MATERIAL ESTRUTURADO

MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2022

5

Funções Afins e Sistemas Lineares

Equações Lineares
Introdução ao Estudo de Funções
Funções Afins

Autores

Bruno Holanda

Fernando A. A. Pimentel

Jorge H. S. Lira

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO
SISEDU
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED
CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
CEARÁ EDUCA
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

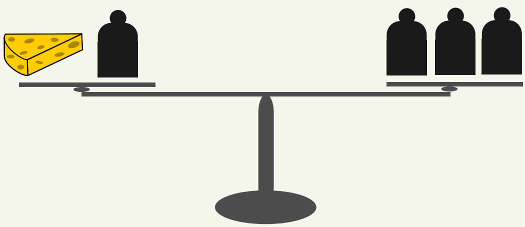
Sumário

1 Equações e Funções de Grau 1

1.1 – Balanças & Equações

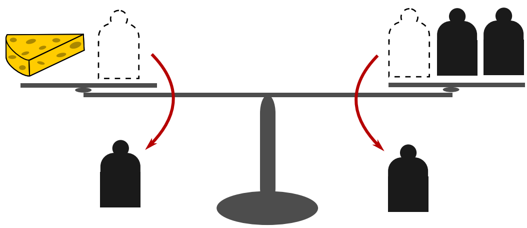
Nesta seção, vamos resolver equações do tipo $ax + b = cx + d$.

Exercício 1.1 Jorge foi à feira comprar queijo. Chegando à barraca de laticínios, escolheu um pedaço de queijo e pediu ao dono da barraca para pesá-lo. O feirante utilizou uma balança de dois pratos e quatro pesos, de 500 gramas cada, obtendo a situação de equilíbrio ilustrada na figura a seguir.



Pergunta-se: qual era o peso do queijo? Como descobrir esse valor manipulando os pesos que estão sobre a balança?

Solução. Veja que, como todos os pesos são iguais, se tirarmos um peso de cada lado, a balança continuará em equilíbrio:



Desse modo, percebemos que o peso do queijo equivale a dois pesos de 500 gramas cada, ou seja, é igual a $2 \cdot 500 = 1000$ gramas. ■

Interpretando *algebricamente* a solução anterior, denotemos por x o peso do queijo. A situação de equilíbro original da balança, isto é, antes de retirarmos os dois pesos de 500 gramas, é traduzida pela igualdade

$$x + 500 = 500 + 500 + 500.$$

Repetindo na equação o procedimento de retirar um peso de 500 gramas de cada lado da balança, obtemos

$$x + \cancel{500} - \cancel{500} = 500 + 500 + \cancel{500} - \cancel{500},$$

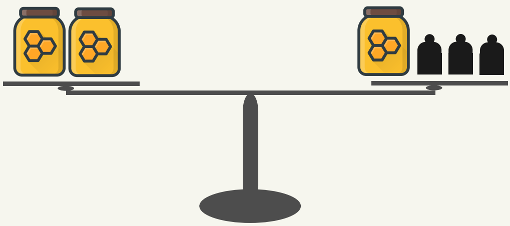
ou seja,

$$x = 500 + 500 = 1000.$$

Assim, concluímos que o queijo pesa $x = 1000$ gramas.

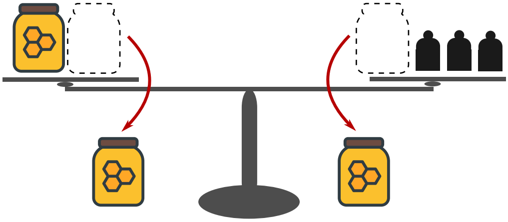
Vejamos outro exemplo:

Exercício 1.2 Mariana armazena o mel que produz em potes de vidro idênticos e os comercializa em uma feira. Utilizando uma balança de dois pratos e três pesos de 250 gramas cada, ela chegou, depois de algumas tentativas, à situação de equilíbrio ilustrada na figura abaixo.



Qual é o peso de um único pote de mel?

Solução. Adotaremos um procedimento semelhante ao empregado na solução do exemplo anterior: se retirarmos um pote de cada lado, a balança continuará em equilíbrio.



Desse modo, percebemos que o peso de um pote corresponde a três pesos de 250 gramas cada, ou seja, este peso é igual a $3 \cdot 250 = 750$ gramas. ■

Utilizando agora a letra x para representar o peso de um pote de mel, a primeira situação de equilíbro apresentada pode ser escrita algebricamente como

$$x + x = x + 250 + 250 + 250.$$

A retirada de um um pote de mel de cada lado da balança é representada pela subtração de x em ambos os lados da equação acima. Assim fazendo, obtemos

$$x + \cancel{x} - \cancel{x} = \cancel{x} + 250 + 250 + 250 - \cancel{x},$$

isto é,

$$x = 250 + 250 + 250 = 750.$$

Concluímos, portanto, que o peso de um único pote de mel é igual a 750 gramas.

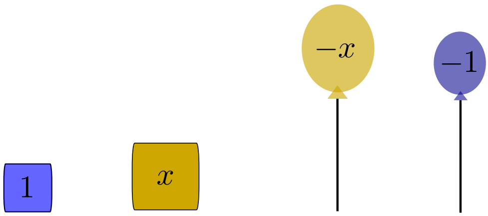
Observação 1.1 Como sugerido nos exemplos acima, podemos pensar em uma equação como uma balança de dois pratos em equilíbrio, em que os pratos da balança representam os dois *membros*, isto é, os dois lados da equação. Desse modo, assim como ocorre na balança, devemos realizar sempre a mesma operação em cada um dos membros da equação para manter a igualdade.

A seguir, apresentaremos mais alguns exemplos de problemas com balanças, os quais envolvem números negativos. Para isso, utilizaremos os seguintes quatro objetos.

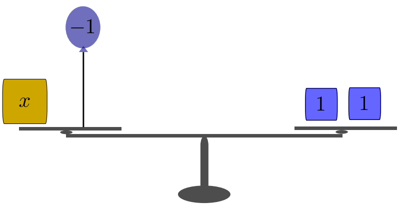
- Um bloco azul, representando um peso conhecido de 1 unidade.

- Um bloco amarelo, representado um peso desconhecido de x unidades.
- Um balão azul, representando um peso conhecido de -1 unidade.
- Um balão amarelo, representado um peso desconhecido de $-x$ unidades.

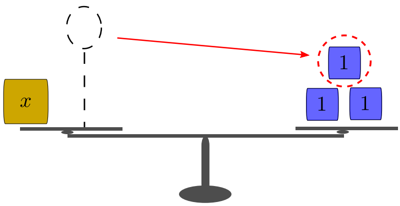
Tais objetos são ilustrados na figura abaixo.



Os balões têm a função de "levantar" o prato da balança, exercendo uma força equivalente a de um peso de mesma cor colocado no outro prato da balança. Assim, a situação de equilíbrio representada na figura 1.1(a) é equivalente à situação representada na figura 1.1(b).



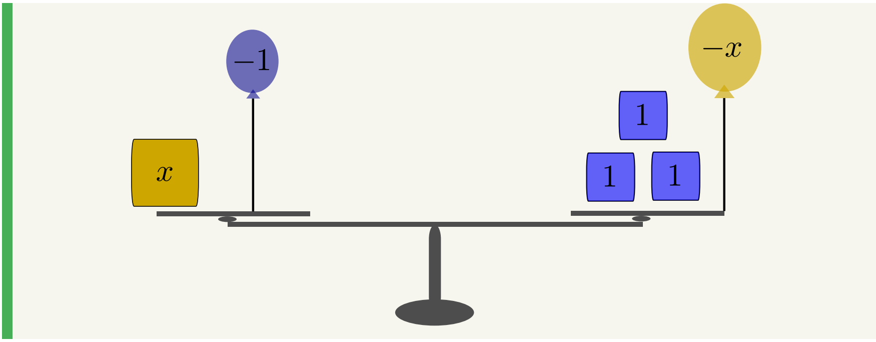
(a) primeira situação.



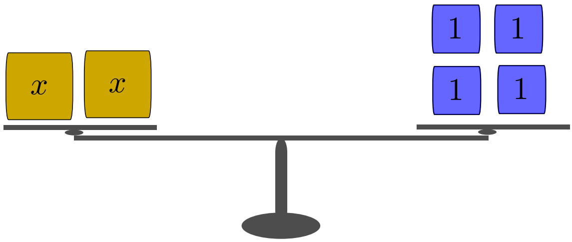
(b) segunda situação.

Figura 1.1: um balão azul no lado esquerdo pode ser substituído por um bloco azul do lado direito. Em termos algébricos, temos duas equações: a primeira é $x - 1 = 2$ e a segunda é $x = 2 + 1$.

Exercício 1.3 Considere a balança (equilibrada) abaixo. Descubra o valor de x, primeiro manipulando os pesos e balões sobre a balança e depois resolvendo a equação que representa o equilíbrio da balança.



Solução. Podemos substituir o balão azul do lado esquerdo por um peso azul do lado direito e o balão amarelo do lado direito por um peso amarelo do lado esquerdo. Desse modo, obtemos a situação da figura que segue.



Assim, dois pesos amarelos correspondem a quatro pesos azuis, ou seja, um peso amarelo correspode a dois pesos azuis. Logo, concluímos que $x = 2$.

Algebricamente, temos

$$\begin{aligned} x - 1 = 3 - x &\iff x - \cancel{1} + \cancel{1} = 3 - x + 1 \\ &\iff x = 4 - x \\ &\iff x + x = 4 - \cancel{x} + \cancel{x} \\ &\iff 2x = 4 \\ &\iff \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 4 \\ &\iff \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^2 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

■

Observação 1.2 Note que a balança continua em equilíbrio se invertermos as posições dos objetos que estão nos dois pratos, ou seja, se passarmos tudo que está no prato da esquerda para o prato da direita e tudo que está no prato da direita para o prato da esquerda. Em uma equação, isso equivale a reescrever no lado esquerdo da igualdade o que originalmente estava do lado direito, e (vice-versa) reescrever no lado direito da igualdade o que originalmente estava do lado esquerdo. Por exemplo, resolver a equação

$$4x - 7 = 2x + 9$$

é o mesmo que resolver a equação

$$2x + 9 = 4x - 7.$$

Perceba, ainda, que podemos dobrar, triplicar, quadriplicar, reduzir à metade ou a um terço, etc., o que está nos dois pratos, e o equilíbrio também vai permanecer. A única restrição é que *a operação feita em um dos pratos também deve ser feita no outro*. Em termos algébricos, isso corresponde à possibilidade de multiplicar os dois lados de uma equação por um número qualquer.

Finalmente, note que as *incógnitas*, apesar de desconhecidas, são números. Então, ao resolvermos equações, podemos utilizar livremente as propriedades aritméticas dos números.

No próximo exercício, usamos as estratégias aprendidas com as balanças para melhorar sua habilidade em resolver equações. Isso tornará mais fácil darmos o passo seguinte, que será resolver problemas traduzindo-os em equações.

Exercício 1.4 Resolva as equações abaixo.

(a) $x + 7 = 18.$

(b) $x - 8 = 7 - 2x.$

(c) $5(x + 2) = 25.$

(d) $\frac{x}{2} = 13.$

(e) $2(x-1)+5 = x+9.$

(f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 18.$

(g) $\frac{x}{3} + 5(x-1) = 3.$

(h) $\frac{x-3}{4} + \frac{x-2}{6} = \frac{11}{6}.$

Solução.

(a)

$$\begin{aligned} x+7=18 &\iff x+7-7=18-7 \\ &\iff x=11. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x-8=7-2x &\iff x-8+8=7-2x+8 \\ &\iff x=15-2x \\ &\iff x+2x=15-2x+2x \\ &\iff 3x=15 \\ &\iff \frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 15 \\ &\iff \frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3}x=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{15}^{\,5} \\ &\iff x=5. \end{aligned}$$

(c) Aqui, há duas maneiras para resolver o problema:

$$\begin{aligned} 5(x+2)=25 &\iff \frac{1}{5}\cdot 5(x+2)=\frac{1}{5}\cdot 25 \\ &\iff \frac{1}{\cancel{5}}\cdot \cancel{5}(x+2)=\frac{1}{\cancel{5}}\cdot \cancel{25}^{\,5} \\ &\iff x+2=5 \\ &\iff x+2-2=5-2 \\ &\iff x=3 \end{aligned}$$

ou, então,

$$
\begin{aligned}
5(x+2)=25 &\iff 5x+10=25\\
&\iff 5x+10-10=25-10\\
&\iff 5x=15\\
&\iff \frac{1}{5}\cdot 5x=\frac{1}{5}\cdot 15\\
&\iff \frac{1}{\cancel{5}}\cdot \cancel{5}x=\frac{1}{\cancel{5}}\cdot \cancel{15}^{\,3}\\
&\iff x=3.
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2}=13 &\iff 2\cdot\frac{x}{2}=2\cdot 13\\
&\iff \cancel{2}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}=2\cdot 13\\
&\iff x=26.
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
2(x-1)+5=x+9 &\iff 2x-2+5=x+9\\
&\iff 2x+3=x+9\\
&\iff 2x+3-3=x+9-3\\
&\iff 2x=x+6\\
&\iff 2x-x=x+6-x\\
&\iff x=6.
\end{aligned}
$$

(f) Neste item, novamente temos duas maneiras de resolver a equação. A primeira delas é começar multiplicando ambos os lados da equação por um número que nos livre, ao mesmo tempo, dos denominadores 2 e 7. Para isso, vamos multiplicar os dois lados por um número que seja, ao mesmo tempo, múltiplo de 2 e de 7, digamos, 14:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2}+\frac{x}{7}=18 &\iff 14\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{7}\right)=14\cdot 18\\
&\iff 14\cdot\frac{x}{2}+14\cdot\frac{x}{7}=252\\
&\iff \cancel{14}^{\,7}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}+\cancel{14}^{\,2}\cdot\frac{x}{\cancel{7}}=252\\
&\iff 7x+2x=252\\
&\iff 9x=252\\
&\iff \frac{1}{9}\cdot 9x=\frac{1}{9}\cdot 252\\
&\iff \frac{1}{\cancel{9}}\cdot \cancel{9}x=\frac{1}{\cancel{9}}\cdot \cancel{252}^{\,28}\\
&\iff x=28.
\end{aligned}
$$

Outra possibilidade é lembrar que, pelo fato de x ser um número, podemos começar fazendo a soma do lado esquerdo da equação. Observe que, da primeira para a segunda linha nos cálculos a seguir, usaremos o fato de que $7x+2x$ é o mesmo que $9x$: lembrando das balanças, basta ver $7x+2x$ como a soma de "7 blocos x" com "2 blocos x". Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2}+\frac{x}{7}=18 &\iff \frac{7x+2x}{2\cdot 7}=18\\
&\iff \frac{9x}{14}=18\\
&\iff \frac{14}{9}\cdot\frac{9x}{14}=\frac{14}{9}\cdot 18\\
&\iff \frac{\cancel{14}}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{9}x}{\cancel{14}}=\frac{14}{\cancel{9}}\cdot\cancel{18}^{\,2}\\
&\iff x=14\cdot 2\\
&\iff x=28.
\end{aligned}
$$

