MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2022

6

Álgebra Elementar

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica

UFC/FUNCAP/SEDUC

Sumário

1 **Expressões algébricas** 1
1.1 A linguagem da Álgebra 1
1.2 Simplificação e fatoração 8
1.3 Produtos notáveis 12

2 **Números reais** 21
2.1 Números que não são racionais 21
2.2 Números reais e Geometria 25
2.3 A reta real 41

3 **Equações e inequações quadráticas** 67
3.1 Equações quadráticas 67
3.1.1 Equações biquadráticas e equações recíprocas 84
3.2 Inequações quadráticas 95

4 **Introdução às funções quadráticas** 105
4.1 Propriedades básicas das funções quadráticas 105
4.2 Gráfico de uma função quadrática 111
4.3 Aplicações 121
4.3.1 Propriedades geométricas da parábola 121
4.3.2 Movimento uniformemente acelerado em uma reta 125
4.3.3 Frações contínuas e equações quadráticas 127

5 **Problemas Propostos** 131
5.1 Sequência 1 131
5.2 Sequência 2 136
5.3 Sequência 3 140

5.4 Sequência 4 144

1 Expressões algébricas

1.1 – A linguagem da Álgebra

Do que você lembra quando lê a palavra "Álgebra"? A maioria de nós pode lembrar de expressões envolvendo letras e números e ligadas por operações aritméticas. Essas expressões podem ser *equações*, como $x^2 - 5x + 6 = 0$, inequações, como $x + \frac{1}{x} < 0$, identidades, como $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, ou ainda expressões que podem ser simplificadas, como $\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{a^2+b^2}$.

No entanto, o que essas expressões nos dizem pode ser dito de outras maneiras, como usando palavras. Por exemplo, resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ é o mesmo que resolver o seguinte problema: *encontrar dois números cuja soma é* 5 *e o produto é* 6. A inequação $x + \frac{1}{x} < 0$ é equivalente a *encontrar todos os números que somados ao seu inverso resultam em um número negativo*.

Os símbolos da Álgebra são uma maneira específica de escrever Matemática. Mas a Álgebra também tem *métodos*, procedimentos que podem ser usados para resolver problemas, independentemente do uso de uma linguagem simbólica. A maioria dos símbolos que usamos hoje para escrever expressões algébricas, surgiu entre os séculos XVI e XVII. Antes disso, o mais comum era que problemas algébricos fossem descritos e resolvidos usando-se a linguagem usual dos textos, o que tornava a descrição e a solução desses problemas muito mais longas e, às vezes, corria-se o risco de que o texto desse origem a duas ou mais interpretações distintas, ou seja, tivesse certas ambiguidades. Os símbolos da Álgebra formam uma *linguagem* que é usada para *simplificar* e tornar *mais precisa* a descrição e a solução de problemas matemáticos.

Observação 1.1 Muitas idéias e métodos da Álgebra já eram conhecidos em uma antiguidade remota, por egípcios e babilônios, há cerca de 4000 anos! Ideias mais próximas das que usamos hoje na Álgebra escrita com símbolos, surgiram com Diofanto de Alexandria, matemático grego que viveu no terceiro século dC., Brahmagupta, matemático indiano que viveu na primeira metade do século VII dC., e Al-Khwarizmi, que viveu na primeira metade do século XIX dC. Algumas informações interessantes sobre a origem da Álgebra podem ser encontradas no vídeo Origens da Álgebra[1]. Outro vídeo interessante da Academia Khan, sobre as vantagens do uso de letras em Álgebra, pode ser visto aqui: Por que usar letras em Álgebra?[2].

Origens da Álgebra:[1]

Por que tantas letras?[2]

Vamos iniciar estudando algumas situações de "tradução" entre a linguagem simbólica da Álgebra e a linguagem coloquial em Língua Portuguesa.

Exercício 1.1 Escreva, usando linguagem algébrica, uma expressão que resuma o seguinte texto: *são dados três números positivos. Some três números e divida a soma por* 2*. Deste resultado, subtraia cada um dos números com os quais iniciou, obtendo três novos números. Multiplique o primeiro resultado e esses três novos números. Calcule a raiz quadrada desse produto.*

Solução. Chame os três números positivos dados de a, b e c. A primeira instrução é somar os três e dividir a soma por 2: $\frac{a+b+c}{2}$. Vamos chamar essa expressão de s, ou seja, $s = \frac{a+b+c}{2}$. Do resultado, s, devemos subtrair cada um dos números iniciais, obtendo $s - a$, $s - b$ e $s - c$. Multiplicando o primeiro resultado, s, e esses três novos números, $s - a$, $s - b$ e $s - c$, obtemos $s(s-a)(s-b)(s-c)$. A raiz quadrada desse produto é

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1.1}$$

onde $s = \frac{a+b+c}{2}$. Esta é a expressão final, que resulta da sequência de instruções dada no enunciado do exercício. ■

Observação 1.2 A expressão (1.1) é conhecida como *fórmula de Heron*. Ela fornece a área de um triângulo cujos lados têm medidas a, b e c. Embora acredite-se que Arquimedes de Siracura (sec. III aC.) já conhecesse este resultado, o registro mais antigo que sobreviveu encontra-se no tratado *Metrica* de Heron de Alexandria (sec. I, dC). Heron não escreveu seu resultado usando uma fórmula, mas fez uma descrição parecida com a que aparece no enunciado do Exercício 1.1. Curiosamente, Arquimedes e Heron foram criadores de máquinas e mecanismos, como podemos verificar nos vídeos Invenções de Heron[3] eSobre Arquimedes[4].

Invenções de Heron:[3]

Sobre Arquimedes:[4]

Exercício 1.2 Interprete a expressão a^2 geometricamente, lendo-a como "a área do quadrado de lado a". Com isso em mente, escreva uma frase que descreva a identidade $3^2 + 4^2 = 5^2$. É possível descrever essa identidade usando figuras? Se substituirmos 3, 4 e 5 por letras, a, b e c, respectivamente, o que significa $a^2 + b^2 = c^2$?

Solução. A frase que descreve geometricamente a identidade $3^2 + 4^2 = 5^2$ é *a soma das áreas dos quadrados de lado* 3 *e* 4 *é igual à área do quadrado de lado* 5.

Sabe-se, desde a antiguidade, que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo. Na figura a seguir, quatro triângulos retângulos de lados 3, 4 e 5 são dispostos no plano de dois modos diferentes. À esquerda, os quatro triângulos formam, junto com um quadrado de lado 5, um quadrado maior, de lado $7 = 3 + 4$. Na figura da direita, o mesmo quadrado de lado 7 é obtido usando-se os quatro triângulos e dois quadrados, de lados 3 e 4. Isso descreve, geometricamente, a identidade $5^2 = 3^2 + 4^2$.

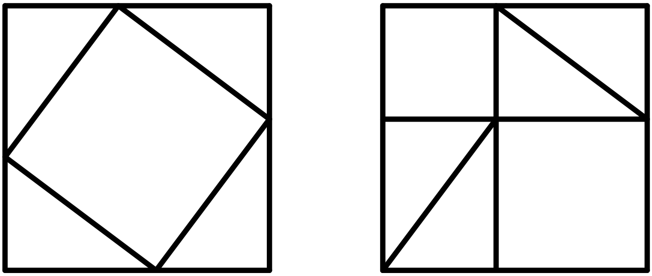


Figura 1.1: uma descrição geométrica da identidade $3^2 + 4^2 = 5^2$.

As figuras acima podem ser construidas com qualquer triângulo retângulo, de lados a, b e c. Isso significa que $a^2 + b^2 = c^2$ em qualquer triângulo retângulo: Teorema de Pitágoras. ■

O uso da simbologia algébrica pode simplificar bastante um problema, como no exercício a seguir.

Exercício 1.3 Há oito anos, eu tinha o triplo da idade de João. Hoje eu tenho o dobro da idade de João. A minha idade, hoje, é

(a) 16.
(b) 24.
(c) 32.
(d) 48.

Solução. Minha idade hoje é x e a idade de João hoje é y. A relação entre as duas idades, hoje, é $x = 2y$. A relação entre as idades, oito anos antes, é $x - 8 = 3(y - 8)$. Podemos substituir $x = 2y$ na última igualdade para encontrarmos $2y - 8 = 3(y - 8)$. Logo, $2y - 8 = 3y - 24$, que pode ser reescrita como $24 - 8 = 3y - 2y$, ou seja, $y = 16$. Essa é a idade de João. A minha idade é $x = 2y = 32$ anos. Item correto: (c). ■

O problema a seguir aparece em um tablete de argila babilônico, conhecido como BM13901, que está hoje no British Museum, em Londres. Este é um texto babilônico antigo que foi escrito há, pelo menos, 3700 anos e que contém 24 problemas envolvendo áreas de retângulos e quadrados.

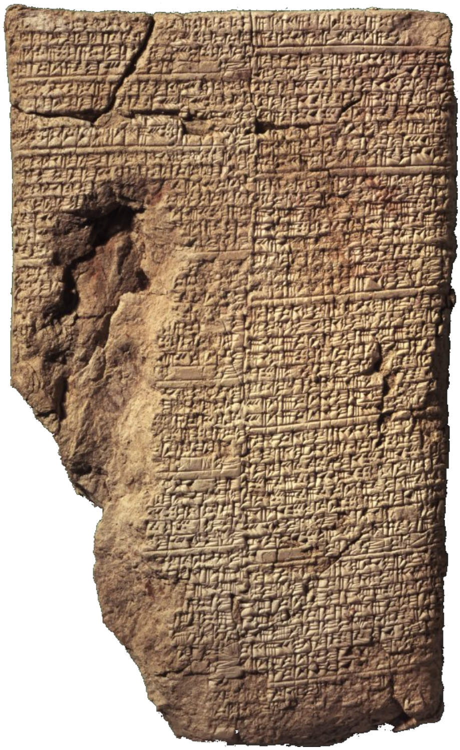


Figura 1.2: o tablete de argila babilônico BM13901.

Exercício 1.4 Considere o problema

"*Subtraí o lado do quadrado de sua área, e o resultado foi* 870. *Calcular o lado do quadrado*".

Além disso, observe a sua solução dada nos seguintes passos.

(1) Tome 1, o coeficiente que diz quantas vezes o lado do quadrado foi *subtraído*. Divida 1 em duas partes: $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

(2) Multiplique a quantidade obtida por ela mesma: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

(3) Adicione o resultado a 870, obtendo 870,25.

(4) A raiz quadrada de 870,25 é 29,5.

(5) Some 29,5 à quantidade, 0,5, que você multiplicou por si mesma, e obtenha o lado do quadrado: $29{,}5 + 0{,}5 = 30$.

Escreva o problema e sua solução em linguagem simbólica.

Solução. O problema é encontrar um número x tal que $x^2 - x = 870$. Esta equação é um caso particular de $x^2 - ax = b$, onde, no nosso caso, $a = 1$ e $b = 870$.

A seguir, vamos "traduzir" os passos (1) a (5) acima para a linguagem algébrica moderna:

(1) Encontrar o coeficiente de ax, que é a, e dividir em duas partes: $\frac{a}{2}$.

(2) Multiplicar por ele mesmo: $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

(3) Adicionar $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ a b, obtendo: $b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

(4) Tomar raiz quadrada: $\sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

(5) Somar a essa raiz quadrada a quantidade $\frac{a}{2}$, para obter a resposta:

$$\frac{a}{2} + \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A expressão do item (5) é um caso particular da fórmula de solução de uma equação quadrática. Substituíndo $a = 1$ e $b = 870$ na expressão do item (5), obtemos a resposta: $x = 30$.

Observe que a solução acima consiste no método de completar quadrados para resolução de equação do segundo grau. Nesse caso, em particular, temos

$$
\begin{aligned}
x^2 - ax = b &: \quad \text{equação a ser resolvida} \\
x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} = b &: \quad \text{passo 1} \\
x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b &: \quad \text{passo 2} \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &: \quad \text{passo 3} \\
x - \frac{a}{2} = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} &: \quad \text{passo 4} \\
x = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} &: \quad \text{passo 5}
\end{aligned}
$$

■

O problema anterior mostra que os antigos, embora não conhecessem a linguagem da álgebra simbólica, podiam resolver problemas usando, em vez de fórmulas, um método, uma sequência de passos, uma *receita*.

Você pode acessar a página do Museu Britânico, BM13901[5] para ver algumas fotos e mais informações (em inglês) sobre o tablete de argila BM13901, visto na Figura 1.2.

BM13901[4]

Exercício 1.5 Suponha que a e b representem dois números não nulos e que o número h pode ser obtido, a partir de a e b, pela

fórmula
$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (1.2)$$
Escreva uma sequência de intruções que indique como obter h a partir de a e b, sem usar símbolos.

Solução. Dados dois números diferentes de zero, determine o inverso de cada um deles. Some esses inversos. Inverta essa soma e obtenha o resultado procurado. ■

1.2 – Simplificação e fatoração

Expressões algébricas envolvem somas e produtos e, portanto, obedecem às leis gerais que as operações de adição e multiplicação satisfazem: comutatividade, associatividade, distributividade, etc. Usando essas leis, podemos escrever certas expressões algébricas de modo mais simples, agrupando termos semelhantes ou colocando fatores comuns em evidência. Vamos esclarecer o significado destas palavras observando alguns exemplos.

Exercício 1.6 Na expressão algébrica a seguir, identifique os termos semelhantes e, se possível, simplifique a expressão.
$$2a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b + 8a^2b^3 - 5a^3b^2.$$

Solução. Um **termo** em uma expressão algébrica é uma parte da expressão que não envolve adição. Assim, $2a^3b^2$ e $-5a^2b^3$ são termos, mas $2a^3b^2 - 5a^2b^3$ e $6a^3b + 8a^2b^3$ não são termos. Um termo tem uma **parte literal**, que é a parte formada por letras, ou produto de potências de letras, e tem um **coeficiente**, que é o número que multiplica a parte literal. Por exemplo, no termo que segue,

$$\overbrace{6}^{\text{coeficiente}}\underbrace{a^3b}_{\text{parte literal}}$$

6 é seu coeficiente e a^3b é sua parte literal. Dizemos que dois termos são **semelhantes** se têm a mesma parte literal. Por exemplo, na expressão algébrica dada no exercício, os termos $2a^3b^2$ e $-5a^3b^2$ são semelhantes. Também são semelhantes os termos $-5a^2b^3$ e $8a^2b^3$.

A comutatividade e a associatividade da adição permitem que simplifiquemos a expressão dada, agrupando os termos semelhantes: $2a^3b^2 - 5a^3b^2 = -3a^3b^2$ e $-5a^2b^3 + 8a^2b^3 = 3a^2b^3$. A expressão pode ser reescrita, então, na forma mais simples

$$3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b.$$

Como não há outros termos semelhantes, não podemos agrupar mais termos nesta expressão. ■

Agrupar termos semelhantes não é a única forma de simplificar uma expressão algébrica. Podemos também fatorá-la, ou seja, escrever a expressão como produto de expressões algébricas mais simples. A ferramenta básica usada na fatoração é a **distributividade** da multiplicação sobre a adição, ou seja, a propriedade

$$a(b + c) = ab + ac. \tag{1.3}$$

Quando lida da esquerda para direita, ela nos diz que o fator "a", que multiplica a soma $b + c$, *distribui* sobre essa soma, e podemos escrever $ab + ac$. Como queremos fazer fatorações, nos interessa mais ler a distributividade da direita para esquerda, ou seja, escrever uma soma do tipo $ab + ac$ na forma $a(b + c)$. Na soma $ab + ac$, o fator a, que aparece nas duas parcelas, chamado **fator comum**, pode ser *colocado em evidência*, o que significa escrever a soma $ab + ac$ como $a(b + c)$.

Podemos colocar um fator comum em evidência em uma soma com mais de duas parcelas. Vejamos um exemplo.

Exercício 1.7 Identifique os fatores comuns na soma

$$3x^3y^2 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 3x^3y^3$$

e coloque-os em evidência.

Solução. Todos os coeficientes são múltiplos de 3, logo, 3 pode ser colocado em evidência:

$$3x^3y^2 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 3x^3y^3 = 3(x^3y^2 - 2x^3y + 3x^2y^2 - x^3y^3).$$

A letra x aparece em todos os termos e o menor expoente com que ela aparece é 2, logo x^2 é um fator comum e pode ser colocado em evidência:

$$3x^3y^2 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 3x^3y^3 = 3x^2(xy^2 - 2xy + 3y^2 - xy^3).$$

A letra y também aparece em todos os termos, com menor expoente 1. Podemos, então, colocar o fator comum y em evidência:

$$3x^3y^2 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 3x^3y^3 = 3x^2y(xy - 2x + 3y - xy^2).$$

Nesta última expressão não há mais fatores em comum que possam ser colocados em evidência. ■

Exercício 1.8 Simplifique a expressão

$$3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b$$

escrevendo-a como produto de expressões mais simples.

Solução. Nos dois primeiros termos da expressão dada, temos o fator comum $3a^2b^2$, que pode ser colocado em evidência:

$$\begin{aligned} 3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b = \\ 3a^2b^2(b-a) + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b. \end{aligned}$$

Os termos $6ab^3$ e $6a^3b$ têm o fator comum $6ab$, que pode ser colocado em evidência:

$$\begin{aligned}3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b &= \\ &3a^2b^2(b-a) + 6ab(a^2+b^2) + 2ab^2 - 2a^2b.\end{aligned}$$

Os termos $2ab^2$ e $2a^2b$ têm $2ab$ como fator comum. Assim,

$$\begin{aligned}3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b &= \\ &3a^2b^2(b-a) + 6ab(a^2+b^2) + 2ab(b-a).\end{aligned}$$

Nessa última expressão, $ab(b-a)$ é o fator comum dos termos

$$3a^2b^2(b-a) \text{ e } 2ab(b-a).$$

Logo,

$$\begin{aligned}3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b &= \\ &ab(b-a)(3ab+2) + 6ab(a^2+b^2).\end{aligned}$$

Finalmente, ab é um fator comum nos dois termos da expressão acima, e podemos colocá-lo em evidência:

$$\begin{aligned}3a^2b^3 - 3a^3b^2 + 6ab^3 + 2ab^2 - 2a^2b + 6a^3b &= \\ &ab\left[(b-a)(3ab+2) + 6(a^2+b^2)\right].\end{aligned}$$

■

Voltando a ver a distributividade em (1.3) da esquerda para direita, podemos usá-la para **expandir produtos**, ou seja, para distribuir uma soma sobre outra. Por exemplo,

$$(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y = ax + bx + ay + by, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)(x+y+z) &= (a+b+c)x + (a+b+c)y + \\ &\quad (a+b+c)z \\ &= ax + bx + cx + \\ &\quad ay + by + cy + az + bz + cz,\end{aligned} \tag{1.5}$$

e assim por diante. Os casos particulares em que $x = a$, $y = b$ e $z = c$ são especialmente importantes e serão tratados na próxima seção.

Exercício 1.9 Encontre a expansão do produto

$$(a+b)(a+c)(b+c).$$

Solução. Vamos primeiro expandir os dois primeiros fatores: $(a+b)(a+c) = (a+b)a + (a+b)c = a^2 + ba + ac + bc$. Assim,

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(b+c) = (a^2+ba+ac+bc)(b+c) = \\ (a^2+ab+ac+bc)b + (a^2+ab+ac+bc)c = \\ a^2b+ab^2+abc+b^2c+a^2c+abc+ac^2+bc^2 = \\ a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc.\end{aligned}$$

Na última igualdade, agrupamos os termos semelhantes. ■

1.3 – Produtos notáveis

Algumas expressões algébricas envolvem o produto de outras expressões mais simples. Aquelas que são mais frequentes são chamadas de **produtos notáveis**, ou ainda, **produtos especiais**. Existem cinco produtos notáveis básicos:

O **quadrado da soma**,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.6}$$

que pode ser obtido por

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 \\ &= a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

Exercício 1.10 Interprete geometricamente o produto notável 1.6.

Solução. Observe a Figura 1.3, a seguir.

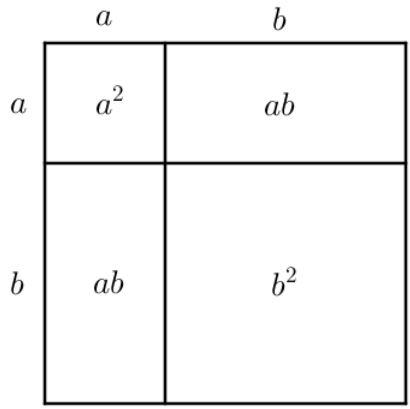


Figura 1.3: interpretação geométrica de (1.6).

O quadrado de lado $a+b$ tem área igual a $(a+b)^2$. Essa área também é a soma das áreas das quatro figuras que, juntas, formam o quadrado. Duas dessas figuras são também quadrados, de lados a e b, portanto, de áreas a^2 e b^2. As outras duas figuras são retângulos de lados a e b, logo ambos têm áreas iguais a ab. Assim, a área do quadrado maior, $(a+b)^2$, é igual à soma das áreas dessas figuras, ou seja, $a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$, e isso explica, geometricamente, o produto notável (1.6). ■

O **quadrado da diferença**,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.7}$$

que pode ser obtido da mesma forma que o quadrado da soma:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Exercício 1.11 Escreva $a = b + a - b$ e use o quadrado da soma para encontrar o produto notável (1.7).

Solução. Elevando a identidade $a = b + a - b$ ao quadrado, obtemos $a^2 = (b+a-b)^2$. Agora, usando o quadrado da soma, obtemos

$$a^2 = (b + (a - b))^2 = b^2 + 2b(a - b) + (a - b)^2.$$

Assim,

$$a^2 = b^2 + 2ba - 2b^2 + (a - b)^2,$$

que é equivalente a $a^2 = -b^2 + 2ab + (a - b)^2$. Isolando o quadrado da diferença em um dos membros, obtemos $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. ■

A **diferença de quadrados**,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \tag{1.8}$$

que pode ser verificada diretamente por

$$\begin{aligned}(a - b)(a + b) &= a^2 + ab - ba - b^2\\ &= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.\end{aligned}$$

O **cubo da soma**,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.9}$$

cuja verificação é dada por

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

O **cubo da diferença**,

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.10}$$

que pode ser justificado da mesma forma que o cubo da soma:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)\\ &= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)\\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

A **diferença de cubos**,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.11}$$

que é obtida multiplicanso-se os fatores no segundo membro:

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.\end{aligned}$$

A **soma de cubos**,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.12}$$

cuja verificação é análoga à do cubo da diferença:

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.\end{aligned}$$

Exercício 1.12 Calcule $(a+b+c)^2$.

Solução. Devemos escrever

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)\\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

■

Exercício 1.13 Fatore a seguinte expressão algébrica

$$a^2 - (b+c)a + bc.$$

Solução. Podemos escrever

$$\begin{aligned}a^2 - (b+c)a + bc &= a^2 - ab - ac + bc\\ &= a(a-b) - c(a-b)\\ &= (a-b)(a-c).\end{aligned}$$

■

Exercício 1.14 Fatore a seguinte expressão algébrica

$$a^3 - (b+c+d)a^2 + (bc+bd+cd)a - bcd.$$

Solução. Temos

$$\begin{aligned}
a^3 - &(b+c+d)a^2 + (bc+bd+cd)a - bcd \\
&= a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd \\
&= (a-b)a^2 - a^2(c+d) + ab(c+d) + (a-b)cd \\
&= (a-b)a^2 - (a^2 - ab)(c+d) + (a-b)cd \\
&= (a-b)a^2 - (a-b)(c+d)a + (a-b)cd \\
&= (a-b)\left[a^2 - (c+d)a + cd\right].
\end{aligned}$$

Pelo resultado do Exercício 1.13,

$$a^2 - (c+d)a + cd = (a-c)(a-d).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
a^3 - (b+c+d)a^2 + &(bc+bd+cd)a - bcd \\
&= (a-b)\left[a^2 - (c+d)a + cd\right] \\
&= (a-b)(a-c)(a-d).
\end{aligned}$$

■

Exercício 1.15 Verifique que

$$\begin{aligned}
a^4 &- (b+c+d+e)a^3 \\
&+ (bc+bd+be+cd+ce+de)a^2 \\
&- (bcd+bce+bde+cde)a + bcde \\
&= (a-b)(a-c)(a-d)(a-e).
\end{aligned}$$

Solução. Poderíamos repetir o que fizemos nos dois exercícios anteriores, mas é muito mais simples começar no segundo membro e realizar a multiplicação dos fatores. Pelo Exercício 1.13,

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e) = \left[a^2 - (b+c)a + bc\right] \cdot \left[a^2 - (d+e)a + de\right].$$

Podemos multiplicar esses dois fatores, entre colchetes, obtendo

$$\begin{aligned}
&\left[a^2-(b+c)a+bc\right]\cdot\left[a^2-(d+e)a+de\right]=\\
&\qquad a^2\left[a^2-(d+e)a+de\right]-(b+c)a\left[a^2-(d+e)a+de\right]+\\
&\qquad bc\left[a^2-(d+e)a+de\right]=\\
&\qquad a^4-(d+e)a^3+dea^2-(b+c)a^3+(b+c)(d+e)a^2-\\
&\qquad de(b+c)a+bca^2-bc(d+e)a+bcde=\\
&\qquad a^4-(b+c+d+e)a^3+(bc+bd+be+cd+de)a^2-\\
&\qquad (bcd+bce+bde+cde)a+bcde.
\end{aligned}$$

Essa última expressão é exatamente o que aparece no primeiro membro da igualdade. ■

Os números $3=2^{2^0}+1$, $5=2^{2^1}+1$, $17=2^{2^2}+1$, $257=2^{2^3}+1$ e $65537=2^{2^4}+1$ são todos primos, ou seja, não podem ser escritos como produto de números naturais menores. O erudito francês Pierre de Fermat (1601–1665) afirmou que, para cada $n\geq 0$ o número

$$F_n=2^{2^n}+1 \tag{1.13}$$

seria primo, o que *não é verdade*. Vamos verificar, no problema a seguir, que $F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$ não é primo.

Uma biografia de Pierre de Fermat pode ser encontrada em Pierre de Fermat[5].

Pierre de Fermat[4]

Exercício 1.16 Encontre uma fatoração para a expressão

$$(1 + ab - b^4)a^4 + 1.$$

Faça $a = 2^7$ e $b = 5$ para concluir que F_5 é divisível por 641.

Solução. Vamos começar pela fatoração

$$\begin{aligned}
(1 + ab - b^4)a^4 + 1 &= (1 + ab)a^4 - a^4b^4 + 1 \\
&= (1 + ab)a^4 + 1 - (a^2b^2)^2 \\
&= (1 + ab)a^4 + (1 - a^2b^2)(1 + a^2b^2) \\
&= (1 + ab)a^4 + (1 + ab)(1 - ab)(1 + a^2b^2) \\
&= (1 + ab)\left[a^4 + (1 - ab)(1 + a^2b^2)\right].
\end{aligned}$$

Nas igualdades acima, fatoramos duas diferenças de quadrados:

$$1 - (a^2b^2)^2 = (1 - a^2b^2)(1 + a^2b^2) = (1 - ab)(1 + ab)(1 + a^2b^2).$$

Substituíndo $a = 2^7$ e $b = 5$, obtemos $1 + ab = 1 + 5 \cdot 128 = 641$ e $1 + ab - b^4 = 1 + 640 - 625 = 16 = 2^4$. Logo,

$$(1 + ab - b^4)a^4 + 1 = 2^4 \cdot (2^7)^4 + 1 = 2^{32} + 1 = F_5.$$

A fatoração que obtivemos mostra, então, que 641 divide F_5 e, portanto, F_5 não pode ser um número primo. ■

A respeito dos *números de Fermat*, você pode acessar os seguintes links (em inglês): Wolfram[5] eOEIS[6].

Wolfram:[5]

OEIS:[6]

Exercício 1.17 Escreva cada expressão a seguir como produto de fatores mais simples.

(1) $x^6 - 729y^6$.
(2) $x^2 + 4x + 4 - y^2 + 2y - 1$.
(3) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 18y + 9$.
(4) $5x^5y - 80xy^5$.

