquiles teria pago R$ 8,48 por 8 laranjas. ■

Exercício 3.45 Ana comprou uma geladeira que custou R$ 1299,00.

Ela pagou a metade desse valor no ato da compra e parcelou o restante em 10 parcelas iguais. Qual o valor de cada parcela?

Exercício 3.46 Monique pagou a compra de três camisetas com uma nota de R$ 50,00. Cada camiseta custou R$ 10,75. Quanto ela recebeu de troco?

(a) R$ 17,75.
(b) R$ 18,75.
(c) R$ 33,25.
(d) R$ 32,23.
(e) R$ 39,25.

Solução. Observe que $3 \times 10{,}75 = 32{,}25$.

$$\begin{array}{r} 1\ 0{,}7\ 5 \\ \times \qquad\ \ 3 \\ \hline 3\ 2{,}2\ 5 \end{array}$$

Logo, Monique pagou R$ 32,25 pelas três camisetas. Como ela pagou com uma nota de R$ 50,00 e $50{,}00 - 32{,}25 = 17{,}75$, concluímos que Monique recebeu R$ 17,75 de troco.

$$\begin{array}{r} 5\ 0{,}0\ 0 \\ -\ 3\ 2{,}2\ 5 \\ \hline 1\ 7{,}7\ 5 \end{array}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.47 Alguns amigos resolveram comprar, em sociedade, uma mesa de ping-pong. Cada um deles pagou, exatamente, R$ 85,50. Se a mesa custou R$ 427,50, então quantos amigos compraram a mesa?

Exercício 3.48 — ESA. Um estudante gastou $\frac{1}{7}$ de seu salário com alimentação e $\frac{5}{6}$ do que sobrou com educação e outras despesas. Restaram, ainda, R$ 286,34. O seu salário é de

(a) R\$ 3006,20.
(b) R\$ 4004,16.
(c) R\$ 2004,38.
(d) R\$ 1736,40.
(e) R\$ 2134,29.

Solução. Depois que o estudante gastou $\frac{1}{7}$ do seu salário com alimentação, ainda restaram $\frac{7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ do salário. Daí, ele gastou $\frac{5}{6}$ do que restou com educação e outras despesas, ou seja, gastou $\frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{7} = \frac{5}{7}$ do salário com educação e outras despesas. Desse modo, o total gasto com essas duas despesas é

$$\frac{1}{7} + \frac{5}{7} = \frac{6}{7} \text{ do seu salário.}$$

Assim, depois de descontadas essas duas despesas, ainda restou $\frac{7}{7} - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$ do salário, que corresponde a R\$ 286,34. Portanto, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{1}{7} \longrightarrow \text{R\$ } 286{,}34$$

$$\frac{7}{7} \longrightarrow 7 \times \text{R\$ } 286{,}34 = \text{R\$ } 2004{,}38$$

Logo, o salário do estudante é de R\$ 2004,38. Assim, a alternativa correta é a letra **(c)**. ■

Sequência 3

Exercício 3.49 Em uma loja de informática, Fábio comprou um computador no valor de R\$ 2299,90, uma impressora por R\$ 780,90 e seis cartuchos de tinta, que custaram R\$ 89,20 cada um. Todos esses itens foram pagos em quatro parcelas de mesmo valor. Qual o valor de cada parcela?

(a) R\$ 574,00.
(b) R\$ 770,20.
(c) R\$ 792,50.
(d) R\$ 904,00.

(e) R$ 814,80.