(g) Uma vez mais, temos duas opções. A primeira é começar multiplicando tudo por 3, a fim de nos livrarmos do denominador 3 da fração:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{3} + 5(x-1) = 3 &\iff 3\cdot\left(\frac{x}{3} + 5(x-1)\right) = 3\cdot 3 \\
&\iff 3\cdot\frac{x}{3} + 3\cdot 5(x-1) = 9 \\
&\iff \cancel{3}\cdot\frac{x}{\cancel{3}} + 15(x-1) = 9 \\
&\iff x + 15x - 15 = 9 \\
&\iff 16x - 15 = 9 \\
&\iff 16x - 15 + 15 = 9 + 15 \\
&\iff 16x = 24 \\
&\iff \frac{1}{16}\cdot 16x = \frac{1}{16}\cdot 24 \\
&\iff \frac{1}{\cancel{16}}\cdot\cancel{16}x = \frac{\cancel{24}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,2}} \\
&\iff x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Outra possibilidade é começar "ajeitando" o lado esquerdo. Aqui, da segunda para a terceira linha, usaremos o fato de que $3\cdot 5x = 15x$, pois $3\cdot 5x$ é 3 vezes "5 blocos x", logo "15 blocos x". Além disso, $x + 15x = 16x$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{3} + 5(x-1) = 3 &\iff \frac{x}{3} + 5x - 5 = 3 \\
&\iff \frac{x + 3\cdot 5x}{3} - 5 + 5 = 3 + 5 \\
&\iff \frac{x + 15x}{3} = 8 \\
&\iff \frac{16x}{3} = 8 \\
&\iff \frac{3}{16}\cdot\frac{16x}{3} = \frac{3}{16}\cdot 8 \\
&\iff \frac{\cancel{3}}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}x}{\cancel{3}} = \frac{3}{\cancel{16}_{\,2}}\cdot\cancel{8} \\
&\iff x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

(h) Este item traz mais uma equação que pode ser resolvida de duas maneiras distintas. Uma delas é começar multiplicando os dois lados por um número que seja, ao mesmo tempo, múltiplo de 4 e 6, a fim de eliminar os denominadores das frações. Esse número pode ser por exemplo 12, que é o mmc de 4 e 6, ou, se você não perceber isso, 24, o produto do denominadores 4 e 6. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{x-3}{4}+\frac{x-2}{6}=\frac{11}{6} &\iff 24\cdot\left(\frac{x-3}{4}+\frac{x-2}{6}\right)=24\cdot\frac{11}{6}\\
&\iff 24\cdot\frac{x-3}{4}+24\cdot\frac{x-2}{6}=24\cdot\frac{11}{6}\\
&\iff \cancel{24}^{6}\cdot\frac{x-3}{\cancel{4}}+\cancel{24}^{4}\cdot\frac{x-2}{\cancel{6}}=\cancel{24}^{4}\cdot\frac{11}{\cancel{6}}\\
&\iff 6(x-3)+4(x-2)=4\cdot 11\\
&\iff 6x-18+4x-8=44\\
&\iff 10x-26=44\\
&\iff 10x-26+26=44+26\\
&\iff 10x=70\\
&\iff \frac{1}{10}\cdot 10x=\frac{1}{10}\cdot 70\\
&\iff \frac{1}{\cancel{10}}\cdot\cancel{10}x=\frac{1}{\cancel{10}}\cdot\cancel{70}\\
&\iff x=7.
\end{aligned}
$$

A outra solução se parece com as segundas soluções dos itens anteriores, pois começa somando as frações do lado esquerdo:

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{4}+\frac{x-2}{6}=\frac{11}{6} &\iff \frac{6(x-3)+4(x-2)}{4\cdot 6}=\frac{11}{6}\\
&\iff \frac{6x-18+4x-8}{24}=\frac{11}{6}\\
&\iff \frac{10x-26}{24}=\frac{11}{6}\\
&\iff 24\cdot\frac{10x-26}{24}=24\cdot\frac{11}{6}\\
&\iff \cancel{24}\cdot\frac{10x-26}{\cancel{24}}=\cancel{24}^{\,4}\cdot\frac{11}{\cancel{6}}\\
&\iff 10x-26=4\cdot 11\\
&\iff 10x-26=44.
\end{aligned}$$

A partir daí, procedemos como na solução anterior.

■

Exercício 1.5 Resolva as seguintes equações.

(a) $3(x-4)+16=x+29.$

(b) $\dfrac{5x-7}{9}=\dfrac{x+4}{5}.$

Solução.
(a)

$$\begin{aligned}
3(x-4)+16=x+29 &\iff 3x-12+16=x+29\\
&\iff 3x+4=x+29\\
&\iff 3x-x=29-4\\
&\iff 2x=25\\
&\iff x=\frac{25}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Note primeiro que

$$\frac{5x-7}{9}=\frac{1}{9}(5x-7) \quad \text{e} \quad \frac{x+4}{5}=\frac{1}{5}(x+4).$$

Então, começando por aplicar a segunda estratégia de simplificação aos dois lados, temos

$$\begin{aligned}\frac{5x-7}{9}=\frac{x+4}{5} &\Longleftrightarrow \frac{1}{9}(5x-7)=\frac{1}{5}(x+4)\\ &\Longleftrightarrow 5(5x-7)=9(x+4)\\ &\Longleftrightarrow 25x-35=9x+36\\ &\Longleftrightarrow 25x-9x=36+35\\ &\Longleftrightarrow 16x=71\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{71}{16}.\end{aligned}$$

■

Uma solução alternativa do item (b) do exercício anterior, até mais simples que a apresentada, faz uso das propriedades das frações. Por exemplo, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20}$ são *equivalentes* porque podemos passar de $\frac{3}{4}$ para $\frac{15}{20}$ multiplicando numerador e denominador da primeira fração por 5:

$$\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{15}{20}.$$

Uma maneira mais rápida de verificar que essas frações são equivalentes é mostrar que $3\cdot 20=4\cdot 15$:

$$\frac{3}{4}=\frac{15}{20},\quad \text{pois}\quad 3\cdot 20=4\cdot 15.$$

Em palavras, dizemos que $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$ porque o produto dos *meios*, isto é, dos números 4 e 15, é igual ao produto dos *extremos*, que são os números 3 e 20. Em geral, temos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc. \tag{1.1}$$

Exercício 1.6 Use as observações acima para resolver as seguintes três equações.

(a) $\dfrac{5x-7}{9} = \dfrac{x+5}{5}$.

(b) $\dfrac{9}{5x-7} = \dfrac{2}{x-1}$.

(c) $\dfrac{x+6}{x+2} = \dfrac{3}{2}$.

Solução.

(a) De acordo com (1.1), temos

$$\begin{aligned}\frac{5x-7}{9} = \frac{x+5}{5} &\iff (5x-7)\cdot 5 = 9(x+5)\\ &\iff 25x - 35 = 9x + 45\\ &\iff 25x - 9x = 35 + 45\\ &\iff 16x = 80\\ &\iff x = \frac{80}{16}\\ &\iff x = 5.\end{aligned}$$

(b) Observe que, apesar da incógnita aparecer nos denominadores, isso não é empecilho:

$$\begin{aligned}\frac{9}{5x-7} = \frac{2}{x-1} &\iff 9(x-1) = (5x-7)\cdot 2\\ &\iff 9x - 9 = 10x - 14\\ &\iff 9x - 10x = 9 - 14\\ &\iff -x = -5\\ &\iff x = 5.\end{aligned}$$

(c) Fazendo como em (b), temos

$$\begin{aligned}\frac{x+6}{x+2} = \frac{3}{2} &\iff (x+6)\cdot 2 = (x+2)\cdot 3\\ &\iff 2x + 12 = 3x + 6\\ &\iff 2x - 3x = 6 - 12\\ &\iff -x = -6\\ &\iff x = 6.\end{aligned}$$

∎

Para Aprender Mais

Resolvendo equações de Grau 1

Forma tradicional[1]

Usando Barras[2]

1.2 – Resolvendo Problemas com Equações

A seguir, discutiremos como resolver "*problemas com palavras*", isto é, situações-problema nas quais uma parte relevante das informações vem escrita em texto. Abaixo descrevemos a *estratégia geral* para resolver esse tipo de problema.

1. Leia o enunciado cuidadosamente, destacando todas as informações relevantes.
2. Se o problema tiver muitas informações, tente organizá-las em uma tabela.
3. Represente os valores desconhecidos por letras.
4. Escreva as informações dadas no problema em forma de equações.
5. Resolva as equações, encontrando os valores desconhecidos.
6. Verifique se os valores encontrados realmente satisfazem as condições do enunciado. Isso é útil para checar que você não errou algum cálculo.

Exercício 1.7 No sítio do tio Barnabé há um total de 40 animais, divididos entre cabras e galinhas. Certo dia, tio Barnabé contou o número de patas que esses animais possuem, chegando a um total de 130. Quantas galinhas há no sítio?

Solução. Em primeiro lugar, vamos destacar todas as informações importantes do enunciado.

"No sítio do tio Barnabé há um *total de* 40 *animais*, divididos entre cabras e galinhas. Certo dia, tio Barnabé contou o número de patas que esses animais possuem, chegando a um *total de* 130. Pergunta → **Quantas galinhas há no sítio?**"

O próximo passo é criar uma tabela para organizar as informações. Separe uma coluna para os valores conhecidos, outra para os valores desconhecidos e uma terceira para o valor procurado.

Valores Conhecidos	Valores Desconhecidos	Pergunta
• Total de animais (40) • Total de patas (130)	• Quantidade de galinhas • Quantidade de cabras	• Quantidade de Galinhas

Denotando por x a quantidade de galinhas, temos que a quantidade de cabras será igual a $40 - x$. Neste ponto, devemos formular uma equação a partir das informações colhidas, e ela aparece ao notarmos que a quantidade de patas pode ser escrita em termos dos números de galinhas e de cabras. De fato, cada galinha tem duas patas e cada cabra tem quatro patas, logo, o total de patas de galinhas é $2x$ e o total de patas das cabras é $4(40 - x)$. Agora, uma vez que o número total de patas é 130, chegamos à equação

$$2x + 4(40 - x) = 130.$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$\begin{aligned} 2x + 4(40 - x) = 130 &\iff 2x + 4 \cdot 40 - 4x = 130 \\ &\iff 160 - 2x = 130 \\ &\iff \underbrace{160 - 130}_{30} = 2x \\ &\iff 2x = 30 \\ &\iff x = \frac{30}{2} \\ &\iff x = 15. \end{aligned}$$

Portanto, há 15 galinhas e $40 - 15 = 25$ cabras no sítio.

Para finalizar, vamos verificar se a resposta encontrada está de acordo com o enunciado do problema. Observe que as 15 galinhas possuem juntas $2 \cdot 15 = 30$ patas e que as 35 cabras possuem juntas $4 \cdot 25 = 100$ patas, ou seja, temos um total de $100 + 30 = 130$ patas. Portanto, encontramos o valor correto de x. ■

Exercício 1.8 Camila tem 30 moedas de 25 centavos e 10 centavos. Sabe-se que a quantidade de moedas de 25 centavos é igual ao dobro da quantidade de moedas de 10 centavos. Qual é o total de dinheiro que Camila tem?

Solução. Vamos destacar todas as informações importantes.

> "Camila tem *30 moedas*. Ela possui somente moedas de *25 centavos e 10 centavos*. Sabe-se que *a quantidade de moedas de 25 centavos* **é igual ao** *dobro da quantidade de moedas de 10 centavos*.
> Pergunta → **Quanto de dinheiro tem Camila?**"

O próximo passo é criar uma tabela para organizar as informações.

A seguir, vamos representar os valores desconhecidos por letras. Uma primeira tentativa seria denominar o *total de dinheiro* por x e achar uma equação utilizando essa incógnita. Essa é uma tentativa natural, já que o total de dinheiro é o valor que desejamos descobrir. Entretanto, percebemos que assim fica difícil formular uma equação

Valores Conhecidos	Valores Desconhecidos	Pergunta
• Total de moedas (30)	• Quantidade de moedas de 10 centavos • Quantidade de moedas de 25 centavos • Total de dinheiro	• Total de dinheiro

a partir do texto. Uma segunda tentativa é denotar a quantidade de moedas de 10 centavos por x. Deste modo, a quantidade de moedas de 25 centavos será igual a $2x$, pois, de acordo com o enunciado, essa quantidade é o dobro da quantidade de moedas de 10 centavos.

Agora, devemos formular uma equação a partir das informações fornecidas. Visto que a quantidade total de moedas é igual à soma da quantidade de moedas de 10 centavos com as moedas de 25 centavos, obtemos a equação a seguir.

$$x + 2x = 30.$$

Podemos resolver essa equação facilmente:

$$x + 2x = 30 \Longrightarrow 3x = 30 \Longrightarrow x = \frac{30}{3} \Longrightarrow x = 10.$$

Portanto, Camila posssui 10 moedas de 10 centavos e $2 \cdot 10 = 20$ moedas de 25 centavos.

Veja que descobrir o valor de x não finaliza a solução do exercício, pois em seu enunciado se pergunta a quantia total de dinheiro que Camila possui em seu bolso. Para obter este resultado, basta resolver a expressão numérica

$$10 \cdot 0{,}10 + 20 \cdot 0{,}25 = 1 + 5 = 6.$$

Assim, Camila possui 6 reais. ■

Exercício 1.9 Pedro possui um total de 24 notas, que somam 81 reais. Sabendo que Pedro possui apenas notas de dois e de cinco reais, quantas notas de cada valor ele possui?

Solução. Denotemos por x a quantidade de notas de cinco reais. Como Pedro possui 24 notas ao todo e x dessas notas são de cinco reais, ele possui $24 - x$ notas de dois reais. Uma vez que Pedro possui 81 reais, obtemos a equação

$$5x + 2(24 - x) = 81,$$

pois as x notas de cinco reais correspondem a um total de $5x$ reais e as $24 - x$ notas de dois reais correspondem a um total de $2(24 - x)$ reais. Resolvamos a equação acima:

$$\begin{aligned} 5x + 2(24 - x) = 81 &\Longrightarrow 5x + 48 - 2x = 81 \\ &\Longrightarrow 3x = 81 - 48 \\ &\Longrightarrow 3x = 33 \\ &\Longrightarrow x = \frac{33}{3} \\ &\Longrightarrow x = 11. \end{aligned}$$

Portanto, Pedro possui 11 notas de cinco reais e $24 - 11 = 13$ notas de dois reais. ■

Vejamos mais alguns exemplos.

Exercício 1.10 — OBM. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, uma das irmãs de Samuel, possui número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

Solução. Denotemos por x o número de irmãs de Samuel. Assim, Samuel possui $x + 3$ irmãos, pois ele possui três irmãos a mais do que irmãs. Por outro lado, Samila possui $(x + 3) + 1 = x + 4$ irmãos, pois Samuel entra na conta dos irmãos de Samila, e $x - 1$ irmãs, pois, aqui, temos de retirar a própria Samila.

Como Samila possui número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs, obtemos a equação

$$x + 4 = 2(x - 1).$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$\begin{aligned} x+4=2(x-1) &\iff x+4=2x-2 \\ &\iff \underbrace{4+2}_{6}=\underbrace{2x-x}_{x} \\ &\iff x=6. \end{aligned}$$

Portanto, Samuel tem 6 irmãs e $6+3=9$ irmãos. Logo, o pai de Samuel possui $9+1=10$ filhos homens, contando com Samuel, e 6 filhas mulheres, ou seja, $10+6=16$ filhos ao todo. ■

Exercício 1.11 — OBM. No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

Solução. Suponha que em 1994 Neto tinha x anos. Como Neto tinha a metade da idade do seu avô, este tinha $2x$ anos em 1994. Desse modo, Neto nasceu no ano $1994-x$ e seu avô nasceu em $1994-2x$. Visto que a soma das idades dos dois é 3844, obtemos a equação

$$(1994-x)+(1994-2x)=3844.$$

Resolvemos, então, essa equação:

$$\begin{aligned} 1994-x+1994-2x=3844 &\iff 3988-3x=3844 \\ &\iff \underbrace{3988-3844}_{144}=3x \\ &\iff 3x=144 \\ &\iff x=\frac{144}{3} \\ &\iff x=48. \end{aligned}$$

Assim, Neto tinha 48 anos em 1994, o que garante que, em 2006, exatamente 12 anos depois, Neto completou $48+12=60$ anos. ■

Alguns problemas do ENEM

Nesta seção, vamos resolver alguns "*problemas com palavras*" que foram propostos ao ENEM.

