MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2022

3

Geometria Métrica

Perímetros e Áreas
Teorema de Pitágoras
Relações Métricas
Sistema de Coordenadas

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica

UFC/FUNCAP/SEDUC

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO
SISEDU
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED
CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
CEARÁ EDUCA
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Sumário

1 Geometria Métrica

Uma das principais utilidades da Geometria Plana é sua capacidade de modelar situações reais e resolver problemas que envolvem conhecimentos sobre cálculos de medidas de comprimento, área e ângulo. Ao longo desse material desenvolveremos algumas técnicas de resolução de problemas da maneira mais prática possível: resolvendo-os.

1.1 – Perímetro e Áreas - Noções Básicas

Começamos nosso roteiro com um probleminha simples, em que recordamos a importância das principais unidades de medida de comprimento.

> **Problema 1** Fábio está treinando para uma corrida. Ele dividiu seu treino em três etapas: na primeira correu 2 km, na segunda andou 800 metros e na terceira correu 3 km. Quantos metros ele percorreu ao todo, durante esse treino?

Antes de resolvermos esse problema, devemos lembrar que para somarmos comprimentos de caminhos ou objetos calculados em medidas diferentes, devemos, antes, transformar todos os comprimentos para uma mesma medida. No caso do problema em que estamos pensando, isso é fácil, uma vez que as medidas mencionadas no enunciado fazem parte do **sistema métrico**.

O sistema métrico é um sistema de medição internacional **decimalizado**, que surgiu pela primeira vez na França, durante a Revolução Francesa, visando minimizar a dificuldade de funcionamento do comércio e da indústria, devido à existência de diversos padrões de medida.

Esse sistema é ancorado em dois conceitos básicos: uma medida-base, o *metro*, e medidas múltiplas e submúltiplas do metro, as quais são obtidas multiplicando-se a medida-base por potências de dez.

Existem situações nas quais o uso exclusivo da unidade-base deixa de ser prático. Isso ocorre quando queremos medir grandes extensões ou objetos muito pequenos.

Por tais razões, emprega-se os múltiplos e submúltiplos do metro, os quais também são chamados de *unidades secundárias* de comprimento. Elas são definidas de acordo com as tabelas a seguir:

Múltiplo	**Nome**	**Símbolo**
10^0	metro	m
10^1	decâmetro	dam
10^2	hectômetro	hm
10^3	quilômetro	km
10^6	megametro	Mm
10^9	gigametro	Gm
10^{12}	terametro	Tm
10^{15}	petametro	Pm
10^{18}	exametro	Em
10^{21}	zettametro	Zm
10^{24}	iotametro	Ym

Submúltiplo	**Nome**	**Símbolo**
10^0	metro	m
10^{-1}	decímetro	dm
10^{-2}	centímetro	cm
10^{-3}	milímetro	mm
10^{-6}	micrometro	μm
10^{-9}	nanômetro	nm
10^{-12}	picometro	pm
10^{-15}	femtômetro	fm
10^{-18}	attometro	am
10^{-21}	zeptômetro	zm
10^{-24}	yoctômetro	ym

Nas tabelas, os expoentes escritos nas potências de dez representam o número de vezes que o metro deve ser multiplicado por 10 para obtermos a referida medida. Por exemplo, o quilômetro está associado com 10^3. Isso significa que devemos pegar um metro e multiplicarmos por 10 três vezes consecutivas para obtermos 1 quilômetro. De forma análoga, um expoente negativo significa o número de vezes que 1 metro é divido por 10 para obtermos a medida referida. Por exemplo, o nanômetro está associado ao expoente -9 pois um metro precisa ser dividido por 10 vezes para obtermos 1 nanômetro.

Obs As medidas secundárias mais utilizadas são: milímetro, centímetro, decímetro e quilômetro.

Solução. Convertendo quilômetros para metros, temos que $2\,\text{km} = 2000\,\text{m}$ e $3\,\text{km} = 3000\,\text{m}$. Somando-se todas as medidas em metros, obtemos:

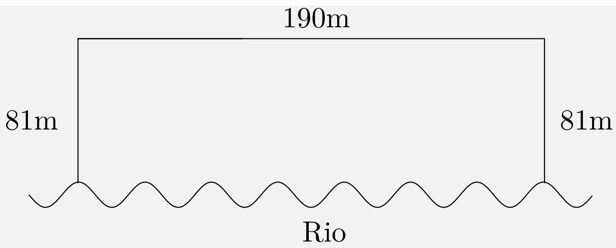
$$2000 + 800 + 3000 = 5800$$

metros. ■

O vídeo a seguir traz uma interessante forma de comparação entre as escalas das unidades de medida do sistema métrico.

Saiba mais

Problema 2 — Enem–2013. Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 11. (E) 12.

Solução. Uma vez que um dos lados é margeado pelo rio, devemos desconsiderar esse lado ao calcular o perímetro do terreno, pois não utilizaremos tela alguma aí. Desse modo, a quantidade de tela utilizada para cercar todo o terreno é igual a $81 + 81 + 190 = 352$ metros. Por outro lado, a tela é vendida em rolos de 48 metros. Assim, para calcular a quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar o terreno, devemos começar dividindo 352 por 48:

$$\begin{array}{r|l} 352 & 48 \\ \hline 16 & 7 \end{array}$$

Veja que 7 rolos de tela não são suficientes para cercar o terreno, pois ainda ficariam 16 metros sem cerca. Assim, a quantidade mínima de rolos para cercar o terreno é $7 + 1 = 8$, embora o oitavo rolo não seja utilizado completamente. ■

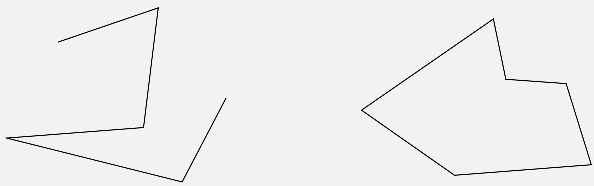
Você pode utilizar a sequência de aulas da Khan Academy para aprender e praticar um pouco mais sobre conversões entre diferentes unidades do sistema métrico.

Saiba mais

Observe que nas soluções dos problemas anteriores, utilizamos intuitivamente um conceito básico da Geometria: a medida do comprimento de uma **concatenação de dois caminhos abertos** é igual a soma dos comprimentos dos caminhos originais.

Podemos entender um caminho aberto como um traço no plano cujos pontos inicial e final são diferentes. Isso ocorre quando você sai da sua casa e vai a pé até a casa de um amigo que mora próximo.

Já um **caminho fechado** é quando os pontos inicial e final coincidem. Um exemplo é quando você dá uma volta ao redor de uma praça. Caminhos fechados simples (formados por um número finito de segmentos de retas que encontram-se apenas em suas extremidades) geram figuras planas que possuem **área** e **perímetro**.



Caminho Aberto   Caminho Fechado

O perímetro de uma figura plana é a medida do comprimento do seu contorno. Quando a figura é um polígono, cujo contorno é um camnho fechado simples, o perímetro é igual à soma das medidas de seus lados. A seguir, dois problemas que tratam sobre esse assunto.

Problema 3 Um pentágono é formado da seguinte maneira: dado o lado com a menor medida, o próximo lado mede o dobro do seu comprimento, o seguinte mede o triplo, e o quarto e o quinto medem o quádruplo do de menor medida. Sabendo que o perímetro desse pentágono é igual a 280 cm, qual é a medida do seu maior lado?

(a) 10 cm.
(b) 50 cm.
(c) 80 cm.
(d) 100 cm.
(e) 20 cm.

Solução. Seja x a medida do menor lado. Os demais lados terão medidas $2x$, $3x$, $4x$ e $4x$. Assim,

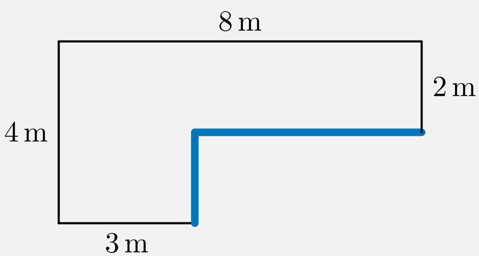
$$x + 2x + 3x + 4x + 4x = 280, \text{ ou seja,}$$

$$14x = 280, \text{ o que dá}$$

$$x = 20.$$

Portanto, o maior lado terá medida $4x = 80\,\text{cm}$. **Letra C.** ■

Problema 4 Na figura a seguir, temos um polígono em forma de "L", tal que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°. Joaquim deseja criar uma cerca contornando todo o perímetro desse terreno. Qual será o tamanho dessa cerca?



Antes de resolvermos o problema, note que não conhecemos, a princípio, as medidas de alguns trechos da cerca, destacados com segmentos "mais grossos". Para encontrar o perímetro dessa figura, devemos primeiro descobrir essas medidas.

Solução. Antes de tudo, vamos denotar os vértices do terreno com as letras A, C, D, F, G e H. Agora, para esse terreno é dito no enunciado que todos os ângulos internos entre lados consecutivos medem 90° ou 270°. Como um quadrilátero com todos os seus ângulos internos retos é um retângulo, não é difícil perceber que podemos dividir esse primeiro terreno em dois retângulos, conforme mostrado na Figura 1.1 (veja o segmento de reta tracejado BF):

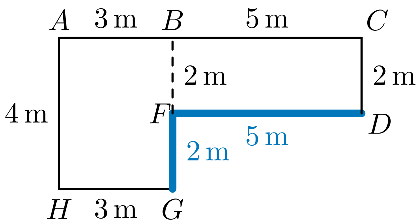


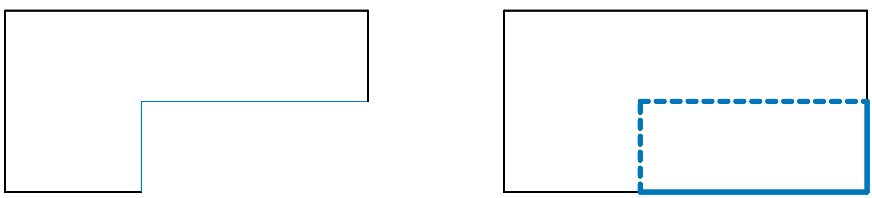
Figura 1.1: cálculo dos comprimentos dos lados remanescentes do "L".

Como os lados opostos de um retângulo têm as mesmas medidas, o segmento BF tem a mesma medida do segmento CD, ou seja, $\overline{BF} = 2\,\text{m}$. Da mesma forma, o segmento BG tem medida igual à do segmento AH, de forma que $\overline{BG} = 4\,\text{m}$ e, assim, $\overline{FG} = \overline{BG} - \overline{BF} = 4\,\text{m} - 2\,\text{m} = 2\,\text{m}$. Agora, observe que o lado horizontal maior AC, que mede $8\,\text{m}$, ficou dividido em dois segmentos, AB e BC. Novamente pelo fato de $ABGH$ ser um retângulo, temos $\overline{AB} = 3\,\text{m}$. Então, $\overline{DF} = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 8\,\text{m} - 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$. Portanto, o perímetro do terreno em forma de "L" é

$$4 + 8 + 2 + 5 + 2 + 3 = 24 \text{ metros.}$$

■

Outro modo de explorar a geometria da figura, para calcular o perímetro do terreno em forma de "L", consiste em *explorar uma simetria escondida*, mais precisamente, perceber que esse perímetro é igual àquele do retângulo esboçado na figura abaixo, à direita:

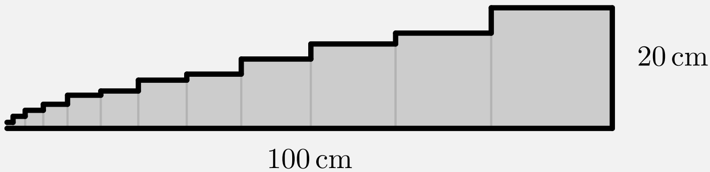


Isto porque, nela, o quadrilátero de bordas destacadas é um retângulo, o que é também consequência da condição sobre os ângulos internos formados por lados consecutivos do polígono "L". Logo, a soma das medidas de dois lados consecutivos do mesmo é igual à soma das medidas dos outros dois lados. Desse modo, o perímetro pedido é igual a

$$2 \cdot (\overline{AH} + \overline{AC}) = 2 \cdot (4 + 8) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ metros.}$$

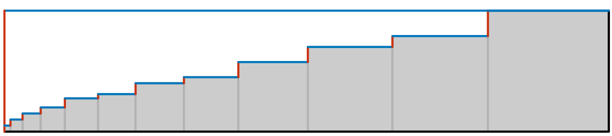
Utilizaremos mais uma vez essa estratégia no problema a seguir.

Problema 5 — OBMEP. Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em destaque) da figura formada por esses quadrados?



(a) 220 cm.
(b) 240 cm.
(c) 260 cm.
(d) 300 cm.
(e) 400 cm.

Solução. Inicialmente, completamos um retângulo cujos lados medem 100 cm e 20 cm, conforme mostrado a seguir:



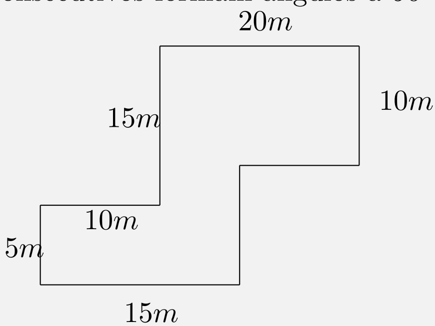
Na figura, a soma das medidas dos segmentos verticais, que fazem parte do contorno da figura descrita no enunciado, é igual à medida do lado vertical do retângulo construído. Do mesmo modo, a soma das medidas dos segmentos horizontais, que estão da figura original, é igual à medida do lado horizontal do retângulo construído. Assim, o seu perímetro que se quer calcular é igual a

$$2 \cdot (100 + 20) = 2 \cdot 120 = 240\,\text{cm}.$$

A alternativa correta é a letra **(b)**. ■

Duas figuras planas estão concatenadas quando compartilham um lado (ou parte de lado) comum. Uma propriedade intuitiva sobre áreas afirma que, ao concatenarmos duas figuras planas, a figura resultante possui área cuja medida é igual à soma das medidas das áreas das figuras originais. Essa propriedade torna-se especialmente útil quando a aplicamos do sentido reverso. Mais especificamente, quando estamos em uma situação na qual devemos calcular a área de uma figura complexa, podemos particioná-la em figuras menores e mais simples, cujas áreas sabemos calcular. Um exemplo dessa estratégia é encontrado na solução do problema a seguir:

Problema 6 Calcule a área do polígono a seguir, em que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°.



Solução. Em primeiro lugar, iremos decompor a figura do enunciado em três retângulos, utilizando segmentos tracejados paralelos aos lados do polígono original, conforme a Figura 1.2. Utilizando o fato de um retângulo ter pares de lados paralelos, podemos encontrar as medidas dos segmentos x e y. De fato, $x = 20 - 15 = 5$ e $y = 25 - x = 20$. Assim, a área A da figura é a soma das áreas dos três retângulos, ou

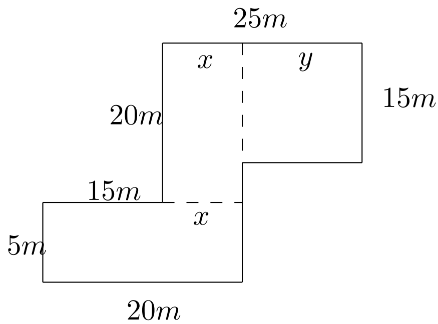


Figura 1.2: Decompondo uma figura complexa em outras mais simples.

seja,

$$\begin{aligned} A &= (5 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 15 \cdot 20)\ m^2 \\ &= 20 \cdot (5 + 5 + 15)\ m^2 = 20 \cdot 25\ m^2 = 500\ m^2. \end{aligned}$$

■

Obs O problema anterior também pode ser resolvido "completando" o retângulo, com lados paralelos aos do polígono, no qual o polígono está inscrito. Em seguida, calcula-se a área desse retângulo e subtrai-se as áreas dos dois retângulos que foram acrescentados ao polígono. Veja a Figura 1.3.

Cabe lembrar que o perímetro de uma figura, que é obtida através da concatenação de outras, **não é igual** à soma dos perímetros das figuras originais. Isso ocorre pelo fato dos lados compartilhados deixarem, obrigatoriamente, de ser contabilizados no cálculo do perímetro da figura resultante. Veja o problema a seguir em que um mesmo conjunto de retângulos pode ser organizado para formar duas figuras com perímetros diferentes.

Problema 7 Oito retângulos idênticos foram utilizados para formar as duas seguintes figuras retangulares. O perímetro da primeira é 42 cm e o da segunda é 48 cm. Qual é o perímetro de cada um dos quatro retângulos idênticos?

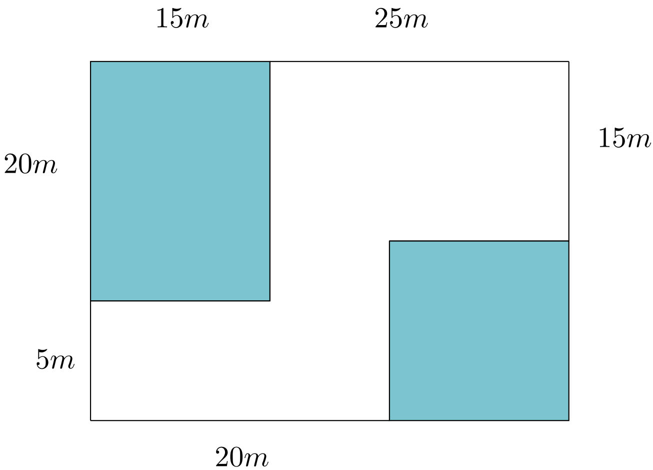
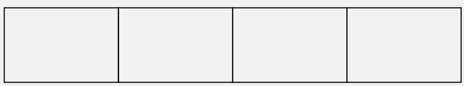


Figura 1.3: Completando um retângulo e subtraindo a área do que foi acrescentado.