Solução. Observe que $89{,}20 \times 6 = 535{,}20$.

$$\begin{array}{r} 8\ 9{,}2\ 0 \\ \times \qquad 6 \\ \hline 5\ 3\ 5{,}2\ 0 \end{array}$$

Logo, Fábio pagou R$ 535,20 pelos seis cartuchos de tinta. Somando os preços do computador e da impressora ao valor pago pelos seis cartuchos, temos uma despesa total de

$$R\$\,535{,}20 + R\$\,2299{,}90 + R\$\,780{,}90 = R\$\,3616{,}00.$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\,1\,2\ \ \ \ \ \ } \\ 535{,}20 \\ 2299{,}90 \\ +\ \ 780{,}90 \\ \hline 3616{,}00 \end{array}$$

Este valor total dividido por quatro é igual a R$ 3616,00÷4 = R$ 904,00.

$$\begin{array}{r|l} 3\,6\,1\,6 & 4 \\ \cline{2-2} -3\,6\ \ \ \ & 9\,0\,4 \\ \cline{1-1} 0\,1\,6 & \\ -\ \ 1\,6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Assim, concluímos que o valor de cada parcela é igual a R$ 904,00. Desse modo, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 3.50 Um ciclista percorreu 5,5 quilometros pela manhã e à tarde ele percorreu duas vezes e meia essa distância. Quantos quilômetros ele percorreu ao todo ?

Exercício 3.51 José comprou um fogão que custou R$ 999,81. Ele pagou a terça parte desse valor no ato da compra e parcelou o restante em 9 parcelas iguais. Qual o valor de cada parcela?

Exercício 3.52 Jorge comprou um computador parcelado em 12 vezes sem juros. Ficando desempregado, seu irmão comprometeu-se a ajudar e pagar metade do valor das parcelas do objeto. Sabendo que o valor do computador é R$ 1445,90, quanto, aproximadamente, Jorge paga por mês?

Exercício 3.53 Na tabela a seguir, podemos observar o consumo mensal de água de uma família durante os cinco primeiros meses de 2019, em metros cúbicos.

janeiro	8,34
fevereiro	9,25
março	7,86
abril	6,14
maio	8,21

Qual a média de consumo mensal dessa família nos cinco primeiros meses de 2019?

Solução. A média do consumo mensal é dada pela divisão da soma dos consumos, nos cinco meses, por 5. Calculando a soma dos consumos nos cinco meses obtemos um total de $39{,}8\,\mathrm{m}^3$.

$$
\begin{array}{rr}
 & {\scriptstyle 3\,1\;\,2} \\
 & 8,34 \\
 & 9,25 \\
 & 7,86 \\
 & 6,14 \\
+ & 8,21 \\
\hline
 & 39,80
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr|l}
3 & 9 & 8 & 5\,0 \\ \cline{4-4}
-3 & 5 & 0 & 7{,}9\,6 \\ \cline{1-3}
 & 4\,8 & 0 & \\
- & 4\,5 & 0 & \\ \cline{2-3}
 & 3\,0 & 0 & \\
- & 3\,0 & 0 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

■

Agora, dividindo esse total por 5, concluímos que o consumo médio mensal nos cinco meses é de $7{,}96\,\mathrm{m}^3$.

Exercício 3.54 Cláudia foi ao teatro com sua prima. Comprou dois ingressos com 20 reais e recebeu de troco 40 centavos. Qual era o preço de cada ingresso?

Exercício 3.55 Gabi possui, em seu cofrinho, 22 moedas de R$ 1,00, 39 moedas de R$ 0,50, 13 moedas de R$ 0,10 e algumas moedas de R$ 0,25, totalizando R$ 51,05. Quantas moedas de R$ 0,25 há no cofre?

Solução. Calculando o total de dinheiro que Gabi possui com cada tipo de moeda, exceto as de R$ 0,25, obtemos 22×R$ 1,00 = R$ 22,00 em moedas de R$ 1,00, 39×R$ 0,50 = R$ 19,50 em moedas de R$ 0,50 e 13×R$ 0,10 = R$ 1,30 em moedas de R$ 0,10.

$$\begin{array}{r} 1{,}0\,0 \\ \times\quad 2\,2 \\ \hline 2\,0\,0 \\ 2\,0\,0 \\ \hline 2\,2{,}0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}5\,0 \\ \times\quad 3\,9 \\ \hline 4\,5\,0 \\ 1\,5\,0 \\ \hline 1\,9{,}5\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}1\,0 \\ \times\quad 1\,3 \\ \hline 0\,3\,0 \\ 1\,0 \\ \hline 1{,}3\,0 \end{array}$$