Exercício 1.12 — ENEM - 2009. Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem ainda não havia contribuído pagaria sua parte e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final, para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00.
b) R$ 17,00.
c) R$ 22,00.
d) R$ 32,00.
e) R$ 57,00.

Solução. Denotemos por x o valor da cota para cada uma das 55 pessoas, concluímos que o valor total da despesa é $55x$, pois cada uma das 55 pessoas pagou x reais. Por outro lado, no acerto inicial, cada uma das 50 pessoas pagaria $x - 7$ reais e ficariam faltando 510 reais para completar o valor total da despesa. Assim, o valor total da despesa também é igual a $50(x - 7) + 510$. Portanto, chegamos à equação

$$55x = 50(x - 7) + 510.$$

Para resolvê-la, temos

$$\begin{aligned} 55x = 50(x-7) + 510 &\Longrightarrow 55x = 50x - 350 + 510 \\ &\Longrightarrow 55x - 50x = 160 \\ &\Longrightarrow 5x = 160 \\ &\Longrightarrow x = \frac{160}{5} \\ &\Longrightarrow x = 32. \end{aligned}$$

Assim, o valor da cota para cada uma das 55 pessoas, depois do acerto final, foi de 32 reais, e a alternativa correta é a do item **(d)**. ■

Exercício 1.13 — ENEM - 2010. O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, depois uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada, ele cairá com o outro pé, a partir do qual o salto é realizado[a]. Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, da primeira para a segunda parte do salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, da segunda para a terceira parte do salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

(a) 4,0 m e 5,0 m.
(b) 5,0 m e 6,0 m.
(c) 6,0 m e 7,0 m.
(d) 7,0 m e 8,0 m.
(e) 8,0 m e 9,0 m.

[a]Disponível em: `www.cbat.org.br` (adaptado).

Solução. Denotemos por s a distância alcancada no primeiro salto. Uma vez que, no segundo salto, o alcance diminuía 1,2 m em relação ao primeiro salto, a distância alcançada no segundo salto foi $s - 1{,}2$. Já a distância alcançada no terceiro salto diminuía 1,5 m em relação ao segundo, logo, essa distância era igual a $s - 1{,}2 - 1{,}5$, isto é, a $s - 2{,}7$. Como a soma dessas três distâncias deve atingir a meta de 17,4 m, podemos montar a equação:

$$s + (s - 1{,}2) + (s - 2{,}7) = 17{,}4.$$

Vamos resolvê-la:

$$\begin{aligned} s + (s - 1{,}2) + (s - 2{,}7) = 17{,}4 &\Longrightarrow 3s = 17{,}4 + 1{,}2 + 2{,}7 \\ &\Longrightarrow 3s = 21{,}3 \\ &\Longrightarrow s = \frac{\cancel{21{,}3}^{\,7,1}}{\cancel{3}} \\ &\Longrightarrow s = 7{,}1. \end{aligned}$$

Logo, para que o atleta atinja a meta de 17,4 metros no salto triplo, a distância alcançada no primeiro salto deve estar entre 7,0 m e 8,0 m. Portanto, a alternativa correta é a do item **(d)**. ■

Exercício 1.14 — ENEM - 2015. Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00. Quantas vezes vezes ele acertou o alvo?

(a) 30.
(b) 36.
(c) 50.
(d) 60.
(e) 64.

Solução. Vamos denotar por x o número de vezes que o participante acertou o alvo. Como foram 80 tiros ao todo, ele errou o alvo $80 - x$ vezes. Como ele recebe 20 reais por cada tiro certo e perde 10 reais por cada tiro errado, após esses 80 tiros ele ganhou é $20x$ e perdeu é $10(80 - x)$. Para calcularmos o total recebido depois dos oitenta tiros, temos de subtrair o total que ele perdeu, com os tiros errados, do total que ele recebeu, com os tiros certos. Essas informações nos permitem montar a equação

$$20x - 10(80 - x) = 100.$$

Ao resolvê-la, obtemos

$$\begin{aligned} 20x - 10(80 - x) = 100 &\iff 20x - 800 + 10x = 100 \\ &\iff 30x = 100 + 800 \\ &\iff 30x = 900 \\ &\iff x = \frac{\cancel{900}^{\,30}}{\cancel{30}} \\ &\iff x = 30. \end{aligned}$$

Portanto, o participante acertou 30 tiros. A alternativa correta é a do item **(a)**. ■

Exercício 1.15 — ENEM - 2014. Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão

$$\text{Valor do kWh (com tributos)} \times \text{consumo (em kWh)} + \text{Cosip}.$$

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	**Valor da Cosip (R$)**
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica, com o objetivo de reduzir o custo total da conta, em pelo menos 10%. Qual deve ser o consumo máximo dessa residência, em kWh, para produzir a redução pretendida pelo morador?

(a) 134,1.
(b) 135,0.
(c) 137,1.
(d) 138,6.
(e) 143,1.

Solução. A conta de luz com um consumo de 150 kWh custa

$$150 \cdot 0{,}50 + 4{,}50 = 79{,}50 \text{ reais.}$$

Uma vez que se deseja reduzir o valor da conta em *pelo menos* 10%, o maior consumo possível para produzir a redução desejada na conta ocorrerá quando a redução do consumo for de exatamente 10%. Assim, para esse consumo máximo, que é o que desejamos calcular, o valor da conta deve ser de 90% do valor atual, ou seja, deve ser

$$\frac{90}{100} \cdot 79{,}50 = 71{,}55.$$

Há, agora, dois casos a considerar.

i. O novo consumo máximo ainda está acima de 140 kWh. Nesse caso, a Cosip será de 4,5 reais e, portanto, o valor da conta será de pelo menos

$$140 \cdot 0{,}5 + 4{,}5 = 74{,}5.$$

Como sabemos que o valor da conta deve ser de no máximo $= 71{,}55$, concluímos que esse caso não ocorre.

ii. O novo consumo máximo é de até 140 kWh. Nesse caso, a Cosip será de 3 reais e, deste modo, sendo x o total de kWh consumidos, temos a equação

$$x \cdot 0{,}50 + 3 = 71{,}55.$$

Agora,

$$\begin{aligned} x\cdot 0{,}50+3=71{,}55 &\iff 0{,}50x = 71{,}55-3\\ &\iff 0{,}50x = 68{,}55\\ &\iff x=\frac{68{,}55}{0{,}50}\\ &\iff x = 137{,}1. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a do item **(c)**. ■

Obs

Veja que, na solução da equação anterior, usamos (**??**) com a e b escritos como decimais. Você pode fazer isso sem medo, mas, para convencê-lo disso, vamos refazer esse cálculo, partindo de $0{,}50x = 68{,}55$ e evitando a divisão de decimais:

$$\begin{aligned} 0{,}50x = 68{,}55 &\iff \frac{50}{100}\cdot x = \frac{6855}{100}\\ &\iff x = \frac{100}{50}\cdot\frac{6855}{100}\\ &\iff x=\frac{\cancel{100}}{50}\cdot\frac{6855}{\cancel{100}}\\ &\iff x=\frac{6855}{50}\\ &\iff x=\frac{68{,}55}{0{,}50}. \end{aligned}$$

Exercício 1.16 — ENEM - 2017. Uma escola organizou uma corrida de revezamento 4×400 metros, que consiste em uma prova esportiva disputada por equipes de 4 atletas cada, da seguinte forma: em cada equipe, cada um dos três primeiros atletas corre 400 metros segurando um bastão; ao final desse percurso, ele passa o bastão para o próximo atleta da equipe, e assim por diante; por fim, o quarto e último atleta da equipe corre seus 400 metros também segurando o bastão, até cruzar a linha de chegada. Sabe-se que a equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos, e que o segundo corredor dessa equipe fez seus 400 metros 15 segundos mais rapidamente que o primeiro; já o terceiro corredor realizou seus 400 metros 5 segundos mais rapidamente que o segundo corredor, enquanto o último fez seu percurso em 3/4 do tempo realizado pelo primeiro. Qual foi o tempo, em segundos, que o último atleta da equipe gastou para realizar seu percurso de 400 metros?

(a) 58.
(b) 61.
(c) 69.
(d) 72.
(e) 96.

Solução. Chamemos de t o tempo em que o primeiro atleta realizou o seu percurso. Como o segundo gastou 15 a menos, ele gastou $t - 15$. Já o terceiro, que foi 5 segundos mais rápido que o segundo, realizou seu percurso em $t-15-5$, isto é, em $t-20$ segundos. Finalmente, o último corredor realizou o seu percurso em 3/4 do tempo gasto pelo primeiro, ou seja, ele gastou um tempo em segundos igual a $\frac{3}{4} \cdot t$, ou seja, $\frac{3t}{4}$.

Uma vez que a equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos, as informações acima podem ser sintetizadas na equação

$$t + (t - 15) + (t - 20) + \frac{3t}{4} = 325.$$

Vamos resolvê-la:

$$\begin{aligned}
t + (t - 15) + (t - 20) + \frac{3t}{4} = 325 &\iff 3t + \frac{3t}{4} = 325 + 15 + 20\\
&\iff \frac{3t \cdot 4 + 3t}{4} = 360\\
&\iff \frac{15t}{4} = 360\\
&\iff t = \frac{4}{\cancel{15}} \cdot \cancel{360}^{\,24}\\
&\iff t = 4 \cdot 24\\
&\iff t = 96.
\end{aligned}$$

Como o primeiro corredor gastou 96 segundos para realizar o seu percurso, temos que o quarto corredor gastou

$$\frac{3}{4} \cdot 96 = 72 \text{ segundos.}$$

Logo, a alternativa correta é a do item **(d)**. ■

1.3 – Sistemas de Equações Lineares

Nesta seção, estudaremos situações-problema nas quais há duas ou mais incógnitas. Para encontrar seus valores, vamos expressar o problema por meio de um *sistema de equações lineares* nessas variáveis. A seguir, iremos aplicar métodos para solucionar sistemas de equações lineares em várias variáveis, como o **método da substituição** e o **método da combinação linear**, que descrevemos abaixo.

Obs As soluções dos exercícios dessa seção não são tão detalhadas como as dos problemas da seção anterior. Recomendamos, porém, que o professor as explique pelos passos descritos naquela seção.

O exemplo a seguir ilustra o método da substituição.

Exercício 1.17 Pedro possui um total de 24 notas que somam 81 reais. Sabendo que Pedro possui apenas notas de dois e de cinco reais, quantas notas de cada valor ele possui?

Solução. Denotemos por x a quantidade de notas de cinco reais e por y a quantidade de notas de dois reais. Sabendo que o total de notas é 24, escrevemos a equação $x + y = 24$ para representar essa informação. Por outro lado, temos $5x$ reais em notas de cinco reais e $2x$ reais em notas de dois reais e, como o total de dinheiro que Pedro possui é 81 reais, obtemos a equação $5x + 2y = 81$. Dessa forma, temos a considerar o *sistema de equações*

$$\begin{cases} x + y = 24; \\ 5x + 2y = 81. \end{cases}$$

Para resolver o sistema acima, podemos utilizar o método da substituição, que consiste em usar uma das equações para escrever uma das variáveis em termos da outra e então substituir a expressão assim obtida na equação restante. Fazendo isso, temos que

$$x + y = 24 \iff y = 24 - x.$$

Substituindo a expressão de y acima na segunda equação, chegamos a

$$\begin{aligned} 5x + 2(24 - x) = 81 &\iff 5x + 48 - 2x = 81 \\ &\iff 3x + 48 = 81 \\ &\iff 3x = 81 - 48 \\ &\iff 3x = 33 \\ &\iff x = 11. \end{aligned}$$

Veja que, dessa forma, reduzimos o problema de resolver um sistema linear de duas equações e duas incógnitas a resolver uma única equação do primeiro grau com uma incógnita. Agora, como $x = 11$ e $y = 24 - x$, concluímos que $y = 24 - 11 = 13$. Portanto, Pedro possui 11 notas de cinco reais e 13 notas de dois reais. ■

Obs Também poderíamos ter escrito a variável x em termos de y, em vez de escrever y em termos de x. Deixaremos a cargo do leitor escrever a solução neste caso.

No próximo exercício, apresentamos um segundo método para resolver sistemas lineares, o método da combinação linear.

Exercício 1.18 Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 4; \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

Solução. O primeiro passo é identificar o coeficiente da variável y em cada equação. Na primeira equação, esse coeficiente é igual a 3 e na segunda é igual a 4. Em seguida, multiplicamos todos os termos da primeira equação pelo coeficiente de y na segunda e todos os termos da segunda equação pelo coeficiente de y na primeira. Procedendo dessa forma, obtemos

$$\begin{cases} x + 3y = 4; & (\times 4) \\ 2x + 4y = 6. & (\times 3) \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 12y = 16; \\ 6x + 12y = 18. \end{cases}$$

Agora, basta subtrair uma equação da outra (membro a membro). Note que, nessa etapa, a variável y será “eliminada”. Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$6x - 4x + 12y - 12y = 18 - 16 \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

Para encontrar o valor de y, basta substituir o valor de x em uma das equações originais. Substituindo $x = 1$ na primeira equação do sistema original, chegamos a

$$1 + 3y = 4 \iff y = 1.$$

■

Vejamos mais alguns exemplos.

Exercício 1.19 — OBM. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

Solução. Denotemos por x o número de filhos (homens) e por y o número de filhas (mulheres). Assim, Samuel possui $x - 1$ irmãos, excluindo o próprio Samuel, e y irmãs. A informação, dada no enunciado, de que ele possui 3 irmãos a mais do que irmãs é representada algebricamente pela equação $x - 1 = y + 3$. Por outro lado, Samila possui x irmãos e $y - 1$ irmãs. Desse modo, como ela possui número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs, obtemos a equação $x = 2(y - 1)$. Portanto, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} x - 1 = y + 3; \\ x = 2(y - 1). \end{cases}$$

Antes de aplicar o método da combinação linear, devemos deixar as variáveis que aparecem nas equações do sistema todas do lado esquerdo. Nesse caso, isso dá

$$\begin{cases} x - y = 4; \\ x - 2y = -2. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo a segunda equação membro a membro da primeira, obtemos

$$2x - x + (-2y + 2y) = 8 + 2 \Longleftrightarrow x = 10$$

Substituindo o valor de x na equação $x - y = 4$, chegamos a

$$10 - y = 4 \Longleftrightarrow y = 6.$$

■

O próximo exemplo, a rigor, não gera um sistema de equações. No entanto, esse é o momento ideal para apresentá-lo, pois sua solução utiliza mais de uma incógnita.

Exercício 1.20 Paulo possui 13 caixas vermelhas e cada uma delas ou está vazia ou contém 7 caixas azuis. Cada caixa azul ou está vazia ou contém 7 caixas verdes. Todas as caixas verdes estão vazias. Se Paulo possui 145 caixas vazias, quantas caixas ele possui ao todo?

Solução. Iniciamos montando a tabela abaixo, a qual será útil na solução do problema.

	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	x	y	0
Vazias	$13 - x$	$7x - y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Se denotarmos o número de caixas vermelhas não vazias por x e o número de caixas azuis não vazias por y, teremos, pelo enunciado, $7x$ caixas azuis e $7y$ caixas verdes. Uma vez que todas as caixas verdes estão vazias, o total de caixas vazias é dado por $(13-x)+(7x-y)+7y$. Por outro lado, Paulo possui um total de 145 caixas vazias. Obtemos, assim, a equação $(13-x)+(7x-y)+7y=145$. Manipulando essa equação, chegamos a

$$\begin{aligned}(13-x)+(7x-y)+7y=145 &\iff 7x-x+7y-y=145-13\\ &\iff 6x+6y=132\\ &\iff 6(x+y)=132\\ &\iff x+y=22.\end{aligned}$$

Agora, veja que o número total de caixas é

$$13+7x+7y=13+7(x+y)=13+7\cdot 22=167.$$

■

Obs Uma vez mais, reforçamos que não foi necessário descobrir os valores das variáveis x e y para resolver o exercício anterior. De fato, qualquer par de inteiros positivos tais que $x+y=22$ serviria como solução para a questão. Veja que o único valor que deve ser encontrado é o número total de caixas que Paulo possui e, "por sorte", este valor pode ser determinado utilizando apenas a relação dada pela equação $x+y=22$.