Solução. (1) De início, notemos que $729 = 9 \cdot 81 = 3^2 \cdot 3^4 = 3^6$. Logo, $x^6 - 729y^6 = x^6 - (3y)^6$ é uma diferença de quadrados, que pode ser fatorada como

$$x^6 - (3y)^6 = (x^3 + (3y)^3)(x^3 - (3y)^3).$$

Este é um produto com um dos fatores igual a uma soma de cubos e o outro fator igual a uma diferença de cubos. Eles podem ser fatorados como $x^3 + (3y)^3 = (x + 3y)(x^2 - 3xy + (3y)^2)$ e

$$x^3 - (3y)^3 = (x - 3y)(x^2 + 3xy + (3y)^2).$$

Assim, a expressão inicial pode ser fatorada como

$$x^6 - 729y^6 = (x + 3y)(x - 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)(x^2 + 3xy + 9y^2).$$

(2) Os três primeiros termos formam o quadrado de uma soma:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

Os outros três termos podem ser escritos como

$$-y^2 + 2y - 1 = -(y^2 - 2y + 1) = -(y - 1)^2.$$

Assim, a expressão inicial toma a forma $(x + 2)^2 - (y - 1)^2$, que é uma diferença de quadrado e pode também ser fatorada:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 - y^2 + 2y - 1 &= (x + 2)^2 - (y - 1)^2 \\ &= (x + 2 + y - 1)(x + 2 - (y - 1)) \\ &= (x + y + 1)(x - y + 3). \end{aligned}$$

(3) Os três primeiros termos da expressão formam um quadrado, logo $x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 18y + 9 = (x - 3y)^2 - 6x + 18y + 9$. Podemos ainda colocar -6 em evidência em dois dos termos:

$$(x-3y)^2 - 6x + 18y + 9 = (x-3y)^2 - 6(x-3y) + 9.$$

Essa última expressão é, novamente, um quadrado:

$$(x-3y)^2 - 6(x-3y) + 9 = ((x-3y)-3)^2 = (x-3y-3)^2.$$

(4) Na expressão $5x^5y - 80xy^5$, podemos colocar $5xy$ em evidência, obtendo $5xy(x^4 - 16y^4) = 5xy(x^4 - (2y)^4)$. Como

$$x^4 - (2y)^4 = (x^2)^2 - ((2y)^2)^2,$$

temos uma diferença de quadrados, que pode ser fatorada:

$$x^4 - (2y)^4 = (x^2 + (2y)^2)(x^2 - (2y)^2).$$

O fator $x^2 - (2y)^2$ também pode ser fatorado:

$$x^2 - (2y)^2 = (x+2y)(x-2y).$$

Juntando todas essas informações, obtemos a fatoração da expressão inicial dada por

$$5x^5y - 80xy^5 = 5xy(x^2 + 4y^2)(x+2y)(x-2y).$$

■

2 Números reais

2.1 – Números que não são racionais

Números racionais são os que podem ser representados por frações

$$\frac{a}{b}$$

com numerador inteiro a e denominador inteiro $b \neq 0$.

Os números racionais são aqueles que, quando escritos na forma decimal, admitem uma representação finita ou periódica. Por exemplo,

$$\frac{1}{8} = 0{,}125 \text{ e}$$
$$\frac{1}{11} = 0{,}0909090909...$$

A representação decimal de $\frac{1}{11}$ é periódica, pois os algarismos 0 e 9 se repetem alternadamente. A representação 0,0909090909... é chamada **dízima periódica simples** e o bloco “09” é chamado **período** da dízima.

No entanto, existem números que não são racionais. Vejamos alguns exemplos.

Exercício 2.1 O número $\sqrt{2}$ é racional? Por quê?

Solução. Veremos a seguir que, de fato, o número $\sqrt{2}$ não é racional, ou seja, não pode ser escrito como uma fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

Para isso, vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional e chegaremos a uma contradição. Se $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, podemos supor que a fração $\frac{a}{b}$ está na forma irredutível, ou seja, que a e b não têm fatores em comum. Elevando ao quadrado, obtemos $2 = \frac{a^2}{b^2}$, ou seja, $2b^2 = a^2$. Isso significa que a^2 é par, mas, se o quadrado de um número inteiro é par, então esse número tem que ser par, logo $a = 2k$, com k inteiro. A igualdade $2b^2 = a^2$ pode, então, ser reescrita como $2b^2 = (2k)^2$, isto é, $2b^2 = 4k^2$, o que implica que $b^2 = 2k^2$, ou seja, b^2 é par, donde concluímos que b também é par. Logo a e b são pares e não tem fatores primos em comum, o que é uma contradição.

Esta contradição nos leva a concluir que $\sqrt{2}$ não é racional. ■

Observação 2.1 As representações decimais de números racionais podem ser finitas, por exemplo $\frac{1}{8} = 0{,}125$, $\frac{1}{25} = 0{,}04$, e também podem ser periódicas, por exemplo, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, $\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$, $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$. Dizer que a representação decimal de um número é periódica, significa dizer que, à direita da vírgula, há uma parte que se repete, que chamamos de período. Por exemplo, em $0{,}090909\ldots$, o período é 09. Em $0{,}142857142857\ldots$, o período é 142857.

Um fato importante sobre números racionais é que, *a representação decimal de um número racional sempre é finita ou periódica.* Assim, uma maneira de produzir um número irracional é exigir que sua representação decimal seja infinita e não periódica. Por exemplo, o número $\alpha = 0{,}01001000100001...$ tem parte decimal formada apenas por algarismos 0 e 1, dispostos de tal modo que a quantidade de zeros entre dois algarismos 1 aumenta à medida em que consideramos mais casas decimais. O número α não é racional pois sua representação decimal não é finita nem periódica.

Números como $\sqrt{2}$ ou o número α da Observação 2.1, que são reais mas não são racionais, são chamados de números **irracionais**, porque não podem ser escritos como frações (razões) com numerador e denominador inteiros.

O Exercício 2.2 a seguir trás um método de verificação muito forte para decidirmos se um número é racional ou irracional.

Exercício 2.2 Suponha que $r = \frac{p}{q}$ seja um número racional, com p e q inteiros sem fatores comuns. Suponha que r seja uma das raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.1}$$

onde a, b e c são números inteiros, e $a \neq 0$.

(1) Verifique que p é um divisor de c e q é um divisor de a.

(2) Verifique que o mesmo resultado vale de, em vez de uma equação polinômial quadrática, como em (2.1), tivermos uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{2.2}$$

onde $a_0, \ldots, a_n$ são números reais e $a_n \neq 0$. Neste caso, se $r = \frac{p}{q}$ é raiz da equação (2.2), com p e q sem fatores em comum, então p divide a_0 e q divide a_n.

(3) O número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é racional?

Solução. (1) Como r é uma das raízes da equação dada, temos $ar^2 + br + c = 0$, ou seja, $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$. Multiplicando essa igualdade por q^2, obtemos

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0,$$

de onde deduzimos duas igualdades:

$$ap^2 = -(bp + cq)q \quad \text{e}$$

$$cq^2 = -(ap + bq)p.$$

Como a, b e c são inteiros, temos que q divide ap^2 e p divide cq^2. Como q não tem fatores em comum com p, essas relações de divisibilidade implicam que q divide a e p divide c.

(2) Aqui o argumento anterior se repete: $a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ implica $a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_n\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$. Multiplicando por q^n, obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

de onde deduzimos as igualdades

$$a_n p^n = -(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1})q \quad \text{e}$$

$$a_0 q^n = -(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1})p.$$

Assim, q divide $a_n p^n$ e p divide $a_0 q^n$. Como p e q não têm fatores em comum, essas relações implicam que p divide a_0 e q divide a_n.

(3) Se $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, então, elevando ao quadrado,

$$r^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3, \text{ ou seja, } r^2 - 5 = 2\sqrt{6}.$$

Elevando ao quadrado novamente, $(r^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$. Logo, $r^4 - 10r^2 + 25 = 24$, ou seja, $r^4 - 10r^2 + 1 = 0$. Assim, r é raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Vamos supor que r é um número racional e chegar a uma contradição. Se r é um número racional, então $r = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e sem fatores primos em comum. Pelo item (2), como $r = \frac{p}{q}$ é raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, segue que p divide 1 e q também divide 1, mas isso implica que $r = \frac{p}{q}$ é igual a -1 ou a 1. Como $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$, temos $r \neq -1$. Logo, $r = 1$, ou seja, $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1$, o que é uma contradição porque $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 2$, visto que $\sqrt{2} > 1$ e $\sqrt{3} > 1$. Portanto, r não é um número racional. ■

Observação 2.2 Na Seção 3.1 iremos verificar que $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional resolvendo a equação *biquadrática* $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ (veja o Exercício 3.21).

Exercício 2.3 Se a é um número inteiro positivo e n é um número natural, então podemos afirmar que o número real $\sqrt[n]{a}$

(a) é sempre racional.
(b) nunca é racional.
(c) se for racional, tem que ser inteiro.
(d) não pode ser um número inteiro.

Solução. O número real $r = \sqrt[n]{a}$ é raiz da equação $x^n - a = 0$. Se $r = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros, ou seja, se r for um número racional, então, pelo resultado do Exercício 2.2, o denominador q tem que dividir o coeficiente de x^n, que é 1, logo, $q = -1$ ou $q = 1$ e $r = \frac{p}{q} = p$ ou $r = \frac{p}{q} = -p$. Assim, se $\sqrt[n]{a}$ for um número racional, ele é, necessariamente, um número inteiro. A alternativa do item (c) é a correta. ■

2.2 – Números reais e Geometria

Atribui-se a Hipaso de Metaponto, um pitagórico que viveu no século V aC., a descoberta da existência de segmentos incomensuráveis, indo contra um dos princípios da escola pitagórica, de que quaisquer medidas poderiam ser feitas usando-se apenas números racionais, que podem ser obtidos a partir de uma unidade multiplicando-se e dividindo-se essa unidade em partes iguais.

De um modo mais preciso, um segmento de reta a pode ser medido usando-se um outro segmento e como unidade de medida. Se e cabe um número inteiro n de vezes em a, isto é, se n cópias do segmento de reta e, colocadas lado a lado, cobrem perfeitamente o segmento a, dizemos que a tem medida n, ou que mede n unidades e.

Dois segmentos a e b são ditos **comensuráveis** se existe um segmento e que, quando tomado como unidade de medida, faça com que a e b tenham ambos medidas inteiras, isto é,

$$a = m \times e = \overbrace{e + \cdots + e}^{m} \quad \text{e}$$

$$b = n \times e = \underbrace{e + \cdots + e}_{n},$$

onde m e n são inteiros positivos. O segmento e é chamado **medida comum** de a e b. Neste caso, a *razão* entre os segmentos a e b é o número racional m/n.

Exercício 2.4 Pedro e Miguel resolveram medir o comprimento de uma sala, usando seus pés como unidades de medida. Após as medições, eles concluíram que o comprimento da sala é 25 pés de Pedro e 30 pés de Miguel. Podemos afirmar corretamente que

(a) o pé de Pedro é 20% maior que o pé de Miguel.
(b) o pé de Pedro é 16,6% maior.
(c) o pé de Miguel é 20% menor.
(d) os dois têm pés de mesmo tamanho.

Solução. Seja p o comprimento do pé de Pedro e m o comprimento do pé de Miguel. Seja L o comprimento da sala. Temos $L = 25p$ e $L = 30m$, logo $25p = 30m$, ou seja, $5p = 6m$. Assim,

$$p = \frac{6m}{5} = (1{,}2)m = m + 0{,}2m,$$

ou seja, o pé de Pedro é 20% maior que o pé de Miguel. Note que o pé de Miguel **não** é 20% menor que o pé de Pedro, pois

$$m = \frac{5p}{6} = p - \frac{p}{6} \cong p - (0{,}16)p.$$

Logo, o pé de Miguel é cerca de 16% menor que o pé de Pedro. Portanto, a afirmação correta é a do item (a). ■

Na prática, ao fazermos medições usando unidades de medida físicas, como palmos, pés, passos, etc., encontramos valores aproximados para a razão entre as medidas, como no Exemplo 2.5 abaixo. Isso pode ter sido a motivação para que os pitagóricos acreditassem que a razão entre as medidas de dois segmentos sempre fosse um número racional. No entanto, a Geometria lida com figuras ideais, que não são realizáveis fisicamente, mas existem apenas como construções mentais, ou seja, objetos idealizados. Neste caso, podem existir segmentos incomensuráveis.

Exercício 2.5 Salomedes tem uma piscina circular em sua casa. Andando dentro da piscina, ele deu 7 passos para percorrer o diâmetro. Andando em torno da piscina, ele deu 22 passos para dar uma volta completa. Após fazer essas medições, Salomedes afirmou que tinha determinado o valor do número π. Podemos afirmar corretamente que

(a) Salomedes encontrou o valor exato $\pi = 3{,}\overline{142857}$.
(b) Salomedes encontrou 3,1 como uma aproximação para o número π.
(c) Salomedes encontrou uma aproximação do número π, dada pela fração $\frac{22}{7}$.
(d) Salomedes não pode encontrar uma aproximação do número π dessa maneira.

Solução. O número π é, por definição, a razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro. As medições de Salomedes indicam que sua piscina tem 22 passos de circunferência e 7 passos de diâmetro, o que indica a Salomedes, um valor para π, dado pela fração

$\frac{22}{7}$. Escrito na forma decimal, esta fração gera a dízima periódica $3{,}\overline{142857}$, onde a barra horizontal indica que os números sob ela se repetem indefinidamente. Esse valor, no entanto, *não é exato*, porque π não é um número racional. Portanto, $\frac{22}{7}$ é um valor aproximado para o número π. A afirmação correta é a do item (c). ■

Observação 2.3 O número π é, provavelmente, a constante mais famosa e importante da Matemática. Ele ocorre em praticamente todas as culturas antigas, mesmo que de forma toscamente aproximada, pois está associado à figura importante do círculo, símbolo de perfeição, do infinito[a] e do eterno retorno.

No Antigo Testamento, Livro dos Reis, capítulo 7, versículo 23, descreve-se uma piscina mandada fazer pelo Rei Salomão: *Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até à outra borda, perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor.* Daí pode-se deduzir que $\pi = \frac{30}{10} = 3$, que é uma aproximação precária de π.

Arquimedes encontrou uma aproximação melhor para π como sendo $3\frac{1}{7}$, ou seja, $\frac{22}{7}$. O nome "Salomedes", dado ao personagem de nosso problema é uma junção de Salomão com Arquimedes.

O matemático suiço Johann Heinrich Lambert (1728–1777) foi o primeiro a demonstrar que π é irracional, em 1768.

[a]Na antiguidade, antes de o símbolo "0" ser usado para designar o zero, o círculo simbolizava o infinito, pois não tem começo nem fim. O símbolo "∞" foi introduzido pelo matemático britânico John Wallis (1616–1703) em 1665, no seu tratado *De sectionibus conicis.*

Uma maneira prática de encontrar a medida comum e, de dois segmentos comensuráveis dados a e b, é dada na proposição 3 do livro X dos Elementos de Euclides. Trata-se, simplesmente, do algoritmo da divisão. Descrevemos, abaixo, o modo como Euclides exibe o algoritmo.

(a) Se a e b são segmentos congruentes, nada há a fazer. Suponhamos, pois, que um dos segmentos é menor que o outro, digamos $a < b$.

(b) Retiremos de b o maior número possível n_0 de segmentos congruentes a a, obtendo a_1, tal que

$$b = n_0 a + a_1 \ \text{ e } \ 0 \leq a_1 < a.$$

Se $a_1 = 0$, então, com $e = a$, a e b são segmentos múltiplos de e e o algoritmo termina.

(c) Caso $0 < a_1 < a$, repitamos o procedimento anterior, para obtermos um segmento a_2 tal que

$$a = n_1 a_1 + a_2 \ \text{ e } \ 0 \leq a_2 < a_1.$$

Se $a_2 = 0$, então, com $e = a_1$, a e b são segmentos múltiplos de e.

(d) Caso $0 < a_2 < a_1$, repitamos, novamente, o referido procedimento, para obtermos um segmento a_3 tal que

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3 \ \text{ e } \ 0 \leq a_3 < a_2.$$

Se $a_3 = 0$, então, com $e = a_2$, a e b são segmentos múltiplos de e.

(e) Caso $0 < a_3 < a_2$, repita os passos acima, até que $a_i = 0$, para algum $i \geq 1$, pois $0 \leq \cdots \leq a_3 < a_2 < a_1 < a$. Quando isso ocorre, com $e = a_{i-1}$, a e b são segmentos múltiplos de e, ou seja, e é a medida comum de a e b.

A partir do algoritmo acima, podemos expressar a/b em função da sequência $n_0, \ldots, n_i$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{n_0 a + a_1} = \frac{1}{n_0 + \dfrac{a_1}{a_0}} = \frac{1}{n_0 + \dfrac{1}{n_1 + \dfrac{a_2}{a_1}}}$$

$$= \cdots = \frac{1}{n_0 + \dfrac{1}{n_1 + \cdots + \dfrac{1}{n_{i-1} + \dfrac{1}{n_i}}}}$$

A combinação de frações

$$[0; n_0, n_1, \ldots, n_i] = \cfrac{1}{n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cdots + \cfrac{1}{n_{i-1} + \cfrac{1}{n_i}}}}$$

é chamada **fração contínua** da razão $\frac{a}{b}$.

Exercício 2.6 Escreva o número racional $\frac{17}{12}$ como uma fração contínua.

Solução. Começamos dividindo 17 por 12, obtendo $17 = 12 + 5$. Logo, $\dfrac{17}{12} = \dfrac{12+5}{12} = 1 + \dfrac{5}{12} = 1 + \dfrac{1}{12/5}$. Dividindo 12 por 5, obtemos $12 = 2 \cdot 5 + 2$. Logo, $\dfrac{12}{5} = \dfrac{2 \cdot 5 + 2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$. Assim,

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{12/5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5/2}}.$$

Dividindo 5 por 2, obtemos $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Logo, $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ e, assim,

$$\frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5/2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$$

A divisão seguinte seria 2 dividido por 1, mas essa divisão deixa resto zero, logo não vai mais modificar a fração contínua. Portanto, na notação que estabelecemos anteriormente,

$$\frac{17}{12} = [1; 2,2,2].$$

■

Exercício 2.7 A fração $a_0 = \frac{17}{12} = [1; 2,2,2]$, escrita na forma decimal, é igual a $1{,}41666\ldots$. Encontre a forma decimal das frações contínuas $a_1 = [1; 2,2,2,2]$ e $a_2 = [1; 2,2,2,2,2]$.

Solução. Temos

$$a_1 = [1;2,2,2,2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{17}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29} \cong 1{,}413793103 \quad \text{e}$$

$$a_2 = [1;2,2,2,2,2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{41}{29}}$$

$$= 1 + \frac{1}{70/29} = 1 + \frac{29}{70} = \frac{99}{70} \cong 1{,}414285714.$$

■

Exercício 2.8 Determine a expansão dos seguintes números racionais como frações contínuas:

(1) $\frac{17}{7}$.
(2) $\frac{13}{31}$.
(3) $\frac{55}{34}$.
(4) $\frac{158}{49}$.

Solução. Temos as seguintes expansões.

$$(1)\quad \frac{17}{7}=\frac{14+3}{7}=2+\frac{3}{7}=2+\frac{1}{7/3}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}.$$

$$(2)\quad \frac{13}{31}=\frac{1}{31/13}=\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{13}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{13/5}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

$$(3)\quad \frac{55}{34}=1+\frac{21}{34}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{13}{21}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{13}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{8}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}.$$

(4) $$\frac{158}{49} = 3 + \frac{20}{49} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{20}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{9}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

■

Para os pitagóricos, o algoritmo para determinar uma fração contínua sempre terminava após um número finito de passos. Assim, dados dois segmentos de reta, existiria sempre uma medida comum e todos os segmentos de reta seriam comensuráveis. Isto também significa que, para os pitagóricos, uma fração contínua sempre seria finita. Hipaso, no entanto, conseguiu produzir uma fração contínua infinita, gerada a partir de dois segmentos de reta incomensuráveis.

A insígnea da escola pitagórica era o **pentagrama**, que é a figura obtida traçando-se as diagonais de um pentágono regular.

Esta figura foi largamente difundida entre astrólogos e esotéricos e, até a idade média, acreditava-se que ela retinha grande poder místico.

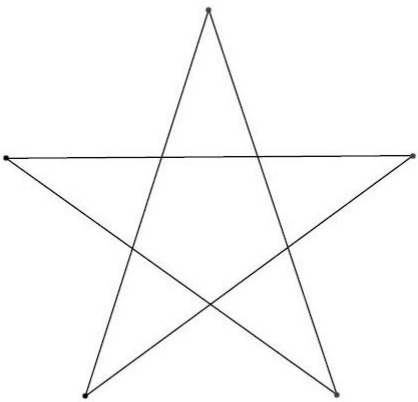


Figura 2.1: o pentagrama.

Dada a importância do pentagrama para a escola pitagórica, supõe-se que Hipaso tenha descoberto a existência de segmentos incomensuráveis estudando esta figura. Não há porém, documentação que comprove isto.

Exercício 2.9 A razão ϕ entre a diagonal d e o lado a de um pentágono regular – $\phi = \dfrac{d}{a}$ – é conhecida como **razão áurea**, ou **número de ouro**. Este número é racional?

Solução. Observando a Figura 2.2, vemos que $a = \overline{AE}$ e $d = \overline{AD}$. O triângulo AEH é isósceles, com $a = \overline{AE} = \overline{AH}$. Os triângulos DEH e ADE são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DH}}.$$

Como $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH} = \overline{AD} - \overline{AE} = d - a$, a igualdade acima toma a forma

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}. \tag{2.3}$$

Podemos, então, escrever

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} = 1 + \frac{d}{d-a} = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{a}{d}} = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{d-a}{a}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a-d}{a}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{a}{a-d}}}.$$

Este procedimento pode ser repetido, o que equivale a considerar um pentagrama menor semelhante ao original desenhado na figura 2.1. Mais ainda, este procedimento pode ser repetido indefinidamente. Assim, obtemos

$$\phi = \frac{d}{a} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = [1; 1,1,1, \ldots],$$

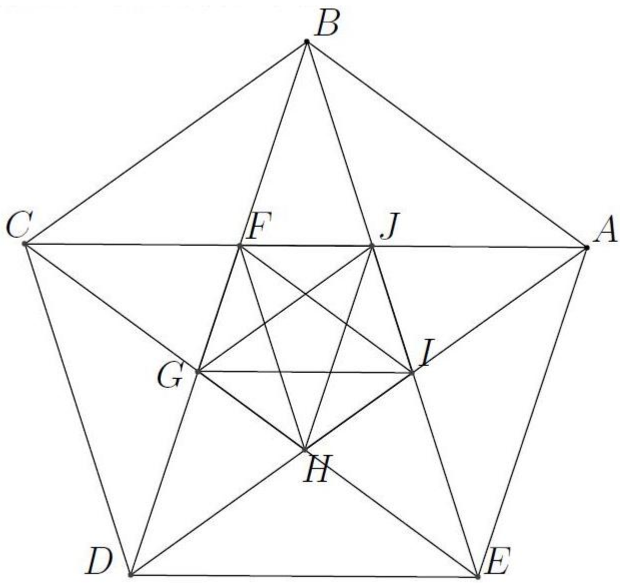


Figura 2.2: os dois primeiros passos de um processo que não termina.

o que significa que o algoritmo de Euclides não termina em um número finito de etapas. Isso diz que não podemos encontrar uma medida comum para d e a, ou seja, os dois segmentos são incomensuráveis, o que é o mesmo que dizer que a razão $\phi = \frac{d}{a}$ não é racional. ∎

Baseado em fatos deste tipo, Hipaso concluiu que existem segmentos de reta **incomensuráveis**, isto é, que não admitem uma medida comum. No exemplo descrito acima, a diagonal d e o lado a do pentágono regular, são incomensuráveis.

As frações

$$1,\ 1+\frac{1}{1}=2,\ 1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}$$

$$\text{e } 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=\frac{8}{5}$$

são aproximações de ϕ. Em geral, a sequência de frações contínuas finitas do tipo

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots+\cfrac{1}{1+1}}}$$

tem o aspecto

$$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\ldots,\frac{F_n}{F_{n+1}},\ldots$$

onde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \geq 2$. A sequência $F_1,F_2,\ldots,F_n,\ldots$, é chamada **sequência de Fibonacci**, em homenagem a Leonardo de Pisa, ou Leonardo Fibonacci (1170–1250), pioneiro no seu estudo.

Exercício 2.10 Se d é a diagonal e a é o lado de um pentágono regular, como no Exercício 2.9, então a razão $\phi = \frac{d}{a}$ é igual a

(a) $\sqrt{5}$.
(b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
(c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
(d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solução. Na solução do Exercício 2.9, encontramos a igualdade (2.3):

$$\frac{d}{a}=\frac{a}{d-a},$$

que é equivalente a $d^2 - ad - a^2 = 0$. Dividindo por a^2, encontramos

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2-\frac{d}{a}-1=0.$$

Sendo $\frac{d}{a} = \phi$, obtemos

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Resolvendo essa equação quadrática, obtemos

$$\phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ ou } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Como d e a são positivos, a razão $\phi = \frac{d}{a}$ também é positiva, logo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, a alternativa correta é a do item (d). ■

No exercício a seguir, encontramos um segundo modo de explicar porque $\sqrt{2}$ não é racional.

Exercício 2.11 Obtenha a representação de $\sqrt{2}$ como fração contínua. Use essa representação para concluir que $\sqrt{2}$ não é racional.

Solução. Começamos observando que

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1.$$

Logo, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Isso nos permite escrever

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Substituindo o $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ na última fração, obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}.$$

Fazendo a mesma substituição novamente, obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}}$$

e é claro que podemos continuar substituíndo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ na última fração. Dessa forma, o processo de construção da representação de $\sqrt{2}$ como fração contínua não termina. Isso significa que a representação

$$\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \ldots]$$

de $\sqrt{2}$ como fração contínua é *infinita*, logo $\sqrt{2}$ não pode ser racional. ■

Observação 2.4 As frações $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$ e $\frac{99}{70}$, que obtivemos no Exercício 2.6, correspondem às frações contínuas $[1; 2,2,2]$, $[1; 2,2,2,2]$ e $[1; 2,2,2,2,2]$. Logo, são aproximações de $\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \ldots]$.

Neste capítulo, já explicamos de duas maneiras diferentes que $\sqrt{2}$ não é racional, nos exercícios 2.1 e 2.11. No Exercício a seguir, daremos uma terceira justificativa, desta vez, geométrica, para este fato.

Exercício 2.12 Considere o quadrado de lado 1 e diagonal dada, pelo Teorema de Pitágoras, por $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Supondo que o lado e a diagonal sejam comensuráveis, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional, construa, a partir de um dos triângulos isósceles determinados pela diagonal do quadrado, triângulos semelhantes, com lados inteiros, arbitrariamente pequenos. Conclua, a partir da impossibilidade dessa construção, que $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Solução. Supor que 1 e $d = \sqrt{2}$ são comensuráveis é equivalente a supor que existe uma medida comum e tal que $1 = be$ e $d = ae$, ou seja, $\sqrt{2} = d = ae = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos.

Podemos considerar um novo quadrado com razão de semelhança b em relação ao quadrado de lado 1. Assim, o novo quadrado tem lado b e diagonal a, como indicado na Figura 2.3, a seguir.

Seguindo o roteiro sugerido no enunciado do exercício, indicaremos como construir um triângulo CEF, com lados inteiros, semelhante ao triângulo inicial ABC, como pode ser visto na Figura 2.4.

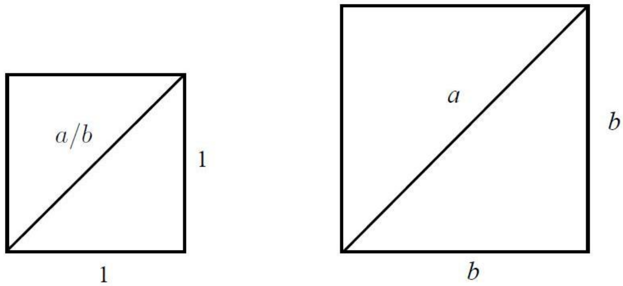


Figura 2.3: Dois quadrados com razão de semelhança b.

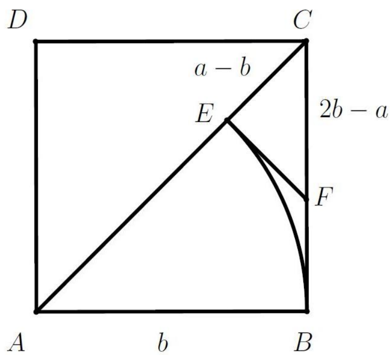


Figura 2.4: a partir do triângulo ABC, podemos construir o triângulo CEF que ainda tem lados inteiros.