Perímetro 42 cm



Perímetro 48 cm

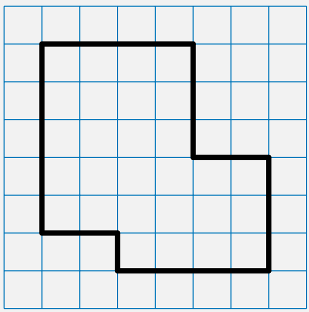
Solução. Sejam x e y as dimensões dos quatro retângulos idênticos, sendo x a menor. As dimensões da primeira figura são y (a menor) e $4x$ (a maior), de forma que seu perímetro vale $8x+2y$. Assim, $8x+2y=42$. As dimensões da segunda figura são x (a menor) e $4y$ (a maior), de forma que seu perímetro é $2x+8y$. Assim $2x+8y=48$.

Somando-se as duas equações, temos que $10x+10y=90$. Dividindo ambos os lados por 5, chegamos a $2x+2y=18$, que é o perímetro dos quatro retângulos iguais. ■

Obs Veja que utilizamos as incógnitas na resolução anterior apenas para facilitar a explicação, não tendo sido necessário resolver o sistema de equações. De fato, ao somarmos os perímetros das duas figuras, cada um dos quatro lados do retângulo original é somado 10 vezes. Assim, para calcularmos o perímetro deste retângulo basta dividir o resultado de $48 + 42 = 90$ por 5, obtendo-se $18\,\text{cm}$.

Polígonos, cujos lados e vértices estão sobre as grades de um reticulado, podem ter seus perímetros e áreas calculados facilmente através de contagem manual. Veja o próximo problema.

Problema 8 — CMF–2017. Na malha quadriculada abaixo, a figura em destaque representa uma ciclovia. Um ciclista deu quatro voltas completas nessa pista, percorrendo um total de 288 metros. É correto afirmar que a área delimitada por essa pista, em metros quadrados, é igual a:



(a) $243\,\text{m}^2$.
(b) $252\,\text{m}^2$.
(c) $279\,\text{m}^2$.
(d) $2016\,\text{m}^2$.
(e) $4032\,\text{m}^2$.

Solução. O ciclista deu 4 voltas e percorreu 288 metros. Logo, em cada volta ele precorreu $\frac{288}{4} = 72$ metros. Contando diretamente na figura, observamos que, em cada volta, o ciclista passa por 24 lados de quadrados da malha. Assim, o lado de cada quadrado representa uma distância de $\frac{72}{24} = 3$ metros. Logo, a área de cada quadrado corresponde a $3^2 = 9\,\text{m}^2$. Por fim, também contando diretamente na figura, vemos que o número de quadrados na região delimitada pela ciclovia é 28. Portanto, a área dessa região é $28 \cdot 9 = 252\,\mathrm{m}^2$. ■

1.2 – Recorte e remonte de áreas

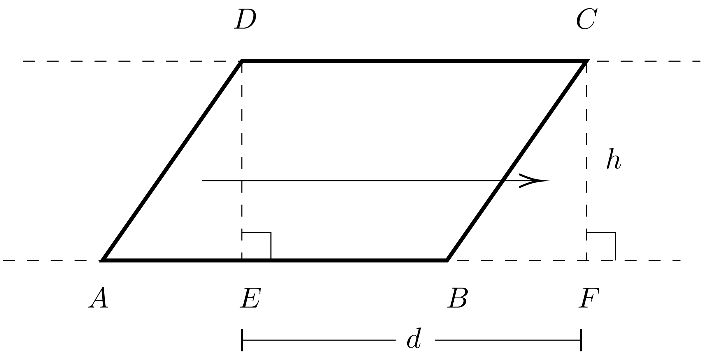
Além das figuras que podem ser particionadas em retângulos, também podemos encontrar as áreas de figuras simples através de estratégias do tipo "recorte e remonte". Essas figuras são os paralelogramos, os triângulos e os trapézios.

Definição 1.2.1 Um **paralelogramo** é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos.

Paralelogramos possuem diversas propriedades que podem ser demonstradas com o uso do conceito de *congruência de triângulos*. Como essa ferramenta só será formalmente desenvolvida no próximo módulo de Geometria, utilizaremos essas propriedades de forma intuitiva.

Considere um paralelogramo $ABCD$, ilustrado na figura a seguir. Obteremos, com auxílio desta figura, a fórmula para a área do paralelogramo. Para isso, sejam F e E as *projeções ortogonais* dos pontos C e D, respectivamente, sobre a reta que contém o lado AB — reta suporte de AB.

Obs Nas notações da figura abaixo, dizer que E é a **projeção ortogonal** de D sobre a reta AB, significa dizer que E pertence à reta suporte de AB, e que esta reta é perpendicular à reta suporte de DE, isto é, formam um ângulo de 90° uma com a outra.



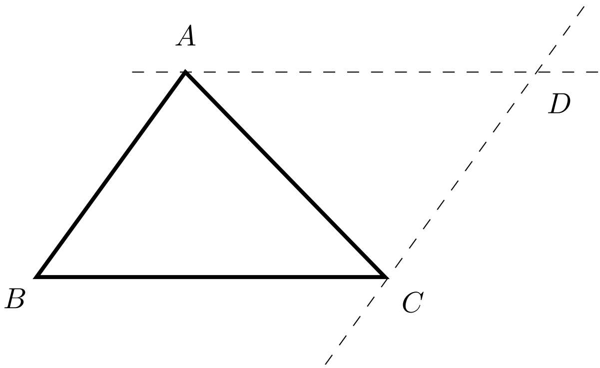
Como CD e AB são paralelos, temos $CF = DE$. A medida comum dos segmentos CF e DE será denotada por h, sendo conhecida como a **altura** do paralelogramo $ABCD$, relativa ao lado AB. Nesse caso, AB é chamado de **base** relativa à altura h.

Observe que $DEFC$ é um retângulo, logo, sua área é igual ao produto de suas dimensões. Como $AB = CD = d$, concluímos que a medida da área de $DEFC$ é igual a $d \times h$.

Por outro lado, os triângulos ADE e BCF são *congruentes*, isto é, são "essencialmente iguais", dizendo isso que podemos deslocar um deles no plano até superpô-lo ao outro, sem que haja "sobras ou faltas". Assim, podemos "transportar" a área de ADE para a área de BCF, de forma que a medida da área do paralelogramo $ABCD$ é igual à medida da área do retângulo $DEFC$. Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Obs De agora em diante, utilizaremos colchetes para denotar a área de figuras planas. Por exemplo, $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ e $[PQRS]$ denota a área do quadrilátero $PQRS$.

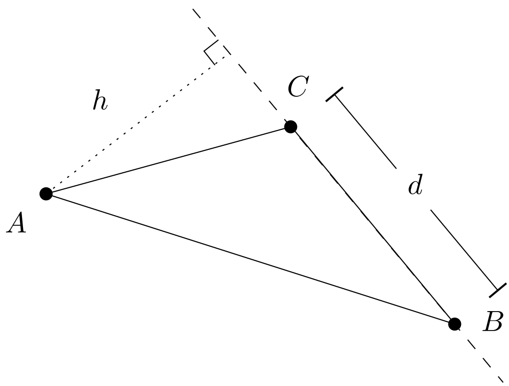
Agora, obteremos a fórmula para a área de um triângulo ABC, por meio de um raciocínio construtivo baseado na figura a seguir. Para isso, considere a reta r, paralela ao lado AB e passando por C, e a reta s, paralela ao lado BC e passando por A. Seja D o ponto de encontro dessas duas retas. Note que $ABCD$ é um paralelogramo, pois, por construção, possui lados opostos paralelos. Além disso, os triângulos ABC e CDA são congruentes (porque?), logo, possuem áreas iguais.



Portanto, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$; assim sendo, é igual à metade do produto do lado $BC = d$ — que funciona como base do paralelogramo — pela altura h, que é a distância do vértice A até a reta BC. Em resumo,

$$[ABC] = \frac{d \times h}{2}.$$

Obs Qualquer lado do triângulo pode ser considerado como base. A base sempre é relativa a uma altura, que, por sua vez, corresponde ao segmento que liga um vértice à projeção ortogonal deste vértice sobre a reta que contém o lado oposto. A altura pode, inclusive, estar fora do triângulo, conforme mostrado na figura a seguir:



Na figura anterior, temos um triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, a qual é exterior ao triângulo. Além disso, observe que a base BC não está "na horizontal", quando dispomos a folha de papel na posição natural de leitura.

Problema 9 No triângulo ABC, a medida do lado BC é 60 cm e a medida do lado AC é 50 cm. Além disso, a altura relativa do lado BC mede 25 cm. Calcule a medida da altura relativa ao lado AC.

Solução. Considerando BC como base, temos que

$$[ABC] = \frac{60 \cdot 25}{2} = 750\,\text{cm}^2.$$

Por outro lado, considerando AC como base e chamando de h a altura correspondente, temos que

$$[ABC] = \frac{h \times 50}{2} = 750\,\text{cm}^2.$$

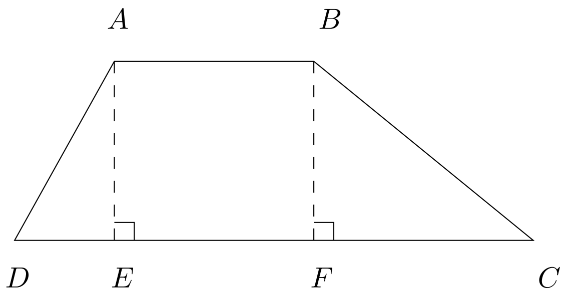
Assim, $h = 30\,\text{cm}$. ■

Obs Observe que, em todo triângulo retângulo, os **catetos** — os dois menores lados — podem funcionar tanto como base quanto como altura. Mais ainda, se considerarmos um cateto como base, então o outro será a altura correspondente, e vice-versa.

Agora, vejamos como calcular as áreas de *trapézios*.

Definição 1.2.2 Um **trapézio** é um quadrilátero que tem um par de lados opostos paralelos. Estes lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio, e a distância entre eles é chamada de **altura** do trapézio.

Para calcularmos a área do trapézio, multiplicamos sua altura pela média aritmética das medidas das bases. Podemos verificar essa fórmula através da sua decomposição ilustrada pela figura a seguir.



Seja $ABCD$ um trapézio onde AB é a sua base menor e CD é a sua base maior. Sejam E e F as projeções ortogonais de A e B sobre a reta CD, respectivamente. Veja que

$$[ABCD] = [ADE] + [ABFE] + [BFC].$$

Sejam $\overline{AE} = \overline{BF} = h$, $\overline{DE} = x$, $\overline{FC} = y$, $\overline{AB} = \overline{EF} = b$ e $\overline{CD} = a = x + b + y$. Temos que

$$[ABCD] = \frac{xh}{2} + bh + \frac{hy}{2}.$$

Colocando o fator $\frac{h}{2}$ em evidência, obtemos

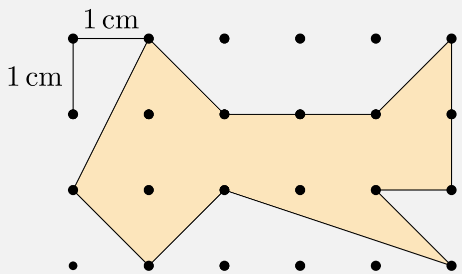
$$[ABCD] = \frac{h}{2}(x + 2b + y) = \frac{h}{2}(a + b).$$

Obs A dedução que fizemos acima, para a fórmula da área de um trapézio, não está completa, pois ela não funciona se $A\widehat{D}C > 90°$ ou $B\widehat{C}D > 90°$. Contudo, tal dedução pode ser facilmente adaptada a esse caso, e lhe convidamos a fazer essa adaptação a título de exercício.

Obs Um trapézio $ABCD$ de bases AB e DC é **isósceles** quando $AD = BC$. O trapézio será chamado de **retângulo** quando um dos lados AD ou BC for perpendicular às bases.

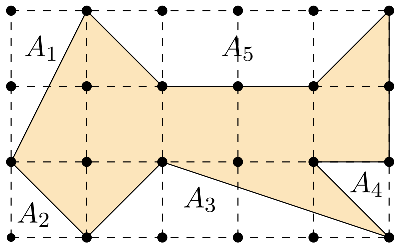
Agora vamos avançar um pouco e encontrar a área de polígonos cujos os vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado. Aqui não exigiremos que os lados do polígono estejam sobre as retas do reticulado.

Problema 10 — OBM. No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância.



Qual é a área da região sombreada?

(a) $7\,\text{cm}^2$.
(b) $8\,\text{cm}^2$.
(c) $8{,}5\,\text{cm}^2$.
(d) $9\,\text{cm}^2$.
(e) $9{,}5\,\text{cm}^2$.



Solução. Vamos completar o retângulo que dá forma ao reticulado, calcular a área desse retângulo e calcular as áreas dos polígonos cuja soma representa a diferença entre a área sombreada e a área do retângulo. Depois disso, para calcular a área da região sombreada que foi pedida no problema, basta subtrair a soma das áreas dos polígonos da área do retângulo. A área do retângulo é igual a

$$3 \cdot 5 = 15\,\text{cm}^2.$$

Já a soma das áreas A_1, A_2, A_3, A_4, e A_5 é igual a

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &= 1 + 0{,}5 + 2 + 0{,}5 + 3 \\ &= 7\,\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Assim, a área sombreada é igual a

$$15 - 7 = 8\,\mathrm{cm}^2.$$

■

Você pode assistir a resolução do Problema 10 no canal do Portal do Saber da OBMEP.

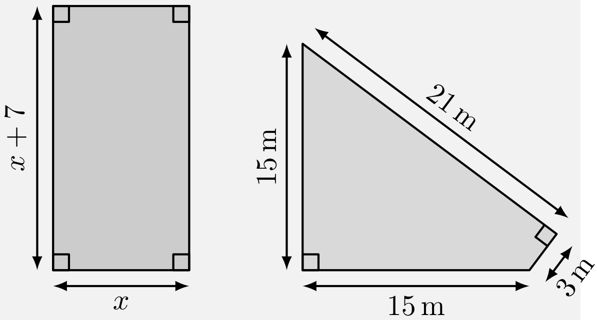
Saiba mais

Finalizaremos essa sequência de exercícios com um problema do ENEM sobre áreas, que pode ser resolvido pela decomposição (partição, subdivisão) de uma figura em outras mais simples.

Problema 11 — Enem 2016. Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional, como se observa na Figura B, agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno de formato retangular, como mostrado na Figura A, cujo comprimento seja 7 m maior que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular tal que as medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

(a) 7,5 e 14,5.
(b) 9,0 e 16,0.
(c) 9,3 e 16,3.
(d) 10,0 e 17,0.
(e) 13,5 e 20,5.



Solução. Divida o quadrilátero da figura B em dois triângulos retângulos, da maneira óbvia. Somando as áreas desses dois triângulos, chegamos à área do quadrilátero:

$$\frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} = \frac{288}{2} = 144\,\mathrm{m}^2.$$

A fim de calcular as medidas do terreno adequado ao filho mais novo, temos de encontrar o valor de x tal que

$$x(x+7) = 144.$$

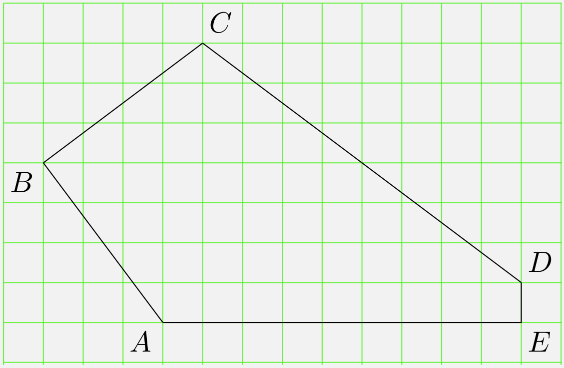
Analisando os valores dos itens, concluímos que a solução é $x = 9$ e $x + 7 = 16$. ■

Obs De maneira geral, em situações como essa, o procedimento-padrão seria resolver a equação quadrática $x(x+7) = 144$ para encontrar o valor de x. Porém, em um exame, pode-se utilizar a técnica da tentativa para ganhar tempo.

1.3 – Teorema de Pitágoras

No Problema 10, nos deparamos com uma situação na qual calculamos a área de polígono cujos vértices estavam sobre uma malha quadriculada. Desse modo, é natural se questionar se *é possível calcular o perímetro de um polígono cujos vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado, mas que o lados não necessariamente estejam* *sobre as retas do reticulado?* Um exemplo de tal situação é apresentada no problema a seguir.

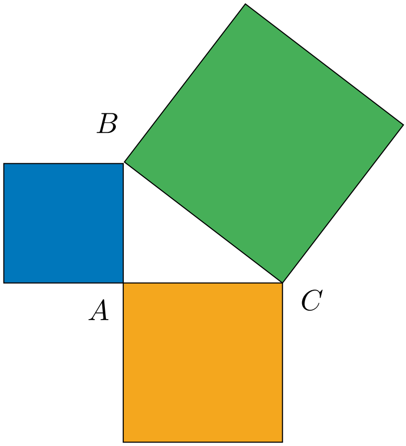
Problema 12 O pentágono $ABCDE$ a seguir possui seus vértices sobre uma reticulado formado por quadrados de lado 1 cm. Qual é o perímetro desse pentágono?



Para encontrar o perímetro de polígonos como esse, precisamos de um resultado muito importante na Matemática: O Teorema de Pitágoras.

Teorema 1.1 — Pitágoras. Se ABC é um triângulo retângulo, com o ângulo reto situado no vértice A, então a área do quadrado cujo lado é BC é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os dois outros lados do triângulo.

Observação 1.2 Dizemos que um triângulo é **retângulo** se um dos seus ângulos internos é **reto**, isto é, mede 90°. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, ou seja, 180°, a soma das medidas dos dois outros ângulos internos de um triângulo retângulo é $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Quando a soma de dois ângulos é igual a um ângulo reto, dizemos que esses ângulos são **complementares**.