Exercício 1.21 — OBM. No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

Solução. Suponha que Neto nasceu no ano x e que seu avô nasceu no ano y. Então, a primeira equação que pode ser formulada a partir do enunciado é

$$x+y=3844.$$

Por outro lado, em 1994, Neto tinha $1994-x$ anos, enquanto seu avô tinha $1994-y$ anos. Daí, como em 1994 a idade de Neto era a metade da idade do avô, obtemos

$$\begin{aligned}1994-x=\frac{1994-y}{2} &\iff 2(1994-x)=1994-y\\ &\iff 2x-y=1994.\end{aligned}$$

Assim, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} x + y = 3844; \\ 2x - y = 1994. \end{cases}$$

Somando as duas equações membro a membro, obtemos

$$3x = 3844 + 1994 = 5838, \text{ ou seja, } x = 1946.$$

Logo, em 2006 Neto completou $2006 - 1946 = 60$ anos. ■

2 | Funções Lineares e Afins

2.1 – O que é uma função?

A palavra "função" é comumente usada com o sentido de papel a desempenhar, cargo, obrigação, etc. Em matemática, o seu significado difere do usual, pois, nessa ciência, uma função é uma correspondência entre dois conjuntos, um conjunto A, denominado domínio ou conjunto de partida, e um conjunto B, denominado contradomínio ou conjunto de chegada, tal que **cada** elemento do domínio A corresponde a **um único** elemento do contradomínio B.

Exemplos:

(a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c\}$ em que são feitas as correspondências $1 \to a$, $2 \to b$, $3 \to b$ e $4 \to c$.

(b) Associando cada sapato a sua caixa, define-se uma função do conjunto dos sapatos ao conjunto das caixas de sapato de uma loja.

(c) Fazemos corresponder a cada número natural o dobro desse número. Assim, $0 \to 0$, $1 \to 2$, $2 \to 4$, etc. Definimos, assim, uma função do conjunto dos números naturais nele mesmo.

Para definir uma função, começa-se por nomeá-la usando uma letra do alfabeto. As mais comuns são f, g, h, etc. Deve-se também dizer quais são seus domínio e contradomínio. Essas etapas da definição da função são cumpridas, por exemplo, ao empregar a notação $f : A \to B$, com a qual se indica que f é uma função cujo domínio e contradomínio são os conjunto A e B, respectivamente. Para terminar a definição da função, descreve-se a correspondência pela qual ela associa cada elemento x no seu domínio a um elemento $f(x)$ no seu contradomínio. Isso é feito nos exemplos acima.

2.2 – Para aprender mais

Uma videoaula da Khan Academy, explicando o que é função com uma abordagem alternativa à usada aqui, pode ser acessada pelo Qr Code abaixo.

O que é uma função?

2.3 – Representação Gráfica de Funções

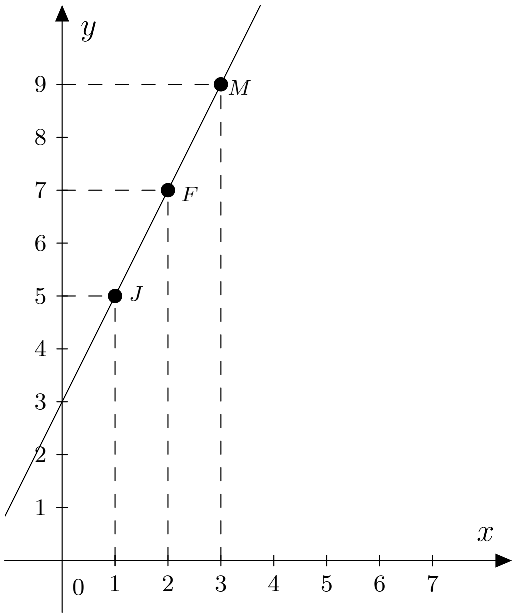
Vamos agora construir uma função a partir da seguinte situação. Suponha que um consumidor chamado João tente entender sua conta de água. Ele sabe que quanto mais água consumir, maior será o valor da conta a ser paga. Ele não sabe, porém, qual é a relação exata entre o *consumo* e o *valor da conta*. Para descobri-la, João montou uma tabela 2.1, na qual escreveu os valores relevantes para a sua análise.

Tabela 2.1: consumo de água na casa do João.

Mês	**Consumo (m^3)**	**Valor da conta**
Janeiro	2	7 reais
Fevereiro	1	5 reais
Março	3	9 reais

Para entender a conta de água, João estudou a função f que associa o consumo ao valor da conta. Ele então construiu o gráfico dessa função no *plano cartesiano*, assunto estudado no Caderno 3, sobre Geometria Métrica.

João então marca três pontos no plano, cada um representando um mês da tabela feita por ele. A coordenada x será utilizada para guardar as informações relativas ao consumo de água em metros cúbicos, enquanto a coordenada y será utilizada para as informações relativas ao valor total da conta.



João então verificou que os três pontos estão sobre uma mesma reta, isto é, eles são **colineares**. Assim,

- O valor de y é igual a 3 quando x é igual a zero. Isso significa que se João não consumir água em algum mês, mesmo assim terá que pagar três reais. Provalmente, este valor corresponde à taxa de manutenção do sistema de fornecimento de água.
- A partir daí, quando o valor de x aumenta em uma unidade, o valor de y aumenta em duas unidades.

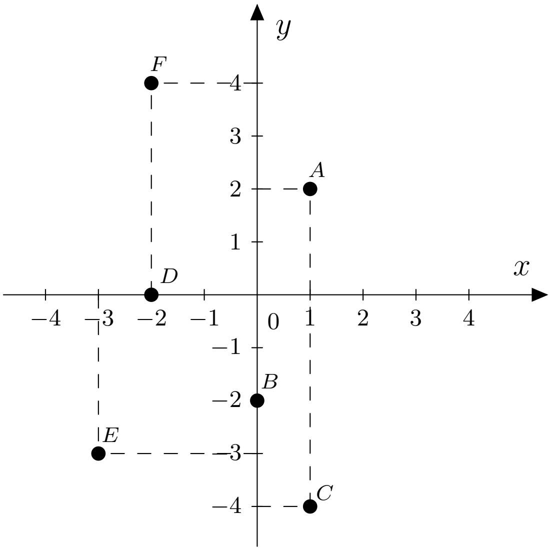
Dessa forma, a equação $y = 2x + 3$ representa a relação entre as variáveis x e y. Assim, o valor da conta de água em termos do consumo é dado pela função $f(x) = 2x + 3$ e a reta acima é a representação gráfica dessa função, pois é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$. Essa reta, então, é o *gráfico* da função.

Vamos agora resolver alguns exercícios para revisar o que aprendemos até o momento.

Exercício 2.1 Marque os seguintes pontos no plano cartesiano.

$$A(1{,}2),\ B(0,-2),\ C(1,-4),\ D(-2{,}0),\ E(-3,-3)\ \text{ e }\ F(-2{,}4).$$

Solução. Temos a marcação solicitada na figura abaixo. ■



Exercício 2.2 Considere a relação entre as coordenadas x e y dada por $y = -2x + 4$. Responda os itens a seguir.

(a) Se $x = 1$, qual será o valor de y?
(b) Se $y = 4$, qual será o valor de x?
(c) Se $y = 7$, qual será o valor de x?

Solução. Temos os seguintes procedimentos.

(a) Substituindo $x = 1$ em $y = -2x + 4$, obtemos $y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$.
(b) Substituindo $y = 4$ em $y = -2x + 4$, obtemos

$$4 = -2x + 4 \iff x = 0.$$

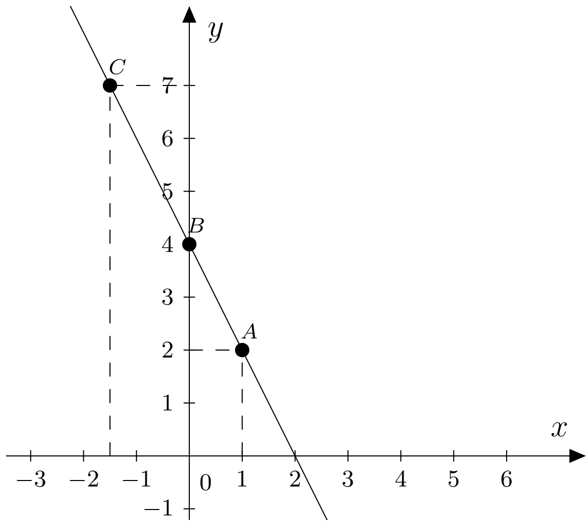
(c) Substituindo $y = 7$ em $y = -2x + 4$, obtemos

$$7 = -2x + 4 \iff x = -\frac{3}{2}.$$

■

Exercício 2.3 Desenhe os pontos (x,y) obtidos em cada um dos itens do exercício anterior em um plano cartesiano. Em seguida, trace a reta que liga esses pontos.

Solução. Na figura abaixo, desenhamos os pontos $(1,2)$, $(0,4)$ e $(-\frac{3}{2},7)$ e traçamos a reta que os liga. ■

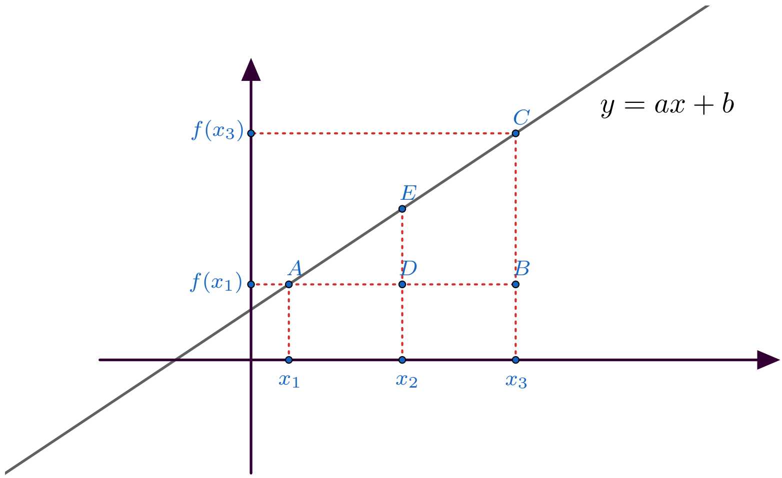


Obs De modo geral, é possível mostrar que o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas (x,y) satisfazem uma equação do tipo $ax + by = c$, com a e b números reais não ambos nulos, é uma reta. Uma justificativa desse fato, para uma equação particular, é simples e pode ser feita com o auxílio de semelhança de triângulos, como veremos a seguir.

2.4 – Propriedades das Funções Lineares e Afins

Uma função de expressão $f(x) = ax + b$ é chamada de função afim. Se $b = 0$ na expressão acima, ou seja, se $f(x) = ax$, então a função é dita linear e, se $a = 0$, a função é dita constante.

Exercício 2.4 Verifique que o gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta.



Solução. Se o coeficiente a na expressão de f for igual a zero, esta função se reduz a $f(x) = b$. Seu gráfico, a união dos pontos de coordenadas (x,b), é a reta paralela ao eixo-x que passa pelo ponto $(0,b)$.

A seguir, esboçamos na figura acima o caso em que $a \neq 0$. Nessa figura, $x_1 < x_2 < x_3$ são pontos do eixo-x. Considere então o triângulo cujos vértices são os pontos $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_3,f(x_1))$ e $C(x_3,f(x_3))$. A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo x (verificar isso em detalhe é um pouco trabalhoso mas o leitor pode se convencer dessa afirmação observando que a distância dos pontos A e B ao eixo x é a mesma, igual a $f(x_1)$). Da mesma maneira nos convencemos que $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela ao eixo y.

Assim, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ formam um ângulo de 90° no ponto B

(e, assim, são ortogonais) porque são paralelas a retas ortogonais, os eixos x e y. Consequentemente, o triângulo ABC é retângulo em B.

Observe que o ponto $D(x_2,f(x_1))$ está no segmento AB. Vamos então determinar o valor de y_2 quando o ponto $E(x_2,y_2)$ está no segmento AC, que é a hipotenusa do triângulo ABC.

Usando argumento semelhante ao empregado acima verificamos que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são perpendiculares em D. Logo os triângulos ABC e ADE são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo pois têm dois ângulos iguais (observe que $\angle BAC = \angle DAE$.)

Como os triangulos ABC e ADE são semelhantes, vale a igualdade:

$$\frac{y_2 - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

ou seja,

$$y_2 = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

Sabemos que $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_3) = ax_3 + b$. Substituindo essas expressões na igualdade acima:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{(ax_3 + b) - (ax_1 + b)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + ax_1 + b && (2.1)\\
&= \frac{ax_3 - ax_1}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + ax_1 + b && (2.2)\\
&= \frac{a(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + ax_1 + b && (2.3)\\
&= a(x_2 - x_1) + ax_1 + b && (2.4)\\
&= ax_2 - ax_1 + ax_1 + b && (2.5)\\
&= ax_2 + b. && (2.6)
\end{aligned}$$

Assim, o ponto $(x_2, f(x_2))$ está na reta que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_3, f(x_3))$

Fixados então dois pontos $(x_1,f(x_2))$ e $(x_2,f(x_2))$ no gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, o argumento acima mostra que qualquer ponto nesse gráfico está na reta r que passa por esses pontos.

Por sua vez, se (x_3,y_3) é um ponto da reta r, então $y_3 = f(x_3)$ pois se $y_3 \neq f(x_3)$ teríamos dois pontos distintos (x_3,y_3) e $(x_3,f(x_3))$ na reta r com uma mesma coordenada de abscissa x_3. Como dois pontos determinam uma reta, então r é o conjunto dos pontos (x_3,y), em que y pode ser qualquer número real. Mas isso não pode ocorrer pois r é a reta que passa por $(x_1,f(x_1))$ e $(x_2,f(x_2))$.

Consequentemente, o gráfico de f e a reta r coincidem.

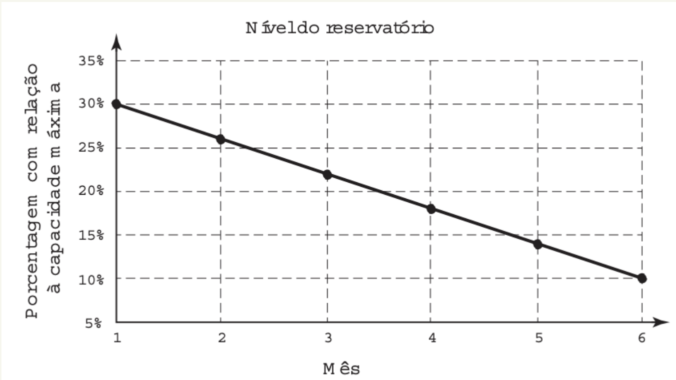
Observação 2.1 O Caderno 3 desta coleção traz uma exposição detalhada que generaliza tanto o resultado do Exercício 2.4 como o argumento usado para resolvê-lo pois, naquele caderno, a equação geral das retas no plano é descrita e estudada de modo que o exercício acima pode ser encarado como um caso particular dessa descrição.