Inicialmete, tracemos um arco de circunferência, com centro no ponto A e raio $\overline{AB} = b$. Seja E o ponto onde esse arco corta a diagonal AC do quadrado. Temos: $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = a - b$. Pelo o ponto E tracemos uma perpendicular à diagonal AC, que corta o lado BC no ponto F. Como FE e FB são tangentes a uma mesma circunferência, temos $\overline{FE} = \overline{FB}$. Por outro lado, o triângulo CEF é retângulo e um de seus angulos internos mede $45°$, logo é um triângulo isósceles, com $\overline{FE} = \overline{EC} = a - b$. Assim, $\overline{FB} = \overline{FE} = a - b$ e $\overline{CF} = \overline{BC} - \overline{FB} = b - (a - b) = 2b - a$.

Portanto, o triângulo CEF é semelhante ao triângulo ABC e possui os lados inteiros. Agora vamos ao passo crucial: **podemos repetir este procedimento para o triângulo CEF**, de modo a obtermos um outro triângulo ainda menor, semelhante a CEF, e com os três lados inteiros. Como este procedimento pode ser repetido indefinidamente, podemos obter triângulos arbitrariamente pequenos com lados inteiros. Em particular, existe um triângulo semelhante a ABC, com lados inteiros e contido em um círculo de diâmetro 1. Isso é impossível, pois os lados do triângulo, sendo inteiros positivos, devem ser necessariamente maiores que ou iguais a 1, mas estando o triângulo contido em um círculo de diâmetro 1, pelo menos um dos seus lados deve ser menor que o diâmetro, ou seja, menor que 1. Evidentemente, isto é um absurdo, pois não existem números inteiros positivos menores que 1. A contradição veio de supormos que a diagonal do quadrado de lado 1 é um número racional. Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser racional. ■

O conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é formado pelos pares ordenados (m,n), onde m e n são números inteiros. Esses pares ordenados são representados por pontos no plano cartesiano, distribuidos de maneira homogênea, que chamamos de **reticulado**, conforme vemos na Figura 2.5. No Exercício 2.13 a seguir, vamos usar a noção de reticulado.

Exercício 2.13 Considere, no plano cartesiano, o conjunto R formado pelos pontos cujas coordenadas são números inteiros. Um desses pontos é a origem $O = (0,0) \in R$. Considere a reta r que passa pela origem e forma, com a parte positiva do eixo x, um ângulo de $60°$. Existe algum ponto $P \neq O$ da reta r, que pertença ao conjunto R?

Solução. A equação da reta r é $y = mx$, onde o coeficiente angular m é igual à tangente do ângulo formado entre a reta e a parte positiva do eixo x, ou seja, $m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Se um ponto $(m,n) \neq (0,0)$, com coordenadas inteiras, pertencesse a r, então $n = \sqrt{3}m$, isto é, $\sqrt{3} = \frac{n}{m}$ seria um número racional. Como sabemos que $\sqrt{3}$ não é racional, pela solução do Exercício 2.3, podemos concluir que nenhum ponto do plano cartesiano com coordenadas inteiras, diferente da origem, pertence à referida reta. ■

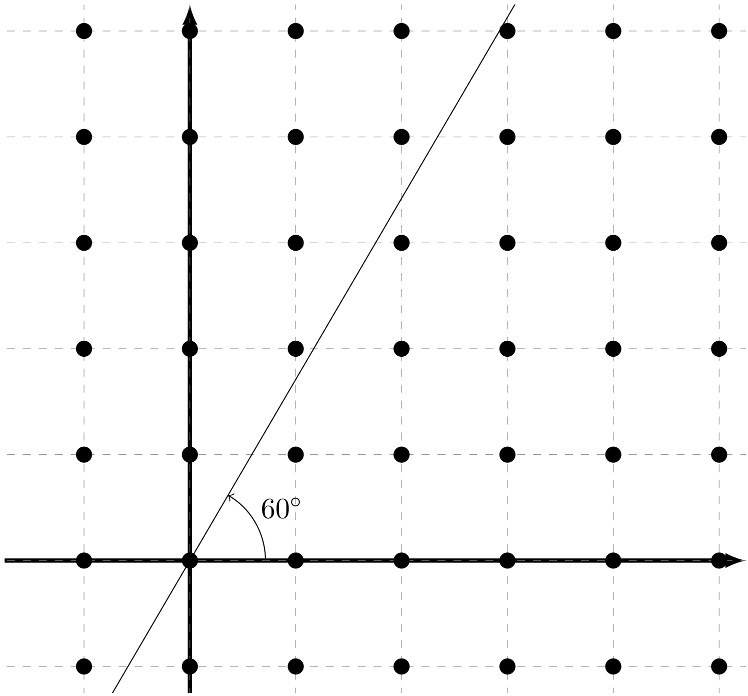


Figura 2.5: a reta r e alguns pontos do reticulado no plano.

2.3 – A reta real

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser representado geometricamente por uma reta, onde cada ponto corresponde a exatamente um número real. Uma reta, com essa correspondência, é chamada de **reta real** ou de **eixo**. O número real que corresponde a um ponto P é chamado **coordenada** de P.

Para estabelecer uma correspondência entre números e pontos, basta escolhermos *dois* pontos na reta, um ponto O, com coordenada 0 e outro ponto, U, com coordenada 1. Uma vez feitas essas escolhas, a correspondência entre todos os outros pontos da reta e os números reais fica estabelecida.

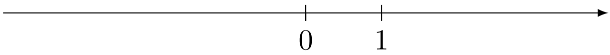


Figura 2.6: uma vez escolhidos dois pontos da reta, ela ganha uma orientação.

A escolha dos pontos O e U que correspondem, respectivamente, aos números 0 e 1, determina uma *unidade de medida* sobre a reta real, que é o comprimento do segmento de reta OU. Essa escolha também determina a orientação da reta. Adotamos a convenção de escolher o ponto U, correspondente ao número 1, à direita do ponto O, correspondente a 0. Neste caso, dizemos que o *sentido de crescimento* da reta é da esquerda para direita.

Mais precisamente, se A e B são pontos da reta orientada, e a e b são suas coordenadas, então A está à esquerda de B se, e somente se, a é menor que b. Escrevemos $a < b$ para indicar que o número a é menor que o número b. Se $a < b$ ou $a = b$, escrevemos $a \leq b$ e dizemos que a é menor que ou igual a b. Escrevemos $b > a$ para indicar que b é maior que a, o que é o mesmo que escrever $a < b$. Também escrevemos $b \geq a$ e lemos "b é maior que ou igual a a" e isso é equivalente a escrever $a \leq b$. Podemos ainda entender a notação $a < b$ como sendo $a \leq b$ e $a \neq b$.

Observação 2.5 Se A é um ponto sobre a reta real e a é a sua coordenada, ou seja, é o número real correspondente, usaremos a identificação entre A e a e escreveremos "ponto a" em vez de "ponto A cuja coordenada é a". Dessa forma, usaremos a mesma letra que representa um número real, "a" por exemplo, também para representar o ponto correspondente na reta real. Com esta adaptação, algumas frases do parágrafo anterior, por exemplo, ficam mais simples. Por exemplo, $a < b$ significa que, na reta real, a está à esquerda de b.

A relação "$\leq$" entre elementos de $\mathbb{R}$ é chamada **relação de ordem**. Ela tem as seguintes propriedades básicas:

(I) **reflexividade**: $a \leq a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.
(II) **antissimetria**: se $a,b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.
(III) **transitividade**: se $a,b,c \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.
(IV) Ela é uma relação de ordem **total**, ou **linear**: se $a,b \in \mathbb{R}$, então $a \leq b$ ou $b \leq a$, ou seja, dois elementos quaisquer de $\mathbb{R}$ podem ser comparados, para decidirmos qual deles é o maior.
(V) A relação de ordem é **compatível** com as operações de $\mathbb{R}$: se $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$. Além disso, se $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.

Exercício 2.14 Interprete as propriedades da relação de ordem, dadas acima, como relações entre pontos da reta real, lembrando que, de acordo com a Observação 2.5, $a < b$ significa que a está à esquerda de b.

Solução. Obseverve as interpretações geométricas que seguem.

Propriedade I: Se $x \leq a$, então, na reta real, x está à esquerda de *a ou é o próprio a*. Logo, x pode ser igual a a e, neste caso, $a \leq a$.

Propriedade II: Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então a não pode estar à direita de b e a não pode estar à esquerda de b. A única possibilidade, então, é que a e b sejam o mesmo ponto na reta real, ou seja, $a = b$.

Propriedade III: Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então a está à esquerda de b ou é igual a b, enquanto b está à esquerda de c ou é igual a c. Portanto, a não está à direita de c, ou seja, a está à esquerda de c ou é igual a c. Logo, $a \leq c$.

Propriedade IV: Vendo os números reais a e b como pontos na reta real, as únicas possibilidades são: a está à esquerda de b, ou à direita de b, ou eles são o mesmo ponto. Traduzindo em termos de desigualdades, "a está à esquerda de b" é o mesmo que $a < b$, "a está a direita de b" é o mesmo que $b < a$, e "a e b são o mesmo ponto", significa que $a = b$. Assim, dados números reais a e b, temos $a < b$, ou $a = b$, ou $b < a$, que é o mesmo que escrever $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Propriedade V: Se $a \leq b$ então a não pode estar à direita de b. Somar uma constante c aos números reais a e b, significa fazer uma translação desses dois pontos: para a direita, se c for positivo, ou para esquerda, se c for negativo. Entretanto, isso não altera a posição relativa dos dois pontos: se a não pode estar à direita de b, então $a+c$ também não pode estar à direita de $b+c$, logo $a+c \leq b+c$.

Finalmente, para que possamos apresentar uma justificativa geométrica para a última propriedade, devemos interpretar geometricamente a multiplicação de números reais positivos.

Na Figura 2.7, temos duas semirretas concorrentes no ponto 0. Elas estão orientadas como partes de duas retas reais, de modo que $1 < a < b$ e $0 < c$. Traçamos o segmento de reta ligando os pontos 1 e c. Pelos pontos a e b traçamos retas paralelas a esse segmento, que cortam a reta horizontal, determinada por 0 e c, em pontos x e y, respectivamente.

Pelo Teorema de Tales, ou usando semelhança de triângulos, podemos concluir que $\frac{c}{1} = \frac{x}{a}$ e $\frac{c}{1} = \frac{y}{b}$. Logo, $x = ac$ e $y = bc$. Como bc aparece à direita de ac, temos $ac < bc$. Os casos em que a ou b não são maiores que 1 podem ser tratados da mesma forma. Se $a = b$ ou $c = 0$, temos $ac = bc$.

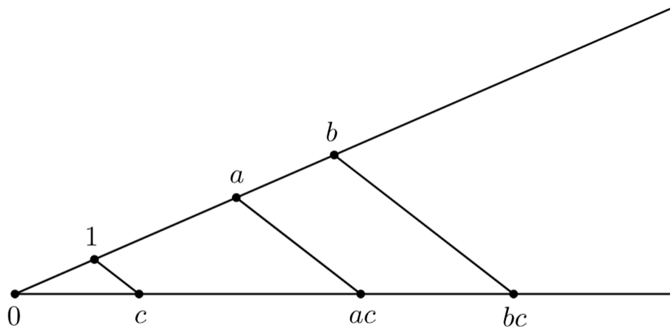


Figura 2.7: interpretação geométrica da multiplicação.

Finalmente, se $0 \leq c$, a multiplicação por c, no caso em que $c > 0$, *preserva orientação*, ou seja, transforma os pontos a e b da reta real em pontos ca e cb, de modo que, se a está à esquerda de b, então ac

está à esquerda de cb. Se $c = 0$, então $ac = 0 = bc$, logo, ainda vale $ac \leq bc$. ■

Exercício 2.15 Use as propriedades da relação de ordem para verificar que, dado um número real x, o seu quadrado não pode ser negativo, ou seja, $x^2 \geq 0$.

Solução. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos, por (IV), que $0 \leq x$ ou $x \leq 0$.

Se $0 \leq x$, então podemos usar a segunda parte de (V), com $a = 0$ e $b = c = x$, para concluirmos que $0 \cdot x \leq x \cdot x$, ou seja, $0 \leq x^2$.

Se $x \leq 0$, então podemos usar a primeira parte de (V), com $a = x$, $b = 0$ e $c = -x$, para concluirmos que $x + (-x) \leq 0 + (-x)$, ou seja, $0 \leq -x$. Agora, podemos usar novamente a segunda parte de (V), com $a = 0$ e $b = c = -x$ para obtermos $0 \cdot (-x) \leq (-x) \cdot (-x)$, ou seja, $0 \leq (-x)^2 = x^2$. ■

Observação 2.6 A igualdade $(-x)^2 = x^2$ foi utilizada no final da solução do Exercício 2.15, acima. Vamos justificar a sua validade a seguir. Primeiro, notemos que $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Escrevendo $a = 0 \cdot x$, temos, então, que $a = a + a$. Somando $-a$ a essa igualdade, obtemos $a = 0$, ou seja, $0 \cdot x = 0$. Agora, fazendo $x = -1$, obtemos $0 \cdot (-1) = 0$, logo $(-1 + 1) \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) = 0$ e $(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0$, o que é equivalente a escrever $(-1) \cdot (-1) - 1 = 0$, isto é,

$$(-1) \cdot (-1) = 1. \tag{2.4}$$

Assim, $(-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = (-1)x \cdot (-1)x = (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot x = 1 \cdot x^2 = x^2$.

Outra consequência de (2.4) é que *o produto de dois números negativos é um número positivo.*

Observação 2.7 A igualdade (2.4) admite uma interpretação geométrica: a função que associa a cada número real x o seu oposto $(-1)x = -x$ é um *reflexão em torno do ponto* 0. De fato, cada $x \neq 0$

real e seu oposto $-x$, são extremos de um segmento da reta real que tem 0 como ponto médio. Aplicar esta função duas vezes, ou seja, multiplicar x duas vezes por -1, significa fazer duas reflexões em torno de 0, o que resulta no próprio ponto inicial x:

$$x \mapsto -x \mapsto -(-x) = x.$$

Logo $(-1)(-1)x = -(-x) = x$. Em particular, o ponto 1 é levado, pela reflexão, em -1, que é refletido de volta para 1, isto é, $(-1)(-1) = 1$.

Exercício 2.16 Use a propriedade (V) da relação de ordem para verificar que, se $a \leq b$, então

(1) $-a \geq -b$;
(2) $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$, caso a e b sejam diferentes de zero e tenham o mesmo sinal.

Solução. Começando com $a \leq b$, podemos somar $-a$ para obtermos, usando a primeira parte da propriedade (V), $-a+a \leq -a+b$, ou seja, $0 \leq -a+b$. Agora, somando $-b$ e usando novamente a primeira parte de (V), obtemos $-b+0 \leq -b+(-a+b)$, ou seja, $-b \leq -a$, o que é equivalente a $-a \geq -b$. Podemos, assim, dizer que, *a multiplicação de uma desigualdade por -1 inverte a desigualdade*. Vale notar que essa mesma propriedade vale, caso comecemos com uma das outras desigualdades: "$<$", "$>$" ou "$\geq$".

Vamos supor que $a \leq b$ e que a e b são positivos. Neste caso, $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ também são positivos. Pela segunda parte da propriedade (V), podemos multiplicar a desigualdade $a \leq b$ por $\frac{1}{a}$ e por $\frac{1}{b}$ sem alterar a desigualdade:

$$\frac{1}{a}\frac{1}{b} \cdot a \leq \frac{1}{a}\frac{1}{b} \cdot b, \text{ ou seja, } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

No caso em que $a \leq b$ e a e b são negativos, então $\frac{1}{a} < 0$ e $\frac{1}{b} < 0$, mas, pela Observação 2.7, $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} > 0$. Assim, multiplicar por $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$, que é equivalente a multiplicar por $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$, não altera a desigualdade. Logo, de $a \leq b$, segue que

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot a \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot b, \text{ ou seja, } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

Vale notar que, se a e b têm sinais contrários, com $a \leq b$, então a é negativo e b é positivo. Logo, $\frac{1}{a}$ é negativo e $\frac{1}{b}$ é positivo, portanto $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Por exemplo, $-2 < 3$ e $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$. Assim, o resultado não é válido neste caso. ■

Exercício 2.17 Considere uma quantidade finita de números reais $x_1, \ldots, x_n$. Verifique que, $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ se, e somente se, todos os x_i são iguais a zero.

Solução. Claro que, se $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, então $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$. Devemos demonstrar a recírpoca.

Suponha que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ e que algum $x_i \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 \neq 0$. Então $-x_1^2 = x_2^2 + \cdots + x_n^2$ e, como $x_1 \neq 0$, podemos dividir por x_1^2 para obtermos

$$-1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2.$$

Cada parcela dessa última soma, por ser um quadrado é maior ou igual a zero. Usando a primeira parte de (V) $n - 2$ vezes, podemos concluir que

$$-1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2 \geq 0.$$

Porém, como $0 < 1$, segue que $-1 + 0 < -1 + 1$, ou seja, $-1 < 0$. Logo, $-1 \geq 0$ é uma contradição, que vem de supormos que um dos x_i é diferente de zero. Concluímos, assim, que todos os x_i necessariamente devem ser iguais a zero. ■

Exercício 2.18 Use os resultados dos exercícios 2.15 e 2.17 para verificar a validade das seguintes desigualdades, onde a, b e c representam números reais positivos:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \tag{2.5}$$

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq a + b + c. \tag{2.6}$$

Solução. De acordo com o Exercício 2.15, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Desenvolvendo o quadrado, obtemos

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0,$$

logo,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

que é equivalente a

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

Dividindo por 2, obtemos a sesigualdade (2.5).

De acordo com o Exercício 2.17,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo esses quadrados e simplificando a expressão, obtemos (2.6). ■

Observação 2.8 A desigualdade (2.5) pode ser generalizada: se $x_1, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{2.7}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$.

Exercício 2.19 Verifique a validade de (2.7) no caso $n = 3$, isto é, para x, y e z reais não negativos,

$$(xyz)^{1/3} \leq \frac{x + y + z}{3}, \tag{2.8}$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = y = z$.

Solução. Primeiro, observemos que, para a, b e c reais positivos, $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$, pois é uma soma de três quadrados de números reais. Desenvolvendo esses quadrados, obtemos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc. \tag{2.9}$$

Agora, da identidade

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

da positividade de a,b e c, e de (2.9), segue que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Fazendo $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ e $c = \sqrt[3]{z}$, obtemos (2.8). ■

Vejamos uma aplicação da desigualdade (2.8).

Exercício 2.20 Determine o valor máximo de $xy(15 - x - y)$, para x e y reais positivos.

Solução. Se $x > 0$, $y > 0$ e $z = 15 - x - y > 0$, então, pela desigualdade 2.8,

$$(xyz)^{1/3} \leq \frac{x + y + z}{3} \text{ e, assim, } xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3,$$

ou seja,

$$xy(15 - x - y) \leq \left(\frac{x + y + (15 - x - y)}{3}\right)^3 = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 125.$$

Por outro lado, se $x > 0$, $y > 0$ e $z = 15 - x - y \leq 0$, então

$$xy(15 - x - y) \leq 0 < 125.$$

Logo,

$$xy(15 - x - y) \leq 125 \text{ quaisquer que sejam } x > 0 \text{ e } y > 0.$$

Além disso, se $x = 5$ e $y = 5$, então

$$xy(15 - x - y) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Portanto, 125 é o máximo de $xy(15 - x - y)$ para $x > 0$ e $y > 0$. ■

Exercício 2.21 Os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 e A_7 são dispostos sobre a reta real de modo uniforme, ou seja, a distância entre dois pontos consecutivos, A_i e A_{i+1} é sempre a mesma, conforme a Figura 2.8. Suponha que A_3 tenha coordenada 0 e A_5 tenha coordenada 1. Então, podemos afirmar que os números correspondentes aos pontos A_1, A_4 e A_7 são, respectivamente,

(a) -1, $1/2$ e 2.
(b) -1, $3/2$ e 4.
(c) -2, -1 e 2.
(d) -1, $3/2$ e 2.

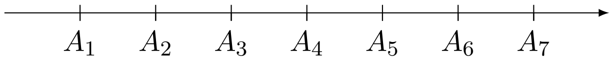


Figura 2.8: sete pontos sobre a reta real.

Solução. O ponto A_1 está à esquerda de A_3 e à mesma distância de A_3 que o ponto A_5. Logo, a coordenada de A_1 é -1. O ponto A_7 está à direita de A_5 e à mesma distância desse ponto que A_3, logo, a coordenada de A_7 é 2. Finalmente, o ponto A_4 é ponto médio do segmento A_3A_5, ou seja, está à mesma distância de A_3 e de A_5. Isso significa que a coordenada de A_5 é o dobro da coordenada de A_4. Logo, se a coordenada de A_4 for x, então $2x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$. Portanto, a resposta correta é a do item (a). ■

Se a e b são números reais, com $a < b$, o **intervalo aberto** (a,b) é o conjunto dos números reais maiores que a e menores do que b:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \quad \text{e} \quad x < b\}. \tag{2.10}$$

Por conveniência, escrevemos $a < x < b$ para indicar que "$x > a$ e $x < b$". Deste modo,

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}. \tag{2.11}$$

Também usamos a notação $]a,b[$ para indicar esse intervalo aberto. Ele corresponde ao conjunto dos pontos situados na reta real, entre a e b, conforme podemo ver na Figura 2.9 a seguir.

Figura 2.9: intervalo aberto (a,b).

Nessa figura, os parênteses indicam que os pontos a e b não pertencem ao intervalo.

O **intervalo fechado** $[a,b]$ é o conjunto dos números reais maiores que ou iguais a a e menores ou iguais a b:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ ou } x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}. \tag{2.12}$$

Um intervalo fechado corresponde ao conjunto dos pontos situados na reta real, entre a e b, *incluíndo* os dois extremos, a e b.

Figura 2.10: intervalo fechado $[a,b]$.

Nessa figura, os colchetes indicam que os pontos a e b pertencem ao intervalo.

Podemos, ainda, considerar intervalos semiabertos, ou semifechados, onde apenas uma extremidade está incluída:

$$\begin{aligned}(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ ou } x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ e} \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ ou } x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

A representação na reta real é a que aparece na figura 2.11.

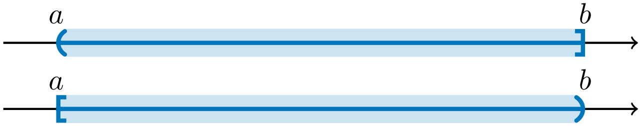


Figura 2.11: intervalos semiabertos $(a,b]$ e $[a,b)$.

Dizer que um número real c pertence a um intervalo aberto (a,b) é o mesmo que dizer que $a < c$ e $c < b$, o que pode ser escrito, de modo mais rápido, como $a < c < b$. Na reta real, o ponto correspondente a c *está entre* os pontos correspondentes a a e b. O mesmo vale para intervalos semiabertos ou fechados, com a diferença que, nestes casos, é possível que c seja um dos extremos. Por exemplo, dizer que $c \in (a,b]$ é o mesmo que dizer que $a < c \leq b$, ou seja, c está entre a e b, podendo eventualemente ser igual a b, mas nunca igual a a.

Também podemos usar a notação de intervalo para descrever semirretas contidas na reta real. Por exemplo, o conjunto dos números reais x tais que $x \leq 2$ corresponde, na reta real, a uma semirreta, formada pelos pontos que estão à esquerda de 2 e incluíndo o ponto 2. Usamos a notação $(-\infty,2]$ para escrever este conjunto. O símbolo $-\infty$ significa que este intervalo *não é limitado à esquerda*. Da mesma forma, podemos usar o símbolo $+\infty$ para indicar que um intervalo *não é limitado à direita*.

Em geral, temos os seguintes intervalos não limitados.

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \text{ e}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Até a reta real inteira pode ser escrita como um intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Devemos notar que, ao colocarmos $-\infty$ ou $+\infty$, não podemos incluir estes símbolos nos intervalos, porque não são números reais. Por isso, os intervalos são sempre abertos em $-\infty$ ou $+\infty$.

Exercício 2.22 As interseções $(-1,3] \cap (0,+\infty)$, $(0,4) \cap (-\infty,0]$ e $(-\infty,6) \cap [2,+\infty)$ são iguais, respectivamente, a

(a) $(-1,+\infty)$, $(-\infty,4)$ e $[2,6)$.
(b) $(0,3]$, $\{0\}$ e $[2,6)$.
(c) $(0,3]$, $\varnothing$ e $[2,6)$.
(d) $(0,3)$, $\varnothing$ e $(2,6)$.

Solução. Para simplificar, denotemos $I_1 = (-1,3] \cap (0,+\infty)$, $I_2 = (0,4) \cap (-\infty,0]$ e $I_3 = (-\infty,6) \cap [2,+\infty)$.

Observe que $x \in I_1$ se, e somente se, $-1 < x \leq 3$ e $0 < x$, ou seja, $0 < x \leq 3$. Assim, $I_1 = (0,3]$.

Para a segunda interseção, temos $x \in I_2$ se, e somente se, $0 < x < 4$ e $4 \leq x$. Como não existe um número real x tal que $x < 4$ e $4 \leq x$, esta interseção é o conjunto vazio. Logo, $I_2 = \varnothing$.

Perceba que $x \in I_3$ se, e somente se, $x < 6$ e $2 \leq x$, ou seja, $2 \leq x < 6$. Assim, $I_3 = [2,6)$.

Portanto, a resposta correta é a do item (c). ■

Exercício 2.23 Para cada número inteiro $n \geq 2$, seja $I_n = (0,1/n]$. Por exemplo, $I_2 = (0,1/2]$, $I_3 = (0,1/3]$, etc. Existe algum número real que pertença a *todos* os intervalos I_n, com $n \geq 2$?

Solução. A resposta é **não**. Caso existisse um tal número real x, ele teria que ser positivo, pois $x \in (0,1/n]$ implica que $0 < x \leq 1/n$.

Como $x > 0$, o seu inverso também é positivo, isto é, $0 < \frac{1}{x}$. O conjunto dos números naturais *não é limitado superiormente*, ou seja, para cada número real r, existe um número natural n, maior que r. Em particular, existe um número natural N, tal que $\frac{1}{x} < N$. Portanto, $\frac{1}{N} < x$. Com isso, x não pode pertencer a I_N. Então não pode existir um número real que pertença a todos os intervalos I_n. ■

Exercício 2.24 Considere o intervalo $I = [-3,1)$ e os números reais

$$-4;\ -3;\ 2;\ -\frac{5}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 0{,}999;\ 0{,}999\ldots \text{ e } \sqrt{3}.$$

Dentre esse números, os que pertencem a I são

(a) -3; 2; $-\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $0{,}999$.
(b) $-\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$ e 0.
(c) $-\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $0{,}999$ e $0{,}999\ldots$.
(d) $-\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $0{,}999$.

Solução. Na Figura 2.12 a seguir, está desenhado o intervalo $[-3{,}1)$ e os pontos correspondentes aos números dados, exceto $0{,}999$ e $0{,}999\ldots$. Não desenhamos estes dois últimos pontos porque, na escala da figura, ficariam muito próximos.

Figura 2.12: o intervalo $[-3{,}1)$ e alguns dos pontos dados no Exercício 2.24.

Observemos que $4 > 3$, logo $-4 < -3$. De modo análogo, observando que $3{,}2 > 3$, temos $-3{,}2 < -3$. Portanto, -4 e -3 não pertencem ao intervalo I.

Repetindo o mesmo raciocínio, $\frac{5}{2} = 2{,}5 < 3$ e, assim, $-3 < -\frac{5}{2}$. Sendo negativo, $-\frac{5}{2}$ é menor que 0, logo é menor que 1. O mesmo ocorre para $-\frac{1}{2}$. Logo, $-\frac{5}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ estão entre -3 e 1, ou seja, pertencem a I.

Como -3 é negativo e 1 é positivo, temos $-3 < 0 < 1$, logo, $0 \in I$.

De $0 < 2 < 4$ segue que $0 < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$, logo, $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, isto é, $\frac{\sqrt{2}}{2} \in I$.

Como $3 > 1$, obtemos, extraíndo a raiz quadrada, $\sqrt{3} > 1$. Assim, $\sqrt{3} \notin I$.

Finalmente, $1 - 0{,}999 = 0{,}001 > 0$, logo $0{,}999 < 1$ e $0{,}999 \in I$. A dízima periódica $0{,}999\ldots$ é *igual* a 1, logo não pertence a I, porque o intervalo é aberto em 1.

Portanto, dos números dados, os que pertencem a I são aqueles listados no item (d). ■

Os números reais são geralmente escritos usando o sistema de notação *decimal*, ou seja, a posição dos algarismos no número indica uma potência de 10 pela qual ele deve ser multiplicado para que se obtenha o *valor relativo* ou *posicional* desse algarismo. Por exemplo, no número 4321, o algarismo 3 tem valor relativo $3 \cdot 10^2 = 300$ e o algarismo 4 tem valor relativo $4 \cdot 10^3 = 4000$.