Observação 1.3 O lado maior de um triângulo retângulo é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados de **catetos**. O Teorema de Pitágoras afirma que, se o triângulo é retângulo, então a *soma das áreas dos quadrados dos catetos – quadrados construídos sobre os catetos – é igual à área do quadrado da hipotenusa – quadrado construído sobre a hipotenusa*. Se $A\widehat{B}C = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então as áreas desses quadrados valem a^2, b^2 e c^2, sendo a^2 a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Assim, o resultado geométrico do Teorema de Pitágoras pode ser escrito algebricamente da seguinte forma:

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{1.1}$$

É importante notar também que **a recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida**, ou seja, a identidade (1.1) entre as medidas dos lados de um triângulo implica que ele é retângulo (no ângulo oposto ao lado de medida a).

Existem diversas demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras. Uma dessas demonstrações será objetivo do Problema 60. Por enquanto, iremos apenas aplicar o resultado na solução de alguns problemas, a começar pelo Problema 12.

Solução. Em primeiro lugar, veja que é fácil determinar o comprimento dos lados AE e DE, pois eles estão sobre as grades da malha. Temos que $\overline{AE} = 9\,\text{cm}$ e que $\overline{DE} = 1\,\text{cm}$. Para determinar os comprimentos dos lados AB, BC e CD construa três triângulos retângulos, todos eles com catetos sobre a grade e cada um deles tendo como hipotenusa um dos lados AB, BC ou CD. Para tanto, considere os pontos P, Q e R da figura.

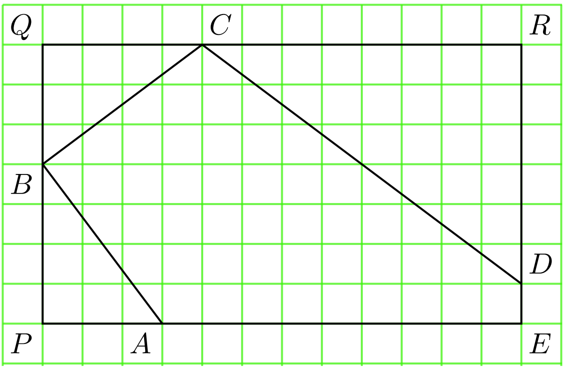
Agora, pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos PAB, QBC e RDC, temos que

$$\overline{AB}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PA}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ e}$$

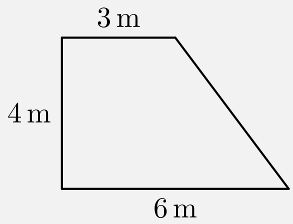
$$\overline{CD}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RD}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100.$$

Portanto, $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ e $\overline{CD} = 10$. Consequentemente, o perímetro do pentágono é $5 + 5 + 10 + 1 + 9 = 30\,\text{cm}$. ■



Note ainda que, a aplicação do Teorema de Pitágoras, também pode ser feita em situações nas quais não há a presença de uma malha quadriculada. Nesses casos, podemos construir triângulos retângulos com o auxílio de retas perpendiculares entre si.

Problema 13 Calcule o perímetro do seguinte terreno em formato de trapézio retângulo.



Solução. Em primeiro lugar, vamos denotar os vértices da figura por J, K, L e I. Para calcular o perímetro do terreno, em formato de trapézio retângulo, é preciso calcular a medida do segmento KL que aparece destacado na Figura 1.4. Fazemos isso traçando o segmento MK, perpendicular à base do trapézio, o qual divide o trapézio no retângulo $IJKM$ e no triângulo retângulo KLM, conforme a Figura 1.4.

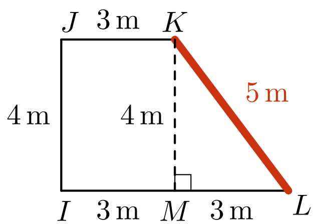


Figura 1.4: cálculo dos comprimento do lado oblíquo do trapézio retângulo.

Utilizando novamente o fato de que os lados opostos de um retângulo têm medidas iguais, obtemos $\overline{MK} = \overline{IJ} = 4\,\text{m}$ e $\overline{MI} = \overline{JK} = 3\,\text{m}$. Logo, $\overline{ML} = \overline{IL} - \overline{MI} = 6\,\text{m} - 3\,\text{m} = 3\,\text{m}$. Por fim, uma vez que o triângulo KLM é retângulo em M, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa KL:

$$\overline{KL}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{LM}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

isto é, $\overline{KL} = 5\,\text{m}$. Portanto, o perímetro do terreno em forma de trapézio retângulo é igual a

$$4 + 3 + 5 + 6 = 18 \text{ metros.}$$

■

Duas consequências importantes do Teorema de Pitágoras são enunciadas nos problemas a seguir.

Problema 14 Mostre que a diagonal de um quadrado de lado ℓ tem medida $\ell\sqrt{2}$.

Prova. Considere o lado esquerdo da Figura 1.5. Se $ABCD$ é um quadrado de lado ℓ, então o triângulo ABC é retângulo em B e possui catetos de medida ℓ. Assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2, \text{ ou seja, } AC = \ell\sqrt{2}.$$

■

Figura 1.5: determinando a diagonal de um quadrado e a altura de um triângulo equilátero utilizando o Teorema de Pitágoras.

Problema 15 Mostre que as alturas de um triângulo equilátero de lado ℓ têm medidas iguais a $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

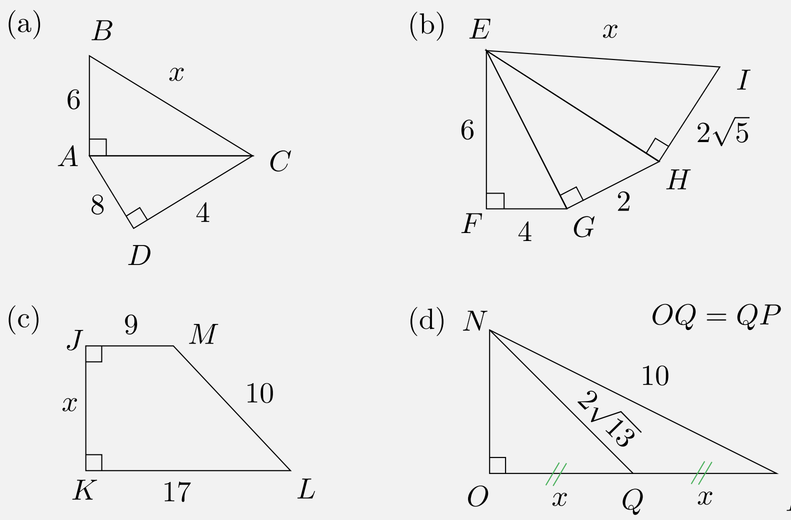
Prova. Considere o lado direito da Figura 1.5. Seja ABC um triângulo equilátero de lado ℓ. Sendo M o ponto médio do lado BC, já sabemos que AM também é altura de ABC. Portanto, o triângulo ABM é retângulo em M, possui um cateto de medida $\frac{\ell}{2}$ e uma hipotenusa de medida ℓ. Sendo $AM = h$, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2. \text{ Daí, } h^2 = \frac{3\ell^2}{4}, \text{ ou seja, } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

■

A seguir, mais situações que exploram o Teorema de Pitágoras fora da malha quadriculada.

Problema 16 Determine o valor de x nas seguintes figuras.



Solução.

(a) Usando Pitágoras no ΔACD, temos $\overline{AC}^2 = 4^2+8^2 = 80$. Usando Pitágoras no ΔABC, temos $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 36+80 = 116$. Assim, $x = \overline{BC} = \sqrt{116}$.

(b) No ΔEFG, temos $\overline{EG}^2 = 6^2 + 4^2 = 52$. No ΔEGH, temos $\overline{EH}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GH}^2 = 52 + 4 = 56$. No ΔEHI, temos $\overline{EI}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HI}^2 = 56 + 20 = 76$. Logo, $x = \overline{EI} = \sqrt{76}$.

(c) Seja P o pé da perpendicular de M até KL (faça uma figura para acompanhar). Note que o quadrilátero $KJMP$ tem todos os ângulos retos, logo é um retângulo. Como todo retângulo é paralelogramo, os seus lados opostos são iguais, logo $\overline{KP} = \overline{JM} = 9$. Também, MPL é um triângulo retângulo em P, com $\overline{PL} = \overline{KL} - \overline{KP} = \overline{KL} - \overline{JM} = 17 - 9 = 8$. Usando Pitágoras no ΔMPL, temos $\overline{MP}^2 + \overline{PL}^2 = \overline{ML}^2$, ou seja, $\overline{MP}^2 + 8^2 = 10^2$. Logo, $\overline{MP}^2 = 36$ e, daí, $\overline{MP} = 6$. Por fim, novamente pelo fato de $JMPK$ ser um retângulo, temos $x = \overline{JK} = \overline{MP} = 6$.

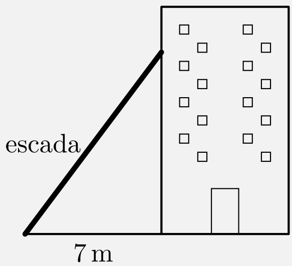
(d) Sejam $\overline{OQ} = \overline{QP} = x$ e $\overline{NO} = y$. Usando Pitágoras nos triângulos NOQ e NOP, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52, \\ y^2 + 4x^2 = 10^2 = 100. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, vem que $3x^2 = 100 - 52 = 48$, logo $x^2 = 48 \div 3 = 16$. Portanto, $x = 4$.

■

Problema 17 — OBMEP 2005. O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como mostrado na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo, ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?



Solução. Em primeiro lugar, vamos calcular a altura do topo da escada antes dela escorregar. Denotando esse valor por x e utilizando o Teorema de Pitágoras, temos

$$25^2 = 7^2 + x^2.$$

Passando o termo 7^2 para o lado esquerdo da equação e utilizando a diferença de quadrados, obtemos

$$x^2 = 25^2 - 7^2 = (25 - 7)(25 + 7) = 18 \cdot 32 = 9 \cdot 64.$$

Portanto, $x = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$. Ao descer quatro metros, a altura do topo da escada passará ser igual a $24 - 4 = 20$ metros. Sendo y

a nova distância do pé da escada ao prédio, utilizando mais uma vez Pitágoras, obtemos

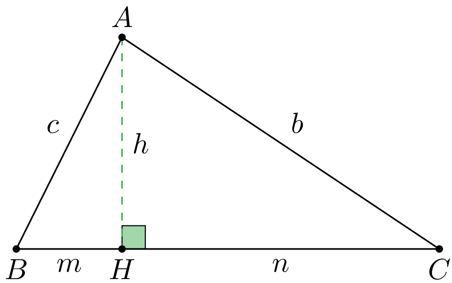
$$25^2 = 20^2 + y^2.$$

Passando o termo 20^2 para o lado esquerdo da equação e utilizando a diferença de quadrados, obtemos

$$y^2 = 25^2 - 20^2 = (25 - 20)(25 + 20) = 5 \cdot 45 = 25 \cdot 9.$$

Portanto, $y = 5 \cdot 3 = 15$. Logo, o deslocamento horizontal foi de $15 - 7 = 8$ metros. ■

Antes de partirmos para o próximo problema, iremos apresentar algumas relações que existem entre a altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Para tanto, consideraremos um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa BC, desenhado na próxima figura. Sendo H o pé da perpendicular baixada de A a BC, nosso objetivo nesta seção é calcular os comprimentos de AH, BH e CH em função das medidas dos lados do ΔABC.



Por simplicidade de notação, sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$. Note que há duas formas de calcularmos a área do ΔABC: a primeira é considerando BC como base e a segunda é considerando AB como base. Comparando as fórmulas geradas por essas duas possibilidades, obtemos

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Simplificando as frações e isolando o termo h, chegamos a

$$h = \frac{b \cdot c}{a}. \tag{1.2}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AHB, temos que $m^2 + h^2 = c^2$. Substituindo o valor de h encontrado na equação (1.2) e isolando o termo m^2, obtemos

$$m^2 = c^2 - h^2 = c^2 - \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = c^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{c^4}{a^2}.$$

Note que, na última igualdade, utilizamos o Teorema de Pitágoras em ΔABC para obter $a^2 - b^2 = c^2$.

Extraindo raízes quadradas em ambos os lados da igualdade $m^2 = \frac{c^4}{a^2}$, obtemos

$$m = \frac{c^2}{a}. \tag{1.3}$$

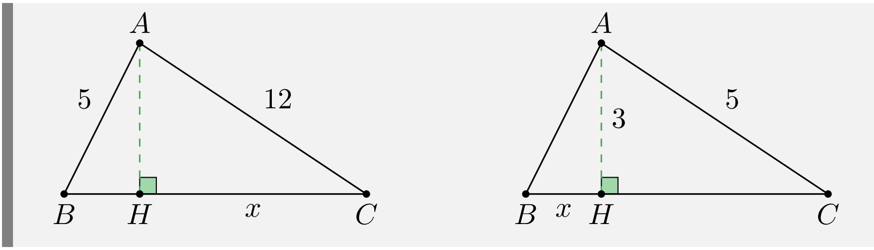
De modo análogo, o Teorema de Pitágoras aplicado ao ΔAHC dá

$$n = \frac{b^2}{a}. \tag{1.4}$$

As fórmulas (1.2), (1.3) e (1.4) são conhecidas como as *relações métricas do triângulo retângulo*. Elas também podem ser deduzidas utilizando semelhança de triângulos. Optamos por aplicar diretamente o conceito de área e o Teorema de Pitágoras para apresentar uma perspectiva diferente da maioria dos livros didáticos.

A seguir, resolveremos um exercício simples em que podemos empregar as relações métricas do triângulo retângulo de maneira quase imediata.

Problema 18 Nas seguintes figuras temos o desenho de um triângulo retângulo e da altura relativa à hipotenusa. Calcule o valor x.



Solução.

(a) Usando Pitágoras no triângulo ABC, temos que $\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Logo, $\overline{BC} = 13$. Agora, usando a relação (1.4), temos $x = \frac{12^2}{13} = \frac{144}{13}$.

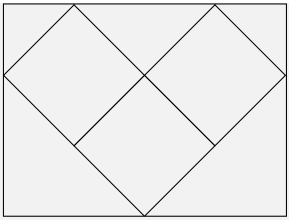
(b) Usando Pitágoras no triângulo AHC, temos $\overline{HC}^2 + 3^3 = 5^2$. Logo, $\overline{HC}^2 = 25 - 9 = 16$. Assim, $\overline{HC} = 4$. Seja $\overline{BC} = a$. Pela relação (1.4), $\overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}$. Assim, $4 = \frac{25}{a}$. Portanto, $a = \frac{25}{4}$. Por fim, $x + \overline{HC} = \overline{BC}$. Assim, $x = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$.

■

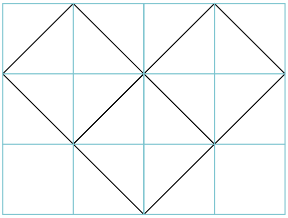
1.4 – Construindo Malhas

Na Sequência de Problemas anterior, percebemos que a utilização de uma grade quadriculada facilita os cálculos dos perímetros e áreas de figuras planas. Porém, nem todos os enunciados dos problemas de Geometria trazem uma figura desenhada sobre uma grade. Entretanto, isso não significa que não podemos construir nossa própria grade como forma de facilitarmos a solução. Veja os seguintes problemas.

Problema 19 — OBM. Na figura abaixo, temos um retângulo circunscrito a três quadrados, cada um com $1\,\text{cm}^2$ de área. Qual é a área do retângulo?



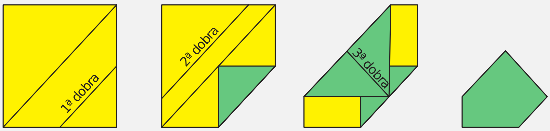
Solução. Divida o retângulo em 12 quadrados menores através de cortes paralelos às diagonais dos três quadrados originais, formando uma grade quadriculada, conforme a seguinte ilustração.

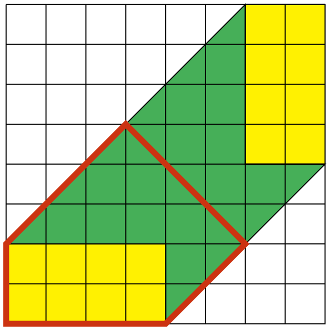


Observe que cada quadrado original é dividido em quatro triângulos menores congruentes. Portanto, cada um destes triângulos tem área $\frac{1}{4}\ cm^2$.

Por outro lado, a junção de dois destes triângulos formam um quadrado da grade. Logo, cada quadrado da grade tem área $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ cm^2$. Consequentemente, a área do retângulo é igual a $12 \cdot \frac{1}{2} = 6\ cm^2$. ■

Problema 20 — OBMEP 2019. Uma folha quadrada de 8cm de lado foi dobrada três vezes, conforme mostrado nas seguintes figuras. A primeira e a segunda dobras ficaram paralelas a uma diagonal da folha, ao passo que a terceira dobra ficou perpendicular a essa diagonal. Qual é a área da figura final?





Solução. A fim de entendermos melhor as várias dobras, começamos quadriculando a folha, no seu formato original, em $8 \cdot 8 = 64$ quadradinhos iguais, cada um deles de lado $1\,\text{cm}$ e, portanto, área $1\,\text{cm}^2$.

A primeira dobra gerou um triângulo com um vértice sobre uma diagonal do quadrado. Como ela resultou paralela a essa diagonal, concluímos, pela próxima figura, que ela dividiu cada lado da folha original ao meio.

A segunda dobra, também feita paralelamente à mesma diagonal do quadrado, fez com que o vértice superior esquerdo, da folha original, coincidisse com o ponto médio da hipotenusa do triângulo mencionado anteriormente. Por sua vez, tendo em vista que os pontos médios das duas dobras estão situados sobre a outra diagonal do quadrado, deduzimos que a situação, da terceira dobra, é a ilustrada na próxima figura, na qual ela foi feita ao longo do segmento destacado com contorno mais grosso situado sobre a outra diagonal da folha original.

Assim, a figura final, cujo contorno está destacado, é formada por 15 quadradinhos e por 8 metades de quadradinhos, sendo, pois, equivalente a

$$15 + \left(8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 19$$

quadradinhos.