Somando esses valores, obtemos um valor total de

$$R\$\,22{,}00 + R\$\,19{,}50 + R\$\,1{,}30 = R\$\,42{,}80.$$

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 22{,}00 \\ 19{,}50 \\ +\quad 1{,}30 \\ \hline 42{,}80 \end{array}$$

Agora, a diferença entre R$ 51,05 e R$ 42,80, que é igual a R$ 8,25, corresponde às moedas de R$ 0,25. Assim, o quociente de 8,25 por 0,25 é a quantidade de moedas de R$ 0,25 no cofre.

$$\begin{array}{r} 5\,1{,}0\,5 \\ -\;4\,2{,}8\,0 \\ \hline 0\,8{,}2\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8\,2\,5 & 2\,5 \\ \cline{2-2} -\,7\,5 & 3\,3 \\ \cline{1-1} 7\,5 & \\ -\,7\,5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Portanto, há $8{,}25 \div 0{,}25 = 33$ moedas de R\$ 0,25 no cofre. ■

Sequência 4

Exercício 3.56 — CMBH. Dividir um número por 0,0125 é o mesmo que multiplicar esse mesmo número por

(a) $\frac{125}{10000}$. (b) 80. (c) 800. (d) 8. (e) $\frac{1}{8}$.

Solução. Dividir um número por 0,0125 é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso multiplicativo. Mas veja que

$$0{,}0125 = \frac{125}{10000} = \frac{125 \div 125}{10000 \div 125} = \frac{1}{80}.$$

Logo, dividir um número por 0,0125 é o mesmo que multiplicr esse número por $\frac{80}{1} = 80$. Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 3.57 Em seu cofrinho, João possui apenas moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,50. Sabendo que a quantidade de moedas de R\$ 0,25 é o triplo da quantidade de moedas de R\$ 0,50 e que o total de dinheiro no cofrinho é R\$ 46,25, quantas moedas há no cofre?

Solução. Veja que cada grupo com três moedas de R\$ 0,25 e uma moeda de R\$ 0,50 – quatro moedas ao todo – corresponde a um total de $3\times$R\$ 0,25 + R\$ 0,50 = R\$ 1,25. Como o total de dinheiro no cofrinho é R\$ 46,25 e $46{,}25 \div 1{,}25 = 37$, concluímos que no cofre há 37 grupos, cada um deles com 4 moedas, sendo três delas de R\$ 0,25 e uma de R\$ 0,50. Portanto, o total de moedas no cofre é $37\times 4 = 148$. ■

Exercício 3.58 — OBMEP. Um grupo de 20 amigos reuniu-se em uma pizzaria que oferece a promoção descrita na figura: qualquer pizza grande por 30 reais e, na compra de 5 pizzas grandes, você ganha mais uma grátis. Cada pizza grande foi cortada em 12 fatias e cada um dos amigos comeu 5 fatias de pizza. Quantos reais, no mínimo, o grupo pagou pelas pizzas?

(a) R$ 189,00.
(b) R$ 220,50.
(c) R$ 252,00.
(d) R$ 283,50.
(e) R$ 315,00.

Solução. Como cada um dos 20 amigos comeu 5 fatias de pizza, eles comeram ao todo $20\times 5 = 100$ fatias. Por outro lado, uma vez que cada pizza foi dividida em 12 fatias e $100 = 8\times 12 + 4$,

$$\begin{array}{r|l} 1\,0\,0 & 1\,2 \\ \cline{2-2} 4 & 8 \end{array}$$

concluímos que foram necessárias, no mínimo, $8 + 1 = 9$ pizzas para alimentar cada um dos 20 amigos com 5 fatias para cada um. Desse modo, os amigos gastaram, no mínimo, $9\times$R$ 31,50 = R$ 283,50.

$$\begin{array}{r} 3\;1{,}5\;0 \\ \times \qquad\quad 9 \\ \hline 2\;8\;3{,}5\;0 \end{array}$$

Logo, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 3.59 — ENEM. Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite até as seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d'água tem volume de 0,2 mL. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período em litros?