Podemos usar a representação decimal para obtermos aproximações de certos números reais. Faremos isso no exercício a seguir.

Exercício 2.25 Observando que $1 < 2 < 4$ e extraíndo raízes quadradas, vemos que $1 < \sqrt{2} < 2$. Divida o intervalo (1,2) em dez partes iguais e descubra em qual dessas partes $\sqrt{2}$ está. Use isso para decobrir o algarismo da primeira casa decimal de $\sqrt{2}$. Esse processo pode ser repetido para que se encontrem os algarismos das outras casas decimais de $\sqrt{2}$?

Solução. O enunciado do Exercício já nos informa que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, logo, a parte inteira de $\sqrt{2}$ é 1, o que significa que sua representação decimal é $1, \ldots$.

Ao dividirmos o intervalo (1,2) em 10 partes iguais, obtemos intervalos de comprimento $\frac{1}{10}$, como indicado na Figura 2.13 a seguir.

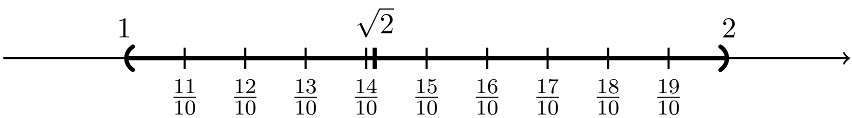


Figura 2.13: posição de $\sqrt{2}$ no intervalo (1,2).

Elevando cada uma das frações, $\frac{11}{10}, \ldots, \frac{19}{10}$ ao quadrado, observamos que

$$\left(\frac{14}{10}\right)^2 = \frac{196}{100} < 2 < \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2,$$

logo

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10},$$

o que significa que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, ou seja, $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$.

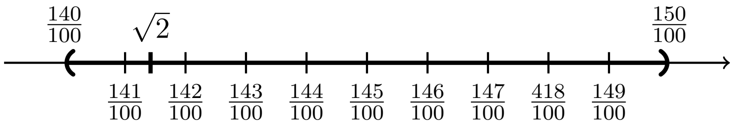


Figura 2.14: posição de $\sqrt{2}$ no intervalo $\left(\frac{14}{10}, \frac{15}{10}\right)$.

Repetindo o que fizemos antes, dividimos o intervalo $\left(\frac{14}{10}, \frac{15}{10}\right)$ em 10 partes iguais, obtendo intervalos de comprimento $\frac{1}{100}$, como na Figura 2.14, acima.

Elevando ao quadrado, vemos que $\left(\frac{141}{100}\right)^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = \left(\frac{142}{100}\right)^2$. Assim,

$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100}$$

e, portanto, $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$.

Repetindo esse processo, podemos continuar descobrindo as casas decimais de $\sqrt{2}$. ∎

Exercício 2.26 Verifique que o número $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ é real.

Solução. Para garantirmos que a raiz quadrada $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ é um número real, devemos verificar que $5 - 2\sqrt{6}$ é positivo.

Primeiramente, devemos localizar 6 entre dois quadrados: $4 < 6 < 9$ e com isso podemos concluir que $2 < \sqrt{6} < 3$. Mas isso ainda não é suficiente para o que queremos, porque, multiplicando as desigualdades por 2, obtemos $4 < 2\sqrt{6} < 6$. Como 5 também está entre 4 e 6, isso ainda é inconclusivo para sabermos se $5 - 2\sqrt{6}$ é positivo.

Para encontrarmos uma estimativa mais precisa para $\sqrt{6}$, dividimos o intervalo $(2{,}3)$ em 10 partes iguais usando os números $\frac{21}{10}$, $\frac{22}{10}$, $\frac{23}{10}$, etc, até $\frac{29}{10}$. Procuramos, então, o maior deles cujo quadrado ainda é menor que 6: $\left(\frac{24}{10}\right)^2 = 5{,}76 < 6$ e $\left(\frac{25}{10}\right)^2 = 6{,}25 > 6$. Portanto, $2{,}4 = \frac{24}{10} < \sqrt{6} < \frac{25}{10} = 2{,}5$. Assim,

$$4{,}8 < 2\sqrt{6} < 5. \tag{2.14}$$

Multiplicando (2.14) por -1, obtemos $-5 < -2\sqrt{6} < -4{,}8$. Somando 5, chegamos a $0 < 5 - 2\sqrt{6} < 0{,}2$. Observando que $0{,}2 < 0{,}25 = \frac{25}{100} = \left(\frac{5}{10}\right)^2$, concluímos que $0 < 5 - 2\sqrt{6} < 0{,}25 = (0{,}5)^2$, logo $0 < \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} < 0{,}5$. Em particular, $5 - 2\sqrt{6}$ é positivo e a sua raiz quadrada é um número real. ■

Observação 2.9 Uma solução bem mais simples do Exercício 2.26 pode ser obtida observando-se que $25 > 24$ implica que $\sqrt{25} > \sqrt{24}$, ou seja, $5 > 2\sqrt{6}$ e, portanto, $5 - 2\sqrt{6} > 0$.

Exercício 2.27 Encontre o algarismo que aparece na primeira casa decimal da representação decimal de $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Solução. O número $5 + 2\sqrt{6}$ é positivo, logo não há problemas em calcularmos a raiz quadrada $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$: ela é um número real.

Somando 5 às desigualdades (2.14), obtidas no Exercício 2.26, obtemos $9{,}8 < 5 + 2\sqrt{6} < 10$, ou seja,

$$3^2 = 9 < 9{,}8 < 5 + 2\sqrt{6} < 10 < 16 = 4^2,$$

o que implica que $3 < \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} < 4$. Essa estimativa ainda não é precisa o suficiente para o que queremos.

Veja que

$$(3{,}1)^2 = 9{,}61 < 9{,}8 < 5 + 2\sqrt{6}, \text{ o que dá } 3{,}1 < \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Além disso, $3{,}2^2 = 10{,}24 > 10$, logo, $5 + 2\sqrt{6} < 10 < 10{,}24 = (3{,}2)^2$. Assim, $3{,}1 < \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} < 3{,}2$ e, portanto, o algarismo na primeira casa decimal de $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ é 1. ■

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real x, é a sua distância, como ponto na reta real, até a origem. Usamos a notação $|x|$ para indicar o módulo de x.

Se $x = 0$, então a distância de x até a origem é igual a 0, logo $|0| = 0$. Se x, visto como ponto na reta real, está à direita da origem, sua distância até a origem é igual sua coordenada, logo $|x| = x$. Se x está à esquerda da origem, então $x < 0$, logo $-x > 0$. Como x e $-x$ estão à mesma distância da origem, concluímos que, se $x < 0$, $|x| = |-x| = -x$. Resumindo, temos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

ou seja, se x é positivo ou zero, o módulo de x é igual a x. Se x é negativo, o módulo de x é igual a $-x$.

A Observação 2.6 garante que $x^2 \geq 0$, para qualquer x real. Logo, a raiz quadrade de x^2 é igual ao módulo de x:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Outro modo de escrevermos o módulo de um número real é

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq -x, \\ -x & \text{se} \quad -x > x, \end{cases}$$

ou seja, $|x|$ é o maior dentre os números $-x$ e x.

Exercício 2.28 Determine os módulos dos seguintes números reais.

$$8;\ -3;\ 0{,}001;\ 1 - \frac{3}{7};\ \frac{3}{5} - \frac{5}{8} \text{ e } \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Solução. Os dois primeiros números são facilmente localizáveis na reta real: $8 > 0$, logo $|8| = 8$ e $-3 < 0$, logo $|-3| = -(-3) = 3$. O número 0,001, embora pequeno, é maior que zero, logo $|0{,}001| = 0{,}001$.

A diferença $1 - \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$ é positiva, logo

$$\left|1 - \frac{3}{7}\right| = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

A diferença

$$\frac{3}{5} - \frac{5}{8} = \frac{3\cdot 8}{5\cdot 8} - \frac{5\cdot 5}{8\cdot 5} = \frac{24}{40} - \frac{25}{40} = \frac{24-25}{40} = -\frac{1}{40} < 0,$$

logo,

$$\left|\frac{3}{5} - \frac{5}{8}\right| = -\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{8}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{5} = \frac{1}{40}.$$

Finalmente $2 < 3$, logo $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, e $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$. Portanto, $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. ■

O módulo de um número real tem as seguites propriedades básicas.

(1) $x \leq |x|$, para todo x real;
(2) se $0 \leq x \leq y$, então $|x| \leq |y|$;
(3) $|x| \geq 0$, para qualquer número real x, e $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
(4) $|xy| = |x||y|$, para quaisquer x e y reais;
(5) **Desigualdade triangular:** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

As propriedades (1), (3) e (4) seguem diretamente da definição de módulo. A propriedade (2), pode ser verificada da seguinte maneira: $x \leq y$ implica $x^2 \leq y^2$, logo $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2}$, ou seja, $|x| \leq |y|$. Note que pode ocorrer $|x| < |y|$ sem que x seja menor que y, por exemplo: $|-2| < |-3|$, mas $-3 < -2$.

A validade da propriedade (5) é verificada no Exercício 2.29 a seguir.

Exercício 2.29 Verifique que vale a desigualdade triangular para o módulo de números reais.

Solução. Elevando a igualdade $|x + y| = \sqrt{(x+y)^2}$ ao quadrado, vemos que $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Da mesma forma, vemos que $x^2 = |x|^2$ e $y^2 = |y|^2$, assim,

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2.$$

Pela propriedade (1), sabemos que $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$, logo

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Como, na desigualdade $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$, os termos são todos não negativos, podemos escrever $\sqrt{|x+y|^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2}$, ou seja $|x+y| \leq ||x|+|y|| = |x|+|y|$. ■

Usando a noção de módulo de números reais, podemos calcular distâncias na reta real. Mais precisamente, *a distância entre dois pontos a e b na reta real, é igual a $|a-b|$.*

Exercício 2.30 O conjunto solução da equação

$$|x-2| + |x-3| = 1.$$

é

(a) $S = \{2{,}3\}$.
(b) $S = \{2{,}5/2{,}3\}$.
(c) $S = [2{,}3]$.
(d) $S = \mathbb{R}$.

Solução. Procuramos números reais x tais que a soma das distâncias de x até 2 e de x até 3 é igual a 1. Vamos testar alguns valores: $x = 2$ safisfaz a equação, porque $|2-2| + |2-3| = 0 + |-1| = 1$. Da mesma forma, $x = 3$ também satisfaz a equação, porque $|3-2|+|3-3| = 1 + 0 = 1$.

Agora, se x está à esquerda de 2, a distância entre x e 3 é maior que a distância entre 2 e 3, porque x está mais longe de 3 do que 2. Assim, $|x-3| > |2-3| = 1$ e, portanto,

$$|x-2| + |x-3| > |x-2| + 1 \geq 1, \text{ o que dá, } |x-2| + |x-3| > 1.$$

Isso significa que, nenhum número menor que 2 pode satisfazer a euqação dada.

Da mesma forma, se x está à direita de 3, a distância de x até 2 é maior que a distância de 3 até 2, ou seja, $|x-2| > |3-2| = 1$. Da mesma maneira que antes, temos

$$|x-2| + |x-3| > 1 + |x-3| \geq 1 \text{ e, assim, } |x-2| + |x-3| > 1.$$

Logo, nenhum número real maior que 3 pode ser raiz da equação dada.

As possíveis raízes da equação, estão, portanto, entre 2 e 3, sendo que já vimos, por inspeção, que 2 e 3 são raízes. Testando alguns valores entre 2 e 3, temos uma surpresa! Todos os valores testados safisfazem a equação. Por exemplo, $x = \frac{5}{2}$ está entre 2 e 3. Substituíndo na equação, vemos que $\left|\frac{5}{2} - 2\right| + \left|\frac{5}{2} - 3\right| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Por que isso acontece?

Se x é um número real tal que $2 < x < 3$, então x está *entre* 2 e 3. As distâncias $|x-2|$ e $|x-3|$, entre x e 2 e entre x e 3, respectivamente, quando somadas, fornecem a distância entre 2 e 3, que é 1, ou seja, para cada número real x, entre 2 e 3, $|x-2| + |x-3|$ é igual a 1.

Portanto, o conjunto solução da equação é o intervalo $[2{,}3]$. A resposta correta é a do item (c). ■

Seja a um número real positivo. A desigualdade $|x| < a$ significa que a *distância* de x até 0 é menor que a, ou seja, $-a < x < a$. Na Figura 2.15, as distâncias dos pontos x_1 e x_2 até a origem são menores que a, logo, ambos satisfezem a desigualdade $|x| < a$.

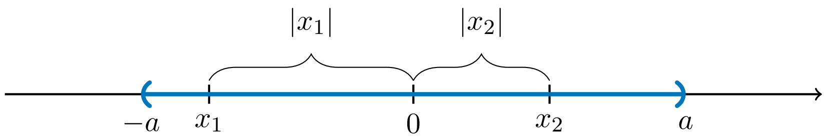


Figura 2.15: o intervalo $(-a,a)$. Os pontos x_1 e x_2 estão a uma distância da origem menor que a.

O mesmo ocorre se procuramos todos os números reais que satisfazem uma desigualdade do tipo $|x| \leq a$, onde a é um número real positivo. Neste caso, x também pode ser igual a $-a$ ou a, ou seja, $-a \leq x \leq a$.

Resumindo as duas situações acima, temos (para a um número real positivo):

$$\begin{aligned} |x| < a &\iff -a < x < a \iff x \in (-a,a); \\ |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a,a]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Supondo novamente que a é um número real positivo, os números reais x tais que $|x| > a$ são aqueles que, na reta real, estão a uma distância da origem *maior* que a, ou seja, x está à esquerda de $-a$ ou à direita de a, conforme a Figura 2.16.

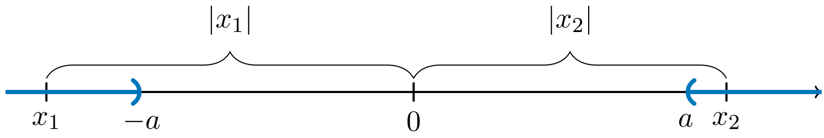


Figura 2.16: o conjunto dos números reais x tais que $|x| > a$ é a união de dois intervalos: $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Assim, dizer que $|x| > a$ é o mesmo que dizer que $x < -a$ ou $x > a$. Isso é, ainda, equivalente a afirmar que x pertence ao intervalo $(-\infty, -a)$ ou pertence ao intervalo $(a, +\infty)$. Na Figura 2.16, os pontos x_1 e x_2 estão a uma distância da origem *maior* que a.

O mesmo ocorre se queremos encontrar todos os números reais x tais que $|x| \geq a$, para um número real positivo a. Neste caso, pode ocorrer a igualdade, ou seja, temos $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Resumindo esses duas situações, temos:

$$\begin{aligned} |x| > a &\iff x < -a \text{ ou } x > a \iff x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty); \\ |x| \geq a &\iff x \leq -a \text{ ou } x \geq a \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Exercício 2.31 O conjunto formado por todos os números reais x tais que

$$|x - 5| \leq 2$$

é

(a) $[-2,2]$.
(b) $[-3,3]$.
(c) $[3,7]$.

(d) $[-7{,}7]$.

Solução. Usando (2.16), podemos concluir que a desigualdade dada é equivalente a
$$-2 \leq x - 5 \leq 2.$$
Somando 5, obtemos
$$5 - 2 \leq x \leq 5 + 2,$$
ou seja,
$$3 \leq x \leq 7.$$
Portanto, os números reais x, que são soluções da inequação dada, formam o intervalo $[3{,}7]$. A resposta correta é da do item (c). ■

Exercício 2.32 Encontre, se existirem, todos os pontos da reta real que estão a uma distância menor que 5 do ponto 4 e menor ou igual a 4 do ponto 7.

Solução. Procuramos os números reais que satiafazem as condições
$$|x - 4| < 5 \text{ e } |x - 7| \leq 4.$$
Isso é equivalente a
$$-5 < x - 4 < 5 \text{ e } -4 \leq x - 7 \leq 4,$$
ou seja,
$$-1 < x < 9 \text{ e } 3 \leq x \leq 11.$$
Como essas duas condições devem ocorrer simultaneamente, os números reais que procuramos são aqueles que formam a interseção entre os intervalos $(-1{,}9)$ e $[3{,}11]$, conforme podemos ver na Figura 2.17 a seguir.

Essa interseção é o conjunto dos números reais x tais que $3 \leq x$ e $x < 9$, ou seja, $3 \leq x < 9$. Logo, esse conjunto é o intervalo $[3{,}9)$. ■

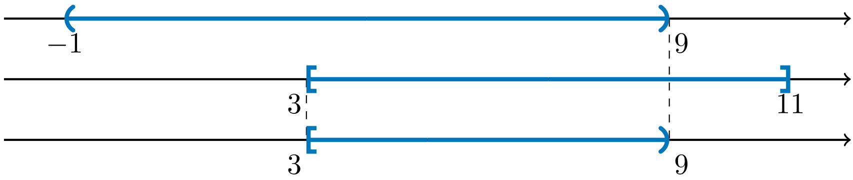


Figura 2.17: os intervalos $(-1{,}9)$, $[3{,}11]$ e sua interseção $[3{,}9)$.

Exercício 2.33 Encontre, se exisitirem, todos os pontos da reta real que estão a uma distância maior que 2 do ponto 3 e menor ou igual que 5 do ponto 4.

Solução. Parecido com o Exercício 2.32, aqui temos que obter a interseção de dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Procuramos os números reais x tais que

$$|x-3| > 2 \text{ e } |x-4| \leq 5,$$

ou seja,

$$(x-3 < -2 \text{ ou } x-3 > 2) \text{ e } -5 \leq x-4 \leq 5,$$

que são condições equivalentes a

$$(x < 1 \text{ ou } x > 5) \text{ e } -1 \leq x \leq 9. \tag{2.18}$$

Como procuramos x que satisfaça as duas condições sumultaneamente, temos que calcular a interseção dos conjunto $(-\infty{,}1) \cup (5,+\infty)$ e $[-1{,}9]$: um deles é um intervalo e o outro é a união de dois intervalos. Vejamos como essa interseção ocorre na reta real:

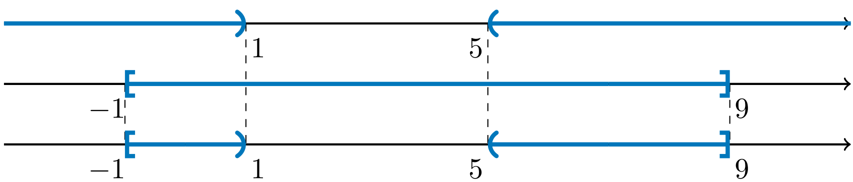


Figura 2.18: os conjunto $(-\infty,-1) \cup (5,+\infty)$, $[-1{,}9]$ e sua interseção $[-1{,}1) \cup (5{,}9]$.

De fato, as condições em (2.18) são equivalentes a

$$(x < 1 \text{ e } -1 \leq x \leq 9) \text{ ou } (x > 5 \text{ e } -1 \leq x \leq 9),$$

ou seja,

$$-1 \leq x < 1 \text{ ou } 5 < x \leq 9. \tag{2.19}$$

Assim, o conjunto dos pontos da reta real que satisfazem as duas condições dadas é $[-1,1) \cup (5,9]$. ■

Exercício 2.34 O conjunto solução da inequação

$$||x - 2| - 2| < 1 \tag{2.20}$$

é

(a) $(-3,3)$.
(b) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
(c) $(-1,1) \cup (3,5)$.
(d) $\varnothing$.

Solução. Ao retirarmos o módulo mais externo, obtemos a condição equivalente

$$-1 < |x - 2| - 2 < 1.$$

Somando 2, obtemos a outra condição equivalente

$$1 < |x - 2| < 3.$$

Assim, estamos procurando os pontos da reta real que estão a uma distância do ponto 2 que é *maior que* 1 *e menor que* 3. Observe que este pontos formam o conjunto destacado na reta da figura abaixo.

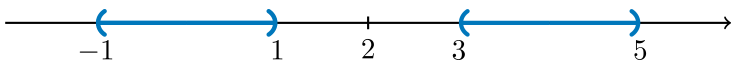


Figura 2.19: pontos da reta real que estão a distância maior que 1 e menor que 3, do ponto 2.

A condição $|x-2|<3$ é equivalente a $-3<x-2<3$, ou seja, $-1<x<5$. Assim, os pontos da reta real que procuramos estão no intervalo $(-1,5)$, *mas não são todos os pontos deste intervalo*, porque a outra condição, $|x-2|>1$, exclui aqueles que estão "muito próximos" de 2. Mais precisamente, a condição $|x-2|>1$ é equivalente a

$$x-2<-1 \text{ ou } x-2>1, \text{ isto é, } x<1 \text{ ou } x>3.$$

Isso *exclui* exatamente os pontos do intervalo $(-1,5)$ que satisfazem $1\le x\le 3$. Podemos dizer que estamos "cavando um buraco" no intervalo $(-1,5)$, retirando a parte central $[1,3]$. O que resta é a união $(-1,1)\cup(3,5)$, que é o conjunto dos pontos da reta real que satisfazem a inequação dada. Portanto, a resposta correta é a do item (c). ■

3 Equações e inequações quadráticas

3.1 – Equações quadráticas

Chamamos de **equação quadrática**, uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3.1}$$

onde a, b e c representam números reais fixados, com $a \neq 0$, e x é a incógnita.

Resolver uma equação quadrática significa encontrar, se existirem, todos os números reais que satisfazem a equação, ou seja, todos os números que, quando colocados no lugar de x, na equação, tornam a igualdade verdadeira. Esses números são chamados de **soluções** ou **raízes** da equação.

Exercício 3.1 Verifique que -1 e 7 satifazem a equação quadrática $3x^2 - 18x - 21 = 0$.

Solução. Devemos substituir x por cada um dos números dados, na expressão $3x^2-18x-21$ e verificar se, ao fazermos essas substituições, a expressão se anula. Vejamos: se $x = -1$, então

$$3(-1)^2 - 18(-1) - 21 = 3 + 18 - 21 = 21 - 21 = 0.$$

Isso significa que -1 é uma raiz da equação $3x^2 - 18x - 21 = 0$. Se $x = 7$, então

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7^2 - 18 \cdot 7 - 21 &= 3 \cdot 49 - 126 - 21 \\ &= 147 - 126 - 21 = 147 - 147 = 0. \end{aligned}$$

Assim, 7 também é uma raiz da equação $3x^2 - 18x - 21 = 0$. ■

Suponha que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tenha duas raízes reais e distintas r_1 e r_2. Então, $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ e $ar_2^2 + br_2 + c = 0$. Subtraíndo-se uma equação da outra, obtemos

$$a(r_1^2 - r_2^2) + b(r_1 - r_2) = 0.$$

Fatorando a diferença de quadrados e colocando o termo comum em evidência,

$$(r_1 - r_2)\left(a(r_1 + r_2) + b\right) = 0.$$

Como estamos supondo que as raízes são distintas, temos $r_1 - r_2 \neq 0$, logo

$$a(r_1 + r_2) + b = 0, \text{ ou seja, } r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \tag{3.2}$$

Substituíndo em $ar_1^2 + br_1 + c = 0$, b por $-a(r_1 + r_2)$, obtemos

$$ar_1^2 - ar_1(r_1 + r_2) + c = 0,$$

ou seja,

$$ar_1^2 - ar_1^2 - ar_1r_2 + c = 0,$$

de onde segue que

$$r_1r_2 = \frac{c}{a}. \tag{3.3}$$

As identidades (3.2) e (3.3) são chamadas *relações de Viète*, em homenagem ao matemático francês, François Viète (1540–1603). O argumento acima exige que as raízes sejam distintas, mas, no Exercício 3.9, veremos que essas relações continuam válidas quando $r_1 = r_2$. Podemos usá-las para encontrar uma das raízes de uma equação quadrática quando soubermos a outra raiz.

Exercício 3.2 Se uma das raízes da equação $3x^2 - 10x + 3 = 0$ é 3, então a outra raiz é

(a) 1.
(b) 2.
(c) $\frac{1}{2}$.
(d) $\frac{1}{3}$.

Solução. Fazendo $x = 3$, obtemos $3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 3 = 27 - 30 + 3 = 0$. Logo, 3 é, de fato, uma das raízes dessa equação.

Usando uma das relações de Viète, podemos descobrir a outra raiz r dessa equação. Por exemplo, $r + 3 = -\frac{(-10)}{3}$, logo $r = \frac{10}{3} - 3 = \frac{10}{3} - \frac{9}{3} = \frac{1}{3}$. Podemos, também, usar a outra relação de Viète: $3r = \frac{3}{3}$, o que implica que $3r = 1$, ou seja, $r = \frac{1}{3}$. Assim, o valor do (d) é o correto. ∎

Observação 3.1 Uma equação quadrática pode ter mais de duas raízes distintas? Suponha que r_1, r_2 e r_3 sejam raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Da relação de Viète (3.2) segue que, se $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq r_3$, então $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ e $r_1 + r_3 = -\frac{b}{a}$. Logo, $r_1 + r_2 = r_1 + r_3$. Cancelando r_1, vemos que $r_2 = r_3$. Portanto, das três raízes, necessariamente duas são iguais. Podemos concluir que *uma equação quadrática tem, no máximo, duas raízes distintas.*

Quando $b = 0$ ou $c = 0$, dizemos que a equação 3.1 é **incompleta**. Equações quadráticas incompletas podem ser de três tipos:

$$ax^2 = 0 \ \ (b = 0, c = 0)$$

$$ax^2 + bx = 0 \ \ (c = 0)$$

$$ax^2 + c = 0 \ \ (b = 0)$$

Ainda nesta seção, veremos como resolver uma equação quadrática qualquer. Destacamos as equações quadráticas incompletas não porque sejam essencialmente diferentes da equação quadrática geral, mas porque suas soluções são mais simples. Veremos, a seguir, alguns exemplos ilustrando os casos acima. O primeiro caso é trivial, pois, de $ax^2 = 0$ e $a \neq 0$, podemos concluir que $x = 0$. Assim, 0 é a única raiz da equação quadrática $ax^2 = 0$ com $a \neq 0$.

Exercício 3.3 João fez três quadrados de papel, todos iguais. Com eles, formou um retângulo de área igual a 75 centímetros quadrados. O lado de cada um dos quadrados que João fez mede

(a) $25cm$.
(b) $3\sqrt{5}cm$.

(c) $5cm$.
(d) $15cm$.

Solução. Chame o lado do quadrado de x. Três quadrados têm área $3x^2$. Os três juntos formam o retângulo de área 75. Assim, $3x^2 = 75$. Esta é uma equação incompleta do tipo $ax^2 + b = 0$, com $a = 3$ e $b = -75$. A partir de $3x^2 = 75$, dividindo por 3, obtemos $x^2 = 25$, logo $x = -5$ ou $x = 5$. Como -5 não pode ser lado de um quadrado, temos que o lado de cada um dos quadrados é $5cm$. Logo, a resposta correta é a do (c). ■

Exercício 3.4 Verifique que, em uma equação quadrática incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, uma das soluções é igual a zero. Verifique também que, uma equação incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$ tem soluções reais quando a e c têm sinais contrários.

Solução. Colocando x em evidência em $ax^2 + bx = 0$, obtemos $x(ax + b) = 0$. Assim, uma das soluções dessa equação é $x = 0$ e a outra é $x = -\frac{b}{a}$ (lembre-se que $a \neq 0$).

A equação $ax^2 + c = 0$ é equivalente a $ax^2 = -c$. Como $a \neq 0$, podemos dividir por a e obtemos $x^2 = -\frac{c}{a}$. Para que existam soluções reais, a fração $-\frac{c}{a}$ tem que ser positiva, o que ocorre se, e somente se, $\frac{c}{a}$ é negativa, ou seja, quando a e c têm sinais contrários. ■

Exercício 3.5 Do dobro da área de um quadrado é igual ao quádruplo do seu lado. Determine a área do quadrado.

(a) 2.
(b) 4.
(c) 0.
(d) 6.

Solução. Se o lado do quadrado mede x, sua área é x^2. O dobro da área é $2x^2$ e o quádruplo do lado é $4x$. São iguais: $2x^2 = 4x$, logo $x^2 = 2x$ e $x^2 - 2x = 0$. Esta é uma equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a = 1$ e $b = -2$ Colocando x em, evidência, obtemos

$x(x-2)=0$. Assim, $x=0$ ou $x=2$. Como $x=0$ não pode ser lado de um quadrado, temos $x=2$ e a área do quadrado é $x^2=4$. Logo, a resposta correta é a do item (b). ■

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$ (e, claro, $a \neq 0$), dizemos que a equação 3.1 é **completa**.