Por fim, uma vez que cada um desses quadradinhos tem 1 *cm* de lado, concluímos que a área da figura final vale

$$19 \cdot 1 = 19\,\text{cm}^2.$$

■

Problema 21 — PISA - adaptado. No desenho a seguir, temos um mapa da Antártida, com uma escala em quilômetros. Faça uma estimativa da área do continente.

Solução. Em primeiro lugar, utilizamos a medida da escala para criar uma grade quadriculada, na qual cada quadrado tem lado igual a 200 quilômetros e, portanto, tem área igual a $200 \cdot 200 = 40.000\,\text{km}^2$, conforme a Figura 1.7. Em seguida, construímos retângulos para estimar a área da figura. A quantidade de quadrados que compõem os retângulos destacados é

$$12 + 40 + 189 + 40 + 52 + 30 = 363.$$

Portanto, podemos estimar o tamanho da Antártida em

$$363 \cdot 40.000 = 14.520.000\,\text{km}^2.$$

■

Observe que a medida da área calculada no problema anterior é apenas uma estimativa. Essa estimativa pode ser melhorada se construirmos uma malha **mais refinada** do que a malha construída

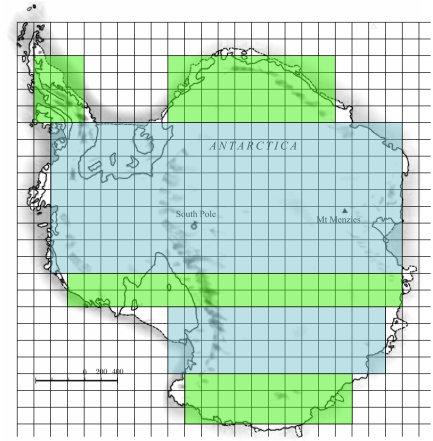
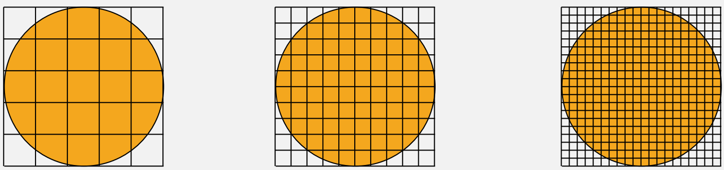


Figura 1.7: Aplicando uma malha quadriculada sobre um mapa para estimarmos a sua área.

para resolver o problema. Utilizaremos esse conceito para estimar a área de um círculo de raio 1 m.

Problema 22 Um círculo é um conjunto de pontos no plano que é equidistante de um ponto chamado de centro. Considere um círculo de raio 1 metro em três situações ilustradas pelas seguintes figuras.



Estime a área do círculo contando os quadrados de cada malha de acordo com um "critério visual" visual de inclusão: se um quadrado tiver mais da metade de sua área sobre o círculo, ele é contado. Caso contrário, não.

Solução. Em todas as situações, o quadrado no qual o círculo está inscrito tem área 4 m.

(a) Na primeira situação, temos $9 + 4 \cdot 3 = 21$ quadradinhos que devem ser contabilizados para aproximar a área do círculo. Neste caso, sua área será aproximadamente igual a $4 \cdot \frac{21}{25} \approx 3{,}36$ m^2.

(b) Na segunda situação, temos $4 \cdot (4+6)+36 = 76$ quadradinhos que devem ser contabilizados para aproximar a área do círculo. Neste caso, sua área será aproximadamente igual a $4 \cdot \frac{76}{100} \approx 3{,}04$ m^2.

(c) Na terceira situação, temos $4 \cdot 21 = 84$ quadradinhos que não devem ser contabilizados. Ou seja, temos $400 - 84 = 316$ quadradinhos para aproximar a área do círculo. Neste caso, sua área será aproximadamente igual a $4 \cdot \frac{316}{400} \approx 3{,}16$ m^2.

■

É intuitivo perceber que, à medida que vamos refinando a malha, mais próximo ficaremos o valor real da área do círculo. Essa estratégia não nos permite obter a área exata, uma vez ser impraticável a contagem dos quadradinhos em malhas cada vez mais finas. Porém, a partir da análise das três situações apresentadas no problema anterior, podemos **intuir** que a sequência de aproximações converge para um número que está entre 3 e 4. Este número é representado pela letra grega π.

Podemos definir π de muitas formas. Uma delas, é através da noção de aproximações sucessivas da área do círculo de raio unitário, como fizemos no Problema 22. Outra forma, é através do cálculo do perímetro do círculo por aproximações via polígonos regulares. É possível demonstrar que as duas definições são equivalentes e que elas estão associadas com as fórmulas para o calculo da área e perímetro de um círculo de raio R, dadas por

$$\text{Área} = \pi R^2 \qquad \text{e} \qquad \text{Perímetro} = 2\pi R. \tag{1.5}$$

1.5 – Mais sobre círculos

Nesta breve seção, resolveremos alguns problemas que envolvem a Fórmula 1.5 do perímetro de um círculo.

Problema 23 Joaquim fez uma marca em um dos pneus de sua bicicleta utilizando tinta fresca. Ele pedalou por alguns metros em linha reta e percebeu duas coisas: o contato do pneu com o chão deixou marcas no chão e a distância entre duas marcas consecutivas era sempre a mesma. Joaquim mediu essa distância e encontrou o valor de 1,63 m. Qual das opções abaixo apresenta a medida, em centímetros, que mais se aproxima da medida para o diâmetro da roda da sua bicicleta? (utilize $\pi = 3{,}14$.)

(a) 40. (b) 44. (c) 48. (d) 52. (e) 56.

Solução. Veja que a distância entre duas marcas consecutivas é igual à circunferência C das rodas da bicicleta de Joaquim. Desse modo, uma vez que $C = \pi d$, obtemos

$$d = \frac{C}{\pi} \cong \frac{1{,}63}{3{,}14} \cong 0{,}519\,\text{m} = 51{,}9 \text{ cm}.$$

Portanto, a opção que traz a melhor aproximação para a circunferência da roda é **(d)** 52 cm. ■

Problema 24 Para realizar o teste físico em determinado concurso militar, os candidatos devem correr ao redor de uma praça circular cujo diâmetro mede 110 m. Quantos metros percorre, aproximadamente, um candidato que dá 15 voltas ao redor dessa praça?

Solução. Uma vez que a praça tem formato circular com diâmetro igual a 110 m, depois de uma volta, esse candidato terá percorrido aproximadamente

$$3{,}14 \cdot 110 = 345{,}4\,\text{m}.$$

Portanto, depois de 15 voltas, o candidato terá percorrido um total de

$$15 \cdot 345{,}4 = 5181\,\text{m}.$$

■

Problema 25 Uma empresa quer encomendar uma mesa circular para realizar as reuniões mensais de seu conselho de administração. Sabendo que a empresa possui 12 conselheiros, contando com o presidente, e estimando que o espaço ocupado por cada pessoa sentada à mesa seja de 60 cm, qual das medidas abaixo mais se aproxima da menor medida possível do diâmetro da mesa que a empresa deve encomendar? (Utilize $\pi \cong 3{,}14$.)

(a) 2,1 m.
(b) 2,2 m.
(c) 2,3 m.
(d) 2,4 m.
(e) 2,5 m.

Solução. Inicialmente, perceba que a circunferência do círculo que forma o bordo da mesa deve ser maior do que ou igual a $12 \cdot 60 = 720$ cm, pois são 12 lugares e cada um ocupa um espaço de 60 cm. Desse modo, o diâmetro da mesa deve ser maior do que ou igual a

$$\frac{720}{3{,}14} \cong 229{,}3\,\text{cm}.$$

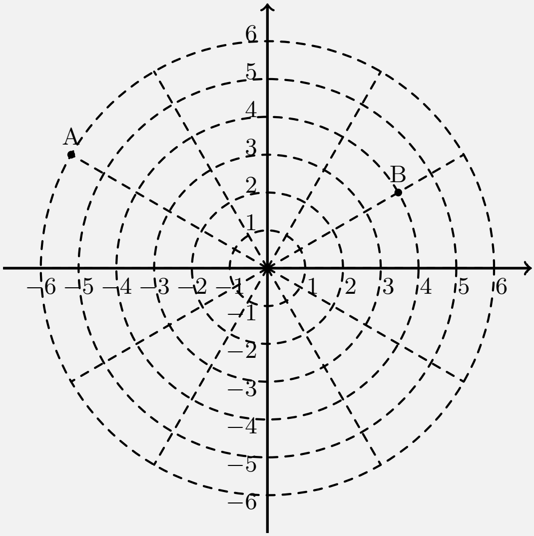
Como 229,3 cm é o mesmo que 2,293 m, concluímos que o item **(c)** é o que melhor aproxima a menor medida possível do diâmetro da mesa que a empresa deve encomendar. ■

Observação 1.4 O número π é irracional. Isso significa que não pode ser escrito como fração de dois números inteiros com denominador não-nulo. Assim, sua representação decimal não é periódica. As primeiras casas decimais de π são dadas pela aproximação

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

Não é necessário saber muitas casas de π para termos boas aproximações práticas. Por exemplo, para calcular o perímetro de um círculo, com 46 bilhões de anos-luz de raio em volta do universo observável, é suficiente uma aproximação de π com apenas 40 casas decimais para garantir precisão de 1 átomo de hidrogênio.

Problema 26 — Enem 2018. Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por círculos de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de 30°, conforme mostrado na figura.



Suponha que um ponto material se desloque apenas pelas semirretas e pelos círculos da malha, não podendo passar pela origem (0,0). Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto A até o ponto B, um ponto material deve percorrer uma distância igual a:

(a) $\frac{2\cdot\pi\cdot1}{3} + 8.$

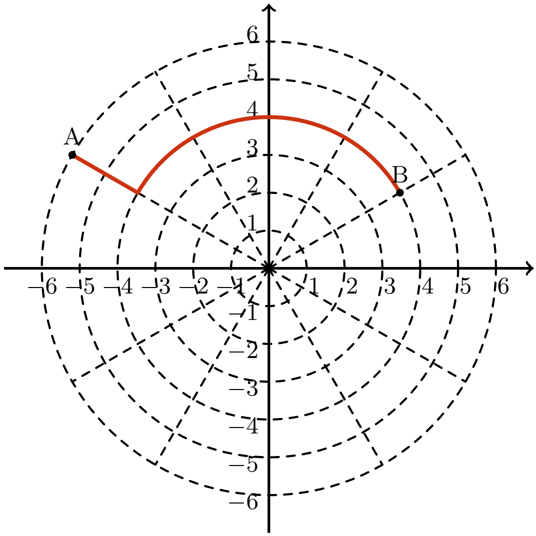
(b) $\frac{2\cdot\pi\cdot2}{3} + 6.$

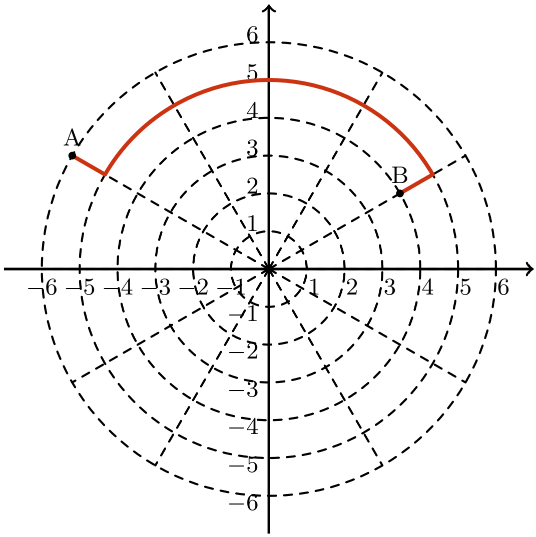
(c) $\frac{2\cdot\pi\cdot3}{3} + 4.$

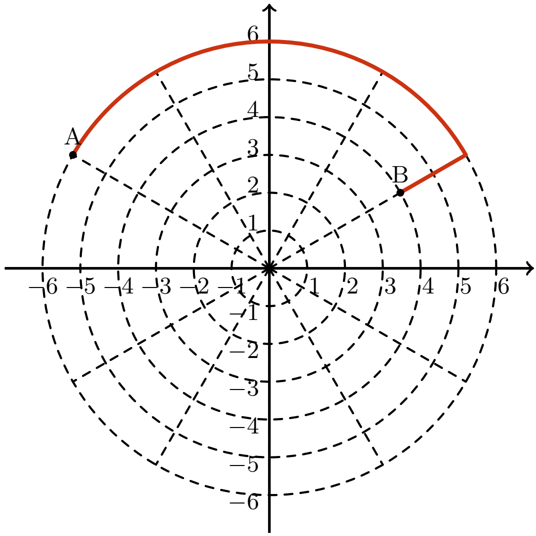
(d) $\frac{2\cdot\pi\cdot4}{3} + 2.$

(e) $\frac{2\cdot\pi\cdot5}{3} + 2.$

Solução. Observe os três percursos destacados nas figuras abaixo.


6
5
4
3
2
1
A
B
−6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6


6
5
4
3
2
1
A
B
−6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

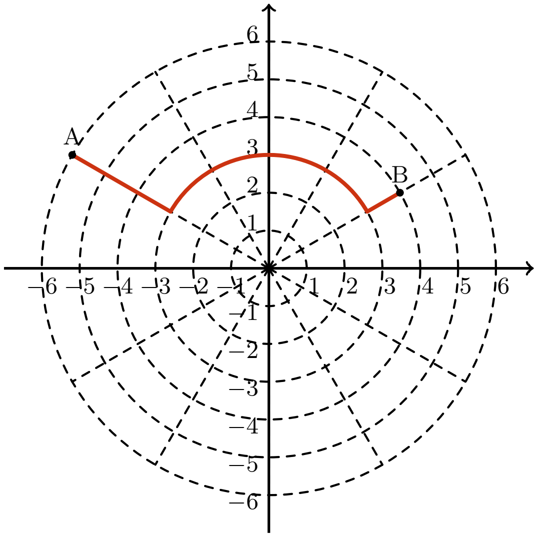


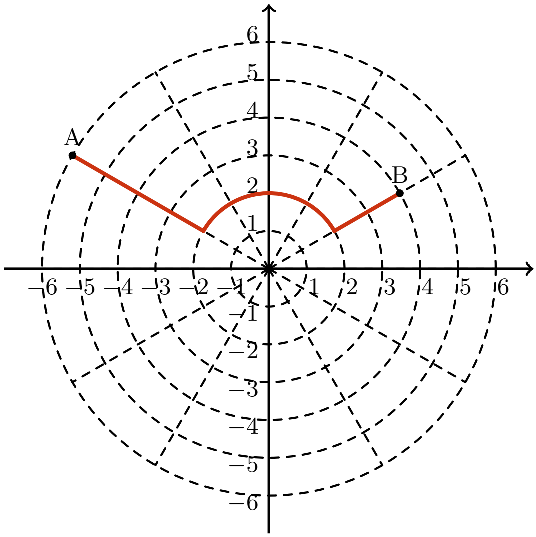
Em cada semirreta, os segmentos determinados por círculos consecutivos têm medidas iguais a 1. Comparemos esses três percursos para um ponto material se deslocar de A até B: No primeiro percurso, o ponto material tem de descer do círculo de raio 6 para o de raio 4, percorrendo dois segmentos unitários, além de percorrer um arco desse segundo círculo correspondente a um ângulo central de 120°. Como o comprimento do círculo aumenta, ou diminui, na mesma proporção do raio, pois $\frac{C}{r} = 2\pi$, temos que o arco de menor comprimento, dentre os que têm raios 4, 5 e 6, é o que tem raio 4. Assim, os percursos destacados nas duas últimas figuras certamente têm comprimento maior do que o percurso destacado na primeira. Este último, por sua vez, tem comprimento é igual a

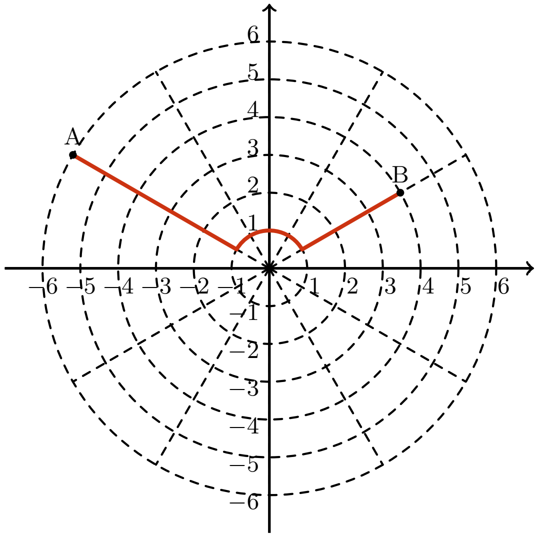
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2,$$

pois o arco, correspondente ao seu ângulo central de 120°, tem comprimento igual a $\frac{1}{3}$ do comprimento total do círculo, uma vez que $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, também existe a possibilidade do ponto material descer para um círculo de raio menor do que 4, percorrer um arco sobre esse círculo e, em seguida, subir até o círculo de raio 4. Veja as figuras seguintes.


A
B
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6


A
B
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6



Esses percursos têm comprimentos respectivamente iguais a

$$\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4,\quad \frac{2\cdot\pi\cdot 2}{3}+6 \quad\text{e}\quad \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8.$$

Uma vez que $\pi > 3$ e que são verdadeiras as equivalências

$$\frac{2\cdot\pi}{3}+8 < \frac{6\cdot\pi}{3}+4 \Leftrightarrow \frac{4\cdot\pi}{3} > 4 \Leftrightarrow \pi > 3 \text{ e}$$

$$\frac{2\cdot\pi}{3}+8 < \frac{4\cdot\pi}{3}+6 \Leftrightarrow \frac{2\cdot\pi}{3} > 2 \Leftrightarrow \pi > 3,$$

temos $\frac{2\cdot\pi}{3}+8$ como o menor dos três comprimentos acima. Além disso, por causa da terceira equivalência

$$\frac{2\cdot\pi}{3}+8 < \frac{8\cdot\pi}{3}+2 \Leftrightarrow \frac{6\cdot\pi}{3} > 6 \Leftrightarrow \pi > 3,$$

$\frac{2\cdot\pi}{3}+8$ é menor do que o comprimento da possibilidade obtida anteriormente.

