MATERIAL ESTRUTURADO

MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2022

7

Fundamentos de Geometria

Axiomas de Euclides
Triângulos
Congruências e Transformações
Polígonos e Círculos

Autores

Ângelo Papa Neto
Bruno Holanda
Fernando Pimentel

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO · SISEDU · Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED · CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO · FUNCAP · CEARÁ EDUCA · CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Sumário

1 Fundamentos de Geometria

1.1 – Introdução

Podemos entender a *Geometria Plana* como a área da Matemática responsável pelo estudo das figura planas. De modo mais informal, na Geometria estudamos as propriedades de alguns desenhos especiais que podemos fazer em uma folha de papel.

Apesar de sabermos que os antigos egípcios e babilônicos eram capazes de empregar conhecimentos geométricos para resolver problemas do cotidiano, o primeiro estudo rigoroso de Geometria surgiu com a obra *Elementos*, do matemático grego Euclides de Alexandria, em aproximadamente 300 a.C.

Os Elementos são um tratado matemático tão único que não houve necessidade de qualquer tipo de acréscimo ou modificação por mais de 2.000 anos, até o momento em que o grande matemático russo N. I. Lobačevskiĭ (1792-1856) desenvolveu um novo tipo de geometria, conhecida como geometria hiperbólica, ao desconsiderar um dos *axiomas* de Euclides, isto é, um dos fatos que Euclides assumia como verdadeiro.

A Geometria Euclidiana Plana baseia-se nos conceitos de *ponto*, *reta* e *plano*, os quais são o que chamamos de *noções primitivas* em Geometria. Por serem conceitos tão básicos, eles são alguns dos raros objetos matemáticos para os quais não é possível dar uma definição precisa. Devemos simplesmente aceitar que eles existem.

Por outro lado, não é difícil imaginar situações que podem ser modeladas através desses conceitos básicos. Considere, por exemplo, um técnico de futebol que deseja explicar suas estratégias a um grupo de jogadores. Ele pode utilizar uma folha de papel na qual está desenhado um retângulo com 22 pontos em seu interior, cada ponto representando um jogador. Nesse desenho, há também segmentos de retas representado as linhas do campo. Há, por fim, a própria folha de papel que, se considerada infinita, representa o plano.

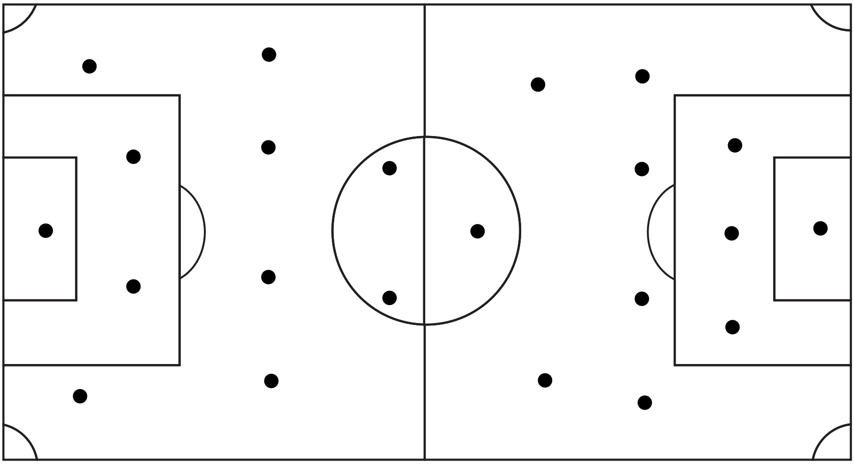
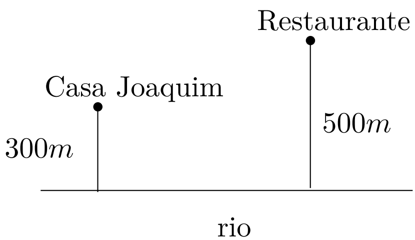


Figura 1.1: Ao fazermos um esboço de um campo de futebol, utilizamos diversas noções primitivas da Geometria.