Podemos resolver equações quadráticas completas transformando-as em equações mais simples e reduzindo sua solução, essencialmente, ao problema de calcular raízes quadradas. Esse processo é conhecido como *completamento de quadrados*. A seguir, exibiremos alguns exemplos.

Exercício 3.6 Resolva a equação quadrática $x^2+x-12=0$.

Solução. A "parte literal" da equação dada, isto é, a parte onde aparecem letras, é x^2+x. Vamos somar a ambos os membros da equação $x^2+x-12=0$ uma constante que *complete* a parte literal $x^2+x = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}$ para transformá-la em um produto notável, o quadrado de uma soma, onde o primeiro termo é x e devemos determinar o segundo termo. Observemos a expressão mais detalhadamente:

$$\underbrace{x^2}_{\text{quadrado do primeiro}} + \underbrace{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}}_{\text{duas vezes o primeiro vezes o segundo}}$$

Devemos somar $\frac{1}{4}$, que é o quadrado do segundo termo $(1/2)$ para *completarmos o quadrado*, ou seja, para transformarmos a expressão x^2+x no quadrado de uma soma:

$$\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-12=\frac{1}{4}.$$

A expressão entre parênteses é igual a $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. Logo,

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 12+\frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

e isso implica que $x+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$ ou $x+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, ou seja, $x=-4$ ou $x=3$, que são as duas soluções da equação dada. ■

A solução do Exercício 3.6 pode ser adaptada para equações quadráticas em geral.

Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. A equação (3.1),

$$ax^2+bx+c=0,$$

pode ser reescrita no que chamamos **forma canônica**:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0, \tag{3.4}$$

onde $\Delta = b^2-4ac$ é chamado **discriminante** da equação.

Para obtermos a forma canônica, procedemos de modo análogo ao que fizemos no Exercício 3.6:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)+c \\
&= a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.
\end{aligned}$$

Fazendo $b^2-4ac=\Delta$, obtemos a forma canônica em (3.4).

Escrever a equação quadrática (3.1) na forma canônica (3.4) a transforma em uma equação incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$.

A partir de (3.4), podemos escrever

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}, \text{ ou seja, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Se $\Delta < 0$, então $\Delta/(4a^2) < 0$ e, assim, não é possível se extrair uma raiz quadrada real de $\Delta/(4a^2)$. Logo, neste caso, a equação quadrática *não tem solução real.*

Se $\Delta = 0$, então a equação toma a forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

ou seja, $x + \frac{b}{2a} = 0$. Portanto, se $\Delta = 0$, a equação admite uma única solução real:

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{3.5}$$

Se $\Delta > 0$, então

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ onde } \frac{\Delta}{4a^2} > 0.$$

Daí, concluímos que $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Podemos escrever as duas soluções simultaneamente, obtendo uma *fórmula*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{3.6}$$

Claro que a fórmula (3.6) vale também no caso em que $\Delta = 0$. Neste caso, (3.6) se reduz a (3.5).

Resumindo, temos as seguintes informações sobre as soluções de uma equação quadrática, dadas por seu discriminante.

(I) Se $\Delta < 0$, então a equação não admite raízes rais.
(II) Se $\Delta = 0$, então a equação admite uma única raiz real.
(III) Se $\Delta > 0$, então a equação admite duas raízes reais distintas.

Exercício 3.7 Resolva a equação quadrática $6x^2 - 7x + 2 = 0$ usando a fórmula (3.6) e usando o método do completamento de quadrados.

Solução. Primeiro, vamos usar a fórmula:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12}.$$

Assim, são soluções da equação,

$$x_1 = \frac{7-1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{7+1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Vamos, agora, resolver a equação usando o método do completamento de quadrados. Podemos dividir $6x^2 - 7x + 2 = 0$ por 6, para obtermos $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$. É importante fazermos esta divisão para que o termo de grau 2, x^2 fique com coeficiente 1. Isso vai facilitar o completamento de quadrados.

Os dois primeiros termos da equação são $x^2 - \frac{7}{6}x$, ou seja, $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{12}$. Para completarmos o quadrado, devemos somar $\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}$. Assim, a equação pode ser reescrita como

$$\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{12} + \frac{49}{144}\right) + \frac{1}{3} = \frac{49}{144}.$$

Os termos entre parênteses formam um quadrado:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{12} + \frac{49}{144} = \left(x - \frac{7}{12}\right)^2.$$

Logo, a equação pode ser escrita como

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{49}{144},$$

ou seja,

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144} - \frac{1}{3}.$$

Como $\frac{49}{144} - \frac{1}{3} = \frac{49}{144} - \frac{48}{144} = \frac{1}{144}$, temos

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{1}{144},$$

isto é, $x - \frac{7}{12} = -\frac{1}{12}$ ou $x - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$. Portanto, as soluções da equação dada são

$$x_1 = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{7}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

■

Exercício 3.8 Resolva a equação quadrática $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

Solução. Aplicando a fórmula (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

Assim, as soluções da equação dada são

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}.$$

■

Exercício 3.9 Usando a fórmula (3.6), obtenha novamente as *relações de Viète* (3.2) e (3.3).

Solução. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

A fórmula (3.6) nos permite escrever essas raízes como $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Assim, a soma dessas raízes é

$$r_1 + r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e o produto delas é

$$
\begin{aligned}
r_1 r_2 &= \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\
&= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Vale a pena notar que a verificação que acabamos de fazer não exige que as raízes sejam distintas. Logo, as relações de Viète (3.2) e (3.3) continuam válidas, mesmo que $r_1 = r_2$. ■

Observação 3.2 Usando as relações de Viète, que vimos em (3.2) e revimos no Exercício 3.9 acima, podemos fatorar uma expressão quadrática, ax^2+bx+c quando a equação correspondente

$$ax^2+bx+c=0 \text{ admite pelo menos uma raiz real.}$$

De fato, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2\right)\\
&= a\left(x(x-r_1)-r_2(x-r_1)\right) = a(x-r_1)(x-r_2).
\end{aligned}
$$

Resumindo, se $ax^2+bx+c=0$ admite raízes reais r_1 e r_2, então

$$ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2). \tag{3.7}$$

Caso $r_1=r_2=r$, temos $ax^2+bx+c=a(x-r)^2$. Se a equação $ax^2+bx+c=0$ não tem soluções reais, então a expressão ax^2+bx+c não pode ser fatorada.

Fraçois Viète também desenvolveu um método para a resolução de equações quadráticas, que vamos usar para resolver o exercício a seguir.

Exercício 3.10 Resolva a equação quadrática $x^2 - 7x + 12 = 0$ usando o seguinte método, elaborado por Viète. Primeiro, faça $x = u+v$. Se você conseguir encontrar u e v, vai conseguir encontrar x. Substitua na equação e faça uma "escolha adequada" para u. Depois encontre v.

Solução. Seguindo as instruções do enunciado, vamos substituir x por $u+v$ na equação original:

$$(u+v)^2 - 7(u+v) + 12 = 0.$$

Isso parece ser desvantajoso, a princípio, porque tínhamos uma incógnita, x, e passamos a ter duas, u e v. Mas, como veremos a seguir, isso permite que possamos escolher um valor específico de uma das duas novas incógnitas, u ou v, para tornar a equação mais simples. Vejamos como isso pode ser feito.

Desenvolvendo o quadrado na expressão da equação, obtemos

$$u^2 + 2uv + v^2 - 7u - 7v + 12 = 0.$$

Isso é equivalente a

$$v^2 + \underbrace{(2u-7)v}_{(*)} + u^2 - 7u + 12 = 0. \tag{3.8}$$

A "escolha adequada" para u, mencionada no enunciado, é aquela que faz o termo $(*)$ desaparecer da equação, ou seja, devemos escolher u de modo que $2u - 7 = 0$, isto é, $u = 7/2$. Substituíndo u por $7/2$ em (3.8), obtemos

$$v^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 12 = 0,$$

ou seja,

$$v^2 = \frac{49}{2} - \frac{49}{4} - 12 = \frac{1}{4}.$$

Com isso, temos dois possíveis valores para v: $v_1 = -\frac{1}{2}$, que fornece a primeira raiz

$$x_1 = u + v_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$

e $v_2 = \frac{1}{2}$, que fornece a segunda raiz

$$x_2 = u + v_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

■

O que fizemos no Exemplo 3.10 pode ser generalizado. Para uma discussão do caso geral do método de Viète, veja a página Método de Viète[1].

Método de Viète[0]

Usando ainda as relações de Viète, podemos obter outro método de resolução de equações quadráticas, que vamos apresentar no exercício a seguir.

Exercício 3.11 Resolva a equação quadrática $x^2 - 10x + 21 = 0$

Solução. Sejam r_1 e r_2 as duas raízes da equação dada. Uma das relações de Viète nos diz que $r_1 + r_2 = 10$. Logo, $\frac{r_1+r_2}{2} = 5$. Na reta real, o ponto 5 é o *ponto médio* do segmento cujas extremidades são as raízes, ou seja, 5 está à mesma distância t de r_1 e r_2, conforme a figura 3.1, onde

$$\begin{aligned} t &= \frac{r_1 + r_2}{2} - r_1 = \frac{r_1 + r_2 - 2r_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2} \\ &= r_2 - \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{2r_2 - r_1 - r_2}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2}. \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever $r_1 = 5 - t$ e $r_2 = 5 + t$, onde $t = (r_2 - r_1)/2$. Usando a segunda relação de Viète, $r_1 r_2 = 21$, obtemos

$$(5 - t)(5 + t) = 21,$$

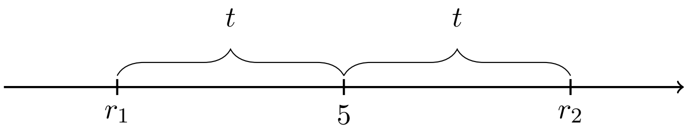


Figura 3.1: as raízes da equação são pontos da reta real, equidistantes do ponto 5.

logo $25 - t^2 = 21$ e $t^2 = 4$, o que nos dá $t = -2$ ou $t = 2$. Qualquer desses valores de t vai nos fornecer as duas raízes. Por exemplo, se $t = 2$, temos $r_1 = 5 - 2 = 3$ e $r_2 = 5 + 2 = 7$. Assim, as raízes da referida equação são 3 e 7. Este método funciona para qualquer equação quadrática. ■

Como o método exibido no Exercício 3.11 se baseia no cálculo do ponto médio entre as raízes da equação, vamos chamá-lo, aqui de **método do ponto médio**.

O link Po-Shen Loh[1] leva à página (em inglês) do professor Po-Shen Loh, que redescobriu o método, segundo ele, já conhecido pelos babilônios. Nessa página, você poderá encontrar mais detalhes.

Po-Shen Loh[0]

Vejamos mais algumas aplicações do método do ponto médio.

Exercício 3.12 Resolva a equação quadrática $x^2+4x-5 = 0$, usando o método do ponto médio.

Solução. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação. Sabemos que $r_1 + r_2 = -4$, logo $\frac{r_1+r_2}{2} = -2$. Temos $r_1 = -2 - t$ e $r_2 = -2 + t$, onde $t = (r_2 - r_1)/2$ e deve ser encontrado.

Como $r_1 r_2 = -5$, temos $(-2-t)(-2+t) = -5$, logo $(-2)^2 - t^2 = -5$, ou seja, $4 - t^2 = -5$ e $t^2 = 9$, donde segue que $t = -3$ ou $t = 3$. Escolhendo $t = 3$, obtemos $r_1 = -2 - 3 = -5$ e $r_2 = -2 + 3 = 1$. Logo, as raízes da equação são -5 e 1. ■

Exercício 3.13 Resolva a equação quadrática $9x^2 - 18x + 5 = 0$ usando o método do ponto médio.

Solução. Queremos encontrar as raízes r_1 e r_2 da equação dada. Temos

$$r_1 + r_2 = -\frac{(-18)}{9} = 2, \text{ logo } \frac{r_1 + r_2}{2} = 1.$$

Assim, $r_1 = 1 - t$ e $r_2 = 1 + t$, onde $t = (r_2 - r_1)/2$. De $r_1 r_2 = \frac{5}{9}$, segue que $(1-t)(1+t) = \frac{5}{9}$, isto é, $1 - t^2 = \frac{5}{9}$. Logo, $t^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$, donde segue que $t = -\frac{2}{3}$ ou $t = \frac{2}{3}$.

Escolhendo $t = \frac{2}{3}$, obtemos $r_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ e $r_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Assim, as raízes da equação são $1/3$ e $5/3$. ■

Exercício 3.14 Resolva a equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$ usando o método do ponto médio.

Solução. Novamente, se r_1 e r_2 são a raízes da equação, então $\frac{r_1+r_2}{2} = \frac{1}{2}$. Logo, $r_1 = \frac{1}{2} - t$ e $r_2 = \frac{1}{2} + t$, onde $t = (r_2 - r_1)/2$. O produto das ráizes é $r_1 r_2 = -1$, ou seja, $\left(\frac{1}{2} - t\right)\left(\frac{1}{2} + t\right) = -1$. Assim, $\frac{1}{4} - t^2 = -1$ e $t^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Portanto, $t = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, de onde segue que $r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Logo, as raízes da equação são

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

■

O método ainda funciona no caso em que a equação tem raízes iguais. Vejamos um exemplo.

Exercício 3.15 Resolva a equação quadrática $2x^2 - 12x + 18 = 0$ usando o método do ponto médio.

Solução. Vamos repetir o que fizemos nos exercícios anteriores. Sejam r_1 e r_2 as raízes procuradas. Temos $r_1 + r_2 = -\frac{(-12)}{2} = 6$ e $\frac{r_1+r_2}{2} = 3$. Logo, $r_1 = 3 - t$ e $r_2 = 3 + t$. De $r_1 r_2 = \frac{18}{2} = 9$, segue que $(3-t)(3+t) = 9$, ou seja, $9 - t^2 = 9$ e $t = 0$. Neste caso, então, temos que $r_1 = r_2 = 3$, ou seja, a equação possui apenas uma raiz real. ■

Mesmo quando a equação não tem raízes reais, o método do ponto médio pode nos dar essa informação. Vejamos o exercício a seguir.

Exercício 3.16 Resolva a equação quadrática $x^2 + x + 1 = 0$ usando o método do ponto médio.

Solução. Suponha que r_1 e r_2 são as raízes da equação. Então, $\frac{r_1+r_2}{2} = -\frac{1}{2}$ e, portanto,

$$r_1 = -1/2 - t \quad \text{e} \quad r_2 = -1/2 + t, \quad \text{onde, } t = (r_2 - r_1)/2 \in \mathbb{R}.$$

De $r_1 r_2 = 1$, segue que

$$\left(-\frac{1}{2} - t\right)\left(-\frac{1}{2} + t\right) = 1.$$

Logo, $\frac{1}{4} - t^2 = 1$ e $t^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$, o que é uma contradição, ou seja, isso não pode ocorrer para t real, o que significa que a equação dada não admite raízes reais. ■

Finalmente, vamos obter a fórmula (3.6) usando o método do ponto médio.

Exercício 3.17 Use o método do ponto médio para resolver a equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e encontrar novamente a fórmula (3.6).

Solução. Temos $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, logo $\frac{r_1+r_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Assim,

$$r_1 = -\frac{b}{2a} - t \quad \text{e} \quad r_2 = -\frac{b}{2a} + t, \quad \text{onde, } t = \frac{r_2 - r_1}{2}.$$

De $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$ segue que

$$\left(-\frac{b}{2a} - t\right)\left(-\frac{b}{2a} + t\right) = \frac{c}{a},$$

ou seja,

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - t^2 = \frac{c}{a}.$$

Esta última igualdade é equivalente a

$$t^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

o que dá

$$t^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Portanto,

$$t = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e as raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é exatamente o que nos fornece a fórmula (3.6). ■

Em alguns problemas, os coeficientes da equação quadrática também precisam ser encontrados, sob certas condições dadas. Vejamos os Exercícios 3.18 e 3.19 a seguir.

Exercício 3.18 Admita que a equação

$$4x^2 - 4mx + 8m = 15$$

tem uma única raiz real r. Então, os possíveis valores para $r + m$ são

(a) 3 e 5.
(b) 3/2 e 5/2.
(c) 9/2 e 15/2.

(d) 11/2 e 13/2.

Solução. Primeiro, devemos encontrar os possíveis valores para m. Para que a equação dada tenha uma única raiz real, devemos ter $\Delta = 0$. Isso nos fornece uma equação quadrática na incógnita m: $\Delta = (4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (8m - 15) = 0$, ou seja, $16m^2 - 16(8m - 15) = 0$. dividindo por 16, obtemos $m^2 - 8m + 15 = 0$. Resolvendo esta última equação, encontramos

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2},$$

logo $m = 3$ ou $m = 5$.

Se $m = 3$, então a equação dada toma a forma $4x^2 - 12x + 9 = 0$, ou seja, $(2x - 3)^2 = 0$, o que implica, neste caso, que a raiz da equação é $r = \frac{3}{2}$. Assim, neste caso, a soma $r + m$ é igual a $\frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$.

Se $m = 5$, então a equação dada se transforma em $4x^2 - 20x + 25 = 0$, que é equivalente a $(2x - 5)^2 = 0$. Assim, neste caso, a raiz da equação é $r = \frac{5}{2}$ e a soma $r + m$ é igual a $\frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$.

Portanto, a resposta correta é a do item (c). ■

Exercício 3.19 Determine a condição sobre os números reais a e b para que a equação

$$(a^2 + b^2)x^2 - 4abx + (a^2 + b^2) = 0$$

tenha raízes reais. Esta equação pode ter duas raízes reais distintas?

Solução. Primeiro, devemos observar que a e b não podem ser iguais a zero simultaneamente, pois isso implicaria $a^2 + b^2 = 0$ e a equação não seria quadrática.

Vamos calcular o discriminante da equação:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-4ab)^2 - 4(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) = 16a^2b^2 - 4(a^2 + b^2)^2 \\
&= -4\left((a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\right) = -4(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2) \\
&= -4(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = -4(a^2 - b^2)^2.
\end{aligned}$$

Como o quadrado de um número real é sempre maior que ou igual a zero, temos que $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$, logo $\Delta = -4(a^2 - b^2)^2 \leq 0$.

Como Δ nunca é positivo, a equação dada não pode ter duas raízes reais distintas. A única possibilidade para que esta equação tenha raízes reais é que Δ seja igual a zero, o que ocorre se, e somente se, $a^2 = b^2$, ou seja, $|a| = |b|$. Assim, a condição para que a equação dada tenha raízes reais é que a e b não sejam ambos nulos e tenham o mesmo valor absoluto. Neste caso, a equação tem uma única raiz real. ■

3.1.1 – Equações biquadráticas e equações recíprocas

Se uma equação é dada por um polinômio de grau 4 que não tem termos de grau ímpar, podemos resolvê-la combinando duas equações quadráticas. Mais precisamente, se for dada uma equação

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{3.9}$$

podemos substituir a incógnita x por $y = x^2$ — técnica conhecida como mudança de variável, de modo que

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{3.10}$$

A equação (3.10) é quadrática e, assim, podemos aplicar os métodos que estamos estudando, para obtermos, em existindo, as raízes dessa equação: y_1 e y_2, que podem ser iguais. Cada uma delas dá origem a uma nova equação quadrática incompleta: $x^2 = y_1$ e $x^2 = y_2$, das quais extraímos as raízes da equação original. Vejamos alguns exemplos.

Exercício 3.20 As soluções reais da equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ são

(a) 4 e 9.
(b) 2 e 3.
(c) -2 e 2.
(d) -2, 2, -3 e 3.

Solução. Escrevendo $y = x^2$, a equação dada pode ser reescrita como

$$y^2 - 13y + 36 = 0. \tag{3.11}$$

Podemos usar (3.6) para resolver essa última equação, obtendo

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

Assim, as soluções da equação (3.11) são $y = 4$ e $y = 9$. Voltando à variável x, obtemos $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9$. Logo, as soluções da equação dada são -2, 2, -3 e 3. Logo, a resposta do item (d) é a correta. ■

Em geral, uma equação do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b e c números reais, e $a \neq 0$, é chamada **equação biquadrática**. Numa equação biquadrática, os termos têm grau par e o maior grau é quatro. Equações desse tipo podem ser resolvidas usando-se a técnica de mudança de variável do Exercício 3.20. Vejamos outro exemplo.

Exercício 3.21 Resolva a equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Solução. Assim como no Exemplo 3.20, podemos fazer a substituição $y = x^2$, o que transforma a equação dada em

$$y^2 - 10y + 1 = 0. \tag{3.12}$$

Resolvendo esta última equação, obtemos

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

Como $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$, conforme o Exercício 2.26, temos que $4{,}8 < 2\sqrt{6} < 5$, logo $5 - 2\sqrt{6}$ e $5 + 2\sqrt{6}$ são positivos. Dessa forma, $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ e $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ fornecem as quatro raízes da equação inicial: $x = \pm\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ ou $x = \pm\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$. ■

Observação 3.3 No Exercício 2.2 da Seção 2.1, vimos que $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ não é um número racional, verificando que r é raiz da equação biquadrática $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, exatamente a que consideramos no Exercício 3.21 acima. Na Observação 2.2 prometemos verificar a irracionalidade do número r de outra forma, e faremos isso aqui.

Observemos que $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 2$, logo, dentre as quatro raízes de $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ a única que pode ser igual a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$, e, de fato,

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}.$$

Suponha, agora, que $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r=\frac{p}{q}$, com p e q inteiros. Então $\frac{p}{q}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. Elevando ao quadrado, obtemos $\frac{p^2}{q^2}=5+2\sqrt{6}$, ou seja, $\sqrt{6}=\frac{5q^2-p^2}{2q^2}$ seria racional. Mas já sabemos que $\sqrt{6}$ não é racional, porque a raiz quadrada de um número inteiro só é racional se esse inteiro for um quadrado perfeito, o que não é o caso de 6. Isso demonstra que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional.

Uma equação de grau 4 é chamada **recíproca de primeira espécie**, se for do tipo

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \text{ com } a\neq 0. \tag{3.13}$$

ou seja, se os coeficientes “equidistantes do centro” são iguais.

Para resolvermos uma equação desse tipo, notemos, primeiro, que 0 não é raiz da equação 3.13, pois, com $x=0$, temos

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+b\cdot 0+a=a\neq 0.$$

Logo, se x é raiz da equação, então, $x\neq 0$ e dividindo por x^2, obtemos

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,$$

o que, a princípio, parace não ser um caminho muito útil na busca de uma solução. No entanto, podemos escrever

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Se escrevermos $y=x+\frac{1}{x}$, então

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2.$$

Logo, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Então, podemos escrever a equação em y:

$$a(y^2-2)+by+c=0,$$

ou seja,

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0,$$

que é uma equação quadrática. Uma vez resolvida esta equação, encontramos, se existirem, duas raízes reais y_1 e y_2, que podem ser iguais. Para encontrarmos as raízes da equação original, escrevemos $x + \frac{1}{x} = y_1$ ou $x + \frac{1}{x} = y_2$. Essa duas igualdades dão origem a duas novas equações quadráticas que, uma vez resolvidas, fornecem as raízes da equação inicial. Vejamos um exemplo.

Exercício 3.22 As raízes da equação $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ são

(a) $5/2$ e $10/3$.
(b) $1/2$ e 2.
(c) $1/3$ e 3.
(d) $1/2$, 2, $1/3$ e 3.

Solução. Dividindo a equação inicial por x^2, obtemos

$$6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Seguindo os passos delineados anteriormente, podemos escrever a equação na forma

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Fazendo $y = x + \frac{1}{x}$, temos, como antes, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Assim, a última equação acima é equivlante a

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0,$$

ou seja,

$$6y^2 - 35y + 50 = 0. \tag{3.14}$$

Vamos, agora, resolver a equação (3.14) para encontrarmos os possíveis valores de y. O discriminante dessa equação é

$$\Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 50 = 1225 - 1200 = 25 \text{ e, assim, } y = \frac{35 \pm 5}{12},$$

ou seja, as raízes de (3.14) são

$$y_1 = \frac{35-5}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{35+5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}.$$

Vamos, agora, usar a identidade $x + \frac{1}{x} = y$, substituíndo y pelos dois valores encontrados, para encontrarmos as raízes da equação inicial. Fazendo $y = \frac{5}{2}$, obtemos $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, que é equivalente a

$$2x^2 - 5x + 2 = 0. \tag{3.15}$$

O discriminante de (3.15) é $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$. Logo, as suas raízes são $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$.

Fazendo $y = \frac{10}{3}$, obtemos $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, que pode ser reescrita como

$$3x^2 - 10x + 3 = 0. \tag{3.16}$$

O discriminante de (3.16) é $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$, logo as suas raízes são $x_3 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ e $x_4 = \frac{10+8}{6} = 3$.

Portanto, as raízes da equação dada são $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{3}$ e $x_4 = 3$. Portanto, a resposta correta é a do item (d). ■

Uma equação de grau 4 é chamada **recíproca de segunda espécie**, se for do tipo

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a = 0, \text{ com } a \neq 0. \tag{3.17}$$

ou seja, se os coeficientes "equidistantes do centro" são opostos, ou seja, têm mesmo valor absoluto e sinais contrários.

Vamos exibir um método de solução para o caso em que o coeficiente central c, isto é, o do termo de grau 2, é zero. Neste caso, a equação recíproca toma a forma

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0. \tag{3.18}$$

Podemos observar que, -1 e 1 são raízes da equação (3.18), porque $a(\pm 1)^4 + b(\pm 1)^3 - b(\pm 1) - a = a \pm b \mp b - a = 0$. Outra maneira de perceber que -1 e 1 são raízes da equação é notar que a expressão

$ax^4 + bx^3 - bx - a$ pode ser fatorada, da seguinte maneira. Observe que

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 - bx - a &= a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) \\ &= a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + bx(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(a(x^2 + 1) + bx) \\ &= (x^2 - 1)(ax^2 + bx + a). \end{aligned}$$

Assim, a equação (3.18) é equivalente a

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0, \tag{3.19}$$

que, por sua vez, é equivalente a $x^2 - 1 = 0$ ou $ax^2 + bx + a = 0$. Isso nos permite resolver a equação (3.18).

Exercício 3.23 Resolva a equação $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$.

Solução. Esta é uma equação recíproca de segundo tipo. Seguindo os passos que exibimos acima, vamos fatorar a expressão algébrica da equação:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 &= 2(x^4 - 1) - 5x(x^2 - 1) \\ &= 2(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 5x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(2(x^2 + 1) - 5x) \\ &= (x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 2). \end{aligned}$$

Assim, obteremos a equação equivalente

$$(x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Um número real é raiz da equação acima se, e somente se, é raiz da equação $x^2 - 1 = 0$ ou da equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$. As raízes de $x^2 - 1 = 0$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. As raízes da equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$ são dadas por $x = \frac{5 \pm 3}{4}$, ou seja, são $x_3 = \frac{1}{2}$ e $x_4 = 2$. Portanto, a equação original dada possui quatro raízes reais: -1, 1, $1/2$ e 2. ■

Notemos que as raízes da equação do Exercício 3.23 que não são -1 ou 1, são inversas uma da outra: $1/2$ e 2. Esse é um fato geral.

Exercício 3.24 Verifique que, se a equação (3.18) admite quatro raízes reais, então elas são -1, 1, r e $1/r$, para algum $r \in \mathbb{R}$ diferente de zero.

Solução. Observando a forma fatorada da equação, (3.19), concluímos que uma raiz de (3.18) que não é -1 ou 1, tem que ser raiz da equação quadrática $ax^2 + bx + a = 0$. Se essa equação admite raízes reais (possivelmente iguais) r e r', pelas relações de Viète, temos $rr' = \frac{a}{a} = 1$, logo $r' = \frac{1}{r}$. ■

Algumas equações que não são, a princípio, equações quadráticas, podem ser reduzidas por simplificação algébrica, a equações desse tipo. Vejamos alguns exemplos.