Logo, o menor percurso tem comprimento $\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8$ e a opção correta é a letra **(a)**.

■

1.6 – Plano cartesiano

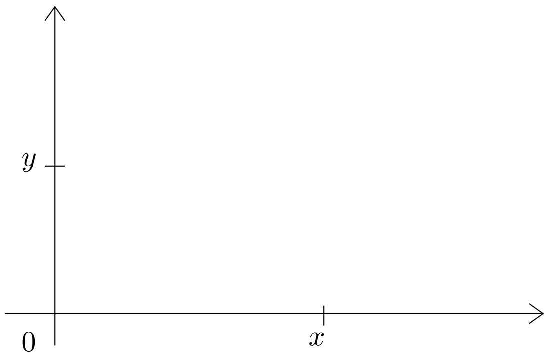
Um noção intuitiva que aparece ao resolvermos o Problema 22 é a seguinte: quanto mais refinada for uma malha, mais precisa será a estimativa da área de uma figura. Então, se for possível trabalhar com uma malha *infinitamente refinada*, poderemos estabelecer novos resultados matemáticos, em especial sobre a área de figuras "complicadas".

Apesar de abstrato, o conceito de malha infinitamente refinada pode ser compreendido através do **sistema de coordenadas do plano**.

Chamamos o plano de **plano cartesiano** quando tivermos, atrelado ao plano, um sistema de referência formado por duas retas numéricas perpendiculares, as quais se intersectam no ponto que representa o número 0 em ambas. Em seguida, denominamos uma dessas retas de **eixo das abscissas** e a outra de **eixo das ordenadas**.

Por comodidade do desenho, geralmente tomamos o **eixo das abscissas** como uma reta horizontal orientada da esquerda para a direita e o **eixo das ordenadas** como uma reta vertical orientada de baixo para cima, como mostrado na próxima figura.

Seja como for, o número real associado a um ponto arbitrário do eixo das abscissas é denotado pela letra x e o número real associado a um ponto arbitrário do eixo das ordenadas é denotado pela letra y. Por isso, os eixos das abscissas e das ordenadas também são chamados, respectivamente, de eixo-x e eixo-y.



Da mesma forma que um ponto, pertencente a uma reta numérica, pode ser associado de maneira única a um número real, em um plano cartesiano, um ponto qualquer pode ser associado a um único *par ordenado* de números reais.

Para isso, vamos considerar como ponto de referência o ponto de cruzamento dos dois eixos, que chamaremos de **origem** do plano cartesiano.

Em seguida, vemos que dado um ponto P no plano cartesiano, existem duas únicas retas que passam por P e são paralelas aos eixos (veja a Figura 1.8).

Obs As retas tracejadas podem ser compreendidas como duas grades perpendiculares, formando a malha infinitamente refinada que mencionamos anteriormente.

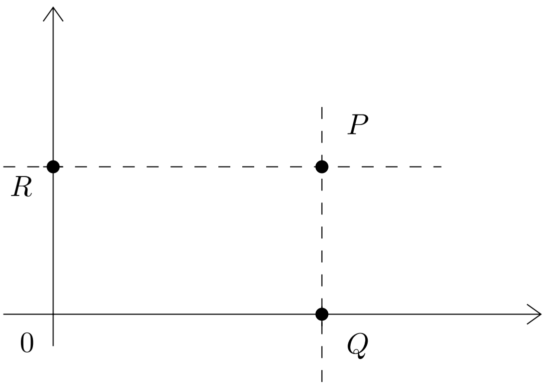
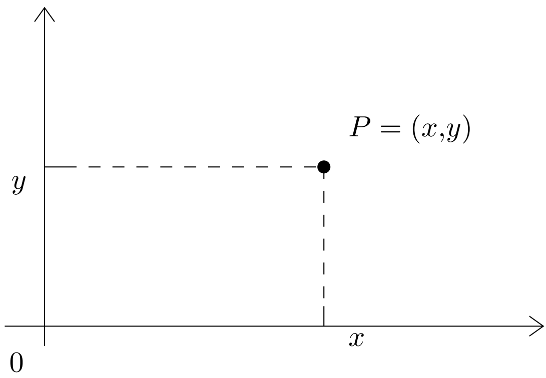


Figura 1.8: determinação das coordenadas de um ponto.

A reta que passa por P e é paralela ao eixo-x corta o eixo-y no ponto R, ao passo que a reta que passa por P e é paralela ao eixo-y corta o eixo-x no ponto Q. Dizemos que os pontos Q e R são as **projeções** do ponto P sobre os eixos.

Como os pontos P e Q pertencem aos eixos, os quais são retas numéricas, eles correspondem, em tais retas, a números reais. Digamos, pois, que Q – pertencente ao eixo-x – corresponde a um número real x e R – pertencente ao eixo-y – corresponde a um número real y. Esses números são chamados **coordenadas** do ponto P e formam um par ordenado (x,y).

Assim, num plano cartesiano, cada ponto corresponde a um único par ordenado, de modo que podemos identificar o ponto P com o par ordenado (x,y), escrevendo $P = (x,y)$. Os números x e y são chamados, respectivamente, de **abscissa** e **ordenada** do ponto P. Na situação da próxima figura, o ponto P tem abscissa e ordenada positivas.



Obs

Observe que a abscissa x do ponto P é a primeira entrada do par ordenado (x,y), enquanto a ordenada é a segunda entrada do par. Isso é uma convenção importante, porque, se não tivermos cuidado com ela, poderemos confundir facilmente os pontos $(1,2)$ e $(2,1)$, por exemplo.

Podemos ver a abscissa do ponto P como o número que indica o deslocamento horizontal que deve ser feito, desde a origem O até a projeção do ponto P sobre o eixo-x; da mesma forma, a ordenada de P pode ser vista como o número que indica o deslocamento vertical que se deve fazer, desde a origem O até a projeção do ponto P sobre o eixo-y.

Agora faremos um exercício para praticar os conceitos que acabamos de apresentar.

Problema 27 — SPAECE–2016, adaptado. Em um jogo de batalha naval, a localização do navio de um dos jogadores encontra-se representada em um plano cartesiano pelos pontos $P = (2, -1)$, $Q = (1, -1)$ e $R = (0, -1)$. Esboce a localização desses três pontos no plano cartesiano.

Solução. Considere a Figura 1.9. Em primeiro lugar, fazemos um esboço de uma grade quadriculada cujas grades são paralelas aos eixos do sistema de coordenadas. Agora iremos posicionar os pontos:

- O ponto P tem coordenadas $(2, -1)$. Assim, para encontramos sua posição, começando da origem, deslocamos duas colunas para a direita e, em seguida, uma linha para baixo.
- O ponto Q tem coordenadas $(1, -1)$. Assim, para encontramos sua posição, começando da origem, deslocamos uma coluna para a direita e, em seguida, uma linha para baixo.
- O ponto R tem coordenadas $(0{,}1)$. Assim, para encontramos sua posição, começando da origem, deslocamos uma linha para cima.

■

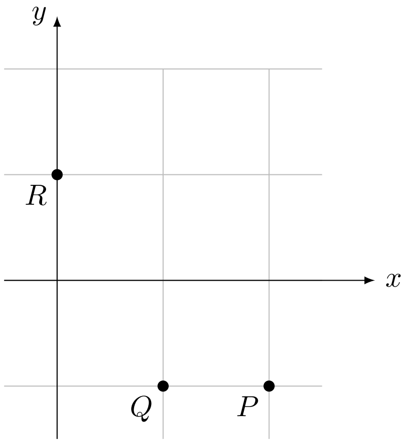


Figura 1.9: posicionando pontos em um sistema de coordenadas.

Como vimos no Problema 12, o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado para calcular o perímetro de certos polígonos cujos vértices estão sobre uma malha finita. Agora, iremos estender esse resultado para calcularmos o perímetro de qualquer polígono cujas as coordenadas de seus vértices seja conhecidas.

Problema 28 Qual é o perímetro do quadrilátero $ABCD$ que tem vértices com coordenadas $A = (2{,}2)$, $B = (3{,}5)$, $C = (6{,}5)$ e $D = (8{,}1)$.

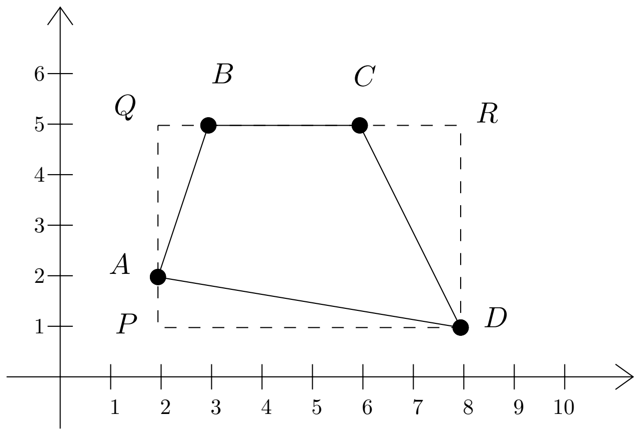


Figura 1.10: figura relativa à solução do Problema 28.

Solução. Em primeiro lugar, vamos fazer um desenho que ilustre o quadrilátero $ABCD$ no plano cartesiano, conforme apresentado na Figura 1.10. Construa também um retângulo $PQRD$ com lados paralelos aos eixos. Note que é possível determinar facilmente a medida do lado BC. Temos que $\overline{BC} = 6 - 3 = 3$. Para calcularmos os comprimentos dos demais lados, utilizaremos o Teorema de Pitágoras nos triângulos PAD, QAB e CRD.

$$\overline{AD}^2 = 1^2 + 6^2 = 37 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{37}.$$

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{10}.$$

$$\overline{CD}^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{20}.$$

Portanto, o perímetro de $ABCD$ é $3 + \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{37}$. ∎

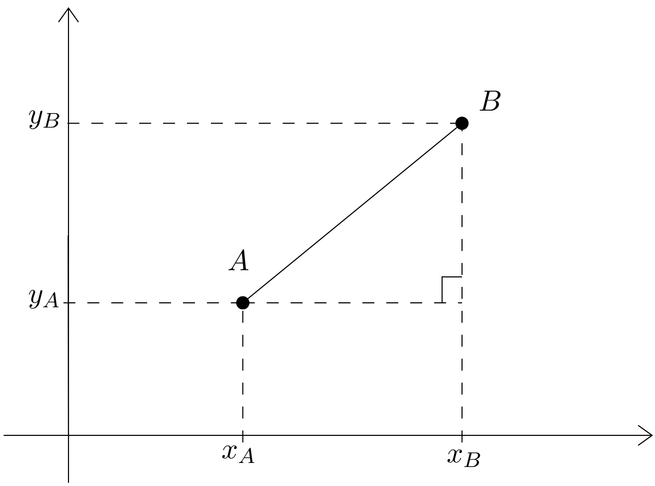
Agora nosso objetivo será encontrar uma maneira geral de relacionar a distância entre dois pontos com suas coordenadas. Para isso, suponhamos que foi escolhido e fixado um sistema cartesiano de eixos em um plano. Lembramos que, essencialmente, isso corresponde à escolha de duas retas numéricas perpendiculares em um ponto O, o qual está associado ao número 0 em cada uma delas. Lembramos ainda que, assim sendo, dois pontos quaisquer A e B do plano passam a ser identificados por suas coordenadas: $A = (x_A,y_A)$ e $B = (x_B,y_B)$. A seguir, vamos aprender como calcular a distância entre os pontos A e B a partir de x_A, y_A, x_B, y_B.

A situação mais geral possível, em que $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, é representada na figura a seguir. Neste caso, o segmento AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são segmentos com medidas $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$. Aplicando o **Teorema de Pitágoras** a esse triângulo de hipotenusa AB, vemos que

$$\overline{AB}^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2,$$

logo

$$d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \qquad (1.6)$$



Esta é a fórmula que permite o cálculo da distância entre dois pontos do plano a partir de suas coordenadas. Vejamos como aplicá-la em alguns exemplos simples.

Problema 29 Calcule a distância entre os pontos $A = (3,2)$ e $B = (-1,5)$.

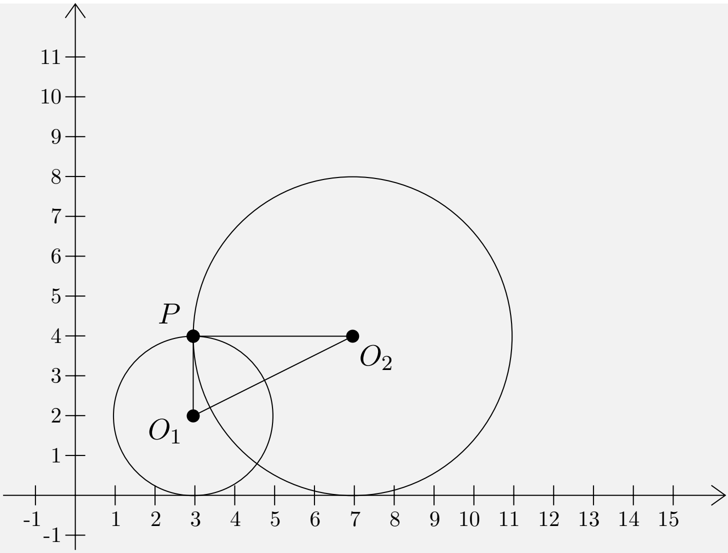
Solução. Aplicando (1.6) diretamente, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-5)^2}\\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (-3)^2}\\ &= \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9}\\ &= \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$

■

Uma forma interessante para exercitar os conceitos matemáticos apresentados até agora é por meio do jogo **Pythagorea** que possui uma coleção de desafios geométricos que podem ser resolvidos sem efetuar cálculos complexos. Ele está disponível para os sistemas Android ou iOS.

Problema 30 Na figura a seguir são dadas as coordenadas dos seguintes pontos: $O_1 = (3,2)$, $O_2 = (7,4)$ e $P = (3,4)$.



(a) Encontre os raios dos dois círculos.
(b) Calcule a distância entre os centros O_1 e O_2.
(c) É possível concluir que o triângulo PO_1O_2 é retângulo? Por quê?

Solução. (a) Os raios r_1 e r_2 dos dois círculos são as distâncias $r_1 = \overline{PO_1}$ e $r_2 = \overline{PO_2}$. Podemos calcular essas distâncias usando a fórmula (1.6):

$$\overline{PO_1} = \sqrt{(3-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2,$$

$$\overline{PO_2} = \sqrt{(3-7)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4.$$

(b) A distância $\overline{O_1O_2}$ entre os centros também pode ser calculada com a mesma fórmula:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} =$$
$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

(c) Os três lados do triângulo PO_1O_2 verificam a identidade do Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PO_1}^2 + \overline{PO_2}^2 = 4 + 16 = 20 = \overline{O_1O_2}^2.$$

Portanto, de acordo com o último parágrafo da Observação 1.3, isso implica que o triângulo PO_1O_2 é retângulo em P. ■

Você deve estar se perguntando se é possível determinar a área de um polígono no qual sabemos as coordenadas de seus vértices. A resposta é afirmativa e, finalizando esta seção, adaptaremos a estratégia empregada na solução do Problema 10, com o objetivo de obter uma fórmula para o cálculo da referida área.

Problema 31 Qual é a área do quadrilátero $ABCD$ que tem vértices com coordenadas $A = (2{,}2)$, $B = (3{,}5)$, $C = (6{,}5)$ e $D = (8{,}1)$.

Solução. Considere mais uma vez a Figura 1.10. Observe que a área do quadrilátero $ABCD$ é igual à área do retângulo $PQRD$ menos a área dos triângulos APD, QAB e CRD. Portanto,

$$[ABCD] = 4 \cdot 6 - \frac{1 \cdot 6}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} = 24 - 3 - 1{,}5 - 4 = 15{,}5.$$

■

Obs Também há uma fórmula que computa a área de qualquer polígono no plano cartesiano, independentemente das coordenadas de seus vértices serem inteiras ou não. Porém, essa fórmula não é objetivo desse material. Entraremos em detalhes a respeito disso em um módulo futuro.

Observação 1.5 Após resolver os últimos problemas das duas primeiras sequências desse material, você deve ter percebido que as estratégias que empregamos para resolver problemas, que envolvem figuras em malhas quadriculadas, podem ser adaptadas para resolver problemas cujas figuras estão em um sistema de coordenadas. Essa percepção é muito importante para que você possa compreender a utilidade do sistema de coordenadas e, também, entender melhor as estratégias de resolução de problemas sobre esse assunto.

1.7 – Retas no Plano Cartesiano

Iniciaremos essa seção apresentando uma situação na qual iremos explorar mais uma vez a estratégia de remontagem de áreas. Observe os dois desenhos da Figura 1.11, onde assumimos que cada quadradinho possui lados com 1 unidade de comprimento. Veja que as formas de mesma cor são congruentes, logo possuem a mesma área. No desenho de cima, essas figuras parecem cobrir completamente um triangulo retângulo ABC de catetos com medidas 13 e 5, ou seja, uma área de $13 \cdot 5/2 = 32{,}5$ unidades de área. Contudo, no desenho de baixo, elas deixam de fora um quadrado de área 1. De onde veio essa área? Será que o cálculo de áreas através de recomposição de figuras não funciona tão bem?

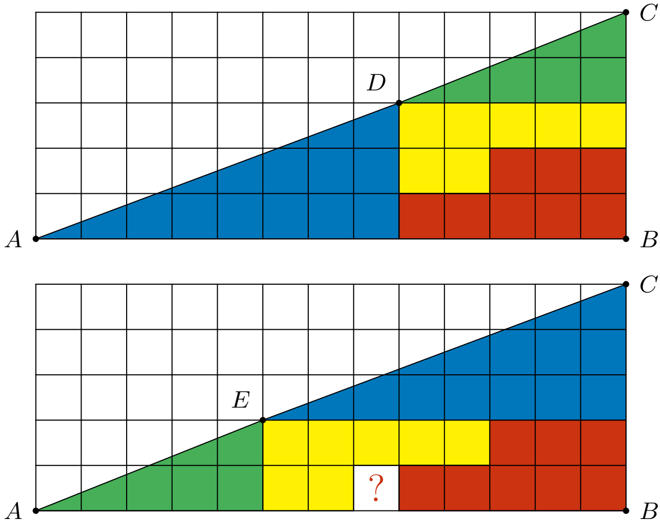


Figura 1.11: de onde veio o quadrado a mais?