Uma dos motivos que levaram os povos antigos a se aprofundarem no estudo da Geometria foi sua capacidade para modelar situações reais. Considere o exercício a seguir:

Exercício 1.1 Joaquim é pescador e mora a 300 m das margens de um rio retilíneo. Um restaurante, situado no mesmo lado do rio em que fica a sua casa, compra-lhe os peixes por ele pescados, fica a 500 m das margens desse mesmo rio e a 1,000 m da sua casa, em linha reta. Em um determinado dia, Joaquim planeja sair de casa ir até a margem do rio, pescar alguns peixes e levá-los para vendê-los ao restaurante. Qual trajeto ele deve escolher de modo a minimizar a caminhada total?



Convidamos o leitor a pensar um pouco na situação antes de prosseguirmos. Porém, não apresentaremos a solução agora pois ainda não tratamos sobre os conhecimentos necessário para resolver a esse problema.

Um dos objetivos desse módulo é fundamentar o estudo da geometria para que sejamos capazes de responder de modo efetivo à situações como a que foi apresentada no Problema 1.1. Faremos isso com o auxílio dos famosos axiomas de Euclides que abordaremos a seguir.

1.1.1 – Axiomas de Euclides

Além das noções primitivas que mencionamos nesta seção, Euclides também estabeleceu um conjunto de *propriedades fundamentais* que todos os pontos, retas e planos devem satisfazer. Abaixo, vemos *algumas* dessas propriedades, que são chamadas de *axiomas*.

(A1) Por dois pontos distintos passa uma única reta.
(A2) Por três pontos não colineares passa um único plano.
(A3) Para qualquer reta, existem pontos pertencentes a ela e pontos não pertencentes a ela.
(A4) Para qualquer plano, existem uma reta contida neste plano, um ponto que pertence ao plano mas não pertence a tal reta e um ponto que não pertence ao plano.

Estas afirmações recebem o nome de *axiomas*, pois suas validades devem ser aceitas como evidentes, não podendo ser demonstradas, isto é, justificadas através de um conjunto de verdades mais elementares. Em outras palavras, os axiomas são proposições consideradas como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

A seguir, derivaremos outros conceitos importantes da Geometria, utilizando como base as noções primitivas e os axiomas de Euclides.

1.1.2 – Semirretas e segmentos de reta

Um ponto O pertencente a uma reta r a divide em duas partes, chamadas *semirretas* de origem O. Se $A \in r$ e $A \neq O$, a semirreta de r que contém o ponto A é denotada por $\overrightarrow{OA}$.

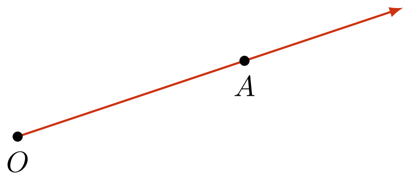


Figura 1.2: semirreta de origem O e passando por A.

Se A e B são dois pontos distintos pertencentes a uma reta r, os pontos que pertencem simultaneamente às semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ formam uma parte da reta chamada de *segmento de reta*. Nesse caso, dizemos que os pontos A e B são as extremidades desse segmento. Denotamos o segmento com extremidades A e B escrevendo AB.

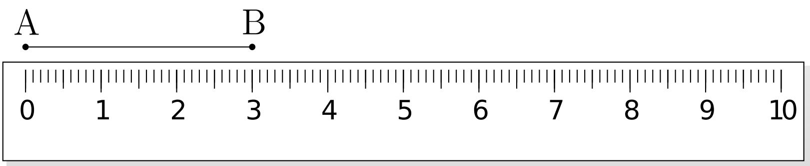
Figura 1.3: Segmento de reta AB, em vermelho sólido, como interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

Uma vez que AB é a interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, escrevemos $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Também, dizemos que os pontos pertencentes ao segmento AB e distintos de A e de B *estão entre* A e B. segmento AB é denotado por $\overline{AB}$.

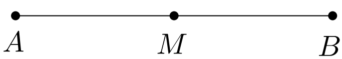
Obs Por vezes, também escreveremos AB para denotar a reta determinada por dois pontos distintos A e B. A possibilidade de confusão com o *segmento* AB será mínima, pois o contexto sempre deixará claro se estaremos nos referindo à reta AB ou ao segmento AB.