Exercício 3.25 Resolva a equação

$$\frac{x}{4-x} = \frac{2}{x-4}.$$

Solução. Para que os denominadores não se anulem, devemos ter $x \neq 4$. A equação dada é equivalente a $x(x-4) = 2(4-x)$, isto é, $x(x-4) = -2(x-4)$. Como $x \neq 4$, temos $x - 4 \neq 0$, logo, podemos cancelar $x - 4$ para obtermos $x = -2$. ■

Exercício 3.26 Resolva a equação

$$\frac{4}{x+7} + \frac{9}{x+3} = 1.$$

Solução. Novamente, para que os denominadores não sejam nulos, devemos ter $x \neq -7$ e $x \neq -3$. Multiplicando a equação dada por $(x+7)(x+3)$, obtemos

$$4(x+3) + 9(x+7) = (x+3)(x+7).$$

Operando algebricamente, temos

$$4x + 12 + 9x + 63 = x^2 + 10x + 21,$$

ou seja,

$$x^2 - 3x - 54 = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = (-3)^2 - 4(-54) = 9 + 216 = 225$. Assim,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{3 \pm 15}{2}.$$

Logo, as raízes da equação dada são $x_1 = -6$ e $x_2 = 9$. ■

Exercício 3.27 Resolva a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

Solução. Novamente, para que os denominadores não se anulem, devemos ter $x \notin \{-3, \; -2, \; -1, 0\}$. Multiplicando a equação dada por $x(x+1)(x+2)(x+3)$, obtemos

$$(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) = x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2).$$

Vamos simplificar esta última equação:

$$(x^2 + 3x + 2)(x+3) + x(x^2 + 5x + 6) = x(x^2 + 4x + 3) + x(x^2 + 3x + 2).$$

Simplificando mais um pouco,

$$\cancel{x^3} + 3x^2 + \cancel{2x} + \cancel{3x^2} + 9x + 6 + \cancel{x^3} + 5x^2 + 6x = \cancel{x^3} + 4x^2 + 3x + \cancel{x^3} + \cancel{3x^2} + \cancel{2x}.$$

Após este cancelamento e simplificando os termos semelhantes, obtemos

$$x^2 - 12x - 6 = 0.$$

Calculemos o discriminante: $\Delta = (-12)^2 - 4(-6) = 144 + 24 = 168$. Assim,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{168}}{2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{42}}{2} = 6 \pm \sqrt{42}.$$

Portanto, as raízes da equação dada são

$$x_1 = 6 - \sqrt{42} \quad \text{e} \quad x_2 = 6 + \sqrt{42}.$$

■

Exercício 3.28 Resolva a equação

$$\frac{x+3}{x+2}+1=\frac{x+2}{x+1}.$$

Solução. Os denominadores não podem ser iguais a zero, logo $x \neq -2$ e $x \neq -1$.

Multiplicando a equação por $(x+2)(x+1)$, obtemos

$$(x+3)(x+1)+(x+2)(x+1)=(x+2)(x+2),$$

que pode ser simplificada para

$$\cancel{x^2}+\cancel{4x}+3+x^2+3x+2=\cancel{x^2}+\cancel{4x}+4,$$

isto é,

$$x^2+3x+1=0.$$

Esta equação quadrática tem discriminante $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 = 5$. Assim,

$$x=\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e as raízes da equação dada são $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. ■

Exercício 3.29 Resolva a equação

$$\frac{96}{x^4}-\frac{22}{x^2}+1=0.$$

Solução. Para que os denominadores não se anulem, devemos ter $x \neq 0$. Multiplicando a equação por x^4, obtemos

$$96-22x^2+x^4=0.$$

Esta é uma equação biquadrática. Fazendo $y = x^2$, obtemos

$$y^2-22y+96=0.$$

Calculando o discriminante temos

$$\Delta=(-22)^2-4\cdot 96=484-384=100.$$

Assim,

$$y = \frac{22 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{22 \pm 10}{2} = 11 \pm 5.$$

Logo, as raízes da equação quadrática são

$$y_1 = 11 - 5 = 6 \ \text{ e } \ y_2 = 11 + 5 = 16.$$

De $x^2 = y_1 = 6$, obtemos as raízes $x_1 = -\sqrt{6}$ e $x_2 = \sqrt{6}$. De $x^2 = y_2 = 16$, obtemos outras duas raízes: $x_3 = -4$ e $x_4 = 4$. Portanto, as raízes da equação biquadrática são $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, -4 e 4. ■

Exercício 3.30 Resolva a equação

$$(x+3)^4 - 2(x+3)^2 - 24 = 0.$$

Solução. Fazendo $y = (x+3)^2$ e observando que a equação dada é equivalente a

$$[(x+3)^2]^2 - 2(x+3)^2 - 24 = 0,$$

obtemos a equação quadrática

$$y^2 - 2y - 24 = 0.$$

Esta equação tem discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4(-24) = 4 + 96 = 100$. Logo,

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} = 1 \pm 5.$$

Assim, temos duas opções para y: $y_1 = 1 - 5 = -1$ e $y_2 = 1 + 5 = 6$.

A equação $(x+3)^2 = -4$ não tem soluções reais, porque $(x+3)^2$, sendo o quadrado de um número real, não pode ser negativo. A equação $(x+3)^2 = 6$ é equivalente a $x + 3 = \pm\sqrt{6}$, logo, tem duas raízes: $x_1 = -3 - \sqrt{6}$ e $x_2 = -3 + \sqrt{6}$. Assim, as raízes da primeira equação dada são $x_1 = -3 - \sqrt{6}$ e $x_2 = -3 + \sqrt{6}$. ■

Exercício 3.31 Resolva a equação

$$(x^3 - 1) + (x^2 + 5x - 6) = 0.$$

Solução. Façamos, primeiro, uma fatoração da expressão algébrica. A diferença $x^3 - 1 = x^3 - 1^3$ é um produto notável e, assim, podemos escrever $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. A expressão x^2+5x-6 também pode ser fatorada. Basta que encontremos as raízes da equação correspondente: $x^2 + 5x - 6 = 0$. Essas raízes são dadas por

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}.$$

São, portanto, $x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6$ e $x_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$. Isso nos permite, enfim, fatorar a expressão $x^2+5x-6 = (x-x_1)(x-x_2) = (x+6)(x-1)$.

Voltando à equação original, após a fatoração, temos

$$(x-1)(x^2+x+1) + (x+6)(x-1) = 0.$$

Colocando $x - 1$ em evidência, obtemos

$$(x-1)(x^2+x+1+x+6) = 0,$$

ou seja,

$$(x-1)(x^2+2x+7) = 0$$

o que é equivalente a $x-1 = 0$ ou $x^2+2x+7 = 0$. Esta última equação não admite raízes reais, pois seu discriminante é $\Delta = 4-28 = -26 < 0$. Assim, a única raiz real da equação inicial é $x_1 = 1$. ■

Exercício 3.32 Resolva a equação

$$27x^6 + 26x^3 - 1 = 0.$$

Solução. Fazendo a substituição $y = x^3$, a equação dada pode ser reescrita como uma equação quadrática:

$$27y^2 + 26y - 1 = 0.$$

O discriminante desta equação é

$$\Delta = 26^2 - 4 \cdot 27 \cdot (-1) = 676 + 108 = 784 = 28^2.$$

Assim, os possíveis valores de y são

$$y_1 = \frac{-26-28}{2 \cdot 27} = -\frac{54}{54} = -1 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-26+28}{2 \cdot 27} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 27} = \frac{1}{27}.$$

Lembrando que $y = x^3$, os dois valores de y encontrados acima, fornecem dois possíveis valores para x: $x_1^3 = -1$, ou seja, $x_1 = -1$ e $x_2^3 = \frac{1}{27}$, ou seja, $x_2 = \frac{1}{3}$. Assim, -1 e $\frac{1}{3}$ são as duas raízes reais da equação dada. ■

3.2 – Inequações quadráticas

Se a, b e c são números reais e $a \neq 0$, uma expressão do tipo

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \tag{3.20}$$

é chamada **inequação quadrática**. O sinal de desigualdade "$\geq$" pode ser substituido por "$\leq$", "$>$" ou "$<$".

Em uma inequação, como (3.20), queremos encontrar todos os números reais que, colocados no lugar de x, tornam a desigualdade verdadeira. Podemos fazer isso se soubermos como o **sinal** da expressão quadrática $y = ax^2 + bx + c$ varia, de acordo com a variação de x. Vejamos um exemplo.

Exercício 3.33 Para cada x real, vamos determinar um y real, que depende de x de acordo com a relação

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

(1) Encontre os valores de x que fazem y ser igual a zero.
(2) Para cada $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 3, 4, 5, 6\}$, encontre o valor respectivo de y.

Solução. (1) Os valores de x para os quais y é igual a zero são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, ou seja,

$$r_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1 \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3.$$

(2) Vamos colocar em uma tabela os valores de x e os valores respectivos de y:

x	-4	-2	-1	0	$1/2$	1	$3/2$	2	3	4	5	6
y	35	11	8	3	$5/4$	0	$-3/4$	-1	0	3	8	15

■

Examinando a tabela na solução do Exercício 3.33 acima, vemos que os valores que y assume *entre as raízes* da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ são negativos. À esquerda e à direita dessas raízes, os valores de y são positivos. Vejamos porque isso acontece.

Suponha que $y = ax^2 + bx + c$ e que, como no Exercício 3.33, $a > 0$ e $\Delta > 0$, ou seja, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2, com $r_1 < r_2$.

Usando a fatoração (3.7) da Observação 3.2, podemos escrever a relação entre x e y na forma

$$y = a(x - r_1)(x - r_2). \tag{3.21}$$

Como estamos supondo que $a > 0$, o sinal de y vai ser igual ao sinal de $(x - r_1)(x - r_2)$. Neste caso, lembrando que $r_1 < r_2$,

- se $x < r_1 < r_2$, então $x - r_1 < 0$ e $x - r_2 < 0$. Logo,

  $$(x - r_1)(x - r_2) > 0 \quad \text{e} \quad y = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ é } \textbf{positivo.}$$

- Se $r_1 < x < r_2$, então $x - r_1 > 0$ e $x - r_2 < 0$. Logo,

  $$(x - r_1)(x - r_2) < 0 \quad \text{e} \quad y = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ é } \textbf{negativo}.$$

- Se $r_1 < r_2 < x$, então $x - r_1 > 0$ e $x - r_2 > 0$. Logo,

  $$(x - r_1)(x - r_2) > 0 \quad \text{e} \quad y = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ é } \textbf{positivo}.$$

Esta situação pode ser representada na reta real como na Figura 3.2 a seguir. Escrevemos os sinais "+" ou "−" sobre um intervalo, para indicar se a expressão quadrática $y = ax^2+bx+c$ é positiva ou negativa para x pertencente a esse intervalo.

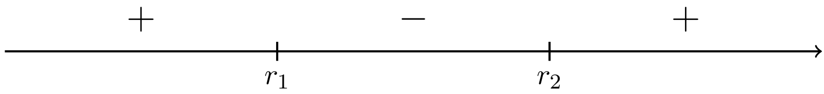


Figura 3.2: variação do sinal de $y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$ e $\Delta > 0$.

No caso em que $r_1 = r_2 = r$, isto é, $\Delta = 0$, temos

$$y = a(x - r_1)(x - r_2) = a(x - r)^2 \geq 0.$$

Assim, y é positivo exceto em $x = r$, onde $y = 0$. Esta situação pode ser representada na reta real como na Figura 3.3.

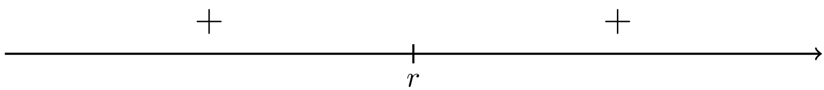


Figura 3.3: variação do sinal de $y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$ e $\Delta = 0$.

Quando o coeficiente a é negativo, os sinais se invertem. Vejamos um exemplo no exercício a seguir.

Exercício 3.34 Para cada número real x, consideremos o número real y, dado por

$$y = -x^2 + 8x - 15.$$

(1) Encontre os valores de x que fazem y ser igual a zero.
(2) Encontre os valores de x que fazem y ser positivo.

Solução. (1) Os números procurados são as raízes da equação $-x^2 + 8x - 15 = 0$, que são $r_1 = \frac{-8+2}{-2} = 3$ e $r_2 = \frac{-8-2}{-2} = 5$.

(2) A construção de uma tabela, como no Exercício 3.33, pode ajudar, mas podemos usar os argumentos desenvolvidos nos parágrafos acima para resolvermos este problema. Primeiro, usando a identidade (3.21), vemos que

$$y = -(x-3)(x-5),$$

onde $a = -1$. Agora, se $x < 3$, então x também é menor que 5, logo $x - 3 < 0$ e $x - 5 < 0$. Sendo ambos negativos, seu produto é positivo: $(x-3)(x-5) > 0$ e, assim, $y = -(x-3)(x-5) < 0$. Portanto, os números reais menores que ou iguais a 3 não fazem y ser positivo, lembrando que, se $x = 3$, então $y = 0$.

Da mesma forma, se $x > 5$, então x também é maior que 3, logo $x - 3 > 0$ e $x - 5 > 0$. Portanto, $(x-3)(x-5) > 0$ e, assim, $y = -(x-3)(x-5) < 0$. Daí, se x é maior que ou igual a 5, então y não é positivo.

Finalmente, se $3 < x < 5$, então $x - 3 > 0$ e $x - 5 < 0$ e, como têm sinais contrários, o seu produto $(x-3)(x-5)$ é negativo. Logo, $y = -(x-3)(x-5) > 0$. Portanto, y é positivo se, e somente se, $3 < x < 5$, ou seja, x pertence ao intervalo aberto $(3,5)$. ■

Em geral, quando $a < 0$, temos a situação inversa daquela em que $a > 0$. Mais especificamente, o sinal de y, dado como em (3.21), é contrário ao sinal de $(x - r_1)(x - r_2)$. Assim,

- se $x < r_1 < r_2$, então $x - r_1 < 0$ e $x - r_2 < 0$, o que implica que

$$(x - r_1)(x - r_2) > 0 \text{ e } y = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ é } \textbf{negativo}.$$

- Se $r_1 < x < r_2$, então $x - r_1 > 0$ e $x - r_2 < 0$. Logo,

$$(x - r_1)(x - r_2) < 0 \text{ e } y = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ é } \textbf{positivo}.$$

- Se $r_1 < r_2 < x$, então $x - r_1 > 0$ e $x - r_2 > 0$. Logo,

$$(x - r_1)(x - r_2) > 0 \text{ e } y = a(x - r_1)(x - r_2) \text{ é } \textbf{negativo}.$$

Assim como na caso anterior, esta situação pode ser representada na reta real como na Figura 3.4 a seguir. Escrevemos os sinais "+" ou "−" sobre um intervalo, para indicar se a expressão quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é positiva ou negativa para x pertencente a esse intervalo. Note que as posições dos sinais são invertidas, em relação à reta real da Figura 3.2.

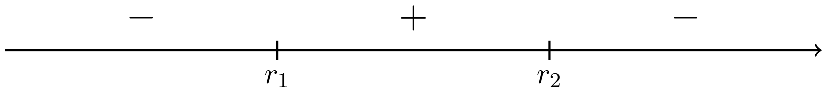


Figura 3.4: variação do sinal de $y = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e $\Delta > 0$.

No caso em que $\Delta = 0$, ou seja, $r_1 = r_2 = r$, temos

$$(x - r_1)(x - r_2) = (x - r)^2 \geq 0$$

e, como $a < 0$, $y = a(x - r_1)(x - r_2) = a(x - r)^2 \leq 0$. Assim y é negativo exceto em $x = r$, onde $y = 0$. Esta situação pode ser representada na reta real como na Figura 3.5.

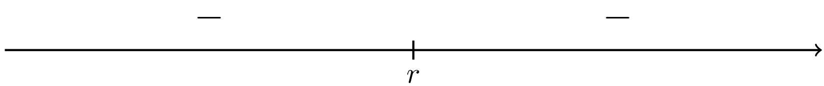


Figura 3.5: variação do sinal de $y = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e $\Delta = 0$.

O Exercícios e comentários acima esclarecem como varia o sinal de uma expressão quadrática $y = ax^2 + bx + c$, nos casos em que $\Delta \geq 0$. Resta verificar o que ocorre quando $\Delta < 0$. Neste caso, sabemos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes reais. Logo, não podemos usar a fatoração 3.21. Assim, é conveniente expressarmos $y = ax^2 + bx + c$ na forma canônica

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{3.22}$$

Em casos particulares, podemos fazer isso completando quadrados. vejamos isso em um exemplo.

Exercício 3.35 Determine o intervalo da reta real onde a expressão quadrática

$$y = x^2 - 4x + 5$$

é positiva.

Solução. De início, veja que a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ não admite raízes reais, pois seu discriminante Δ é negativo:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Podemos escrever $y = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Como $(x-2)^2 \geq 0$ para cada x real, temos que $y = (x-2)^2 + 1 \geq 1$, logo é positivo, para cada x real.

Isso significa que a expressão $y = x^2 - 4x + 5$ é *sempre* positiva. Logo, o intervalo onde essa expressão é positiva é $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. ■

Voltando à expressão (3.22), se $\Delta < 0$ e $a > 0$, então $-\Delta > 0$ e

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} > 0$$

para cada x real.

No caso em que $\Delta < 0$ e $a < 0$, temos

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} < 0$$

para cada x real.

Vamos resumir, na tabela a seguir, todas as informações sobre a variação de sinal da expressão quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ e $r_1 \leq r_2$, onde r_1 e r_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c$ no caso em que $\Delta \geq 0$.

Δ	a	$y=0$	$y>0$	$y<0$
$\Delta>0$	$a>0$	$x=r_1$ ou $x=r_2$	$x<r_1$ ou $x>r_2$	$r_1<x<r_2$
	$a<0$		$r_1<x<r_2$	$x<r_1$ ou $x>r_2$
$\Delta=0$	$a>0$	$x=r_1=r_2$	$x\neq r_1=r_2$	Nunca
	$a<0$		Nunca	$x\neq r_1=r_2$
$\Delta<0$	$a>0$	Nunca	Nunca	Sempre
	$a<0$		Sempre	Nunca

Exercício 3.36 O conjunto solução da inequação

$$-x^2+4x-4\geq 0$$

é

(a) $\mathbb{R}$.
(b) $\{2\}$.
(c) $\{-2\}$.
(d) $\varnothing$.

Solução. A expressão $y=-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)$ é igual a -1 multiplicado pelo quadrado $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$. Assim, $y=-(x-2)^2\leq 0$, para qualquer x real. Se $x=2$, então $y=0$. Se $x\neq 2$, então $y<0$. Assim, a inequação dada é satisfeita apenas se $x=2$. Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $\{2\}$ e, assim, a resposta correta é a do item (b). ■

Vejamos mais alguns problemas envolvendo inequações quadráticas.

Exercício 3.37 Algum número negativo pode ser solução da inequação $5x^2-8x+3<2x^2+4x+5$?

Solução. Passando os termos para o primeiro membro, obtemos

$$3x^2-12x-2<0.$$

As raízes de $3x^2 - 12x - 2$ são

$$\begin{aligned}\frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} &= \frac{12 \pm \sqrt{144 + 24}}{6} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{168}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{42}}{6} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{42}}{3}.\end{aligned}$$

Como o discriminante $\Delta = 168 > 0$ e o coeficiente do termo de grau 2 é $a = 3 > 0$, a expressão $3x^2 - 12x - 2$ é negativa para x *entre* $r_1 = \frac{6-\sqrt{42}}{3}$ e $r_2 = \frac{6+\sqrt{42}}{3}$, ou seja, o conjunto solução da inequação dada é o intervalo aberto $I = \left(\frac{6-\sqrt{42}}{3}, \frac{6+\sqrt{42}}{3}\right)$.

A pergunta feita no enunciado é se algum número negativo pode ser solução da inequação dada, o que é equivalente a perguntar se, no intervalo I existem números negativos. Como $36 < 42$, temos $6 = \sqrt{36} < \sqrt{42}$, logo $6 - \sqrt{42} < 0$ e $r_1 = \frac{6-\sqrt{42}}{3} < 0$. Isso significa que o extremo esquerdo do intervalo I está à esquerda de 0, logo existem números negativos em I. De modo mais preciso, os números do intervalo $I = \left(\frac{6-\sqrt{42}}{3}, 0\right)$, são os números negativos que pertencem ao conjunto solução da inequação $5x^2 - 8x + 3 < 2x^2 + 4x + 5$.

■

Exercício 3.38 Resolva a inequação $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) < 0$.

Solução. As raízes da expressão $x^2 - 6x + 5$ são $r_1 = 1$ e $r_2 = 5$. As raízes da expressão $x^2 - 6x + 8$ são $s_1 = 2$ e $s_2 = 4$. Nos dois casos, $\Delta > 0$ e $a > 0$.

Para que o produto das duas expressões quadráticas seja negativo, essas expressões devem ter sinais contrários. Assim, temos os seguintes dois casos.

Caso 1:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 & (1) \\ x^2 - 6x + 4 > 0 & (2) \end{cases}$$

Caso 2:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 & (3) \\ x^2 - 6x + 4 < 0 & (4) \end{cases}$$

No caso 1, a inequação (1) tem conjunto solução $S_1 = (1,5)$ e a inequação (2) tem conjunto solução $S_2 = (-\infty,2)\cup(4,+\infty)$. O conjunto solução do sistema, no caso 1, é, portanto, $S_1 \cap S_2 = (1,2) \cup (4,5)$.

No caso 2, a inequação (3) tem conjunto solução $S_3 = (-\infty,1) \cup (5,+\infty)$ e a inequação (4) tem conjunto solução $S_4 = (2,4)$. O conjunto solução do sistema, no caso 2, é, portanto, $S_3 \cap S_4 = \varnothing$.

Assim, apenas o caso 1 contribui com soluções para a ineqação dada, isto é, a solução da inequação é dada pela união de intervalos $(1,2) \cup (4,5)$.

■

Exercício 3.39 Sejam a_1,a_2,b_1,b_2 quatro números reais, com $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ e $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

(1) Verifique que

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)t + (b_1^2 + b_2^2)\\ = (a_1t + b_1)^2 + (a_2t + b_2)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Ocorre a igualdade se, e somente se, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

(2) Calcule o discriminante Δ da expressão quadrática

$$(a_1^2 + a_2^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)t + (b_1^2 + b_2^2).$$

Use o item (a) para concluir que $\Delta \leq 0$.

(3) Para a_1, a_2, b_1 e b_2 satisfazendo as condições do enunciado, use o item (b) para concluir que é válida a **desigualdade de Cauchy**:

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}. \tag{3.23}$$

Solução. (1) A soma de quadrados $(a_1t+b_1)^2+(a_2t+b_2)^2$, é maior que ou igual a zero. A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1t + b_1 = 0$

e $a_2t + b_2 = 0$ (veja o Exercício 2.17). Logo, ocorre a igualdade se, e somente se, $\frac{b_1}{a_1} = t = \frac{b_2}{a_2}$. Desenvolvendo essa soma, obtemos

$$\begin{aligned} a_1^2t^2 + 2a_1b_1t + b_1^2 + a_2^2t^2 + 2a_2b_2t + b_2^2 \\ = (a_1^2 + a_2^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)t + (b_1^2 + b_2^2). \end{aligned}$$

(2) Observemos que o coeficiente que multiplica t^2 na expressão quadrática $(a_1^2+a_2^2)t^2+2(a_1b_1+a_2b_2)t+(b_1^2+b_2^2)$, é $a_1^2+a_2^2$, que é positivo. Como sabemos que esta expressão é sempre maior que ou igual a zero, o seu discriminante tem que ser $\Delta \leq 0$. Caso contrário, ela teria duas raízes reais distintas e mudaria de sinal. Calculando este discriminante, temos

$$\begin{aligned} \Delta &= (2(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = \\ &= 4\left((a_1b_1 + a_2b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)\right). \end{aligned}$$

Como $\Delta \leq 0$, concluímos que

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \leq 0,$$

ou seja,

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Extraíndo-se a raiz quadrada, obtemos a desigualdade (3.23), o que responde ao item (3). ■

4 Introdução às funções quadráticas

4.1 – Propriedades básicas das funções quadráticas

Para resolvermos inequações quadráticas, na Seção 3.2, tivemos a necessidade de estudar o *sinal* da expressão $y = ax^2 + bx + c$, onde x varia livremente no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, e y depende de x, não podendo ser um número real qualquer, mas sendo obtido a partir de x por uma expressão algébrica. Essa dependência de y em relação a x é reforçada escrevendo-se $y = f(x)$.

Exercício 4.1 Suponha que y seja dado em função de x pela expressão $y = f(x) = x^2 - 3$. Determine $f(x)$, para $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Solução. Devemos substituir x pelos valores dados. Assim,

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1, \\ f(-1) &= (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2, \\ f(0) &= 0^2 - 3 = -3, \\ f(1) &= 1^2 - 3 = -2 \quad \text{e} \\ f(2) &= 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

■

Dizemos que y é dado *em função de* x. A letra f representa uma função e a expressão $f(x)$ é o valor da função para x real, que também chamamos de **imagem** de x pela função f. Escrevemos $f : A \to B$ para esclarecer que os números x são elementos de um conjunto A, que chamamos de **domínio** e os valores de $y = f(x)$ pertencem a um conjunto B, que chamamos de **contradomínio**.

Observação 4.1 Podemos interpretar uma função como uma ação, ou uma sequência de ações, a serem realizadas sobre um número, ou outro objeto. Por exemplo, quando escrevemos, no Exercício 4.1, que $f(1) = -2$, queremos dizer que a função f transforma o número 1 no número -2. Ela faz isso em dois passos. Primeiro, eleva-se o número ao quadrado: 1^2. Depois subtrai-se 3 desse quadrado: 1^2-3. O resultado dessa subtração é $f(1)$. Em geral, ao escrevermos $f(x) = x^2 - 3$, estamos dizendo que esse processo, em dois passos, deve ser feito para que, a partir de um número real x, se obtenha a sua imagem $f(x)$.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{4.1}$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$, é chamada **função quadrática**. Neste capítulo, estudaremos as propriedades básicas das funções quadráticas. Também veremos que é possível aplicar as funções quadráticas na solução de vários problemas interessantes.

Para estudarmos convenientemente a função quadrática f, dada em (4.1), vamos expressá-la de modo mais adequado:

$$\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.
\end{aligned}$$

Assim como no caso das equações quadráticas, conforme a Seção 3.1, página 72, a expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamada **discriminante** da função quadrática f. A expressão

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \tag{4.2}$$

é chamada **forma canônica** da função f.

A forma canônica de uma função quadrática permite que se chegue a algumas conclusões importantes sobre a função. A primeira diz respeito ao valor mínimo, ou máximo, que essa função pode assumir.

Observação 4.2 Como o quadrado de um número real nunca é negativo, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para qualquer valor de x e é igual a zero se, e somente se, $x = -\frac{b}{2a}$. Temos duas situações possiveis:

(I) Se $a > 0$, então

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq \frac{-\Delta}{4a}$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Assim, neste caso, a função f assume o valor **mínimo**

$$\frac{-\Delta}{4a} \text{ quando } x = -\frac{b}{2a}.$$

(II) Se $a < 0$, então

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Assim, neste caso, a função f assume o valor **máximo**

$$\frac{-\Delta}{4a} \text{ quando } x = -\frac{b}{2a}.$$

Exercício 4.2 Escreva cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada abaixo, na forma canônica. Em cada caso, decida se há máximo ou mínimo e encontre esse valor extremo.

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 8.$
(2) $f(x) = -x^2 + x + 1.$
(3) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}.$

Solução. Colocaremos as funções na forma canônica.

(1) Completando quadrados temos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 8 \\ &= (x-3)^2 - 1. \end{aligned}$$

Como $(x-3)^2 \geq 0$, temos que $f(x) = (x-3)^2 - 1 \geq -1$. Assim, esta função atinge um valor mínimo igual a -1.

Outra maneira de resolver o problema é aplicar diretamente as condições (I) ou (II): coeficiente de x^2 é $a = 1 > 0$, logo a função admite um valor mínimo. Esse valor é dado por

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{36-32}{4} = -1.$$

(2) Completando quadrados temos

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - x - 1) = -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1\right) \\ &= -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

Como $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, temos que

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}.$$

Assim, esta função assume valor máximo $\frac{5}{4}$.

Outra forma de resolver o problema: o coeficiente de x^2 é $a = -1 < 0$, logo a função assume um valor máximo, dado por

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1+4}{4(-1)} = \frac{5}{4}.$$

(3) Neste caso,

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Logo, o valor mínimo que ela atinge é 0.

Solução alternativa: $a = 1 > 0$, logo a função admite um elemento mínimo

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = 0, \text{ pois } \Delta = 0.$$

■

As observações acima nos permitem resolver problemas onde devemos encontrar extremos para certas grandezas. Vejamos alguns desses problemas.

Exercício 4.3 Dentre todos os retângulos de perímetro 12cm, encontre o que tem maior área.