A verdade é que as figuras coloridas não cobrem perfeitamente o triângulo ABC. Isso ocorre porque os pontos A, D e C não estão sobre uma mesma reta, como parecem estar, isto é não são colineares. Da mesma forma, os pontos A, E e C não são colineares. Assim, temos o seguinte problema motivador dessa seção.

Problema 32 Mostre que, na Figura 1.11, os pontos A, D e C não são colineares. Mostre que os pontos A, E e C também não são.

Obs Com auxilio de uma régua, é possível verificar que o ponto D está um pouco abaixo do segmento AC e o ponto E está um pouco acima de AC.

Para resolvermos o Problema 32 de maneira rigorosa, precisamos criar um método que nos diga quando três pontos de uma grande quadriculada são colineares. Mais ainda, entendendo o plano cartesiano como uma malha infinitamente refinada, faz sentido estabelecermos quais são as condições que garantem quanto três pontos são colineares ou não.

Consideremos três pontos A_1, A_2 e A_3 no plano, com coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente. Suponhamos que esses três pontos sejam colineares, isto é, estejam sobre uma mesma reta, como mostrado na Figura 1.12.

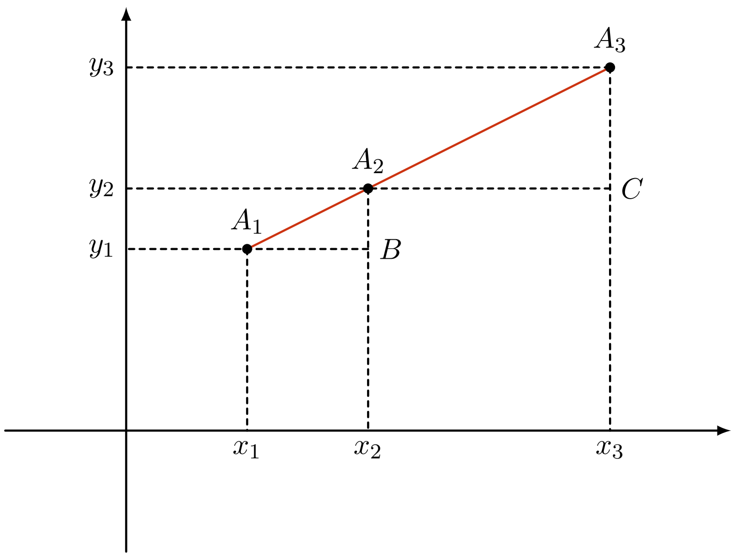


Figura 1.12: três pontos colineares.

Desenhe as retas paralelas aos eixos e passando pelos pontos A_1,

A_2 e A_3. Seja B o ponto de interseção da reta horizontal por A_1 com a reta vertical por A_2. Da mesma forma, seja C o ponto de interseção da reta horizontal passando por A_2 com a reta vertical passando por A_3, como desenhado Figura 1.12.

Como as retas horizontais que passam pelos pontos A_1 e A_2 são paralelas, os ângulos $\angle A_2A_1B$ e $\angle A_3A_2C$ são correspondentes, logo congruentes. Como os triângulos A_1A_2B e A_2A_3C são retângulos, concluímos pelo caso ângulo-ângulo que eles são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_2C}} = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_3C}}, \text{ ou seja, } \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_3C}},$$

Em termos de coordenadas, a última igualdade pode ser reescrita como

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}. \tag{1.7}$$

Outra maneira de escrever essa igualdade é multiplicar em $\times$ para obter

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0,$$

ou, ainda,

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 = 0. \tag{1.8}$$

Observe que a relação (1.8) continua válida se a reta que contém A_1, A_2 e A_3 for horizontal ou vertical. Por exemplo, no primeiro caso, temos $y_1 = y_2 = y_3$, de forma que (1.8) se resume a

$$y_1(x_1 + x_2 + x_3 - x_2 - x_3 - x_1) = 0,$$

que é válida para quaisquer que sejam x_1, x_2 e x_3, pois

$$y_1 \cdot 0 = 0.$$

Vamos, agora, fixar os pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ e substituir o ponto A_3 por um ponto $P = (x, y)$, de modo que P continue sendo colinear com A_1 e A_2. Como a igualdade (1.8) é consequência da condição de colinearidade, ela continua válida ao substituirmos A_3 por P, ou seja, ao trocarmos na equação (1.8), x_3 por x e y_3 por y. Dessa forma, obtemos

$$x_1y_2 + x_2y + xy_1 - x_2y_1 - xy_2 - x_1y = 0. \tag{1.9}$$

Agrupando os termos, podemos reescrever (1.9) como

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \tag{1.10}$$

Se $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$, então a equação (1.10) toma a forma

$$ax + by + c = 0, \tag{1.11}$$

onde a, b e c são constantes reais. A igualdade (1.11) é chamada **equação geral da reta** que passa pelos pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$. Os números reais a, b e c são chamados **coeficientes** da equação. Eles dependem apenas das coordenadas dos pontos A_1 e A_2, de modo que esses pontos determinam a equação da reta. Isso corresponde ao axioma da Geometria Plana que afirma que por dois pontos distintos passa uma única reta.

Também podemos provar que o conjunto dos pontos $P = (x,y)$ que satisfazem à equação (1.11) formam uma reta. De fato, se considerarmos três pontos A_1, A_2 e A_3 no plano, com coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) que satisfazem a essa equação, teremos que

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2) = a(x_2-x_3)+b(y_1-y_2) = a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1) = 0.$$

Em primeiro lugar, considere a situação na qual $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Nesse caso, podemos deduzir que

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}.$$

que é exatamente a equação (1.7). Portanto, ao posicionarmos os pontos A_1, A_2 e A_3 no plano cartesiano, conforme a Figura 1.12, concluímos que os triângulos A_1A_2B e A_2A_3C são semelhantes. Logo, os pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares pelo Axioma da Paralela de Euclides.

Considere o caso particular em que $a = 0$ e $b \neq 0$. A diferença $y_1 - y_2 = a = 0$ nos diz que os pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ têm a mesma ordenada. Isso significa que a reta r, cuja equação é $by + c = 0$, é horizontal (Figura 1.13,(a)). Realmente, nesse caso, $by + c = 0$ equivale a $y = -c/b$, e isso significa que os pontos da reta são aqueles com ordenadas iguais a $-c/b$. É claro que rais pontos formam um reta horizontal.

Considere, agora, o caso em que $b = 0$ e $a \neq 0$. Neste caso, a diferença $x_2 - x_1 = b = 0$ implica que os pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ têm a mesma abscissa e, por isso, a reta r, de equação $ax + c = 0$, é vertical (Figura 1.13,(b)). De forma semelhante ao caso anterior, neste caso temos que $x = -c/a$, logo a reta vertical em questão é aquela formada pelos pontos que possuem abscissas iguais a $-c/a$.

No caso em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, isto é, as abscissas e ordenadas dos pontos A_1 e A_2 são distintas. Isso significa que a reta não é horizontal nem vertical (Figura 1.13 (c)).

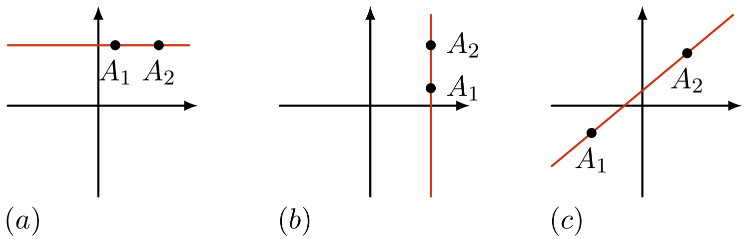


Figura 1.13: três possíveis posições de uma reta.

Problema 33 Suponha que, na equação (1.11), tenhamos $c = 0$. Neste caso, o que é possível afirmar sobre a reta, se a e b não forem nulos simultaneamente?

Solução. Se $c = 0$, então a equação da reta toma a forma $ax + by = 0$. Logo, o ponto $(0, 0)$ pertence à reta, pois suas coordenadas satisfazem a equação dessa reta. ■

Agora que já desenvolvemos uma teoria a respeito de pontos colineares, vamos utilizá-la para resolver o Problema 32.

Solução do Problema 32. Seja $A = (0{,}0)$ as coordenadas do ponto A em ambas figuras. Considerando o sistema de coordenadas com eixos paralelos às grades da malha, se o ponto C tiver coordenadas $C = (13{,}5)$, então $D = (8{,}3)$ e $E = (5{,}2)$. Caso A, D e C fossem colineares, pela equação (1.7) deveria valer

$$\frac{8-0}{3-0} = \frac{13-0}{5-0} \Leftrightarrow 40 = 39$$

que não é verdade. Caso A, E e C fossem colineares, pela equação (1.7) deveria valer

$$\frac{5-0}{2-0} = \frac{13-0}{5-0} \Leftrightarrow 25 = 26$$

que não é verdade. ■

1.7.1 – Determinação de uma reta, dadas sua posição e direção: equação reduzida

Assim como uma reta pode ser determinada por dois de seus pontos, ela também pode ser determinada por um ponto e uma direção. A direção de uma reta r é definida pelo ângulo que essa reta forma com a horizontal, ou seja, o eixo das abscissas. Para evitar ambiguidades, convenciona-se que esse ângulo é medido a partir da parte positiva do eixo das abscissas, no sentido anti-horário (Figura 1.14).

No argumento a seguir, suporemos, por comodidade, que tal ângulo, o qual denotaremos por θ, é agudo — o caso em que θ é obtuso pode ser tratado de modo essencialmente análogo. Suponha que a reta r não é vertical. Dados dois pontos A_1 e A_2 sobre a reta r, com coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente, seja B o ponto de interseção entre a reta horizontal que passa por A_1 e a reta vertical que passa por A_2 (Figura 1.14).

Uma vez que θ é agudo, o ângulo $\angle A_2A_1B$, interno do triângulo A_1A_2B, também tem medida θ. Usando a definição de tangente de um ângulo em um triângulo retângulo e denotando $\mathrm{tg}(\theta)$ por m obtemos

$$m = \mathrm{tg}(\theta) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b},$$

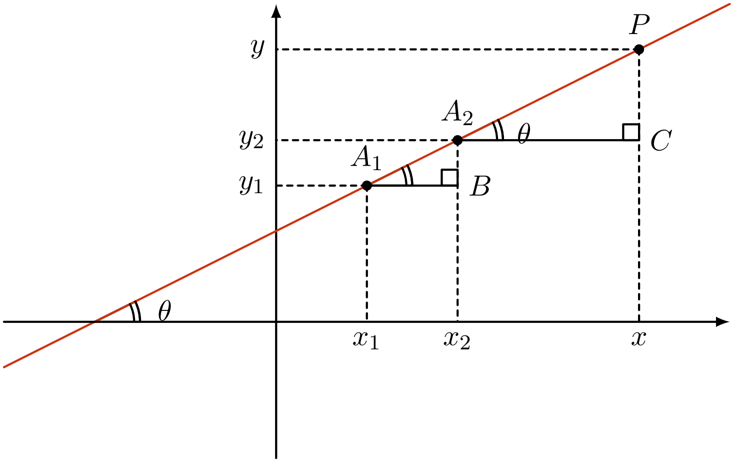


Figura 1.14: ângulo de inclinação de uma reta.

onde a e b são os coeficientes da equação geral da reta (1.11).

Observando que $b = x_2 - x_1 \neq 0$, pois a reta r não é vertical, podemos isolar y na equação geral (1.11) para obter $by = -ax - c$. Logo,

$$y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b} = mx + q, \tag{1.12}$$

onde q denota $-c/b$.

O coeficiente $m = \text{tg}(\theta)$ é chamado **coeficiente angular** da reta. Ele mede a *inclinação* da reta. O coeficiente $q = -\frac{c}{b}$ é chamado **coeficiente linear** da reta. Ele mede a *posição* em que a reta intersecta o eixo-y (eixo das ordenadas). De fato, fazendo $x = 0$ em (1.12), obtemos $y = q$; assim, o ponto $(0, q)$ pertence à reta, ou seja, o ponto $(0, q)$ é onde a reta intersecta o eixo das ordenadas.

Se P é um ponto com coordenadas (x, y), pertencente à reta r, posicionado como na Figura 1.14, então o ângulo $\angle PA_1PD$ tem medida θ (Figura 1.14). Logo,

$$m = \text{tg}(\theta) = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

de sorte que

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{1.13}$$

A equação (1.13) também é chamada **equação reduzida** da reta r. Observando (1.13), concluímos que a equação de uma reta não vertical pode ser determinada conhecendo-se a posição de um de seus pontos e seu coeficiente angular (sua direção).

Observação 1.6 No caso em que a reta é vertical, o ângulo que ela faz com a horizontal é reto. Como o ângulo de $90°$ não tem tangente, retas verticais não têm coeficiente angular nem equação reduzida.

Problema 34 — Saeb–2011. Qual é a equação da reta que contém os pontos $(3, 5)$ e $(4, -2)$?

Solução 1. Uma maneira de resolver esse problema é calcular os coeficientes angular e linear. Primeiro,

$$m = \operatorname{tg}(\theta) = \frac{5-(-2)}{3-4} = \frac{7}{-1} = -7.$$

Como a reta passa pelo ponto $(3, 5)$, sua equação reduzida é

$$y - 5 = m(x-3) \text{ ou seja, } y - 5 = -7(x-3).$$

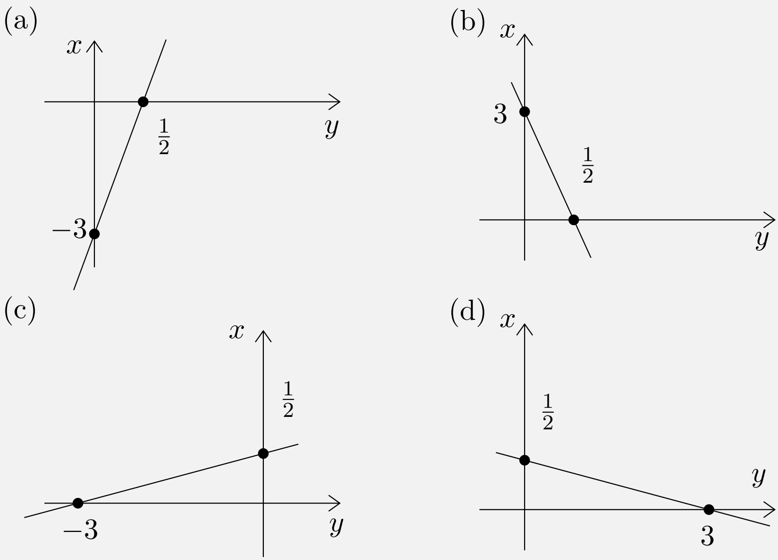
Simplificando, obtemos $7x + y - 26 = 0$. ■

Solução 2. Outra maneira de resolver é admitir que a equação geral é $ax + by + c = 0$ e substituir os valores das coordenadas dos dois pontos, dados no enunciado, que pertencem à reta:

$$\begin{cases} 3a + 5b + c = 0, \\ 4a - 2b + c = 0. \end{cases}$$

Com isso, obtemos um sistema com duas equações e três incógnitas, a, b e c, que, por isso, não tem solução única. Mas, subtraindo uma equação da outra, obtemos $a = 7b$. Substituindo essa relação em qualquer das equações, obtemos $c = -26b$. Assim, a equação $ax + by + c = 0$ pode ser reescrita como $7bx + by - 26b = 0$. Se b fosse igual a zero, os três coeficientes da reta seriam nulos, o que não pode ocorrer. Logo, podemos dividir essa última equação por b, obtendo $7x + y - 26 = 0$. ■

Problema 35 Ao desenhar o gráfico da reta $y = 6x - 3$ um aluno do ensino médio trocou os eixos x e y de lugar. Qual dos gráficos a seguir melhor representa esta reta ao consideramos os eixos trocados?



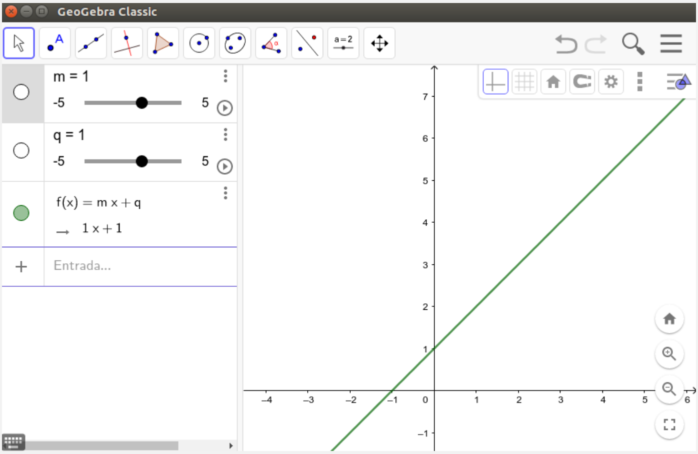
Solução. Os pontos em que o gráfico da reta $y = 6x-3$ intersecta os eixos, no sistema de coordenadas padrão (x,y), são $(0,-3)$ e $(\frac{1}{2},0)$. Como devemos olhar para o sistema (y,x), invertemos a ordem das coordenadas, obtendo $(-3,0)$ e $(0,\frac{1}{2})$. Assim, o gráfico que melhor representa é o dado pela letra **(c)**. ■

Uma forma divertida de praticar o conteúdo apresentado nessa seção é realizando a seguinte atividade prática:

(a) Abra o GeoGebra e digite `m=1` na caixa de comandos e depois `enter`.
(b) Ainda na caixa de comandos, digite `q=1` e depois `enter`.
(c) Digite `f(x)=mx+q` e depois `enter`.

Na janela de visualização, aparecerá o gráfico da função $f(x) = x+1$.

Você verá algo parecido com o que é mostrado na figura a seguir.