3 | A Geometria das Equações Afins

3.1 – Dependência Linear, Razões e Proporções

Nesta seção vamos aproveitar a solução do Exercício 3.1 para falar da inclinação do gráfico de uma função afim explicando como obter informações sobre a função a partir de sua inclinação. Essa relação será então explicada em termos de uma *dependência linear* entre a função e sua variável pela qual a variação da função se dará de acordo com uma proporção fixa.

Exercício 3.1 (ENEM 2016, Questão 158, Caderno Azul) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, especialmente os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por certo período, sendo o resultado mostrado no gráfico abaixo. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

Antes de apresentar a solução, vamos fazer algumas observações. Inicialmente, o *gráfico*, ou seja, a linha reta inclinada na figura, passa pelos seis pontos destacados com círculos. O primeiro destes pontos corresponde ao *mês* 1 e à *porcentagem* $30\% = \frac{30}{100}$ da capacidade máxima do reservatório. Já o último dentre eles corresponde ao mês 6 e à porcentagem $10\% = \frac{10}{100}$ da capacidade máxima do reservatório.

Portanto, as observações foram feitas em um intervalo de tempo de

$$6 - 1 = 5 \text{ meses},$$

durante o qual a porcentagem de água armazenada no reservatório em relação a sua capacidade *variou negativamente*, isto é, diminuiu

$$10\% - 30\% = -20\% = -\frac{20}{100}.$$

Podemos *inferir* que, a cada mês, neste período de 5 meses, a porcentagem da capacidade máxima diminuiu

$$\frac{-20\%}{5} = -4\% = -\frac{4}{100},$$

ou seja $-\frac{4}{100}$ a cada mês. Sendo assim, no mês 2, ou seja, passado 1 mês, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} = \frac{26}{100}.$$

Da mesma forma, no mês 3, isto é, passados 2 meses, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\%{\times}2 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}{\times}2 = \frac{22}{100}.$$

Procedendo de forma similar, vemos que, passados 3 meses e 4 meses, ou seja, nos meses 4 e 5, respectivamente, as porcentagens da capacidade máxima seriam

$$30\% - 4\%{\times}3 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}{\times}3 = \frac{18}{100}$$

e

$$30\% - 4\%{\times}4 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}{\times}4 = \frac{14}{100},$$

respectivamente. Finalmente, no mês 6, isto é, após 5 cinco meses, a porcentagem da capacidade máxima ainda disponível no reservatório seria dada por

$$30\% - 4\% \times 5 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 5 = \frac{10}{100},$$

como já havíamos observado. Podemos organizar estes dados na seguinte tabela

Mês	Porcentagem da capacidade máxima
1	30%
2	26%
3	22%
4	18%
5	14%
6	10%

De modo geral, se indicamos por x a variável *mês*, cujos valores estão exibidos na coluna da esquerda, então os números na coluna da direita representam os valores da variável

$$y = 30\% - 4\% \times (x - 1),$$

ou seja,

$$y = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}(x - 1). \tag{3.1}$$

Esta variável representa a *porcentagem da capacidade máxima* do reservatório no mês x. A expressão (3.1) significa que y *depende linearmente* de x. Reagrupando os termos, podemos escrever

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x.$$

Essa dependência linear pode ser vista na tabela: de uma linha para outra, temos um *incremento* (ou seja, um aumento) de um mês. Portanto, a variável x aumenta uma unidade de uma linha para a seguinte. Esta variação de x implica uma variação de y: de uma linha para outra da tabela, a variável y *diminui* 4 pontos percentuais, isto é, 4%. Portanto, passados x meses, a *variação* correspondente de y neste período é igual a

$$y - \frac{30}{100} = -\frac{4}{100}(x-1).$$

Logo, a *variação* de y, dividida (ou comparada) com a *variação* de x, é dada por

$$\frac{y - \frac{30}{100}}{x-1} = -\frac{4}{100}.$$

Portanto, a razão entre as *variações* de y e de x é constante e igual a $-\frac{4}{100}$.

Pela análise da figura, percebemos que os valores nas duas colunas da tabela correspondem às coordenadas dos pontos destacados na linha reta inclinada. Estes pontos, alinhados sobre a reta inclinada, têm coordenadas

$$(x, y),$$

onde

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x. \tag{3.2}$$

Portanto, as coordenadas desses pontos são, exatamente, os números da tabela: o primeiro número do par ordenado, o valor da variável x, é lido na primeira coluna da tabela e o segundo número do par ordenado, o valor da variável y, correspondente ao valor de x, é informado na coluna da direita.

O enunciado da questão faz referência à *tendência linear* observada no gráfico. Isto significa, justamente, que as coordenadas dos pontos dependem linearmente uma da outra. Vimos acima que esta relação linear é dada por (3.2).

Finalizando estes comentários, observamos, pela figura do enunciado, que o gráfico da relação entre x e y, ou seja, a linha inclinada, determina um triângulo ABC com lados BC de "comprimento"

$$30\% - 10\% = 20\% = \frac{20}{100}$$

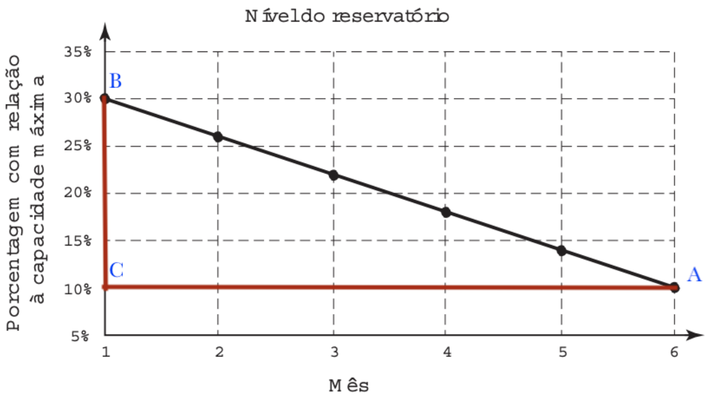
no eixo vertical, e AC de comprimento

$$6 - 1 = 5$$

no eixo horizontal, como pode ser visto na próxima figura. Portanto, a *inclinação* desta reta pode ser medida como a razão

$$\frac{\frac{20}{100}}{5} = \frac{4}{100}.$$

Esta razão é a *tangente* do ângulo no vértice A, oposto ao lado BC, conforme a seguinte figura.



Note ainda que, trocando o sinal deste valor, obtemos o coeficiente $-\frac{4}{100}$ que multiplica a variável x na expressão (3.2)

Por fim, apresentamos a resolução da questão, utilizando boa parte da discussão anterior.

Solução. Devemos calcular em qual mês, ou seja, para qual valor da variável x, teremos "zerado" toda a capacidade do reservatório, isto é, teremos

$$y = 0.$$

Considerando a expressão (3.2), vemos que isto ocorre quando

$$\frac{34}{100} - \frac{4}{100}x = 0,$$

isto é, quando

$$x = \frac{\frac{34}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{34}{4} = \frac{32}{4} + \frac{2}{4} = 8 + \frac{1}{2} = 8{,}5.$$

Logo, mantida a tendência observada no gráfico, o reservatório atingirá o nível zero de sua capacidade entre o mês 8 e o mês 9, dois meses e meio depois do mês 6.

3.2 – Interpretação Geométrica dos Sistemas Lineares

Na seção 2.3, afirmamos que o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas (x,y) satisfazem uma equação do tipo $ax + by = c$ é uma reta. Utilizaremos este fato para interpretar geometricamente as soluções de um sistema de equações lineares. Para começar, consideremos o sistema que foi proposto no Exercício 1.18:

$$\begin{cases} x + 3y = 4; \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

Para descobrirmos alguns pontos pelos quais passa a reta que representa a equação $x + 3y = 4$, basta substituir a variável x por alguns valores arbitrários e descobrir os valores correspondentes de y. Como exemplo, considere a seguinte tabela.

x	y
0	4/3
1	1
4	0

Dessa forma, a primeira reta passa pelos pontos $(0,\frac{4}{3})$, $(1,1)$ e $(4,0)$. Podemos fazer o mesmo para a equação $2x + 4y = 6$:

x	y
0	3/2
1	1
3	0

Portanto, a segunda reta passa pelos pontos $(0,\frac{3}{2})$, $(1,1)$ e $(3,0)$. Observando as duas tabelas anteriores, percebemos que as duas retas se encontram no ponto $(1,1)$, que é a única solução do sistema, conforme esboçado na figura 3.1.

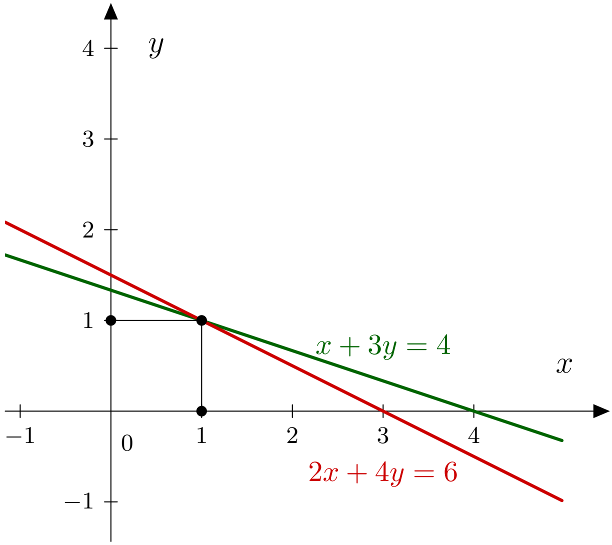


Figura 3.1: interpretação geométrica de um sistema de equações no plano cartesiano.

Obs No exemplo anterior, encontramos três pontos sobre cada uma das retas antes de esboçá-las. Entretanto, é recomendável que se esclareça que apenas dois pontos são suficientes (e necessários) para traçar cada reta.

Aqui, podemos fazer a seguinte análise. Em um sistema com duas equações lineares e duas variáveis, isto é, com equações da forma $ax + by = c$, com a,b,c reais e ao menos um dentre a e b não nulo, cada uma das equações é representada por uma reta no plano cartesiano. Há, portanto, três possíveis situações.

(i) As equações representam duas retas concorrentes. Neste caso, o sistema terá uma única solução, que é dada pelas coordenadas do ponto de interseção das duas retas.

(ii) As equações representam duas retas paralelas. Neste caso, o sistema não terá solução, pois as retas não se intersectam.

(iii) As equações representam a mesma reta. Neste caso, o sistema tem infinitas soluções, pois as coordenadas de qualquer ponto sobre tal reta fornece uma solução.

Os exercícios resolvidos na primeira seção exemplificam a primeira situação, em que o sistema tem uma única solução.

Para apresentar um exemplo que ilustre a segunda situação, considere o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + 3y = 5; \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

Observe que essas duas equações não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Para enxergar esse fato nas retas que representam essas equações no plano cartesiano, repetimos o procedimento realizado no exemplo anterior, para encontrar pontos pelos quais tais retas passam. Para a primeira equação, temos a seguinte tabela.

x	y
0	$5/3$
1	$4/3$
5	0

Por sua vez, para a segunda equação, obtemos a seguinte tabela.

x	y
0	1
1	$2/3$
3	0

Observando a Figura 3.2, podemos perceber que as retas correspondentes às equações do sistema são paralelas e, portanto, não se encontram em ponto algum. Isso corrobora o que já verificamos do ponto de vista algébrico, pelo qual é fácil verificar que o sistema não tem solução. De fato, caso existisse, a solução do sistema seria um par (x,y) de reais tais que $x + 3y = 5$ e $x + 3y = 3$. Da existência desse par forçosamente se concluiria que $5 = 3$, o que é um absurdo.

Para finalizar, vamos discutir a terceira situação que foi apresentada: o caso de um sistema linear com infinitas soluções. Como exemplo, considere o seguinte sistema.

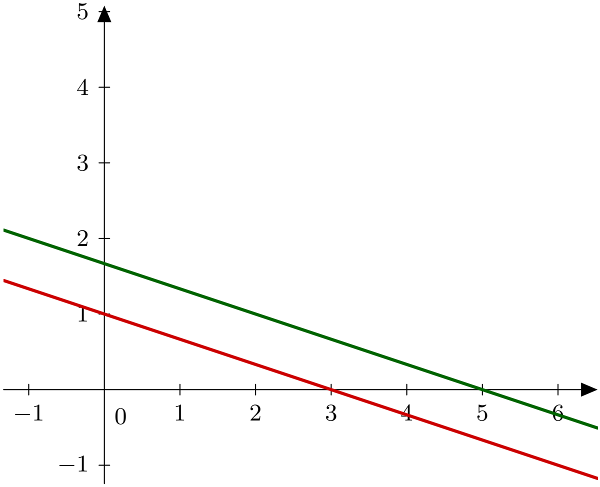


Figura 3.2: sistema linear com retas paralelas.

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

Substituindo os valores $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, obtemos a mesma tabela abaixo para as duas equações que formam o sistema acima.

x	y
0	7/2
1	3
7	0

Dessa forma, as equações do sistema são representadas por uma mesma reta e qualquer par (x,y) que resolve a primeira equação também resolverá a segunda, e vice-versa. Isso ocorre porque a segunda equação é obtida da primeira pela multiplicação por um número não nulo, que neste caso é 2. Ou seja, podemos considerar a primeira equação como uma simplificação da segunda. Portanto, essas equações são *equivalentes*.

4 Sistemas Lineares e Determinantes

4.1 – Solução Geral de Sistemas de Duas Equações Lineares a Duas Incógnitas

Temos abaixo um sistema de duas equações lineares.

$$(I)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & p; \\ cx+dy & = & q. \end{array}\right.$$

Para encontrar a solução desse sistema de equações, o primeiro passo é multiplicar a primeira equação acima por d e a segunda equação por $-b$ e, assim, obter um novo sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{rclcr} ax+by & = & p & \times & d \\ cx+dy & = & q & \times & -\,b \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad (II)\ \left\{\begin{array}{rcr} ad\,x+bd\;y & = & pd; \\ -bc\,x-bd\,y & = & -bq. \end{array}\right.$$

O objetivo desse procedimento é fazer com que os coeficientes da variável y tenham valores opostos nas duas equações do sistema (II), de modo que, ao somar as equações desse último sistema, obtenha-se a igualdade

$$(ad-bc)x+(bd-bd)y=pd-bq, \tag{4.1}$$

em que o coeficiente da variável y é igual a zero. Observe que essa equação é do primeiro grau na variável x apenas quando $ad-bc\neq 0$. Nesse caso,

$$x=\frac{pd-bq}{ad-bc}.$$

Analogamente, multiplicamos as equações do sistema de equações (I) por $-c$ e a, respectivamente, para obter o sistema de equações (III):

$$\left\{\begin{array}{rclcr} ax+by & = & p & \times & -\,c \\ cx+dy & = & q & \times & a \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad (III)\ \left\{\begin{array}{rcr} -ac\,x-bc\;y & = & -pc; \\ ac\,x+ad\,y & = & aq. \end{array}\right.$$

Somando as equações do sistema (III) mostramos que

$$(ac-ac)x+(ad-bc)y=aq-pc.$$

Agora, o coeficiente anulado pelo procedimento é o da variável x. Assim, quando $ad - bc \neq 0$, podemos resolver a equação acima para a variável y obtendo que

$$y = \frac{aq - pc}{ad - bc}$$

é a solução dessa equação.

Acabamos, então, de apresentar a *receita* para calcular as soluções x, y de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. Como qualquer receita, esta que descrevemos tem seus ingredientes, o próprio sistema linear a ser resolvido e a satisfação da condição $ad - bc \neq 0$ pelos coeficientes deste sistema de equações.

Toda receita que se preza leva ao resultado pretendido sempre que aplicada corretamente. Assim, para saber se a receita que mostramos aqui de fato funciona e "entrega o que promete", devemos verificar que, satisfeita a condição $ad-bc \neq 0$, os valores de x e y que encontramos são soluções do Sistema Linear de equações (I). Isso será feito diretamente no Exercício 4.1, que pede para substituir os valores de x e y acima calculados nas equações do Sistema (I).