A **distância** entre os pontos A e B é, por definição, a **medida do comprimento** do segmento de reta AB. Frequentemente, o comprimento do segmento AB é representado por $\overline{AB}$. Porém, por vezes também utilizaremos a notação simplificada AB para representar essa medida. Isso não deve causar confusão, uma vez que o *contexto* sempre deixará claro se, ao escrevermos AB, estamos pensando no segmento de reta de extremidades A e B ou em seu comprimento.

O comprimento de um segmento AB pode ser calculado de diversas formas. A maneira mais comum é medir o segmento AB utilizando alguma ferramenta, como uma régua pautada, comparando-o com alguma unidade de comprimento pré-estabelecida, como o centímetro, o metro ou o quilômetro. Assim, a figura abaixo mostra um segmento AB de 3 centímetros de comprimento.



O **ponto médio** de um segmento AB é o único ponto M que está entre A e B e divide o segmento AB em duas partes de comprimentos iguais, isto é, tal que $AM = MB$.



Exercício 1.2 Em cada uma das figuras a seguir, calcule $\overline{AB}$, sendo M o ponto médio de AB.

(a) $AM = 2x - 5$ e $MB = x + 1$.

(b) $AM = x$, $AP = 4x - 5$ e $BP = x + 7$.

Solução.

(a) Como M é o ponto médio de AB, temos $2x - 5 = x + 1$. Passando os termos com incógnita para o lado esquerdo e as constantes para o lado direito da equação, obtemos

$$2x - x = 1 + 5, \text{ ou seja, } x = 6.$$

Logo, $AB = (2x - 5) + (x + 1) = 3x - 4 = 14$.

(b) Veja que $MB = AP - AM - BP$. Logo,

$$MB = (4x - 5) - x - (x + 7) = 2x - 12.$$

Como M é o ponto médio de AB, temos que $AM = MB$, ou seja,

$$x = 2x - 12 \text{ , e assim, } x = 12.$$

Portanto, $AB = 2AM = 2x = 24$.

■

Exercício 1.3 Se A, B e C são pontos colineares, calcule AC, sendo $AB = 20$ cm e $BC = 12$ cm.

Solução. Como $BC < BA$, o ponto A não pode estar entre os pontos B e C. Logo, temos apenas duas opções:

(i) Se C estiver entre A e B, teremos que $AC = AB - BC = 20 - 12 = 8$ cm.

(ii) Se B estiver entre A e C, teremos que $AC = AB + BC = 20 + 12 = 32$ cm.

■

Exercício 1.4 Consideremos sobre uma reta r um segmento fixo AB e um ponto arbitrário P. Seja M o ponto médio de AP e N o ponto médio de BP. O que podemos dizer a respeito do comprimento do segmento MN?

Solução. Seja ℓ o comprimento do segmento AB.

Consideremos inicialmente o caso em que o ponto P está no interior do segmento AB. Seja x a medida arbitrária do segmento AP. Nesse caso, $BP = \ell - x$. Como M e N são os pontos médios dos segmentos AP e PB, temos que $MP = \frac{x}{2}$ e $NP = \frac{\ell - x}{2}$. Como P também está no interior do segmento MN, temos que

$$MN = MP + NP = \frac{x}{2} + \frac{\ell - x}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Agora, consideremos o caso em que P está fora do segmento AB, com $PA < PB$. Sendo novamente x a medida arbitrária do segmento AP, temos nesse caso que $BP = \ell + x$. Como M e N são os pontos médios dos segmentos AP e PB, temos que $MP = \frac{x}{2}$ e $NP = \frac{\ell + x}{2}$. Como $PM = \frac{1}{2}AP < \frac{1}{2}PB = PN$, temos que

$$MN = \frac{\ell + x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Por fim, resta analisar o caso em que P está fora do segmento AB, com $PA > PB$. Essa situação é análoga à situação anterior, de forma que a deixamos a seu cargo. Logo, a medida do segmento MN é igual à metade da medida do segmento AB, qualquer que seja o ponto P. ■

Obs A situação apresentada no exercício anterior pode ser visualizada de maneira dinâmica utilizando o GeoGebra.