Por fim, utilize os controles deslizantes para mudar os valores de m e q. Assim, você verá como o gráfico da função $f(x) = mx + q$ se altera para diferentes valores de m e q. Estude o comportamento do gráfico da função quando esses valores variam.

1.8 – Exercícios resolvidos e propostos

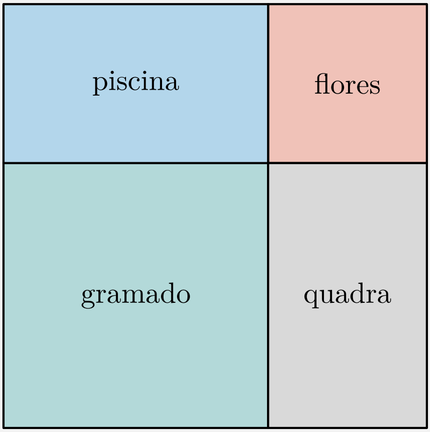
1.8.1 – Sequência 1

Problema 36 — SAEP 2013 - Adaptado. Alfredo tem o costume de correr em torno de um parque que tem formato retangular. As dimensões do parque são 500 metros de largura por 600 metros de comprimento. Todos os dias, Alfredo dá quatro voltas em torno do parque. Podemos afirmar que ele percorre diariamente um total de:

(a) 2,2 km (b) 4,4 km (c) 8,8 km (d) 300 km

Solução. O perímetro do parque é igual a $2 \cdot (500 + 600) = 2200$ metros. Contudo, essa é a distância que ele percorre ao dar uma única volta. Como Alfredo dá quatro voltas, a distância que ele percorre diariamente é igual a $4 \cdot 2200 = 8800$ metros. Agora, observe que as opções de resposta são dadas em quilômetros. Como 1000 metros correspondem a um quilômetro, temos que dividir o valor obtido em metros por 1000, a fim de obter o valor correspondente em quilômetros. Assim fazendo, concluímos que Alfredo percorre um total de 8,8 km; a resposta correta é o item (c). ■

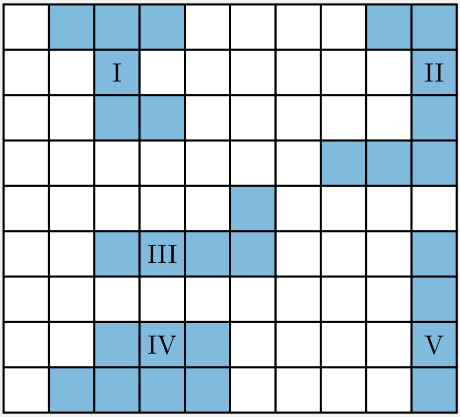
Problema 37 — Prova Brasil. Um terreno quadrado foi dividido em quatro partes, como mostra o desenho abaixo. Uma parte foi destinada para piscina, uma para a quadra, uma parte quadrada para o canteiro de flores e outra, também quadrada, para o gramado. Sabe-se que o perímetro da parte destinada ao gramado é 20 m e o da parte destinada ao canteiro de flores é 12 m.



Qual o perímetro da parte destinada à piscina?

Solução. Como a parte delineada para gramado é um quadrado e possui perímetro 20 metros, os lados desse quadrado medem $20/4 = 5$ metros. O canteiro de flores, também sendo um quadrado, e com perímetro 12 metros, deverá possuir lados medindo $12/4 = 3$ metros. Pela figura, podemos observar que um dos lados da piscina coincide com um do gramado e outro lado da piscina coincide com um do canteiro de flores. Logo, a piscina tem dimensões iguais a 5 m metros e 3 m. Então, temos que o perímetro da piscina é $2 \cdot (5 + 3) = 16$ metros. ■

Problema 38 — SARESP 2007, adaptada. A figura seguinte é composta de uma malha tal que os lados dos quadradinhos possuem uma mesma medida e algumas regiões, numeradas de I a V, estão destacadas. Assinale a alternativa que traz duas regiões com um mesmo perímetro:



(a) III e IV. (b) II e III. (c) II e IV. (d) I e II.

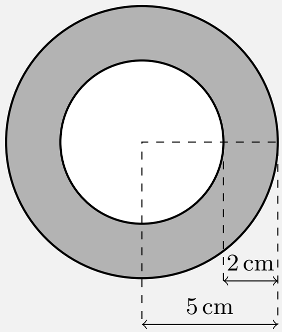
Solução. Medindo-se em unidades de lados dos quadradinhos, a região I possui perímetro 14, a II possui perímetro 16, a III possui perímetro 12, a IV possui perímetro 12 e a V possui perímetro 10. Logo, a resposta correta é o item **(a)**. ■

Problema 39 — SARESP 2011. Um pedreiro usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir $45\,\mathrm{m}^2$ de parede. Qual é a medida, em cm, do lado de cada azulejo?

(a) 10. (b) 13. (c) 15. (d) 18. (e) 20.

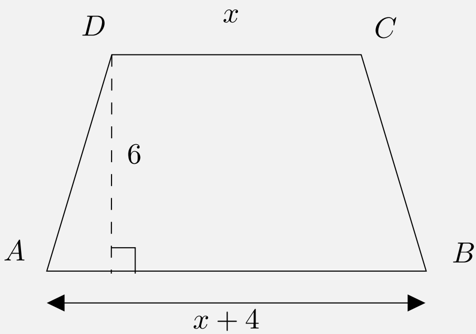
Problema 40 — SAEGO 2017. O desenho na figura é formado por dois círculos concêntricos. Qual é a medida da área da parte colorida de cinza?

(a) $34\pi\ \mathrm{cm}^2$.
(b) $25\pi\ \mathrm{cm}^2$.
(c) $21\pi\ \mathrm{cm}^2$.
(d) $16\pi\ \mathrm{cm}^2$.
(e) $13\pi\ \mathrm{cm}^2$.



Problema 41 A área do trapézio da figura é $48\,\mathrm{m}^2$. Então sua base AB mede:

(a) 4 cm.
(b) 6 cm.
(c) 8 cm.
(d) 10 cm.
(e) 12 cm.



Problema 42 A soma dos quadrados dos três lados de um triângulo retângulo é igual a 32. Quanto mede a hipotenusa do triângulo?

Problema 43 A respeito dos elementos de um triângulo retângulo, assinale a alternativa correta.

(a) O triângulo retângulo é assim conhecido por possuir pelo menos dois lados iguais.
(b) O triângulo retângulo é assim conhecido por possuir pelo menos um ângulo de 180°, também conhecido como ângulo reto.

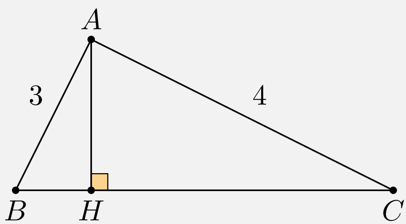
(c) A hipotenusa é definida como o maior lado de um triângulo qualquer.
(d) A hipotenusa é definida como o lado que se opõe ao maior ângulo de um triângulo qualquer.
(e) A hipotenusa é definida como o lado que se opõe ao ângulo reto de um triângulo retângulo.

Problema 44 Classifique os itens a seguir como verdadeiros ou falsos.

( ) Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.
( ) As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.
( ) Dois triângulos que têm dois lados e um ângulo respectivamente congruentes são triângulos congruentes.
( ) Dois triângulos que têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes são triângulos congruentes.

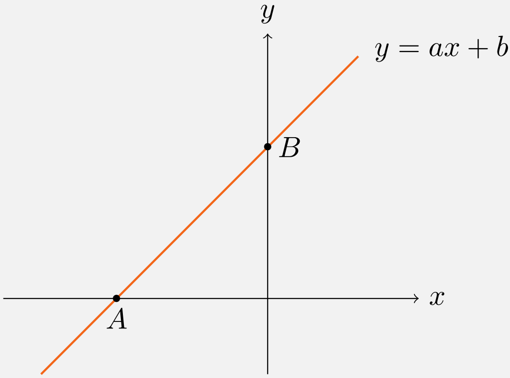
Problema 45 — FUVEST 2006. Na figura abaixo, tem-se $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 6$. O valor de $\overline{BH}$ é:

(a) 17/12.
(b) 19/12.
(c) 23/12.
(d) 25/12.
(e) 29/12.



Problema 46 Dados dois vértices consecutivos $A = (1,3)$ e $B = (5,4)$ de um quadrado, encontre sua área.

Problema 47 De acordo com o gráfico abaixo, a reta $y = ax + b$ passa pelos pontos $A = (-3,0)$ e $B = (0,6)$.



Quais são os valores de a e b?

Solução. Substituindo os valores das coordenadas dos pontos A e B na equação da reta, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-3) + b, \\ 6 = a \cdot 0 + b. \end{cases}$$

Na segunda equação, chegamos à conclusão de que $b = 6$. Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $a = 2$. ■

1.8.2 – Sequência 2

Problema 48 — ENEM 2011. Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular, devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

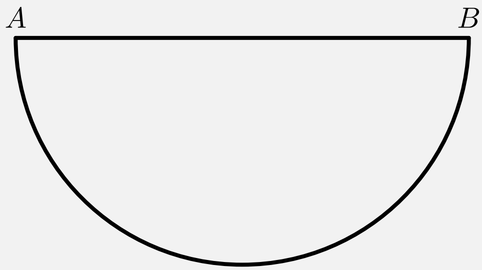
- Terreno 1: 55 m por 45 m.
- Terreno 2: 55 m por 55 m.
- Terreno 3: 60 m por 30 m.

- Terreno 4: 70 m por 20 m.
- Terreno 5: 95 m por 85 m.

Para optar pelo terreno de maior área e que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno:

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

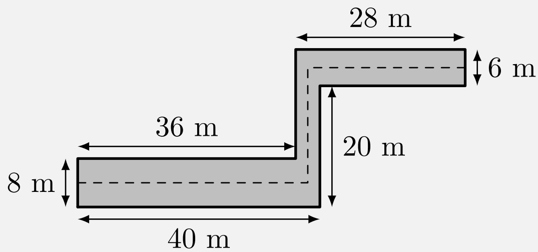
Problema 49 — IFBA 2013. Num parque de diversões, um carrinho vai do ponto A ao ponto B em linha reta e, em seguida, volta ao ponto A percorrendo um semicírculo (veja a figura abaixo).



Usando a aproximação $\pi \cong 3{,}14$ e sabendo que a distância de ida entre os pontos A e B é igual a 10 m, é correto afirmar que o percurso na volta é:

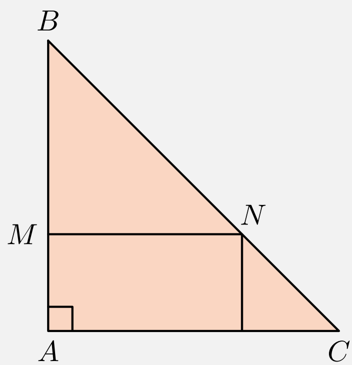
(a) Igual ao percurso da ida.
(b) 20% maior do que na ida.
(c) 48% maior do que na ida.
(d) O dobro do caminho da ida.
(e) 57% maior do que na ida.

Problema 50 — Canguru 2019. Um corredor tem as dimensões mostradas na figura. Um gato andou por toda a linha tracejada no meio do corredor. Quantos metros o gato andou?



(a) 63. (b) 68. (c) 69. (d) 71. (e) 83.

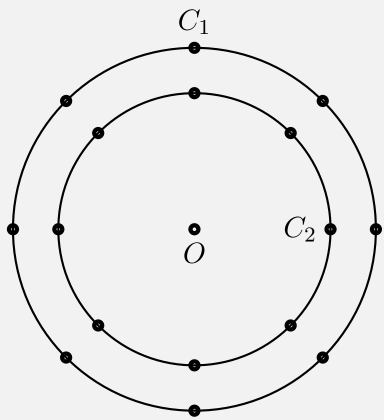
Problema 51 — Fatec SP. Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo e isósceles, e o retângulo nele inscrito tem lados que medem $4\,\text{cm}$ e $2\,\text{cm}$.



O perímetro do triângulo MBN é:

(a) 8 cm.
(b) 12 cm.
(c) $8 + \sqrt{2}$ cm.
(d) $8 + 2\sqrt{2}$ cm.
(e) $4(2 + \sqrt{2})$ cm.

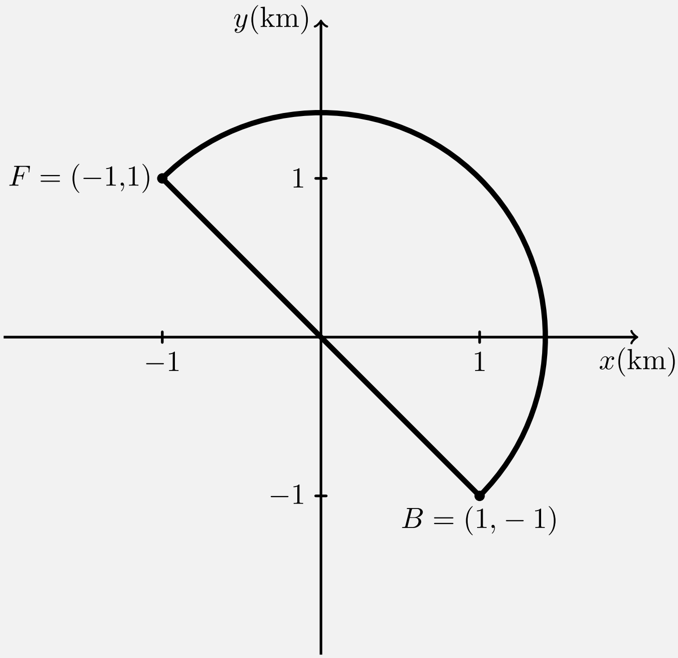
Problema 52 — ENEM 2015. A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam posições situadas em círculos de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambos centrados no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

(a) 55,5.
(b) 60,0.
(c) 175,5.
(d) 23 5,5.
(e) 240,0.

Problema 53 — Enem 2016. Em uma cidade, será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água, de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou um semicírculo que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

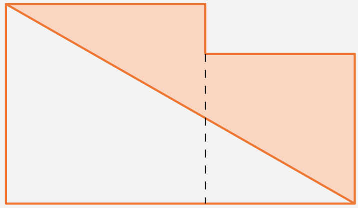


Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto a construção de 1 m de galeria ao longo do semicírculo demora 0,6 h. Usando 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$, assinale a opção que traz o menor tempo possível, em horas, para a conclusão da construção da galeria.

(a) 1260.
(b) 2520.
(c) 2800.
(d) 3600.
(e) 4000.

Problema 54 — OBMEP 2014. A figura abaixo é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza em centímetros quadrados?

(a) 44.
(b) 46.
(c) 48.
(d) 50.
(e) 56.



Problema 55 — ENEM 2019. Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 metros, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100\,\mathrm{m}^2$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada. Utilize 3 como aproximação para π. A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

(a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21\,\mathrm{m}^2$.
(b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24\,\mathrm{m}^2$.
(c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48\,\mathrm{m}^2$.
(d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108\,\mathrm{m}^2$.
(e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120\,\mathrm{m}^2$.

Problema 56 — IFRS 2016. Na figura abaixo, os valores de x e de y, respectivamente, são:

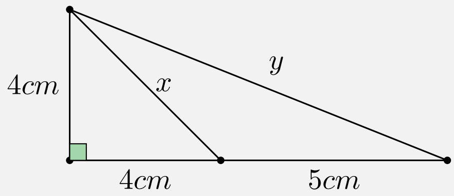
$4\sqrt{2}$ e $\sqrt{97}$.

(b) $2\sqrt{2}$ e 97.

(c) $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{27}$.

(d) $4\sqrt{2}$ e $2\sqrt{27}$.

(e) $4\sqrt{2}$ e 97.



Problema 57 — FUVEST 2001. Na figura abaixo, os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm lado ℓ e centro O. Se $EP = 1$, então ℓ mede:

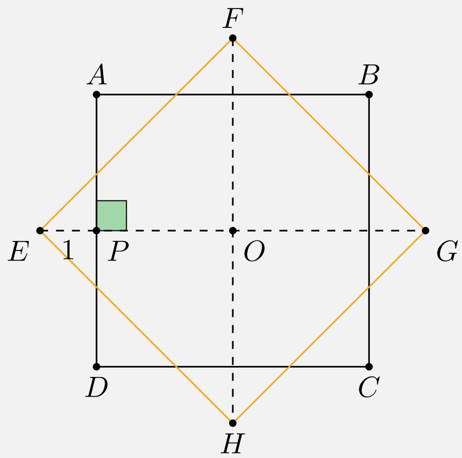
(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

(b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) 2.

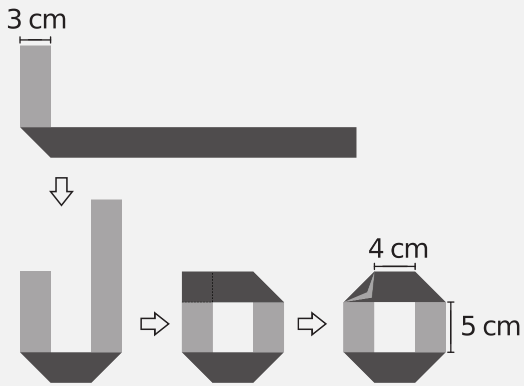
(e) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$.



Problema 58 — UFJF 2016. Considere os pontos $A = (2,0)$, $B = (-1,\sqrt{3})$ e $C = (-1, -\sqrt{3})$ em um plano cartesiano. Calcule a medida do ângulo $\angle ABC$.

1.8.3 – Sequência 3

Problema 59 — OBMEP 2015. Júlia dobrou várias vezes uma tira retangular de papel com 3cm de largura, como mostrado na figura. As dobras foram feitas de modo que cada uma delas forma um ângulo de 45° com os lados da tira. Qual é o comprimento da tira original?



Solução. O contorno externo da figura final, em formato de O, é igual a

$$5 + 4 + 5 + 4 + 4\ell = 18 + 4\ell,$$

onde ℓ é a medida das diagonais que formam os "cantos" da figura.