Exercício 4.1 Mostre que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\left(\dfrac{pd - bq}{ad - bc}\right) + b\left(\dfrac{aq - pc}{ad - bc}\right) & = & p; \\[2ex] c\left(\dfrac{pd - bq}{ad - bc}\right) + d\left(\dfrac{aq - pc}{ad - bc}\right) & = & q. \end{array}\right.$$

Solução. Desenvolvemos a expressão à esquerda da primeira igualdade acima e verificamos que essa identidade é verdadeira:

$$\begin{array}{ccccc} a\left(\dfrac{pd - bq}{ad - bc}\right) + b\left(\dfrac{aq - pc}{ad - bc}\right) & = & & & \\[2ex] \dfrac{apd - abq + baq - bpc}{ad - bc} & = & \dfrac{pad - abq + abq - pbc}{ad - bc} & = & \\[2ex] \dfrac{pad - pbc}{ad - bc} & = & \dfrac{p(ad - bc)}{ad - bc} & = & p. \end{array}$$

A segunda igualdade é provada da mesma maneira.

Assim, as equações do sistema linear (I) são satisfeitas pelos valores de x e y que calculamos acima.

Uma vez encontrada uma solução do Sistema Linear (I), é natural perguntar se esse sistema não tem outras soluções quando a condição $ad - bc \neq 0$ sobre seus coeficientes é satisfeita. No entanto, se observarmos detidamente a receita que apresentamos acima para obter uma solução do Sistema (I), logo nos convencemos que a solução determinada por ela é a única solução do Sistema I. De fato,

- toda solução do Sistema (I) de equações lineares é solução do Sistema (II);
- se x é uma das soluções do Sistema Linear (II) então x tem o valor que calculamos acima, já que toda solução do Sistema Linear (II) também é solução da equação da equação 4.1, que tem o valor acima calculado $x = (pd - bq)/(ad - bc)$.

Caso haja outro valor de x que, junto a algum valor de y, satisfaça o sistema linear (I), então a primeira observação implica que o Sistema (II) tem duas soluções, digamos (x,y) e (x',y'), com $x \neq x'$. Isso contradiz a segunda observação acima. Com isso, mostramos que se (x,y) satisfaz o Sistema de equações (I) satisfeita a condição $ac - bd \neq 0$, então $x = (pd - bq)/(ad - bc)$.

De forma análoga, mostra-se que a condição $ad - bc \neq 0$ implica que se y e algum x são soluções de (I) então $y = (aq - pc)/(ad - bc)$. Consequentemente, o par

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \quad \text{e} \quad y = \frac{aq - pc}{ad - bc}$$

é a única solução do Sistema (I) quando $ad - bc \neq 0$.

Uma outra coisa que se deve perguntar diz respeito ao que fazer quando $ad - bc = 0$. Podemos mostrar que, neste caso, as equações do sistema linear correspondem a duas retas r e r' que podem ser coincidentes na reta r ou paralelas. Na primeira situação, o sistema linear tem infinitas soluções, pois todo par (x,y) tal que (x,y) é ponto da reta r é solução do sistema linear. No segundo caso, o sistema linear não tem solução, pois as retas correspondentes não têm ponto comum.

A abordagem geométrica da Regra de Cramer, que apresentaremos abaixo, traz um enfoque alternativo para responder esta questão.

4.2 – A Regra de Cramer

Nesta seção faz-se uso da definição de matrizes e determinantes, bem como de suas propriedades elementares, objetos de estudo do caderno 3. Usando a definição da multiplicação de matrizes, temos que o Sistema de Equações (I) é equivalente à equação matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Usando agora a definição de determinante, temos que

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad pd - bq = \begin{vmatrix} p & b \\ d & d \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad aq - pc = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix},$$

lembrando que, ao delimitar uma matriz por barras, denotamos seu determinante. Usando as igualdades acima, podemos reescrever as soluções do Sistema de Equações Lineares (I) obtidas na seção anterior. Assim, se $ad - bc \neq 0$, então

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ d & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

são as soluções do Sistema de Equações (I), como se vê na seção precedente.

Assim escritas, as soluções do sistema linear aparecem na forma que lhes é dada pela *Regra de Cramer*, que tem uma versão válida para qualquer sistema de n equacões lineares e n variáveis.

4.3 – Regra de Cramer - Abordagem Geométrica

Podemos escrever o Sistema de Equações Lineares (I), da página 53, usando matrizes coluna, como se vê abaixo.

$$x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Pode-se enxergar as matrizes-coluna $\binom{a}{c}$, $\binom{b}{d}$ e $\binom{p}{q}$ da igualdade acima como vetores de coordenadas (a,b), (b,d) e (p,q), respectivamente. A equação matricial que resulta dessa igualdade é, portanto, equivalente à identidade entre vetores $x(a,c) + y(b,d) = (p,q)$, representada na figura a seguir.

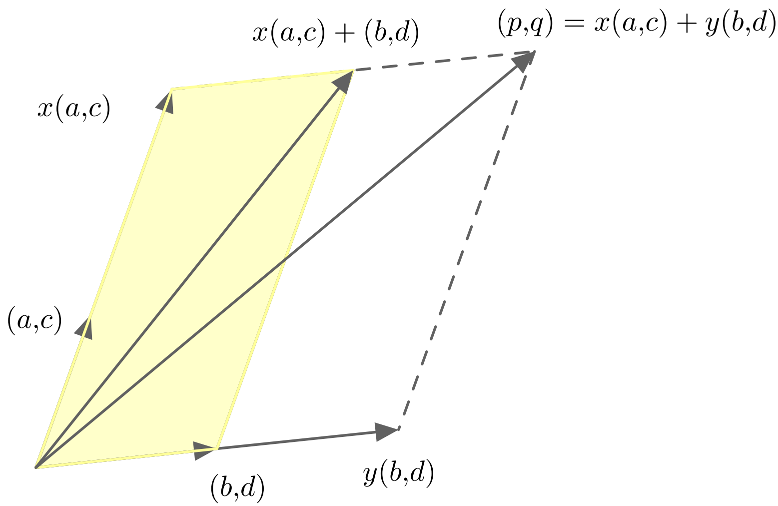


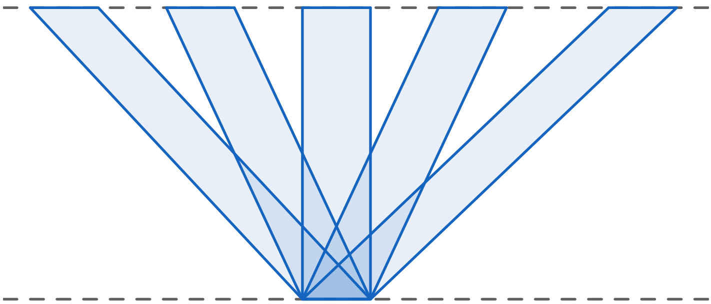
Figura 4.1

Conforme vimos no Caderno 4, a área A do paralelogramo em amarelo, gerado pelos vetores (b,d) e $x(a,c)$, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas colunas são $x\binom{a}{c}$ e $\binom{b}{d}$. Assim, $A = |D_1|$ em que

$$D_1 = \begin{vmatrix} xa & b \\ xc & d \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Observe, novamente, que denotamos o determinante da matriz ao delimitá-la por duas barras, como acima.

Sabe-se que a área de um paralelogramo é o produto da sua base pela sua altura. Por sua vez, a altura de um paralelogramo é distância entre as retas paralelas que contêm suas bases. Assim, os paralelogramos da figura abaixo têm a mesma área.



Por conta disso, os paralelogramos em amarelo da Figura 4.1 e em verde da Figura 4.2 têm a mesma área A.

Para calcular a área do quadrilátero em verde da Figura 4.2, usamos novamente a expressão da área de um paralelogramo em termos dos vetores geradores, discutida no Caderno 4. Neste caso, os vetores geradores têm coordenadas (p,q) e (b,d) e a área A do paralelogramo gerado por eles é o módulo do determinante D_2 dado por

$$D_2 = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}.$$

Na situação esboçada na Figura 4.1, em que os vetores (ax,cx) e (b,d) estão no primeiro quadrante, é fácil ver que $cx > ax$ e $b > d$, logo $D_1 = adx - bcx < 0$. Com argumento semelhante, mostra-se que $D_2 = pd - bq < 0$. Uma vez que $A = |D_1| = |D_2|$, e D_1, D_2 têm o mesmo sinal, então $D_1 = D_2$. Assim,

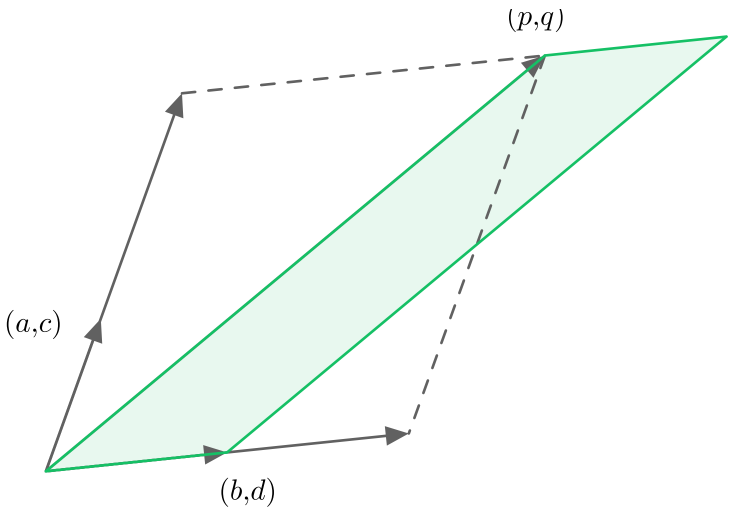


Figura 4.2

$$x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}, \quad \text{ou seja,} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},$$

que é o valor de x que havíamos obtido acima para a solução do Sistema Linear I.

De forma análoga, isto é, a partir do cálculo da área de paralelogramos convenientemente escolhidos, chegamos à expressão de y dada pela Regra de Cramer. A resolução do Exercício 4.2 completa, então, esta verificação geométrica da Regra de Cramer no caso em que os vetores (a,c), (b,d) se dispõem como esboçado na Figura 4.1.

Exercício 4.2 Admita que o paralelogramo P_1 é gerado pelos vetores (a,c) e (by,dy), enquanto o paralelogramo P_2 é gerado pelos vetores (a,c) e (p,q). Suponha também que $ad - bc > 0$. Adaptando o argumento acima mostre que se y é o quociente da área de P_1 pela área de P_2 então o par (x,y), em que $x = (pd - bq)/(ad - bc)$, é a solução do Sistema Linear (I) da página 53.

Nesta seção verificamos um caso particular da Regra de Cramer ao admitir que os vetores (a,c), (b,d) e (p,q) estão na configuração descrita na Figura 4.1. Assim, para validar a Regra de Cramer por essa abordagem, outras configurações devem ser estudadas a fim de esgotar todas as possibilidades. Na prática, é melhor deduzir diretamente a regra de Cramer a partir de manipulações algébricas. No caso de sistemas lineares 2×2, é mais fácil obter a Regra de Cramer diretamente da solução geral de sistemas lineares, como vimos acima. Para verificar a Regra de Cramer para sistemas lineares de ordem superior, deve-se empregar algumas propriedades dos determinantes que não são tratadas nesse caderno.

Observação 4.1 A abordagem geométrica da Regra de Cramer ajuda a entender por que suas fórmulas das raízes de uma equação linear são válidas. Também podemos empregá-la no estudo do comportamento da solução de um sistema linear quando o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero. No caso do sistema linear com duas equações e duas variáveis que tratamos aqui, o determinante da matriz dos coeficientes é igual "$ad - bc$". Quando essa expressão se anula, os quadriláteros gerados por (xa,xc) e (yb,yd) têm área zero, quaisquer que sejam os valores de x e y. Consequentemente, os vetores (a,c) e (b,d) são multiplos um do outro, ou seja, $(a,c) = \alpha(b,d)$ ou $(b,d) = \beta(a,c)$. Nessas condições, se (x,y) é solução do sistema linear, então

$$(p,q) = x(a,c) + y(b,d) = x\alpha(b,d) + y(b,d) = (\alpha x + y)(b,d)$$

ou

$$(p,q) = x(a,c) + y(b,d) = x(b,d) + y\beta(a,c) = (x + \beta y)(a,c)$$

Assim, esse sistema linear terá solução somente se (p,q) for múltiplo de (b,d) e/ou (a,c). No primeiro caso, em que $(p,q) = k(b,d)$, o sistema linear terá infinitas soluções, pois qualquer par (x,y), tal que $\alpha x + y = k$, é solução do sistema de equações aqui considerado, lembrando que as soluções da equação $\alpha x + y = k$ são infinitas em número, pois são os pontos de uma reta. Analogamente, mostra-se que quando $(p,q) = k(a,c)$, o número de soluções é infinito também.

5 Exercícios

5.1 – Exercícios Resolvidos

Exercício 5.1 Durante a quarentena que ocorreu por causa da pandemia de Covid-19, Antônio leu um livro de 400 páginas em d dias, lendo, em média 25 páginas por dia. Qual das equações abaixo descreve essa situação?

(a) $25d = 400$.

(b) $d = 25 \cdot 400$.

(c) $400d = 25$.

(d) $d = \dfrac{25}{400}$.

(e) $400 = \dfrac{25}{d}$.

Solução. Ao dividir o número de páginas do livro pela número d de dias que Antônio leu a obra deve-se obter 25, que é o número de páginas que Antônio leu em média por dia. Assim,

$$25 = \frac{400}{d}, \quad \text{ou seja,} \quad 25d = 400.$$

Consequentemente, a alternativa correta é a da letra (a).

Exercício 5.2 Pedro propôs o seguinte problema a João: "se a soma de dois números inteiros consecutivos é 54, quais são esses números". De imediato, João respondeu que o enunciado do problema estava errado. Pedro reconheceu o erro, e reformulou a questão afirmando que a soma dos dois números consecutivos é 55.

(a) Como João percebeu que o enunciado inicial do problema de Pedro estava errado sem tentar solucioná-lo?
(b) Resolva a versão corrigida do problema de Pedro.

Solução. (a) Dois números inteiros consecutivos têm paridade distinta, isto é, se um deles é par o outro é ímpar. Consequentemente, a soma de dois inteiros consecutivos, que sempre é a soma de um número ímpar e um número par, é ímpar, logo não pode ser igual à 54!

(b) Se x e $x+1$ são os números consecutivos que solucionam a versão corrigida do problema, então

$$x + (x + 1) = 2x + 1 = 55.$$

Resolvendo a equação $2x+1 = 55$, obtemos que $2x = 55-1 = 54$, ou seja, $x = 27$. Logo os números consecutivos são 27 e 28

Exercício 5.3 A soma dos três algarismos de um número é igual a 19. O algarismo das dezenas é o quádruplo do algarismo das centenas, e o algarismo das unidades é o sucessor do algarismo das dezenas. Qual é esse número?

Solução. Sejam c, d e u os algarismos das centenas, dezenas e unidades da solução desse exercício. Assim, $d = 4c$ e $u = d + 1$. Da primeira equação, vê-se que d é um número de um dígito divisível por 4, logo d é igual a 0, 4 ou 8.

Se $d = 0$, então $c = 0$ e $u = 1$. Observe que, além da suposta solução não ter 3 dígitos, a soma de seus dígitos não é 19. Consequentemente, $d \neq 0$. Se $d = 4$, então $c = d/4 = 1$ e $u = d + 1 = 5$. Temos, então, que a soma $c + d + u = 1 + 4 + 5$ é igual a 10, que é diferente de 19, logo não satisfaz as condições da questão. Assim, d deve ser igual a 8 para que o problema tenha solução. Nesse caso, $c = d/4 = 2$ e $u = d + 1 = 9$ e $c + d + u = 2 + 8 + 9 = 19$.