(a) 0,2. (b) 1,2. (c) 1,4. (d) 12,9. (e) 64,8.

Solução. O desperdício de água com o gotejamento durou 6 horas, ou seja, $6\times 60\times 60 = 21.600$ s. Como a frequência do gotejamento é de

1 gota a cada 3 segundos, da meia-noite até as seis hotas da manhã pingaram $21600 \div 3 = 7200$ gotas. Agora, como o volume de cada gota é 0,2 mL, o total de água desperdiçada é $7200 \times 0{,}2 = 1440$ mL. Para saber o volume de água desperdiçada em litro, basta deslocar a vírgula três posições para a esquerda, ou seja, o volume de água desperdiçada corresponde a 1,44 L. Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Exercício 3.60 — OBMEP. Sempre que Yurika abastece seu carro, ela enche o tanque e anota a data, a quilometragem marcada no painel e a quantidade de litros de combustível colocada. Na tabela estão os dados registrados por Yurika em dois abastecimentos consecutivos. Quantos quilômetros por litro, aproximadamente, fez o carro de Yurika nesse período?

data	km	litros
⋮	⋮	⋮
01/02	35723	32,5
07/02	36144	43
⋮	⋮	⋮

(a) 5,6. (b) 9,8. (c) 11,1. (d) 12,9. (e) 40,1.

Exercício 3.61 — CESGRANRIO - adaptada. Um automóvel percorre 400 km, consumindo 44 litros de álcool. Se o preço do litro de álcool fosse R$ 4,50, o proprietário do automóvel gastaria em média por quilômetro percorrido, a quantia de aproximadamente

(a) R$ 0,40.
(b) R$ 0,43.
(c) R$ 0,45.
(d) R$ 0,50.
(e) R$ 0,53.

Solução. Supondo que o preço do litro de álcool é R$ 0,50, o custo para percorrer 400 km é 44×R$ 4,50 = R$ 198,00, pois o automóvel consome 44 litros para percorrer essa distância.

$$\begin{array}{r} 4{,}5\,0 \\ \times \quad 4\,4 \\ \hline 1\,8\,0\,0 \\ 1\,8\,0\,0 \\ \hline 1\,9\,8{,}0\,0 \end{array}$$

Logo, o custo médio por quilômetro percorrido é

$$\text{R\$}\,198{,}00 \div 400 = \text{R\$}\,0{,}495,$$

ou seja, aproximadamente R$ 0,50.

$$\begin{array}{l|l} 1\,9\,8 & 4\,0\,0 \\ \cline{2-2} 1\,9\,8\,0 & 0{,}4\,9\,5 \\ 3\,8\,0\,0 & \\ 2\,0\,0\,0 & \\ 0 & \end{array}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 3.62 — UNIRIO - adaptada. Suponha que um carro flex consegue percorrer 10 km por litro, quando abastecido com gasolina, e 8 km por litro, quando abastecido com álcool. Se o preço da gasolina é R$ 0,60 por litro, quanto deve custar o litro do álcool, para que o proprietário tenha o mesmo custo ao abastecer com qualquer combustível?

(a) 0,38. (b) 0,48. (c) 0,42. (d) 0,45. (e) 0,50.

Solução. Vamos considerar um múltiplo comum de 10 km e 8 km – 40 km, por exemplo – e calcular o custo para o automóvel percorrer essa distância com gasolina. Uma vez que o automóvel consegue percorrer 10 km com 1 L de gasolina, ele precisará de $40 \div 10 = 4$ L para percorrer 40 km. Como o preço do litro de gasolina é R$ 0,60, o custo para percorrer 40 km com gasolina é $4 \times$ R$ 0,60 = R$ 2,40. Por outro lado, como o automóvel consegue percorrer 8 km com cada litro de álcool, são necessários $40 \div 8 = 5\,\text{L}$ de álcool para o automóvel percorrer os $40\,\text{km}$. Para que o proprietário tenha o mesmo custo ao abastecer com qualquer combustível, $5\,\text{L}$ de álcool devem custar o mesmo que $4\,\text{L}$ de gasolina, ou seja, $5\,\text{L}$ de álcool devem custar R\$ 2,40. Portanto, cada litro de álcool deve custar $\text{R\\$}\,2{,}40 \div 5 = \text{R\\$}\,0{,}48$. Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 3.63 — OBMEP. Geni é cliente de uma companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R\$ 18,00;
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês;
- R\$ 0,03 por minuto que exceder as 10 horas gratuitas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos e, em fevereiro, por 9 horas e 55 minutos. Qual foi a despesa de Geni com telefone nesses dois meses, em reais?