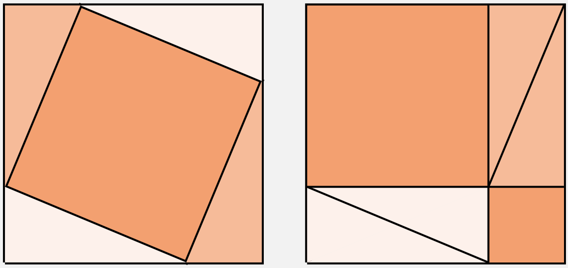
Por outro lado, um exame atento, das várias dobraduras realizadas por Júlia, nos permite concluir que cada dobra da fita faz a figura "perder" 3cm de comprimento e ganhar ℓ cm.

Portanto, raciocinando "de trás pra frente", percebemos que, para calcular o comprimento da tira original a partir do comprimento $18+4\ell$ do contorno externo do O, devemos somar 3 e descontar ℓ quatro vezes. Isso garante que a tira original tem comprimento igual a

$$(18 + 4\ell) + 4 \cdot 3 - 4\ell = 18 + 12 = 30\,\text{cm}.$$

■

Problema 60 As duas figuras abaixo são formadas pelos mesmos triângulos retângulos e por um ou dois quadrados.



Use essas duas figuras para obter uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

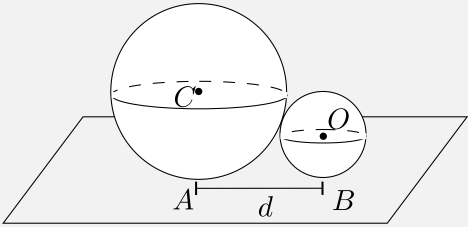
Solução. Na figura da esquerda, os quatro triângulos retângulos, junto com o quadrado construído sobre suas hipotenusas, formam um quadrado maior. Na figura da direita, o mesmo quadrado maior é formado pelos mesmos quatro triângulos retângulos, dispostos de modo diferente, juntamente com dois quadrados menores, construídos sobre os catetos dos triângulos. Retirando-se os triângulos das duas figuras, vemos que o quadrado que sobra na figura da esquerda tem área igual à soma das áreas dos quadrados que sobram na figura da direita. ■

Problema 61 Em um triângulo retângulo, os catetos medem b e c. Seja h a medida da altura relativa à hipotenusa. Prove que

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Problema 62 — ENEM 2016, adaptado. A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.

(a) Figura 1

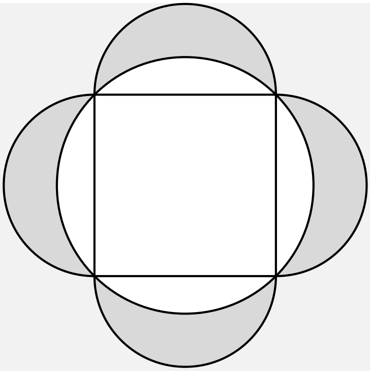


(b) Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d. Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

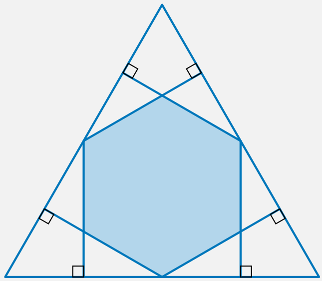
(a) 1.
(b) $2\sqrt{10}/5$.
(c) $\sqrt{10}/2$.
(d) 2.
(e) $\sqrt{10}$.

Problema 63 — UFPE 1996. Num círculo, inscreve-se um quadrado de lado 7 cm. Sobre cada lado do quadrado, considera-se a semicircunferência exterior ao quadrado com centro no ponto médio do lado e raio 3,5 cm, como na figura a seguir. Calcule a área da região sombreada.



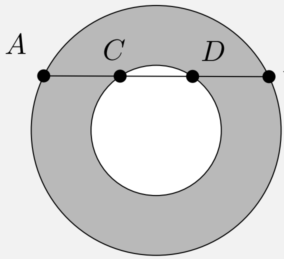
Problema 64 — CANGURU 2017. Seis perpendiculares foram desenhadas a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura. Que fração da área do triângulo é a área do hexágono cinzento delimitado por essas perpendiculares?

(a) $1/3$.
(b) $2/5$.
(c) $4/9$.
(d) $1/2$.
(e) $2/3$.



Problema 65 Considere dois círculos concêntricos e uma corda AB do circulo maior que corta o menor nos pontos C e D. Se $AC = DB = 10$ e $CD = 12$, qual é a medida da área destacada?

(a) 220π.
(b) 150π.
(c) 200π.
(d) 100π.
(e) 160π.



Problema 66 — FGV - 2012. Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices consecutivos são, respectivamente, $(1,4)$, $(-2,6)$ e $(0,8)$. A soma das coordenadas do quarto vértice é:

(a) 8. (b) 9. (c) 10. (d) 11. (e) 12.

Problema 67 — UFRN. Um objeto desloca-se 10 m no sentido Oeste-Leste sobre um plano, a partir de uma posição inicial. Em seguida, percorre mais 20 m no sentido Sul-Norte, 30 m no sentido Leste-Oeste, 40 m no sentido Norte-Sul, 50 m no sentido Oeste-Leste e 50 m no sentido Sul-Norte. A distância entre a posição inicial e a posição final é:

(a) 60 m. (b) 40 m. (c) 50 m. (d) 30 m. (e) 20 m.

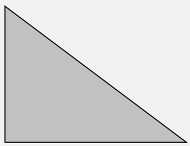
Problema 68 — Unioeste 2012. Dado o ponto $A = (-2,4)$, assinale a opção que traz as coordenadas dos pontos P e Q, respectivamente situados sobre as retas $y = 3x$ e $y = -x$, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ.

(a) $P = (1,3)$ e $Q = (-5,5)$.
(b) $P = (2,6)$ e $Q = (4,-4)$.
(c) $P = (0,0)$ e $Q = (-5,5)$.
(d) $P = (1,3)$ e $Q = (4,-4)$.
(e) $P = (2,6)$ e $Q = (0,0)$.

1.8.4 – Sequência 4

O objetivo do exercício, que apresentaremos a seguir, é promover a criatividade geométrica dos alunos através de modelos físicos, ao mesmo tempo que consolida o conceito e exercita o cálculo do perímetro de figuras planas. **Atenção: esse problema tem várias soluções.**

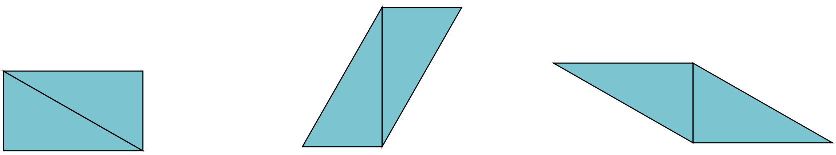
Problema 69 Crie diversos moldes de papel em formato de um triângulo retângulo de lados iguais a 6 cm, 8 cm e 10 cm como ilustrado na figura a seguir.



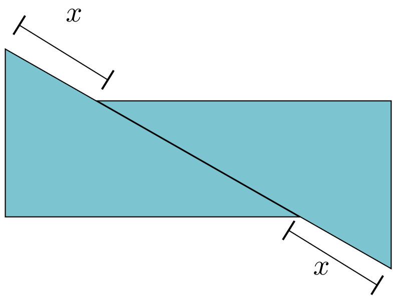
(a) Juntando alguns triângulos, mostre como construir uma figura de perímetro: 28 cm, 32 cm e 36 cm.
(b) Mostre como construir uma figura de perímetro 34 cm e outra de perímetro 45 cm.
(c) Mostre que é possível construir uma figura com qualquer valor de perímetro, desde que este seja maior do que ou igual a 28 cm.
(d) Explique por que não é possível obter uma figura de perímetro igual 26 cm.

Solução.

(a) Considere as figuras a seguir

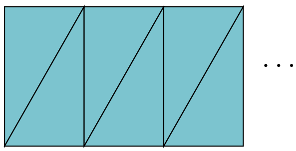


(b) Considere a figura a seguir na qual fazemos coincidir os maiores lados de dois triângulos parcialmente.

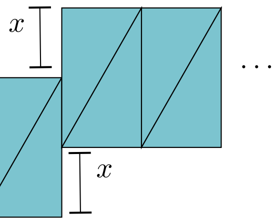


O perímetro da figura genérica é $x+6+8+x+6+8=28+2x$. Como x pode assumir qualquer valor entre 0 e 10, podemos construir figuras com qualquer perímetro entre 28 e 48.

(c) Juntando os triângulos através do padrão a seguir, formamos retângulos de perímetro 28, 40, 52, 64,... Ou seja, valores da forma $28+12k$, onde k é um inteiro não-negativo.



Agora precisamos mostrar que também é possível construir figuras com perímetros intermediários. Para valores entre 28 e 48, já temos o exemplo pelo item anterior. Assim, iremos assumir que temos pelo menos quatro triângulos. Deslocando um pouco o primeiro retângulo da configuração (como mostrado na figura a seguir) obtemos qualquer valor de perímetro de valor $P+2x$, onde P é o perímetro original da configuração retangular e x está entre 0 e 8.

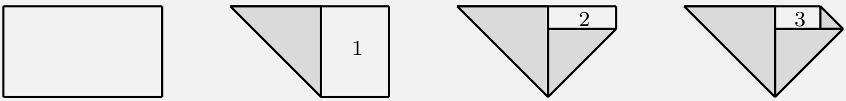


Assim, podemos obter figuras com qualquer perímetro em qualquer um dos intervalos a seguir [40,56], [52,68], [64,80] e assim sucessivamente. Como esses intervalos cobrem todo intervalo de números maiores que ou iguais a 28, demonstramos o que foi solicitado.

(d) Note que o menor perímetro que podemos obter com uma figura formada por dois triângulos é 28 cm. Este valor é encontrado quando coincidimos os maiores lados de cada triângulo. Como o triângulo tem 24 cm de perímetro, qualquer valor entre 24 e 28 centímetros é impossível de ser obtido.

■

Problema 70 — Olimpíada de Maio 2002. Uma folha de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada três vezes, como mostra a figura abaixo.



O retângulo 1, que ficou da cor branca após a primeira dobra, tem 10 cm a mais de perímetro que o retângulo 2, que ficou branco após a segunda dobra, e este por sua vez tem 10 cm a mais de perímetro que o retângulo 3, que ficou branco após a terceira dobra. Determine o perímetro da folha branca inicial.

Solução. Vamos trabalhar de "trás para frente". Sejam x a medida do lado vertical e y a medida do lado horizontal do retângulo 3. Observe que o retângulo 2 tem lados iguais a $x+y$ e x, enquanto que o retângulo 1 tem lados iguais a $x+y$ e $2x+y$. Assim, os perímetros dos retângulos 1, 2 e 3 são iguais a $2(3x+2y)$, $2(2x+y)$ e $2(x+y)$, respectivamente. Pelo o que foi descrito no enunciado, podemos montar as seguintes equações

$$\begin{cases} 2(3x+2y) - 2(2x+y) = 20 \\ 2(2x+y) - 2(x+y) = 16. \end{cases}$$

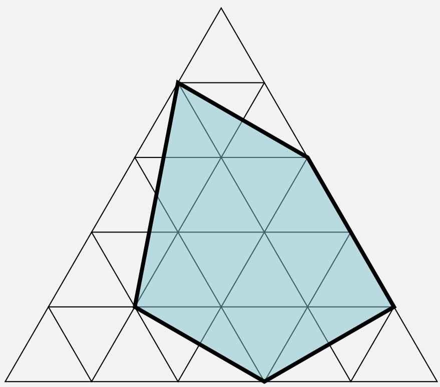
Que podem ser simplificadas para

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x = 8. \end{cases}$$

Portanto, podemos deduzir que $y = 2$. Agora, veja que a folha tem lados iguais a $2x + y$ e $3x + 2y$. Logo, o perímetro é igual a $2(5x + 3y) = 2(40 + 6) = 92$ centímetros. ■

Na resoluções de diversos problemas das sequências anteriores, utilizamos a noção de malha quadriculada como estratégia principal. Ademais, os estudantes devem perceber que existem outras malhas e que estas são úteis na solução de outros problemas. Veja o exemplo a seguir:

Problema 71 — Olimpíada de Matemática de Goiás. Na figura a seguir, temos uma malha formada por triângulos equiláteros congruentes, todos de área igual a $|1\,\text{cm}^2$. Qual é a área do pentágono destacado?



Na solução a seguir, utilizaremos colchetes para representar a área de figuras planas. Por exemplo, $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ.

Solução. Sejam A,B,C,D,E os vértices do pentágono e sejam M,N,P,Q,R,S pontos auxiliares sobre os vértices da malha, conforme a Figura 1.16.

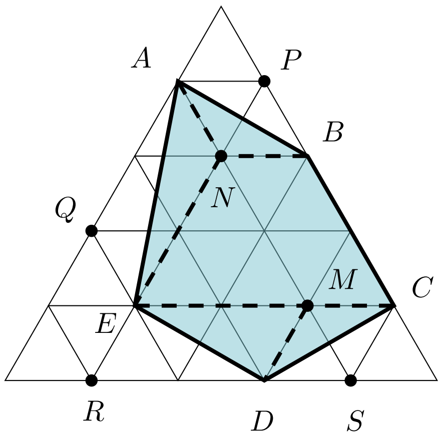


Figura 1.16: problema com malha triangular.

Observe que o pentágono $ABCDE$ pode ser decomposto em quatro triângulos ANB, ANE, EMD, MDC e um quadrilátero $NBCE$. Veja que o triângulo ANE é metade do paralelogramo $ANEQ$, o qual é formado por quatro triângulos de área $1\,\text{cm}^2$ cada. Assim, $[ANE] = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}^2$. De modo análogo, temos que:

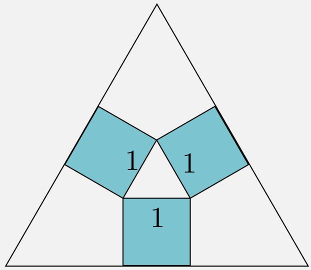
- O triângulo ANB é metade do paralelogramo $APBN$, o qual é formado por dois triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[ANB] = \frac{2}{2} = 1\,\text{cm}^2$.
- O triângulo MCD é metade do paralelogramo $MCSD$, o qual é formado por dois triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[MCD] = \frac{2}{2} = 1\,\text{cm}^2$.
- O triângulo EMD é metade do paralelogramo $EMDR$, o qual é formado por quatro triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[ANB] = \frac{2}{2} = 2\,\text{cm}^2$.

Além disso, o quadrilátero $NBCE$ é formado por oito triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[NBCE] = 8\,\text{cm}^2$. Portanto,

$$[ABCDE] = 2 + 1 + 1 + 2 + 8 = 14\,\text{cm}^2.$$

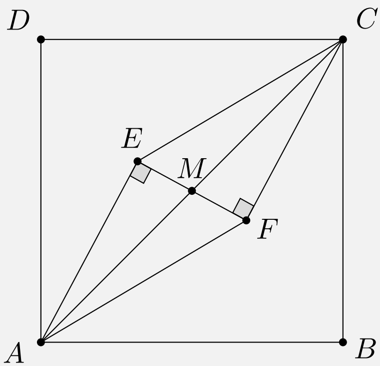
■

Problema 72 — Olimpíada de Matemática da Holanda 2009. Na figura a seguir, temos três quadrados de lado 1 e dois triângulos equiláteros. Calcule o lado do triângulo equilátero maior.

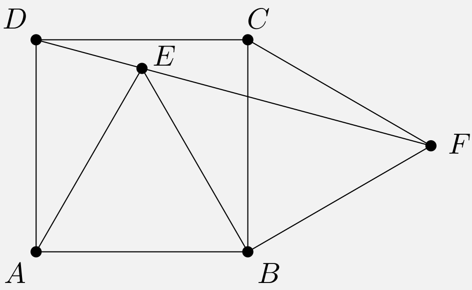


Problema 73 — Olimpíada de Matemática do Perú. No interior do quadrado $ABCD$ são escolhidos dois pontos E e F de modo que $AE = FC = 7$, $EF = 2$ e $\angle AEF = \angle EFC = 90^\circ$.

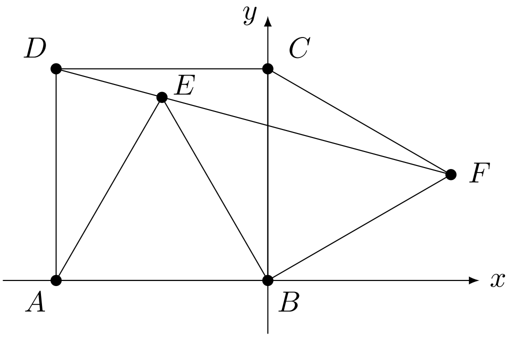
(a) Mostre que $AECF$ é um paralelogramo.
(b) Calcule a área do quadrado $ABCD$.



Problema 74 Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e os triângulos ABE e BFC são equiláteros. Prove que os pontos D, E e F se localizam sobre uma mesma reta.



Solução. Construa um sistema cartesiano com origem no ponto B, de modo que o ponto A tenha coordenadas $(-1{,}0)$, conforme a seguinte figura.



Como $ABCD$ é um quadrado, podemos encontrar as coordenadas do ponto $C = (0{,}1)$ e $D = (-1{,}1)$. Para determinar as coordenadas dos pontos E e F, precisamos utilizar o fato de que a altura de um triângulo equilátero, de lado ℓ, é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Este fato pode ser demonstrado utilizando o Teorema de Pitágoras. Assim, é possível calcular as coordenadas dos pontos E e F obtendo

$$E = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } F = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Para demonstrarmos que os pontos $D{,}E{,}F$ são colineares, basta verificarmos se vale a igualdade

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)}{\frac{1}{2} - 1}.$$

Como

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)}{\frac{1}{2}-1} \iff \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+2}{-1}$$

e, multiplicando em cruz, temos a igualdade

$$-\sqrt{3}-1=\sqrt{3}+2-3-2\sqrt{3},$$

verifica-se que a igualdade primeira é verdadeira.

■

Problema 75 Seja ABC um triângulo qualquer e P um ponto no plano que minimiza a soma

$$PA^2+PB^2+PC^2.$$

Prove que P é o ponto de encontro das medianas de ABC.