Por conseguinte, o número que satisfaz as condições do exercício é 289.

Exercício 5.4 — ENEM - 2017. Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha.

A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho A partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho B, que havia saído do topo da montanha. Quantos segundos após a partida do bondinho B partiu o bondinho A?

(a) 5.
(b) 10.
(c) 15.
(d) 20.
(e) 25.

Solução. Chamamos de t_A e t_B os tempos em segundos decorridos das saídas dos bondinhos A e B, respectivamente, até se encontrarem. Assim, $t_A + t_B = 90$, pois a travessia dura 1,5 minutos, isto é, 90 segundos, para ambos os bondinhos, que se deslocam a uma velocidade constante. Sabemos que $t_A = 40$ segundos. Consequentemente,

$$40 + t_B = 90, \text{ ou seja, } t_B = 50 \text{ segundos.}$$

Se x é a diferença entre os tempos decorridos entre as saídas dos bondinhos até o encontro deles, então

$$x = 50 - 40 = 10 \text{ segundos.}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**.

Exercício 5.5 Em um hotel para cães e gatos, 10% dos cães acham que são gatos e 10% dos gatos acham que são cães. Verificou-se também que 20% dos animais acham que são gatos. Se no hotel existem 10 gatos, quantos são os cães?

Solução. Chamemos de x a quantidade de gatos, e de y a quantidade de cães. Logo, a quantidade de animais é igual a $x + y$. A quantidade de cães que acham que são gatos é igual a 10% da quantidade de cães, ou seja, é igual a $0.1y$. Por sua vez, 90% dos gatos, ou seja $0{,}9x$, sabem que são gatos, pois apenas 10% dos gatos pensam que são cães. Assim, a quantidade de animais que acham que são gatos é $0{,}9x + 0{,}1y$.

Do enunciado do problema, 20% dos animais, ou seja, $0{,}2(x+y)$ animais, pensam que são gatos. Assim, temos duas expressões para a quantidade de animais que acham que são gatos. Igualando essas expressões, obtemos

$$0{,}2(x+y) = 0{,}9x + 0{,}1y, \text{ isto é, } 0{,}2y - 0{,}1y = 0{,}9x - 0{,}2x.$$

Assim, $0{,}1y = 0{,}7x$. Substituindo o valor de $x = 10$ nessa última equação obtemos que $0{,}1y = 0{,}7\times 10 = 7$. Assim, $y = 70$ é a quantidade de cães.

Exercício 5.6 — OBMEP. Ana escreveu cinco números em uma folha de papel. Escondendo cada um deles e somando os outros quatro, ela obteve os seguintes resultados: 29, 32, 35, 39 e 41. Qual é a soma do maior com o menor dos números que Ana escreveu?

(a) 10.
(b) 12.
(c) 15.
(d) 18.
(e) 20.

Solução. Chamemos de x,y,z,w,t os números que Ana escreveu e seja $S = x+y+z+w+t$ a soma desses números. Do enunciado, sabemos que

$$\begin{cases} S - x &= 29; \\ S - y &= 32; \\ S - z &= 35; \\ S - w &= 39; \\ S - t &= 41; \end{cases}$$

pois $S-x$ é a soma dos números que Ana escreveu após esconder o número x, $S-y$ é a soma dos números de Ana após esconder o número y, etc. Somando os dois lados das equações acima obtemos que

$$(S-x)+(S-y)+(S-z)+(S-w)+(S-t) = 29+32+35+39+41 = 176.$$

Por sua vez, $(S-x)+(S-y)+(S-z)+(S-w)+(S-t) = 5S - (x+y+z+w+t) = 5S - S = 4S$. Assim, $4S = 176$, ou seja, $S = 44$.

Observe agora que x é o maior dos números da relação de Ana pois $S - x$ tem o menor valor dentre as diferenças acima. Analogamente, verifica-se que t é o menor número dentre os escritos por Ana pois $S - t$ toma o maior valor. Devemos, então, calcular o valor de $x + t$. Somando a primeira e a última equação do sistema de equações, obtemos que $(S - x) + (S - t) = 70$. Assim, $2S - x - t = 70$, ou seja,

$$x + t = 2S - 70 = 88 - 70 = 18.$$

Então a alternativa correta é a da letra d.

5.2 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 5.7 Lucas vai comemorar seu aniversário indo ao cinema com seus amigos. Ele tem um total de 60 reais para comprar x ingressos. Cada ingresso custa 12 reais. Qual das seguintes equações corresponde à situação descrita acima?

(a) $x = 12 \cdot 60$.

(b) $12x = 60$.

(c) $x = \dfrac{12}{60}$.

(d) $60x = 12$.

(e) $12 = \dfrac{x}{60}$.

Exercício 5.8 Joaquim e José colecionam figurinhas. Juntos, eles têm 200 figurinhas. José tem n figurinhas e Joaquim tem 121 figurinhas. Qual das seguintes equações corresponde à situação descrita acima?

(a) $n = 121 + 200$.

(b) $200 + n = 121$.

(c) $121 - n = 200$.

(d) $121 + n = 200$.

(e) $n = 121 - 200$.

Exercício 5.9 Encontre mentalmente a solução de cada um dos problemas abaixo e, em seguida, escreva uma equação que represente cada situação.

(a) Qual é o número que somado a 12 resulta em 21?

(b) Subtraindo 9 de um número, encontramos 17. Que número é esse?

(c) Qual é o número cujo quíntuplo é igual a 35?

(d) A terça parte de um número é igual a 30. Qual é esse número?

(e) Subtraindo 3 unidades de um número, encontramos 9. Que número é esse?

(f) A diferença entre 36 e certo número natural é igual a 15. Qual é esse número?

(g) Qual é o número cujo dobro é igual a $\frac{1}{2}$.

(h) A quinta parte de um número é igual a 0,3. Que número é esse?

Exercício 5.10 Em cada um dos itens a seguir, encontre uma equação para descrever a situação e, em seguida, resolva a equação para solucionar o problema.

(a) Fernando e Gabi adoram fazer cookies. Fernando fez 36 cookies de gotas de chocolate e Gabi fez x cookies tradicionais. Juntos, eles fizeram um total de 64 cookies. Quantos cookies Gabi fez?

(b) Arnaldo e Aline estão guardando dinheiro para comprar um jogo de tabuleiro. Arnaldo já conseguiu guardar 76 reais e Aline y reais. Juntos, os dois guardaram 123 reais. Quanto Aline já conseguiu guardar?

(c) A soma dos números naturais 134 e n é 342. Qual é o número representado pela letra n?

(d) Para pagar uma promessa, Alípio vai fazer uma viagem a pé de Fortaleza a Canindé. Ele pretende percorrer a distância de 100 quilômetros entre as duas cidades em d dias. Qual deve ser o valor de d se Alípio caminhar a uma taxa de 20 quilômetros por dia?

(e) O dobro de um número natural n é igual a 94. Calcule o valor de n.

(f) Alan tinha 17 pares de tênis e doou p desses pares para um orfanato, ficando com 9 pares depois da doação. Quantos pares de tênis ele doou?

(g) Tio Arquimedes distribuiu b bombons entre seus 7 sobrinhos. Se cada sobrinho recebeu 8 bombons, quantos bombons tio Arquimedes distribuiu ao todo?

(h) Gabi produziu um total de 285 trufas de chocolate, trabalhando durante d dias consecutivos. Se ela produziu 19 trufas em cada dia, quantos dias ela levou para produzir todas as trufas?

Exercício 5.11 Dentre as equações abaixo, quais têm $x = 5$ como solução?

(a) $x + 4 = 9$.

(b) $\frac{x}{15} = 3$.

(c) $4 - x = 1$.

(d) $1 + 3x = 16$.

(e) $-10 = -2x$.

(f) $x + 2x + 3x = 25$.

Exercício 5.12 Resolva as equações a seguir.

(a) $x + 1 = 13$.

(b) $y - 2 = 19$.

(c) $m + 8 = 10$.

(d) $p + 7 = 7$.

(e) $t + 191 = 400$.

(f) $x - 132 = 137$.

(g) $17 + m = 13$.

(h) $122 + t = 700$.

(i) $d + 7 = 15$.

(j) $m - 12 = 21$.

(k) $12 + x = 37$.

(l) $52 - y = 66$.

Exercício 5.13 A soma de dois números inteiros consecutivos é 93. Quais são esses números?

Exercício 5.14 Nando vai ao parque aquático com seus amigos. Eles têm um total de 60 reais para comprar m ingressos. Cada ingresso custa 12 reais. Escreva uma equação para representar a situação e, em seguida, resolva a equação para encontrar a quantidade de ingressos que os amigos irão comprar.

Exercício 5.15 Na divisão exata de 63 pelo número n, o quociente é igual a 3. Escreva uma equação para representar a situação e, em seguida, resolva a equação para encontrar o valor de n.

Exercício 5.16 Toda vez que Gabriel leva o lixo até a lixeira, seu pai o recompensa com o valor de 5 reais. Em um determinado mês, Gabriel conseguiu um total de 90 reais, por ter levado o lixo até a lixeira n vezes. Escreva uma equação para representar a situação e, em seguida, resolva a equação para encontrar quantas vezes Gabriel levou o lixo naquele mês.

Exercício 5.17 Em um restaurante, André e seus três amigos decidiram dividir a conta igualmente. Se cada amigo pagou x reais e o valor total da conta foi 96 reais, escreva uma equação para representar a situação e, em seguida, resolva a equação para encontrar o valor pago por cada amigo.

Exercício 5.18 Sexta-feira passada, Abigail tinha R$ 39,00. Durante o fim de semana, ela recebeu n reais por ter ajudado sua mãe com a faxina da casa. Abigail, agora, tem R$ 63,00. Traduza essa situação em uma equação e, em seguida, resolva-a para descobrir quanto Abigail recebeu da mãe pelo auxílio com a faxina.

Exercício 5.19 Joaquim pagou 36 reais por um caderno e um estojo de lápis. O estojo custou o dobro do caderno. Quanto Joaquim pagaria se tivesse comprado dois cadernos?

(a) R$ 12,00.
(b) R$ 18,00.

(c) R\$ 24,00.
(d) R\$ 36,00.
(e) R\$ 48,00.

Nível 2

Exercício 5.20 Resolva as equaçoes abaixo relacionadas.

(a) $5x = 30.$

(b) $15 = 2y.$

(c) $\frac{m}{5} = 14.$

(d) $\frac{3}{y} = 18.$

(e) $\frac{p}{2} = \frac{3}{10}.$

(f) $2x + 3 = 15 - x.$

(g) $5t - 7 = t + 5.$

(h) $\frac{x}{3} + 1 = 7.$

(i) $\frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{m}{2}.$

(j) $\frac{1}{m} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$

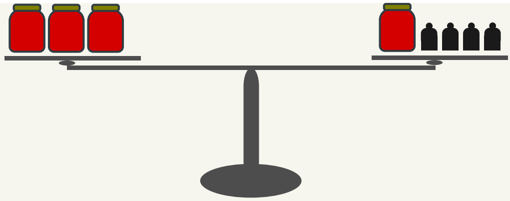
(k) $\frac{3x-1}{5} = 7.$

(l) $\frac{4x+5}{7} = -1.$

(m) $4(x + 1) = 16.$

(n) $5(x - 1) + 12 = -13.$

Exercício 5.21 Vivian vende geleia em uma feira na cidade de Fortaleza. A geleia é comercializada em potes de vidro idênticos. Certo dia, um freguês perguntou a Vivian qual o peso de cada pote (cheio de geleia). Ela dispunha apenas de uma balança de dois pratos e de quatro pesos de 150 gramas cada. Após algumas tentativas, Vivian conseguiu pôr a balança em equilíbrio, como podemos ver na figura que segue.

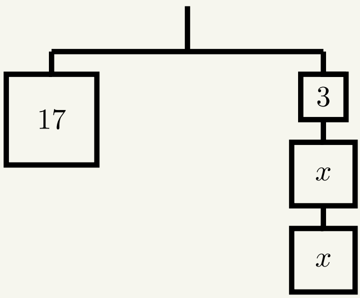


Que resposta Vivian deu ao freguês?

Exercício 5.22 Numa partida de basquete, as duas equipes, juntas, fizeram um total de 105 pontos. Se equipe Alfa fez o dobro de pontos feitos pela equipe Beta, quantos pontos marcou cada equipe?

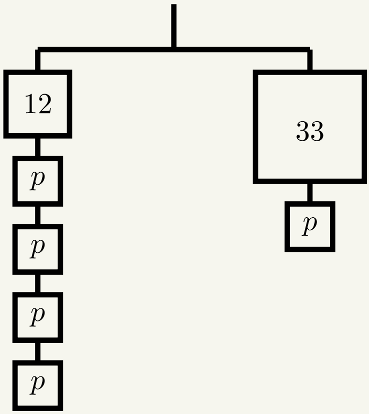
Exercício 5.23 Carlos tomou um táxi com três amigos. Quando eles chegaram ao destino, dividiram a corrida de x reais igualmente entre os quatro. Além da sua parte, Carlos também deu 5 reais de gorjeta ao taxista, tendo gasto um total de 12 reais. Escreva uma equação para representar a situação do problema e, em seguida, calcule o valor x da corrida.

Exercício 5.24 A imagem do cabide abaixo representa uma balança equilibrada.



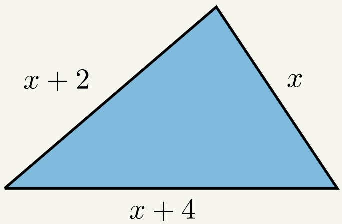
(a) Escreva a equação representada pelo cabide.
(b) Calcule o valor desconhecido x.

Exercício 5.25 A imagem do cabide abaixo representa uma balança equilibrada.



(a) Escreva a equação representada pelo cabide.
(b) Calcule o valor desconhecido p.

Exercício 5.26 O perímetro do triângulo da figura abaixo mede 24 cm. Calcule o valor do menor lado x.



Exercício 5.27 Monalisa pagou R$ 59,00 por sete canetas e um caderno. Sabendo que o preço do caderno foi R$ 17,00, quanto João pagou por duas canetas e um caderno, iguais aos que Monalisa comprou?

(a) R$ 6,00.

(b) R\$ 7,00.
(c) R\$ 23,00.
(d) R\$ 29,00.
(e) R\$ 31,00.

Exercício 5.28 Calos propôs o seguinte desafio a Igor: "*Pensei em um número, subtraí* 7 *unidades, multipliquei o resultado por* 8 *e, finalmente, subtraí* 2 *unidades. O resultado deu* 46*. Em que número pensei?*" Igor, que é muito atento, respondeu corretamente, montando e resolvendo uma equação.

(a) Escreva uma equação que pode ter sido utilizada por Igor para resolver o problema.
(b) Qual a resposta dada por Igor?

Exercício 5.29 O Colégio Alfa organizou uma aula de campo com todos os 343 alunos do Ensino Médio. Seis ônibus viajaram lotados, todos com um mesmo número de estudantes, enquanto os sete estudantes restantes viajaram nos carros de professores. Quantos estudantes estavam em cada ônibus?

Exercício 5.30 A soma de três números consecutivos é 72. Qual é o menor desses números?

Exercício 5.31 A soma de três números pares consecutivos é 144. Quais é o maior desses números?

Exercício 5.32 Maria ganhou uma certa quantidade de gibis de seu pai. Na semana seguinte, ela comprou mais sete gibis. Dias depois, durante uma mudança, ela perdeu a metade de todos os gibis que tinha e ficou com apenas 22 gibis. Quantos gibis Maria ganhou do seu pai?