(a) 45,51
(b) 131,10
(c) 455,10
(d) 13,11
(e) 4,55

Solução. Em janeiro, como 10 horas são gratuitas e Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar, além da tarifa mensal fixa de R\$ 18,00, apenas o custo de 5 horas e 17 minutos. Agora, uma vez que o preço cobrado pela companhia telefônica é feito de acordo com a quantidade de minutos utilizados, vamos transformar em minutos o tempo que excedeu as 10 horas de gratuidade. Temos

$$5\,\text{h}17\,\text{min} = (5\times 60 + 17)\text{min} = 317\,\text{min}.$$

Logo, o valor da conta telefônica de Geni em janeiro foi de

$$\text{R\\$}\,18{,}00 + 317\times\text{R\\$}\,0{,}03 = \text{R\\$}\,18{,}00 + \text{R\\$}\,9{,}51 = \text{R\\$}\,27{,}51.$$

Em fevereiro, Geni usou seu telefone por menos de 10 horas. Desse modo, ela pagou apenas a tarifa fixa mensal de R\$ 18,00. Portanto, nesses dois meses, a despesa de Geni com telefone foi de

$$\text{R\$}\,27{,}51 + \text{R\$}\,18{,}00 = \text{R\$}\,45{,}51.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.64 — ENEM. Três empresas de táxi W, K e L estão fazendo promoções: a empresa W, que cobra R\$ 2,40 a cada quilômetro rodado e com um custo inicial de R\$ 3,00; a empresa K, que cobra R\$ 2,25 a cada quilômetro rodado e uma taxa inicial de R\$ 3,80 e, por fim, a empresa L, que cobra R\$ 2,50 a cada quilômetro rodado e com taxa inicial de R\$ 2,80. Um executivo está saindo de casa e vai de táxi para uma reunião que é a 5 km do ponto de táxi, e sua esposa sairá do hotel e irá para o aeroporto, que fica a 15 km do ponto de táxi. Assim, os táxis que o executivo e sua esposa deverão pegar, respectivamente, para terem a maior economia são das empresas

(a) W e L.
(b) W e K.
(c) K e L.
(d) K e W.
(e) K e K.

Solução. Vamos calcular os valores das corridas, para o executivo e sua esposa, com as três empresas e, depois, decidir quais as que são mais econômicas. Calculando os custos para o executivo, em reais, com as três empresas, obtemos

Empresa W:

$$\begin{aligned} & 3{,}00 + 5\times 2{,}40 \\ &= 3{,}00 + 12{,}00 \\ &= 15{,}00 \end{aligned}$$

Empresa K:

$$\begin{aligned} & 3{,}80 + 5\times 2{,}25 \\ &= 3{,}80 + 11{,}25 \\ &= 15{,}05 \end{aligned}$$

Empresa L:

$$\begin{aligned} & 2{,}80 + 5\times 2{,}50 \\ &= 2{,}80 + 12{,}50 \\ &= 15{,}30 \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para a sua esposa, obtemos

Empresa W:	Empresa K:	Empresa L:
$3{,}00 + 15{\times}2{,}40$	$3{,}80 + 15{\times}2{,}25$	$2{,}80 + 15{\times}2{,}50$
$= 3{,}00 + 36{,}00$	$= 3{,}80 + 33{,}75$	$= 2{,}80 + 37{,}50$
$= 39{,}00$	$= 37{,}55$	$= 40{,}30$

Portanto, os táxis mais econômicos para o executivo e sua esposa são os das empresas W e K, respectivamente. Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■