Solução. O perímetro de um retângulo é a soma das medidas de seus quatro lados. Se os lados do retângulo medem x e y, então seu perímetro é $2x + 2y$, porque lados opostos têm a mesma medida. Assim, $2x + 2y = 12$, ou seja, $x + y = 6$.

A área do retângulo de lados x e y é $A = xy$. Podemos substituir y por $6 - x$ no produto xy, para obtermos a expressão da área como função de x: $A(x) = x(6 - x)$, ou seja,

$$A(x) = -x^2 + 6x.$$

Neste caso, como $a = -1 < 0$, a função $A(x)$ atinge o valor máximo

$$-\frac{\Delta}{4a} \text{ quando } x = -\frac{b}{2a}.$$

Temos $b = 6$, $c = 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 36$. Assim, o valor máximo para a área $A(x)$ é

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4(-1)} = 9,$$

que ocorre quando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3.$$

Neste caso, $y = 6 - x = 6 - 3 = 3$. Assim, as dimensões do retângulo são $x = 6$cm e $y = 6$cm. Portanto, *dentre os retângulos de perímetro 12cm, o que tem maior área é o quadrado de lado 3cm.* ■

Observação 4.3 A solução do Exercício 4.3 pode ser adptada para qualquer perímetro p onde, neste exercício, $p = 12$. A conclusão continua sendo a mesma: *dentre os retângulos de mesmo perímetro, o que tem maior área é o quadrado.*

Voltemos a aplicar as condições de máximo ou mínimo para uma função quadrática. Desta vez em um problema geométrico.

Exercício 4.4 Dentre todos os retângulos inscritos em um quarto de círculo, determine o que tem área máxima.

Solução. Se um retângulo de base x e altura y está inscrito em um quarto de círculo de raio R, como na Figura 4.1, então

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ e, assim, } y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Logo, podemos escrever sua área como

$$A = xy = x\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2x^2 - x^4}$$

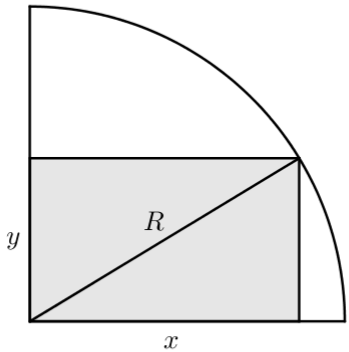


Figura 4.1: um retângulo inscrito em um quarto de círculo.

A área $A(x) = \sqrt{R^2x^2 - x^4}$ será a maior possível quando o radicando $R^2x^2 - x^4$ for máximo. Essa expressão pode ser escrita como

$$f(t) = R^2t - t^2, \text{ onde } t = x^2.$$

Ou seja, *a área do retângulo é a raiz quadrada de uma função quadrática f, cuja variável t é quadrado de x.*

Desse modo, $A(x)$ será o maior possível quando $f(t)$ for o maior possível, sendo que f admite máximo, pois o coeficiente de t^2 é -1. O máximo de f ocorre quando

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{R^2}{2(-1)} = \frac{R^2}{2},$$

ou seja, quando $x = \sqrt{t} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Neste caso, $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Isso significa que a área será máxima quando $y = \frac{R}{\sqrt{2}} = x$, isto é, quando o retângulo inscrito for um quadrado. ■

4.2 – Gráfico de uma função quadrática

Nesta seção, estudaremos o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quadrática, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Primeiro, vamos relembrar o que é o gráfico de uma função.

Sabemos que os pontos do plano podem ser colocados em correspondência com o conjunto dos pares ordenados de números reais

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}. \tag{4.3}$$

Assim como no caso da reta real, essa correspondência depende de escolhas. Devemos escolher um ponto O, que chamamos de **origem**, e duas retas perpendiculares, concorrentes neste ponto O. As duas retas são colocadas em correspondência com os números reais, transformando-se em duas retas reais, ou dois eixos, com a mesma origem, um horizontal, orientado da esquerda para direita, e um vertical, orientado de baixo para cima. Em geral, escolhe-se a mesma unidade de medida em ambos os eixos. Feitas essas escolhas e estabelecida a correspondência, chamamos o plano, e também o conjunto $\mathbb{R}^2$, de **plano cartesiano**.

Um ponto do plano cartesiano passa a ser identificado com um único par ordenado de números reais. Na Figura 4.2, as projeções do

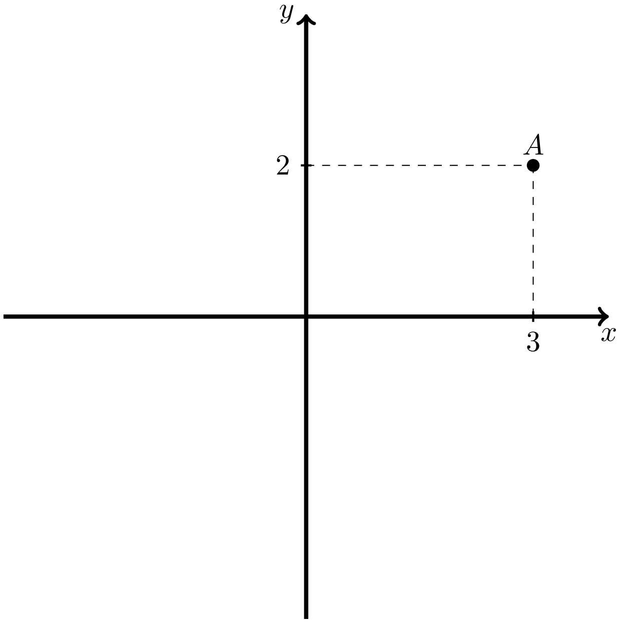


Figura 4.2: o ponto $A = (3{,}2)$ no plano cartesiano.

ponto A sobre os eixos são os números 3 e 2. Então, dizemos que 3 é a **abscissa** de A e que 2 é a **ordenada** de A. Escrevemos $A = (3{,}2)$ para indicar a identificação do ponto A com o par ordenado $(3{,}2)$. Os números 3 e 2 são chamados **coordenadas** de A.

O **gráfico** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o subconjunto

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x{,}y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \tag{4.4}$$

do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Queremos determinar o gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Uma primeira observação em relação ao gráfico dessa função quadrática f, é que ele é *simétrico em relação à reta vertical* $x = -\frac{b}{2a}$. Essa reta é chamada **eixo de simetria** do gráfico de f. Para verificarmos isso, devemos mostrar que, se x_1 e x_2 são dois números reais, situados à mesma distância de $-\frac{b}{2a}$, então $f(x_1) = f(x_2)$, conforme a descrição na Figura 4.3. Antes de verificarmos que isso vale em geral, vejamos dois exemplos.

Exercício 4.5 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = x^2 - 6x + 8.$$

Verifique que $f(6 - x) = f(x)$, para qualquer x real.

Solução. A verificação é direta:

$$\begin{aligned} f(6-x) &= (6-x)^2 - 6(6-x) + 8 \\ &= 36 - 12x + x^2 - 36 + 6x + 8 \\ &= x^2 - 6x + 8 = f(x). \end{aligned}$$

■

Exercício 4.6 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = x^2 - 8x + 7.$$

Encontre um número real v, tal que $f(v - x) = f(x)$, para qualquer x real.

Solução. A condição $f(v-x) = f(x)$ deve ser válida para qualquer x real. Em particular, ela é válida para $x = 0$. Logo,

$$f(v-0) = f(0) = 7, \text{ ou seja, } f(v) = 7,$$

o que é o mesmo que $v^2 - 8v + 7 = 7$. Simplificando, obtemos $v^2 - 8v = 0$, que nos fornece $v = 0$ ou $v = 8$. Uma verificação direta mostra que $v = 0$ não satisfaz a condição do problema. Por exemplo, $f(0-1) = f(-1) = 16 \neq 0 = f(1)$. Já $v = 8$ satisfaz a condição do problema:

$$\begin{aligned} f(8-x) &= (8-x)^2 - 8(8-x) + 7 \\ &= 64 - 16x + x^2 - 64 + 8x + 7 \\ &= x^2 - 8x + 7 \\ &= f(x) \text{ qualquer que seja } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

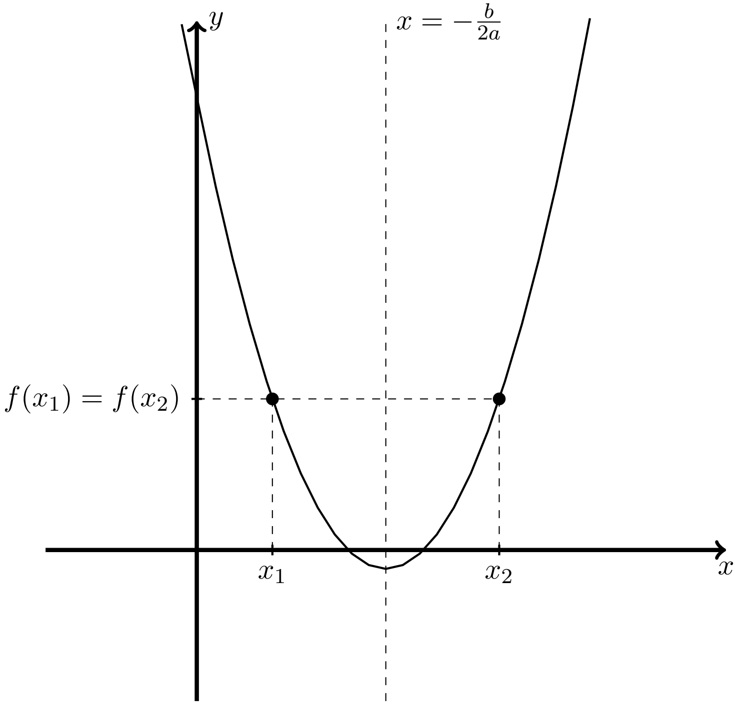


Figura 4.3: o gráfico de uma função quadrática e seu eixo de simetria.

Seguindo o que acabamos de fazer no Exercício 4.6, vamos mostrar que, em geral, se $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $v = -\frac{b}{a}$, então $f(v - x) = f(x)$, para qualquer x real.

Exercício 4.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Se $v = -\frac{b}{a}$, então $f(v - x) = f(x)$, para todo x real. Isso significa que o gráfico de f é *simétrico* em relação à reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$, conforme a Figura 4.3.

Solução. Se x e z são dois pontos da reta real que são simétricos em relação a $-\frac{b}{2a}$, ou seja, estão a uma mesma distância de $-\frac{b}{2a}$, então

$$z - \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{2a} - x, \text{ ou seja, } z = -\frac{b}{a} - x.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
f(z) = f\left(-\frac{b}{a} - x\right) &= a\left(-\frac{b}{a} - x\right)^2 + b\left(-\frac{b}{a} - x\right) + c \\
&= a\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2bx}{a} + x^2\right) - \frac{b^2}{a} - bx + c \\
&= \cancel{\frac{b^2}{a}} + 2bx + ax^2 - \cancel{\frac{b^2}{a}} - bx + c \\
&= ax^2 + bx + c = f(x).
\end{aligned}
$$

■

Um **lugar geométrico plano** é um conjunto de pontos do plano que satisfazem uma ou mais condições. Por exemplo, dados dois pontos distintos A e B, o lugar geométrico dos pontos que estão a uma igual distância de A e de B é uma reta, perpendicular à reta determinada por A e B, e que passa pelo ponto médio do segmento AB. Essa reta é chamada **mediatriz** do segmento AB. Se duas retas ℓ e m são concorrentes, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das duas retas é a união de duas retas perpendiculares, que são bissetrizes dos ângulos formados por ℓ e m. Se as retas ℓ e m são paralelas, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de ℓ e m é uma reta paralela a ambas e situada entre as duas, exatamente no meio da faixa de plano determinada pelas duas retas.

Estabelecidos os lugares geométricos, nos casos em que se exige equidistância em relação a dois pontos, e também no caso em que se exige equidistância entre duas retas, vamos estudar o caso em que se exige equidistância entre ponto e reta. Suponha que seja dado um ponto F e uma reta d. O lugar geométrico dos pontos que estão a uma igual distância de F e de d é uma curva plana chamada **parábola**. O ponto F é chamado **foco** da parábola, e a reta d é chamada **diretriz** da parábola. Vamos, agora, verificar que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exercício 4.8 Seja f a função quadrática dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0,$$

e discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Seja $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ e seja d a reta horizontal de equação $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$. Verifique que a distância de um ponto $P = (x,y)$, com $y = f(x)$, pertencente ao gráfico de f, até o ponto F, é igual à distância de P até a reta d.

Solução. Dado um ponto $P = (x,y)$, sobre o gráfico de f, a distância entre P e a reta d é igual à distância entre P e o ponto D, onde

$$D = \left(x, -\frac{1+\Delta}{4a}\right), \text{ conforme veja a Figura 4.4.}$$

Devemos verificar que os segmentos PF e PD têm o mesmo comprimento. A medida de PF é

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{1-\Delta}{4a}\right)^2}.$$

Como P e D têm a mesma abscissa, a medida de PD é a diferença entre suas ordenadas:

$$\overline{PD} = y - \left(-\frac{1+\Delta}{4a}\right) = y + \frac{1+\Delta}{4a}.$$

Assim,

$$\overline{PF}^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1-\Delta}{4a}\right)^2$$

e

$$\overline{PD}^2 = \left(y + \frac{1+\Delta}{4a}\right)^2.$$

Como

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}.$$

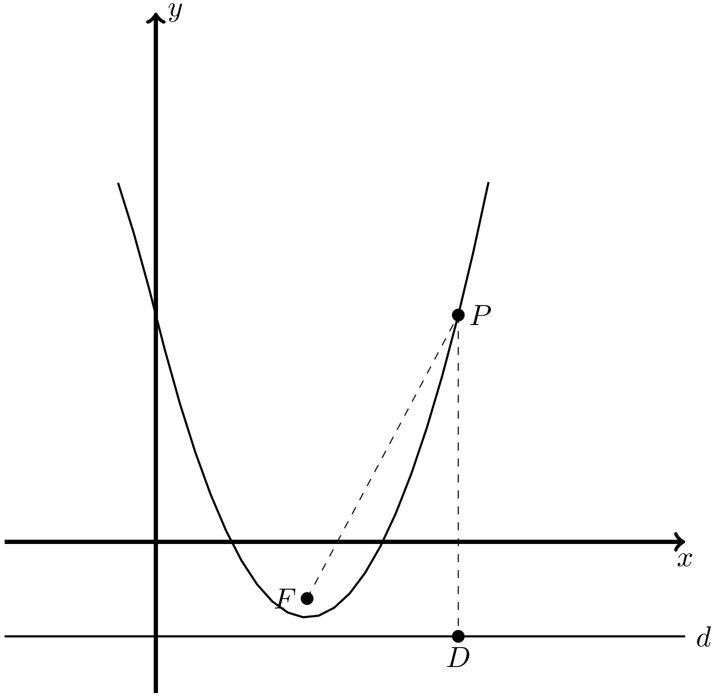


Figura 4.4: um ponto sobre o gráfico de f e suas distâncias até F e d.

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{PF}^2 &= \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} + \left(y - \frac{1-\Delta}{4a}\right)^2 \\
&= \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} + y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1-\Delta}{4a} + \frac{(1-\Delta)^2}{16a^2} \\
&= \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} + y^2 - \frac{y}{2a} + \frac{y\Delta}{2a} + \frac{1}{16a^2} - \frac{\Delta}{8a^2} + \frac{\Delta^2}{16a^2} \\
&= y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{y\Delta}{2a} + \frac{1}{16a^2} + \frac{\Delta}{8a^2} + \frac{\Delta^2}{16a^2} \\
&= y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1+\Delta}{4a} + \frac{(1+\Delta)^2}{16a^2} \\
&= \left(y + \frac{1+\Delta}{4a}\right)^2 = \overline{PD}^2.
\end{aligned}$$

Assim, $PF = PD$.

Está provado que a distância de P ao ponto F é igual à distância de P à reta d, qualquer que seja o ponto P sobre o gráfico da função quadrática f. Portanto, o gráfico de f é uma parábola com foco F e diretriz d. ■

Resumindo, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0,$$

é uma parábola, com foco no ponto $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ e como diretriz a reta horizontal d, com equação $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.

Podemos encontrar a equação da diretriz e as coordenadas do foco da parábola que é gráfico de uma função dada. Vejamos um exemplo.

Exercício 4.9 Encontre as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola que é gráfico da função f, dada por

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Solução. Primeiramente, vamos calcular o discriminante:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1.$$

Assim, as coordenadas do foco são

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-1}{4 \cdot 2} = 0.$$

Portanto, o foco é o ponto $F = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

A equação da diretriz é

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+1}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{4}.$$

■

Reciprocamente, podemos encontrar uma função quadrática se soubermos as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola que é seu gráfico.

Exercício 4.10 Encontre a função quadrática f cujo gráfico é a parábola com foco $F = (1,1)$ e diretriz $y = -1$.

Solução. O enunciado do problema diz que

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) = (1,1) \quad \text{e} \quad -\frac{1+\Delta}{4a} = -1.$$

Dessas igualdades, podemos concluir que $b = -2a$, $1 - \Delta = 4a$ e $1 + \Delta = 4a$. Somando as duas últimas igualdades, obtemos $2 = 8a$, ou seja, $a = \frac{1}{4}$. De $b = -2a$ segue que $b = -\frac{1}{2}$. De $1 - \Delta = 4a = 4 \cdot \frac{1}{4}$, segue que $\Delta = 0$. Logo, $b^2 - 4ac = 0$, ou seja, $\frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot c = 0$. Portanto, $c = \frac{1}{4}$ e a função f é dada por

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}.$$

■

A interseção do gráfico da função quadrática, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0,$$

com seu eixo de simetria, ocorre em um ponto V, que chamamos **vértice** da parábola. O par de coordenadas do vértice da parábola, que é gráfico de f, é

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right). \tag{4.5}$$

De fato, o vértice V pertence ao eixo de simetria do gráfico de f, logo sua abscissa é $x_V = -\frac{b}{2a}$ e sua ordenada é

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Podemos determinar uma função quadrática se conhecermos as coordenadas do foco e do vértice de seu gráfico.

Exercício 4.11 Encontre a função quadrática f cujo gráfico é a parábola com foco $F = (1, -1)$ e vértice $V = (1,1)$.

Solução. O enunciado do problema diz que

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) = (1, -1) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1,1).$$

Logo, $-\frac{b}{2a} = 1$, $-\frac{\Delta}{4a} = 1$ e $\frac{1-\Delta}{4a} = -1$. Das duas últimas igualdades, segue que $\frac{1}{4a} + 1 = -1$ e, assim, $a = -\frac{1}{8}$.

De $-\frac{b}{2a} = 1$, segue que $b = -2a$, ou seja, $b = \frac{1}{4}$. De $-\frac{\Delta}{4a} = 1$, segue que $\Delta = -4a = \frac{1}{2}$, isto é, $b^2 - 4ac = \frac{1}{2}$. Substituindo os valores de a e b, podemos encontrar o valor de c: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot c = \frac{1}{2}$, logo $\frac{1}{16} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{7}{8}$.

Portanto, a função dada por $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{7}{8}$ tem como gráfico um parábola de vértice $V = (1,1)$ e foco $F = (1, -1)$, conforme a Figura 4.5.

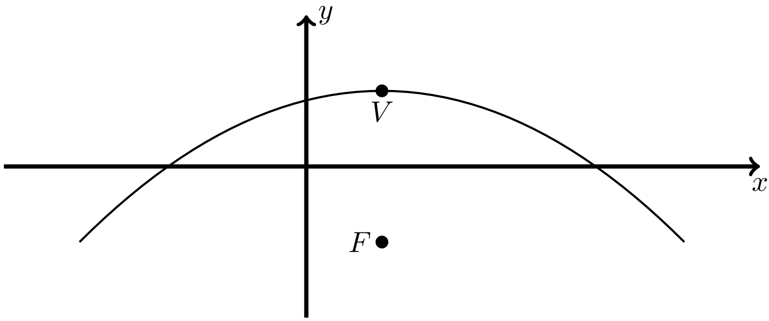


Figura 4.5: o gráfico da função dada por $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{7}{8}$, com vértice $V = (1,1)$ e foco $F = (1, -1)$.

Como o vértice está acima do foco, a parábola se curva para baixo. Vamos discutir essa questão a seguir. ■

Já vimos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, que tem um eixo de simetria vertical, com equação $x = -\frac{b}{2a}$, e tem uma reta diretriz horizontal, com equação $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$. Também vimos que o vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e o foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ têm a mesma abscissa e ambos pertencem ao eixo de simetria da parábola.

Se ocorresse $V = F$, então $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}$ e teríamos $\frac{1}{4a} = 0$, o que é impossível. Logo, *o vértice e o foco de uma parábola são pontos distintos*.

Observação 4.4 O formato da parábola depende da posição relativa dos pontos F e V. De fato, a parábola *se curva sempre na direção de seu foco*, como ilustrado na Figura 4.6.

- Se F está **acima** de V, então a ordenada de F é **maior** que a ordenada de V, isto é, $\frac{1-\Delta}{4a} > -\frac{\Delta}{4a}$ e isso é equivalente a $\frac{1}{4a} > 0$, ou seja, $a > 0$. Neste caso, o vértice V é o ponto mais baixo da parábola e $-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo que a função f pode atingir, como já vimos na Observação 4.2.
- Se F está **abaixo** de V, então a ordenada de F é **menor** que a ordenada de V, isto é, $\frac{1-\Delta}{4a} < -\frac{\Delta}{4a}$, o que é equivalente a $\frac{1}{4a} < 0$, ou seja, $a < 0$. Neste caso, o vértice V é o ponto mais alto da parábola e, como também já vimos na Observação 4.2, $-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo que a função f pode atingir.

4.3 – Aplicações

4.3.1 – Propriedades geométricas da parábola

Vamos começar esta seção usando as funções quadráticas para chegar a conclusões sobre a geometria da parábola. Primeiramente, a Observação 4.5 permite que cada parábola seja vista como o gráfico de uma função quadrática relativamente simples.

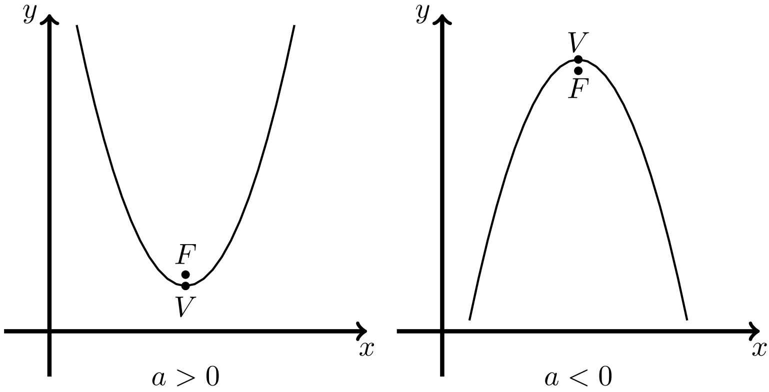


Figura 4.6: se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Se $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Observação 4.5 Dada uma parábola qualquer, podemos escolher um sistema de eixos tal que o eixo das ordenadas coincida com o eixo de simetria da parábola e o vértice da parábola seja a origem do sistema. Se fizermos essa escolha, a função correspondente, $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve ter $c = 0$, pois o gráfico passa pela origem, e há apenas uma raiz real, de multiplicidade 2, logo $0 = \Delta = b^2 - 4ac = b^2$, ou seja, $b = 0$. Assim, toda parábola é gráfico de uma função dada por $f(x) = ax^2$, para uma escolha adequada de um sistema de eixos.

Exercício 4.12 Encontre a equação da reta que tangencia o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2$, no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Solução. Considere a reta, secante ao gráfico de f, que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, fixado, e por outro ponto $(x, f(x))$. O coeficiente angular dessa reta secante é a tangente do ângulo θ, na Figura 4.7, isto é,

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0}. \tag{4.6}$$

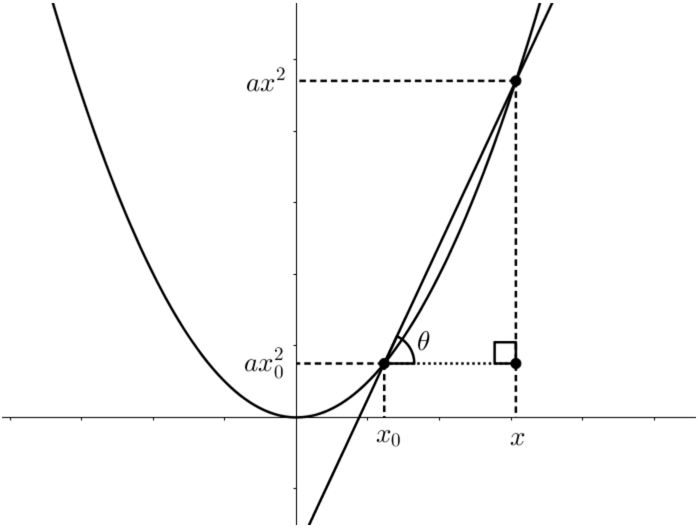


Figura 4.7: uma reta secante à parábola $y = ax^2$.

Podemos fatorar o numerador desta fração e simplificar a expressão:

$$m_s = \frac{a(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = a(x + x_0).$$

À medida em que x se aproxima de x_0, a soma $x + x_0$ se aproxima de $x_0 + x_0 = 2x_0$, e m_s se aproxima de $2ax_0$.

Por outro lado, quando x se aproxima de x_0, a reta passa a ser secante em dois pontos arbitrariamente próximos, logo, tende a ocupar a posição da reta que tangencia o gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Podemos concluir que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $m_t = 2ax_0$. Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f neste ponto é

$$y - ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0) \tag{4.7}$$

■

Vamos encerrar esta seção observando uma propriedade importante das parábolas.

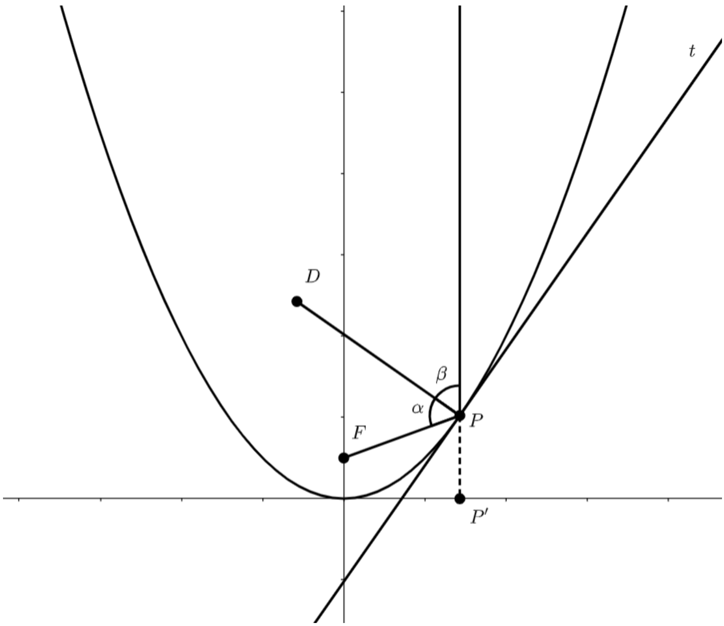


Figura 4.8: os ângulos α e β são iguais.

Observação 4.6 Na Figura 4.8 acima, a reta t é tangente à parábola no ponto P e PD é perpendicular a t. A reta PP' é vertical, ou seja, é perpendicular ao eixo x, e o ponto F é o foco da parábola. Sob essas condições os ângulos α e β são iguais.

Isso garante que, se uma fonte de luz é colocada no foco de uma parábola, então os raios que emanam dessa fonte, depois de refletidos em um espelho parabólico, tornam-se paralelos. Essa propriedade das parábolas é usada na construção de holofotes e farois.

Por outro lado, se ondas eletromagnéticas atingem um anteparo parabólico e são paralelas, essas ondas são todas refletidas para o foco da parábola. Essa propriedade é usada na construção das antenas parabólicas.

4.3.2 – Movimento uniformemente acelerado em uma reta

Considere um ponto em movimento sobre uma reta. A situação ideal é aquela em que podemos determinar a posição do ponto sobre a reta em qualquer instante $t \geq t_0$, onde t_0 é um *instante inicial.* Supondo que a reta é uma reta real, ou seja, que a cada ponto corresponde um único número real, a posição do ponto que se move sobre a reta pode ser dada, em cada instante t, por um número $s(t)$. A função $s : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, que fornece a posição de um ponto em cada instante $t \geq t_0$, é chamada **função horária** do movimento.