Exercício 5.33 Joana tinha algumas trufas de chocolate para dividir pra ela e seus quatro filhos. Ela separou dez trufas para si e depois dividiu igualmente a quantidade restante para os quatro filhos, cada um deles tendo recebido duas trufas. Quantas trufas Joana tinha, antes de fazer a divisão?

Exercício 5.34 — OBMEP. Margarida viu no quadro negro algumas anotações da aula anterior, um pouco apagadas, conforme mostra a figura. Qual é o número representado por $\spadesuit$?

$$\frac{2\times 12 - \spadesuit}{3} = 5$$

(a) 9.
(b) 10.
(c) 12.
(d) 13.
(e) 15.

Exercício 5.35 Uma balança de dois pratos é usada para medir 2,5 kg de peixe, da seguinte forma: em um prato está o peixe, no outro um peso de 2 kg e mais um peso de 500 g. O peixe contém, em suas vísceras, um pedaço de chumbo de 200 g. O peso de 500 g, por ser oco, tem na verdade 300 g. Se 1kg desse peixe custa R$ 12,60, o consumidor pagará, na realidade, por kg, o preço de

(a) R$ 14,60.
(b) R$ 15,00.
(c) R$ 15,50.
(d) R$ 16,00.

Nível 3

Exercício 5.36 Resolva as equações abaixo relacionadas.

(a) $3(x-5)+4(x+3)=2x+22.$

(b) $-5(x-1)-2(x-2)=4(x+5).$

(c) $7(y-1)-2(y-5)=3(y-2)+5.$

(d) $-4(t-3)+7(t-1)=-2(t-10)-5(t+2).$

Exercício 5.37 Resolva as equações abaixo relacionadas.

(a) $\dfrac{m}{6}+\dfrac{m}{3}+\dfrac{m}{4}=\dfrac{2m}{3}+1.$

(b) $\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

(c) $\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{y}{4}-14.$

(d) $\dfrac{x-2}{3}+2x=\dfrac{6x+4}{2}.$

(e) $\dfrac{3z}{4}-\dfrac{z}{2}=-2.$

(f) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-3}{3}=6.$

(g) $\dfrac{2t-3}{4}-\dfrac{2-t}{3}=\dfrac{t-1}{3}.$

(h) $\dfrac{3y+5}{2}-\dfrac{2y-9}{3}=\dfrac{5y-3}{2}-\dfrac{3-3y}{3}.$

Exercício 5.38 Resolva as equações abaixo relacionadas.

(a) $3{,}5m + 8 = 2(m + 7)$.

(b) $3(x - 0{,}3) + 5(2x - 0{,}6) = 5x + \dfrac{x}{5}$.

(c) $\dfrac{x + 1{,}2}{5} + \dfrac{x - 1{,}2}{5} = \dfrac{5x - 2}{10}$.

(d) $t + 0{,}1t + 0{,}2t + 0{,}3t + 0{,}4t = -0{,}1t - 0{,}2t - 0{,}3t - 0{,}4t + 0{,}9$.

Exercício 5.39 Os irmãos Jair e Gustavo resolveram economizar dinheiro durante certo período de tempo. Jair conseguiu guardar 3 reais e Gustavo 4 reais em cada dia desse período. No final, o pai deles os presenteou com 50 reais e, assim, eles ficaram com um total de 239 reais. Quantos dias durou o período no qual os irmãos guardaram dinheiro?

Exercício 5.40 — Acafe - SC. Um frasco com dois litros de iogurte contém suco de fruta, leite e mel. A quantidade de leite é o dobro da quantidade de suco de fruta, e a quantidade de mel é a nona parte da quantidade dos outros dois líquidos juntos. A quantidade de suco de fruta que esse frasco de iogurte contém é

(a) 500 ml.
(b) 600 ml.
(c) 750 ml.
(d) 800 ml.

Exercício 5.41 Amarildo foi ao supermercado levando o dinheiro exato para comprar 4 pacotes de macarrão. Chegando lá, ele viu que o preço de cada pacote havia aumentado em R$ 0,50. Desse modo, ele comprou apenas 3 pacotes e voltou pra casa com R$ 2,00 de troco. Quanto Amarildo pagou, em reais, por cada pacote de macarrão?

(a) R$ 5,00.
(b) R$ 4,50.
(c) R$ 4,00.
(d) R$ 3,50.
(e) R$ 3,00.

Exercício 5.42 Carol está viajando de avião. Primeiro ela leu um livro; depois dormiu; depois olhou pela janela e depois bebeu suco de laranja. Cada uma dessas atividades, exceto a primeira, levou exatamente a metade do tempo da anterior. Ela começou a ler seu livro ao meio-dia e terminou seu suco de laranja às 13h00. Quando Carol começou a olhar pela janela?

Exercício 5.43 Em certa cidade, em um período de cinco dias consecutivos, a temperatura mínima registrada diminuiu exatamente 1°C por dia. A média das temperaturas mínimas nesse período foi de 6,5°C. Quais foram as temperaturas mínimas registradas em cada um dos cinco dias?

Exercício 5.44 — CAP - UFRJ. Por falta de tratamento de água, $\frac{1}{4}$ dos peixes que havia num aquário morreu. O equivalente à metade dos que morreram está doente, e há dez peixes saudáveis. Quantos peixes havia inicialmente nesse aquário?

Exercício 5.45 O lado de um triângulo equilátero mede 2 cm a mais do que o lado de um quadrado. Qual é a área do quadrado, sabendo que as duas figuras têm perímetros iguais?

Exercício 5.46 No início de cada mês, Carla separa a metade de seu salário para pagar o aluguel, contas de água, energia e Internet. Ela gasta, ainda, dois quintos de seu salário em gastos com alimentação e transporte. Sobram R$ 480,00, que Carla utiliza com outras despesas. Quanto Carla recebe por mês?

Exercício 5.47 — Unicamp. Uma senhora comprou uma caixa de bombons para seus dois filhos. Um deles tirou para si metade dos bombons da caixa. Mais tarde, o outro menino também tirou para si metade dos bombons que encontrou na caixa. Sabendo que, após isso, restaram 10 bombons, calcule quantos bombons havia inicialmente na caixa.

Exercício 5.48 — OBMEP. Nas balanças, há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

(a) 22 kg.
(b) 23 kg.
(c) 24 kg.
(d) 25 kg.
(e) 26 kg.

Nível 4

Exercício 5.49 — OBM. Os alunos de uma escola participaram de uma excursão, para a qual dois ônibus foram contratados. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31 no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que a mesma quantidade de alunos seja transportada nos dois ônibus?

Exercício 5.50 — OBM. Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas, qual é o peso da barra?

Exercício 5.51 — OBM. Em 31 partidas jogadas, um time de futebol ganhou 8 jogos a mais do que perdeu e empatou 3 jogos a menos do que ganhou. Quantas partidas o time venceu?

Exercício 5.52 — OBM. Um jornal publicou a tabela de um campeonato de futebol formado por quatro times, apresentando os gols marcados e os gols sofridos por cada time. Por uma falha de impressão, a tabela saiu com dois números borrados, conforme reprodução a seguir.

	Gols marcados	**Gols sofridos**
Craques do Momento	8	4
Independentes	1	6
EC Boleiros	4	***
Esmeralda FC	5	***

Sabe-se que o time Esmeralda FC sofreu dois gols a mais que o time EC Boleiros. Quantos gols sofreu o time Esmeralda FC?

Exercício 5.53 — OBM. Numa classe do sexto ano, de cada 11 estudantes, 4 são meninas. Se há 15 meninos a mais do que meninas, quantos alunos há na classe?

Exercício 5.54 — OBM. Os gatos Mate e Tica estão dormindo no sofá. Mate chegou antes e, quando Tica chegou, ela ocupou um quarto da superfície que havia sobrado do sofá. Os dois juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Que parte da superfície do sofá está ocupada por Tica?

Exercício 5.55 — OMCPLP 2013. Xiluva tem laranjas e cestas. Se Xiluva coloca duas laranjas em cada cesta, sobram quatro laranjas. Se ela coloca cinco laranjas em cada cesta, uma cesta fica vazia. Quantas laranjas e cestas tem Xiluva?

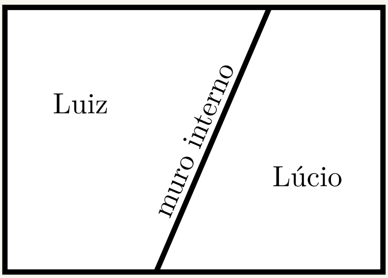
Exercício 5.56 Aristides saiu de casa com certa quantia em dinheiro e foi à feira comprar frutas e verduras. Lá, ele gastou $\frac{2}{9}$ do dinheiro que tinha comprando 2 dúzias de bananas. Depois disso, gastou $\frac{3}{7}$ do que restou com a compra de algumas hortaliças. Aristides reclamou muito da qualidade e do preço das frutas e verduras disponíveis naquele dia e não comprou mais nada. Assim, ele voltou pra casa com os R$ 45,20 que ainda restaram. Quanto Aristides pagou por cada dúzia de bananas?

(a) R$ 11,30.
(b) R$ 22,60.
(c) R$ 56,50.
(d) R$ 33,90.
(e) R$ 45,20.

Exercício 5.57 — OBMEP. Uma melancia média e duas melancias grandes custam o mesmo que oito melancias pequenas. Uma melancia média e uma pequena custam o mesmo que uma melancia grande. Quantas melancias pequenas podem ser compradas pelo mesmo preço de uma melancia grande?

(a) 3.
(b) 4.
(c) 5.
(d) 6.
(e) 7.

Exercício 5.58 — OBMEP. Os irmãos Luiz e Lúcio compraram um terreno cercado por um muro de 340 metros. Eles construíram um muro interno para dividir o terreno em duas partes. A parte de Luiz ficou cercada por um muro de 260 metros e a de Lúcio, por um muro de 240 metros. Qual é o comprimento do muro interno?



(a) 80 m.
(b) 100 m.
(c) 160 m.
(d) 180 m.
(e) 200 m.

Exercício 5.59 — ENEM - 2016. O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei nº 8.213/91, que dispõe[a]:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção.

I. até 200 empregados................2%;
II. de 201 a 500 empregados...........3%;
III. de 501 a 1000 empregados.......4%;
IV. de 1001 em diante..............5%.

Constatou-se que a empresa possui 1200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados. Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93. O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é

(a) 74.
(b) 70.
(c) 64.
(d) 60.
(e) 53.

[a] Disponível em: www.planalto.gov.br. Acesso em: 3 fev. 2015.

Exercício 5.60 — ENEM - 2017. Um marceneiro recebeu a encomenda de uma passarela de 14,935 m sobre um pequeno lago, conforme a

Figura I. A obra será executada com tábuas de 10 cm de largura, que já estão com o comprimento necessário para a instalação, deixando-se um espaçamento de 15 mm entre tábuas consecutivas, de acordo com a planta do projeto na Figura II.

Figura I

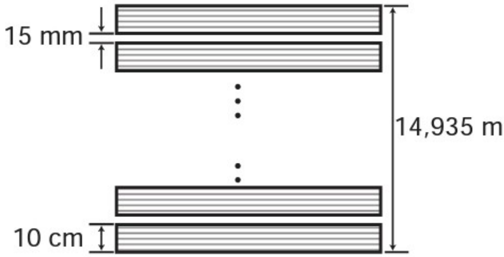


Figura II

Desconsiderando-se eventuais perdas com cortes durante a execução do projeto, quantas tábuas, no mínimo, o marceneiro necessitará para a execução da encomenda?

(a) 60.
(b) 100.
(c) 130.
(d) 150.
(e) 598.

Exercício 5.61 — ENEM - 2018. Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para as suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade, e outra, de 120 hectares, com menor produtividade. A produtividade é dada pela razão entre a produção, em toneladas, e a área cultivada. Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes à da outra. Esse fazendeiro pretende aumentar sua produção total em 15%, aumentando o tamanho da sua propriedade. Para tanto, pretende comprar uma parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras. Qual é a área mínima, em hectares, que o produtor precisará comprar?

(a) 36.
(b) 33.
(c) 27.
(d) 24.
(e) 21.

Exercício 5.62 — ENEM - 2015. A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose de criança} = \frac{\text{idade da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12} \cdot \text{dose de adulto.}$$

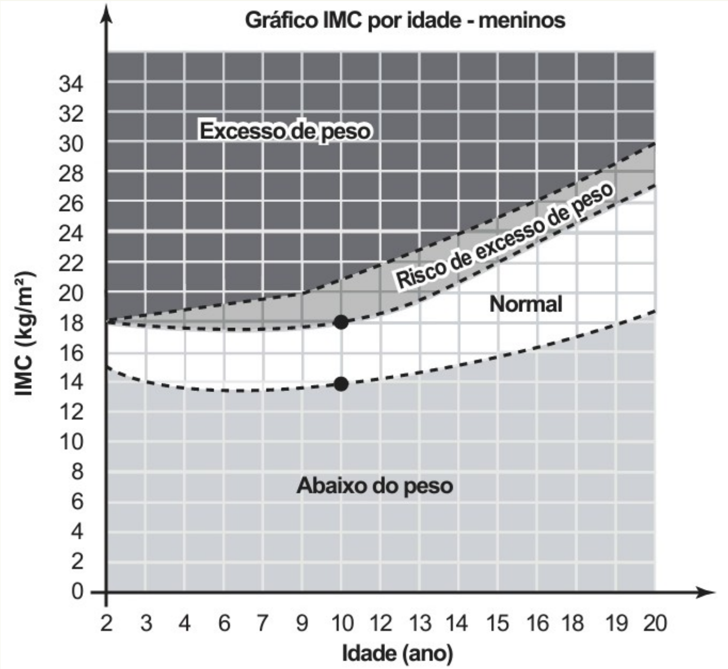
Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta. Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a

(a) 15.
(b) 20.
(c) 30.
(d) 36.
(e) 40.

Exercício 5.63 — ENEM - 2016. O Índice de Massa Corporal (IMC) pode ser considerado uma alternativa prática, fácil e barata para a medição direta de gordura corporal. Seu valor pode ser obtido pela fórmula

$$\text{IMC} = \frac{\text{Massa}}{(\text{Altura})^2},$$

na qual a massa é medida em quilogramas e a altura em metros. As crianças, naturalmente, começam a vida com um alto índice de gordura corpórea, mas vão ficando mais magras conforme envelhecem. Por isso, os cientistas criaram um IMC especialmente para as crianças e jovens adultos, dos dois aos vinte anos de idade, chamado de IMC por idade. O gráfico mostra o IMC por idade para meninos.



Uma mãe resolveu calcular o IMC de seu filho, um menino de dez anos de idade, com 1,20 m de altura e 30,92 kg[a]. Para estar na faixa de IMC considerada normal, os valores mínimo e máximo que esse menino precisa emagrecer, em quilogramas, devem ser, respectivamente,

(a) 1,12 e 5,12.
(b) 2,68 e 12,28.
(c) 3,47 e 7,47.

(d) 5,00 e 10,76.
(e) 7,77 e 11,77.

[a]Disponível em: http://saude.hsw.uol.com Acesso em: 31 jul. 2012.

Exercício 5.64 — ENEM - 2017. A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do *campus* de uma universidade brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada à rede da companhia elétrica distribuidora de energia.

O projeto inclui 100 m^2 de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital serão colocados aproximadamente 300 m^2 de painéis, sendo 100 m^2 para gerar energia elétrica utilizada no *campus* e 200 m^2 para geração de energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar 0,7 kWh por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentada em 75% a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase, também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica[a].

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente em relação à primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metros quadrados, deverá ter o valor mais próximo de

(a) 231.
(b) 431.
(c) 472.
(d) 523.
(e) 672.

[a]Disponível em: http://agenciabrasil.ebc.com.br Acesso em: 30 out.

2013 (adaptado).