Exercício 4.13 Se a posição do ponto é dada, no instante t, por uma função quadrática $s(t) = at^2 + bt + c$, como esse ponto se move ao longo da reta?

Solução. Primeiro, vamos descobrir como determinar a **velocidade** em cada instante t, que nada mais é do que um número do qual se aproximam as velocidades médias em intervalos de tempo muito pequenos que começam, ou terminam, em t. Mais precisamente, considerando-se o intervalo de tempo de t a $t + \Delta t$, a velocidade média do ponto nesse intervalo é dada pela razão

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{4.8}$$

Vamos calcular a variação de posição Δs:

$$\begin{aligned}
\Delta s &= s(t + \Delta t) - s(t) \\
&= a(t + \Delta t)^2 + b(t + \Delta t) + c - (at^2 + bt + c) \\
&= at^2 + 2at\Delta t + a\Delta t^2 + bt + b\Delta t + c - at^2 - bt - c \\
&= 2at\Delta t + a\Delta t^2 + b\Delta t.
\end{aligned}$$

Agora, a velocidade média, no intervalo de tempo Δt, é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2at\Delta t + a\Delta t^2 + b\Delta t}{\Delta t} = 2at + a\Delta t + b.$$

Quando Δt fica muito pequeno, ou seja, próximo de zero, a parcela $a\Delta t$ se torna desprezível e pode ser desconsiderada. Assim, a velocidade, no instante t, é dada por

$$v(t) = 2at + b. \tag{4.9}$$

Logo, se a posição de um ponto é dada por uma função quadrática, sua velocidade é dada por uma função afim.

A razão

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{4.10}$$

é chamada **aceleração média** do ponto no intervalo que entre t e $t + \Delta t$. No nosso caso, temos

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(t + \Delta t) - v(t) \\ &= 2a(t + \Delta t) + b - (2at + b) \\ &= 2a\Delta t. \end{aligned}$$

Portanto, a aceleração média

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = 2a$$

é constante.

Assim, podemos concluir que

Se a posição de um ponto sobre uma reta é dada por uma função quadrática, entao sua aceleração é constante.

Mais ainda, se a aceleração do ponto é dada por A, então $2a = A$ e $a = \frac{A}{2}$.

Vamos considerar o instante inicial do movimento como sendo $t_0 = 0$. Neste caso, por (4.9), $v_0 = v(t_0) = v(0) = b$ e a função afim que determina a velocidade em cada instante é dada por

$$v(t) = v_0 + At. \tag{4.11}$$

Finalmente, se $s_0 = s(0) = c$, então, a função que descreve a posição do ponto em cada instante t é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{A}{2}t^2. \tag{4.12}$$

■

Reciprocamente, é possível se demonstrar que

> Se um ponto de movimenta sobre uma reta com aceleração constante, então sua posição é determinada pela função s dada em (4.12).

A demonstração desse fato está além dos objetivos deste texto.

Exercício 4.14 Uma pedra é deixada cair em um poço e demora 2 segundos para chegar ao fundo do poço. Supondo que o movimento da pedra se dá em linha reta e que a aceleração que ela sofre é constante e igual a $g = 9{,}8m/s^2$, determine a profundidade do poço.

Solução. Como a pedra é deixada cair, a velocidade inicial é $v_0 = 0$. Portanto, temos $s(t) = s_0 + \frac{g}{2}t^2$. Considerando o movimento sobre uma reta vertical, com sentido positivo para baixo e com sua origem na boca do poço, onde a pedra é solta, temos $s_0 = 0$ e $s(2) = p$, sendo p é a profundidade do poço. Logo, $p = 0 + \frac{g}{2} \cdot 2^2 = 2g = 19{,}6$. Assim, a profundiade do poço é de $19{,}6\,m$. ∎

4.3.3 – Frações contínuas e equações quadráticas

Nesta seção, vamos usar as frações contínuas, que estudamos brevemente no Capítulo 2, a partir da página 29, para obtermos aproximações para as raízes de uma equação quadrática. Vamos começar com um exercício.

Exercício 4.15 Encontre aproximações para as raízes da equação $x^2 - 5x - 1 = 0$, com uma casa decimal exata.

Solução. Evidentemente, sabemos resolver a equação quadrática dada, de várias maneiras diferentes. As raízes são

$$r_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}.$$

A questão aqui é encontrar aproximações racionais para essas raízes.

Podemos escrever $x^2 = 5x + 1$. Como as raízes procuradas não são nulas, podemos dividir por x:

$$x = 5 + \frac{1}{x}.$$

Substituíndo x por $5 + \frac{1}{x}$ nesta última igualdade, obtemos

$$x = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{x}}.$$

Podemos continuar esse processo indefinidamente, o que nos fornece

$$x = [5; 5,5,5, \ldots].$$

A sequência $x_1 = 5$, $x_{n+1} = 5 + \frac{1}{x_n}$, para $n \geq 1$, fornece aproximações racionais para uma das raízes da equação quadrática dada. Vamos calcular os primeiros termos desta sequência:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5,\\
x_2 &= [5; 5] = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5} = 5{,}2,\\
x_3 &= [5; 5{,}5] = 5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5}} = 5 + \frac{5}{26} = \frac{135}{26} \cong 5{,}19,\\
x_4 &= [5; 5{,}5{,}5] = 5 + \frac{36}{135} = \frac{711}{135} \cong 5{,}26,\\
x_5 &= [5; 5{,}5{,}5{,}5] = 5 + \frac{1}{x_4} = 5 + \frac{135}{711} = \frac{3690}{711} \cong 5{,}19.
\end{aligned}$$

As cinco primeiras aproximações que obtivemos acima oscilam em torno de 5,2. Assim, podemos admitir que 5,2 é uma boa aproximação para r_1 e, como $r_1 + r_2 = 5$, $r_2 \cong -0{,}2$. ■

Observação 4.7 A sequência $x_1, x_2, \ldots$, que construímos na solução do Exercício 4.15 fornece aproximações para uma das raízes de $x^2 - 5x - 1 = 0$. De fato, pode ser provado que a sequência $x_1, x_2, \ldots$, onde x_{n+1} é obtido a partir do termo anterior x_n, pela expressão $x_{n+1} = 5 + \frac{1}{x_n}$, para cada $n \geq 1$, *sempre* converge para $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$, não importa qual seja o valor inicial x_1.

Em geral, dada uma equação $x^2 - bx - 1 = 0$, podemos escrever $x = b + \frac{1}{x}$. Assim uma das raízes admite expansão em fração contínua infinita, dada por $r_1 = [b; b, b, b, \ldots]$. Em outras palavras, podemos encontrar aproximações sucessivas para a raiz r_1 como termos da sequência $x_1 = b$, $x_{n+1} = b + \frac{1}{x_n}$, para qualquer $n \geq 1$. Observando as relações de Viète na equação, vemos que $r_1 r_2 = -1$, ou seja, $r_2 = -\frac{1}{r_1}$.

No exercício a seguir, resolvemos o problema análogo ao do Exercício 4.15, mas com uma equação mais geral.

Exercício 4.16 Encontre aproximações das raízes da equação quadrática $x^2 - 6x + 2 = 0$, usando frações contínuas.

Solução. Usando a mesma técnica do Exercício 4.15, podemos escrever $x^2 = 6x - 2$. Dividindo por x, obtemos

$$x = 6 - \frac{2}{x}.$$

Substituíndo x por $6 - \frac{2}{x}$ no denominador da fração, obtemos

$$x = 6 - \cfrac{2}{6 - \cfrac{2}{x}}$$

e esse procedimento pode ser repetido, gerando a expressão

$$x = 6 - \cfrac{2}{6 - \cfrac{2}{6 - \cfrac{2}{6 - \cdots}}}.$$

Para que a expressão acima assuma a forma de uma fração contínua, devemos simplificá-la:

$$x = 6 + \cfrac{1}{(-3) + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{(-3) + \cdots}}}.$$

Assim, $x = [6; -3{,}6, -\,3{,}6, \ldots]$.

Aproximações convenientes são dadas por frações contínuas finitas obtidas a partir da fração contínua infinita acima:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 6,\\
x_2 &= [6; -3] = 6 - \frac{1}{3} = \frac{17}{3} \cong 5{,}67,\\
x_3 &= [6; -3{,}6] = 6 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{6}} = \frac{96}{17} \cong 5{,}65,\\
x_4 &= [6; -3{,}6, -\,3] = 6 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{-3}}} = \frac{271}{48} \cong 5{,}65, \ \ldots.
\end{aligned}
$$

A proximação $x \cong 5{,}65$ é correta com duas casas decimais. Como a soma das raízes é 6, uma aproximação para a outra raiz é 0,35. ■

5 Problemas Propostos

5.1 – Sequência 1

Problema 1 — PUC. Sendo $x^3+1=(x+1)(x^2+ax+b)$ para todo x real, os valores de a e b são, respectivamente,

(a) 1 e -1.
(b) 0 e 0.
(c) -1 e 1.
(d) -1 e -1.
(e) 1 e 1.

Problema 2 — UNIFOR. A expressão $(x-1)^2+(x-1)^3$ é equivalente a

(a) x^3+x^2-2.
(b) x^3+2x^2+1.
(c) x^3-2x^2+x.
(d) $(x-1)^5$.
(e) x^3+x^2-2x.

Problema 3 — UFRGS - 2017. Sendo a e b números reais, considere as afirmações a seguir.

(I) Se $a<b$, então $-a>-b$.
(II) Se $a>b$, então $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
(III) Se $a<b$, então $a^2<b^2$.

Quais estão **corretas**?

(a) Apenas (I).
(b) Apenas (II).
(c) Apenas (III).
(d) Apenas (I) e (II).
(e) (I), (II) e (III).

Problema 4 — PUC-MG. Se $A = (-2{,}3]$ e $B = [0{,}5]$, então os números inteiros que estão em $B - A$ são

(a) -1 e 0.
(b) 1 e 0.
(c) 4 e 5.
(d) 3, 4 e 5.
(e) 0, 1, 2 e 3.

Problema 5 — CESGRANRIO - 1995. A maior raiz da equação $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ vale

(a) -1.
(b) 1.
(c) 2.
(d) 2,5.
(e) $\frac{3+\sqrt{19}}{4}$.

Problema 6 Para quantos números inteiros n a expressão $4+n(3-n)$ é positiva?

(a) 2.
(b) 3.
(c) 4.
(d) 5.
(e) infinitos.

Problema 7 — UFPI - 2000. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x < 1, \\ -x^2 + 2x & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

A equação $f(x) = 0$ tem

(a) 1 solução.
(b) 2 soluções.
(c) 3 soluções.
(d) 4 soluções.
(e) nenhuma solução.

Problema 8 — PUC - Campinas, 1999. Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura em relação ao solo, no instante t, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos de lançamento, a bola atingirá o solo?

(a) 2,5.
(b) 5.
(c) 7.
(d) 10.
(e) 25.

Problema 9 — Enem - 2017. A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possiu abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1, ilustra uma das abóbadas, na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas, para simplificar os cálculos. Qual é a medida da altura H, em metros, indicada na Figura 2?

(a) 16/3.
(b) 31/5.
(c) 25/4.
(d) 25/3.

(e) $75/2$.

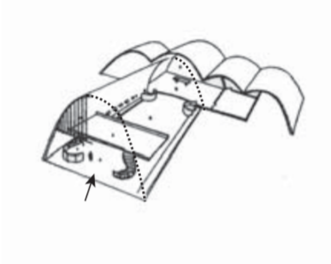


Figura 1

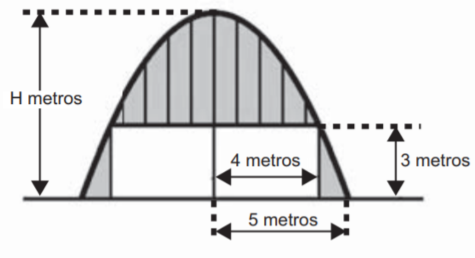


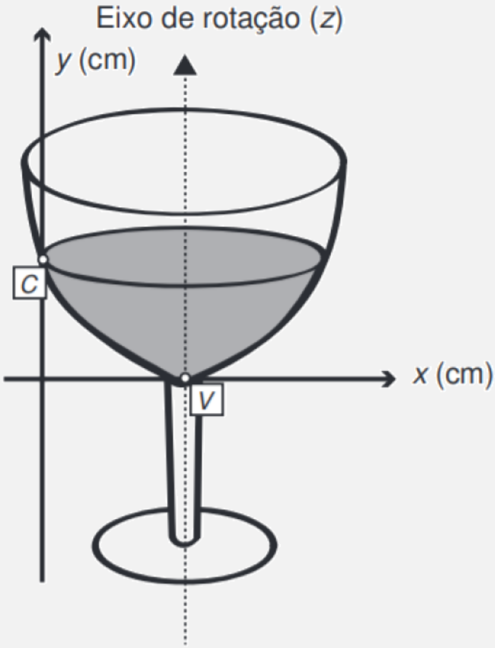
Figura 2

Observação 5.1 Embora o projeto arquitetônico da igreja da Pampulha seja de Oscar Niemeyer (1907–2012), o engenheiro calculista desta e de muitas outras obras importantes, como várias construções em Brasília, foi o pernambucano Joaquim Maria Moreira Cardozo (1897–1978). Cabe aqui a observação simples, mas essencial, de que, sem o engenheiro calculista, os projetos de Niemeyer não seriam mais do que isso: apenas projetos. Cardozo, dentre muitas outras atividades, também era poeta. Uma breve biografia de Joaquim Cardozo pode ser encontrada aqui: Joaquim Cardozo[1]

Joaquim Cardozo[0]

Problema 10 — Enem - 2013. A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

A função real que expressa a parábola no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.



Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

(a) 1.
(b) 2.
(c) 4.
(d) 5.
(e) 6.

5.2 – Sequência 2

Problema 11 — OMB - 1998. Elevei um número positivo ao quadrado, subtraí do resultado o mesmo número e o que restou dividi ainda pelo mesmo número. O resultado que achei foi igual

(a) ao próprio número.
(b) ao dobro do número.
(c) ao número menos 1.
(d) à raiz quadrado do número.
(e) ao número mais 1.

Problema 12 — UFMS - 2009. A soma entre o cubo de um número irracional positivo n e o triplo do quadrado do antecessor desse número n é igual a 21. Então é correto afirmar que

(a) $0 < n < 1{,}5$.
(b) $1{,}5 < n < 2$.
(c) $2 < n < 2{,}5$.
(d) $2{,}5 < n < 3$.
(e) $n > 3$.

Problema 13 — FUVEST. A soma dos quadrados de dois números positivos é 4 e a soma dos inversos de seus quadrados é 1. Se P é o produto e S é a soma desses dois números, então P e S são, respectivamente,

(a) $1/2$ e 2.
(b) 2 e $2\sqrt{2}$.
(c) 2 e $1/2$.
(d) 2 e 2.
(e) 1 e 2.

Problema 14 Considere a fração contínua finita $r = [2; 1, a]$, onde a é um número inteiro positivo. Podemos afirmar corretamente que

(a) r é um número racional maior que 3.
(b) r é um número irracional menor que 3.
(c) Existe a tal que $r < \frac{5}{2}$.
(d) Existe a tal que $\frac{5}{2} < r < 3$.
(e) Existe a tal que $\frac{8}{3} < r < \frac{11}{4}$.

Problema 15 — UNITAU - 1995 - adaptado. O valor da soma dos inversos dos quadrados das duas raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$ é

(a) -1.
(b) 0.
(c) 1.
(d) 2.
(e) 3

Problema 16 — Mackenzie - 2005. Se as raízes reais a e b da equação $3x^2 + 2x + k = 0$ são tais que $a^2 + b^2 = 1$, então o valor de k é

(a) $-7/6$.
(b) $5/8$.
(c) $-5/6$.
(d) $6/7$.
(e) $-2/3$.

Problema 17 — PUCSP - 2000. Se x e y são números reais tais que $2x + y = 8$, então maior valor do produto xy é

(a) 24.
(b) 20.
(c) 16.
(d) 12.
(e) 8.

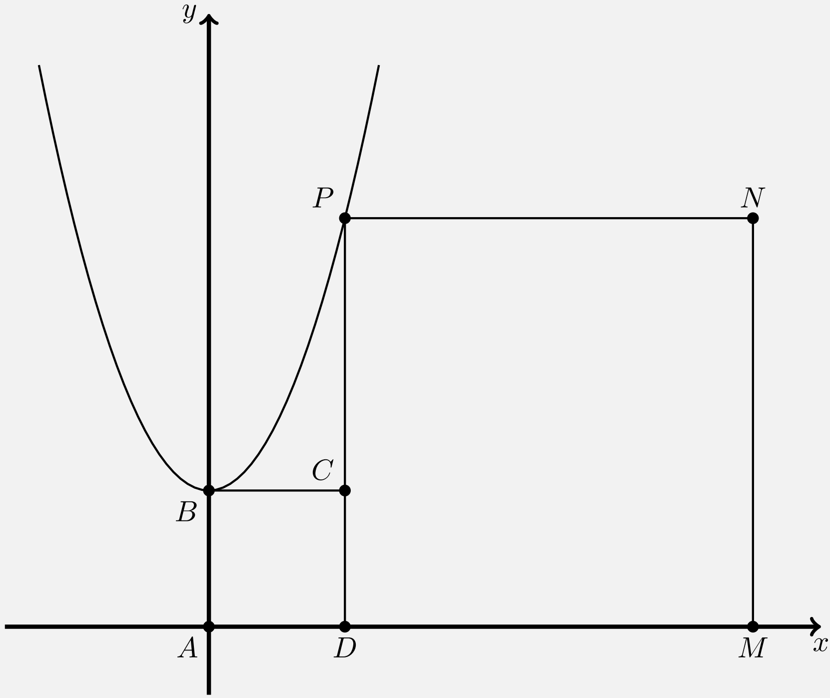
Problema 18 As soluções do sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3y^2 & = & 36 \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 & = & 36 \end{cases}$$

são

(a) $(2{,}2)$ e $(-2, -2)$.
(b) $(-6{,}6)$ e $(6, -6)$.
(c) $(2{,}2)$, $(-2, -2)$, $(-6{,}6)$ e $(6, -6)$.
(d) $(2, -2)$, $(-2{,}2)$, $(6{,}6)$ e $(-6, -6)$.
(e) $(2, -2)$, $(-2{,}2)$, $(6, -6)$ e $(-6{,}6)$.

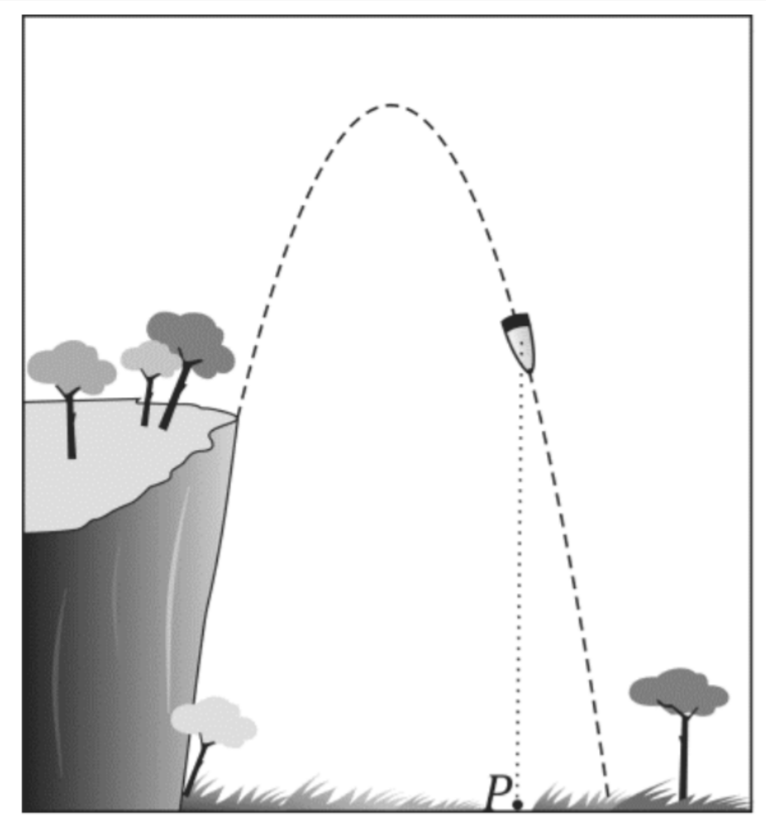
Problema 19 — UERJ - 2017. No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 2$, com $x \in \mathbb{R}$, e os vértices dos quadrados adjacentes $ABCD$ e $DMNP$.



Observe que B e P são pontos do gráfico da função f e que A, B, D e M são pontos dos eixos coordenados. Desse modo, a área do polígono $ABCPNM$, formado pela união dos dois quadrados, é

(a) 20.
(b) 28.
(c) 36.
(d) 40.

Problema 20 A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura.



O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre $30m$ desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de $200m$ acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de $10m$. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

(a) 60.
(b) 90.
(c) 120.
(d) 150.
(e) 180.

5.3 – Sequência 3

Problema 21 — FUVEST. A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser

(a) 7.
(b) 4.
(c) 5.
(d) 3.
(e) 6.

Problema 22 — UERJ - 2005, adaptado. Alguns cálculos matemáticos ficam mais simples quando usamos identidades, tais como:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Considerando essas identidades, o valor numérico racional mais simples da expressão

$$(57{,}62)^2 - (42{,}38)^2$$

é

(a) 1524.
(b) 1544.
(c) 100.
(d) 152,4.
(e) 15,24.

Problema 23 — ENEM - 2010. Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira ligada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios, depende da quantidade inicial de leite no reservatório, e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$. Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e também no tempo t igual a

(a) $1{,}3h$.
(b) $1{,}69h$.
(c) $10{,}0h$.
(d) $13{,}0h$.
(e) $16{,}9h$.

Problema 24 — UNICAMP - 1998. O índice I de massa corporal de uma pessoa adulta é dado pela fórmula $I = \frac{M}{h^2}$, onde M é a massa do corpo, dada em quilogramas, e h é a altura da pessoa, em metros. O índice I permite classificar uma pessoa adulta de acordo com a seguinte tabela:

Homens	Mulheres	Classificação
$20 \leq I \leq 25$	$19 \leq I \leq 24$	Normal
$25 < I \leq 30$	$24 < I \leq 29$	Levemente Obeso
$I > 30$	$I > 29$	Obeso

(I) Calcule o índice I para uma mulher cuja massa é de 64kg e a altura é 1,60m. Classifique-a segundo a tabela anterior.

(II) Qual é a altura mínima para que um homem cuja massa é de 97,2kg não seja considerado obeso.

Problema 25 — ESAF - Receita Federal. Considere as inequações dadas por

(1) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.
(2) $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Sabendo-se que A é o conjunto solução de (1) e B é o conjunto solução de (2), então o conjunto $Y = A \cap B$ é igual a

(a) $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 < x \leq 2\}$.
(b) $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 \leq x \leq 2\}$.
(c) $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$.
(d) $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
(e) $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

Problema 26 — Olimpíada Paulista de Matemática, 2013 - adaptado.

(1) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.
(2) Escreva a reprsentação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

Problema 27 — Rússia. Sejam a, b e c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ têm exatamente uma raiz real em comum, e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também têm exatamente uma raiz real em comum. Então a soma $a + b + c$ é igual a

(a) 0.
(b) -1.
(c) -2.
(d) -3.

(e) -4.

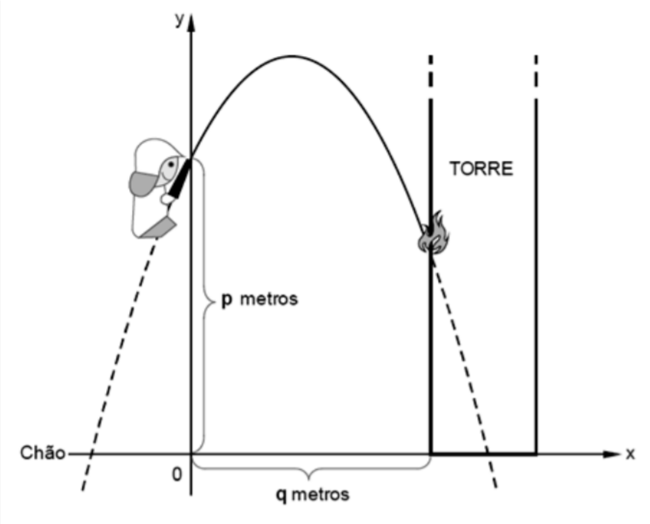
Problema 28 Considere as expressões quadráticas $f(x) = x^2+ax+b$ e $g(x) = x^2 + bx + c$. Seja $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$ e seja $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$. Suponha que $S_1 = S_2 = [r,s]$, um intervalo da reta real. Podemos concluir que

(a) $a = b \neq c$.
(b) $a \neq b = c$.
(c) $a = b = c$.
(d) $a = b + c$.

Problema 29 — IME - 1993. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, para todo x real. Sabendo-se que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são raízes de f e que $f(1) = -8$, pede-se

(1) Determinar a, b e c.
(2) Calcular $f(0)$.
(3) Verificar se f apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta.
(4) As coordenadas do ponto extremo.
(5) O esboço do gráfico.

Problema 30 — PUC - Campinas, 2015. A figura indica um bombeiro lançando um jato de água para apagar o fogo em um ponto de uma torre retilínea e perpendicular ao chão. A trajetória do jato de água é parabólica, e dada pela função $y = -x^2 + 2x + 3$, com x e y em metros.



Sabendo que o ponto de fogo atingido pelo jato de água está a 2 metros do chão, então, $p - q$, em metros, é igual a

(a) $2 + \sqrt{2}$.
(b) $1 + \sqrt{2}$.
(c) $4 - \sqrt{2}$.
(d) $3 - \sqrt{2}$.
(e) $2 - \sqrt{2}$.

5.4 – Sequência 4

Problema 31 — Mackenzie - 2005. A implicação verdadeira, quaisquer que sejam os números reais e distintos x e y, tais que $x^2 + x = y^2 + y$, é

(a) $x \leq 1 \Rightarrow y \geq 0$.
(b) $x < 0 \Rightarrow y < 0$.
(c) $x \leq -1 \Rightarrow y \geq 0$.
(d) $x > 1 \Rightarrow y > 1$.
(e) $x \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$.

Problema 32 — ITA. Calcule o valor de $2008^2 - 2007^2 + 2006^2 - 2005^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$.

Problema 33 — Putnam - 1995. Calcule

$$\sqrt[8]{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cdots}}}$$

Escreva sua resposta na forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, onde a, b, c e d são inteiros.

Problema 34 — ITA - 2011. O produto das raízes reais da equação

$$|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$$

é igual a

(a) -5.
(b) -1.
(c) 1.
(d) 2.
(e) 5.

Problema 35 — ITA - 2001. O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real, é

(a) $[1/4{,}7/4[$.
(b) $]1/4, +\infty[$.
(c) $]0{,}7/4[$.
(d) $]-\infty{,}1/4]$.
(e) $]1/4{,}7/4[$.

Problema 36 Considere a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

(a) Dizemos que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ é um ponto fixo de f, se $f(a) = a$. Encontre os pontos fixos de f.

(b) Seja $I_0 = [1,2]$. Considere a sequência de intervalos fechados $I_1 = f(I_0)$, $I_2 = f(I_1)$, etc. Se $I_n = [a_n,b_n]$, então $|a_n - b_n|$ aumenta ou diminui, quando n cresce? Justifique sua resposta.

(c) Seja $J_0 = [-1, -1/2]$. Como no item anterior, considere a sequência $J_1 = f(J_0)$, $J_2 = f(J_1)$, etc. Se $J_n = [c_n,d_n]$, então $|c_n - d_n|$ aumenta ou diminui quando n cresce? Justifique sua resposta.

Problema 37 Dentre todas as retas que passam pela origem, encontre as que são tangentes à parábola $y = x^2 + x + 1$.

Problema 38 — Stanford - 1955.

(1) Encontre números p, q e r tais que

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

para qualquer x.

(2) O item (1) pede que seja extraída uma raiz quadrada “exata” de um polinômio de grau 4 dado, que é possível no presente caso, mas, em geral, não é. Por que, em geral, este problema não tem solução?

Problema 39 — OBM. Sejam p e q inteiros. Suponha que x^2+px+q é positivo para todo x *inteiro*. Prove que a equação $x^2 + px + q = 0$ não tem solução real.

Problema 40 — Semana Olímpica - 2018. Considere a lista de números reais $x_1, \ldots ,x_n$, cuja soma é zero e cuja soma dos quadrados é 1. Prove que existem dois deles, x_i e x_j, tais que $x_ix_j \leq -\frac{1}{n}$.