Obs Ainda em relação ao exercício anterior, uma solução alternativa pode ser dada considerando a reta AP como a reta numerada, tal que o ponto A corresponde a 0, o ponto B corresponde a ℓ e o ponto P a x. Nesse caso, M corresponde a $\frac{x}{2}$ e N a $\frac{1}{2}(\ell + x)$. Portanto, a distância entre M e N é

$$MN = \left| \frac{x}{2} - \frac{\ell + x}{2} \right| = \frac{\ell}{2}.$$

1.1.3 – Ângulos

Duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com uma mesma origem O, dividem o plano em duas regiões, cada uma das quais é chamada de *ângulo*. As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os *lados* do ângulo.

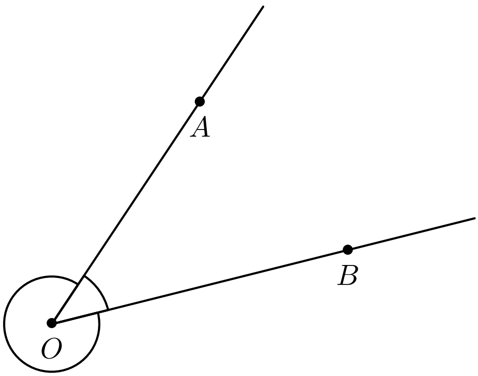


Figura 1.4: um ângulo convexo e seu suplementar côncavo.

Um ângulo é chamado *convexo* se é uma região convexa do plano. Caso contrário, o ângulo é chamado *côncavo*. Usaremos a notação $\angle AOB$ para denotar cada um desses ângulos; em cada caso, o contexto deixará claro a qual dos dois ângulos de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ estamos nos referindo.

Se os pontos A, O e B são colineares, o ângulo $\angle AOB$ é chamado *ângulo raso* (veja a Figura 1.5).

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são ditos *iguais* ou *congruentes*, se for possível mover $\angle A'O'B'$ *no espaço* até que ele possa ser posicionado exatamente sobre $\angle AOB$.

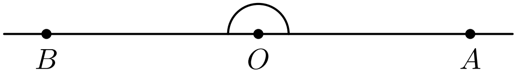


Figura 1.5: um ângulo raso.

Se $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são ângulos rasos, é imediato que podemos mover um deles no espaço até fazê-lo coincidir com o outro, de sorte que dois ângulos rasos quaisquer são iguais. Em particular, o ângulo raso marcado na Figura 1.5 é igual àquele não marcado, situado na parte "de baixo" da reta que passa por A e B. Portanto, *uma volta completa em torno do ponto O corresponde a dois ângulos rasos.*

Se os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ estão situados em um mesmo plano, compartilham o lado $\overrightarrow{OB}$ e não têm pontos interiores comuns, nos referiremos ao ângulo $\angle AOC$, que contém a semirreta $\overrightarrow{OB}$, como a *justaposição* de $\angle AOB$ e $\angle BOC$, conforme a Figura 1.6.

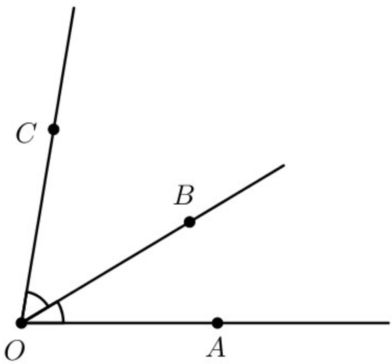
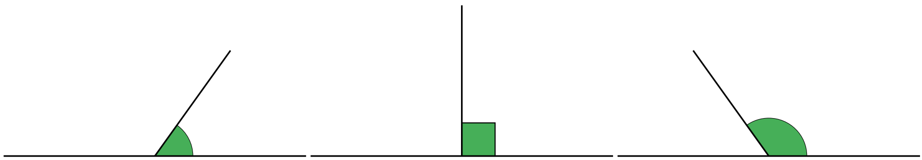


Figura 1.6: A justaposição de dois ângulos.

Para medir ângulos, devemos escolher um padrão, ou unidade. A unidade de medida de ângulos mais usada, e a mais antiga, é o *grau*.

Por convenção, dizemos que um ângulo $\angle AOB$ mede *um grau* — $1°$, em símbolos — quando o ângulo formado pela justaposição de 180 ângulos iguais a $\angle AOB$ resultar em um ângulo raso. Assim, um ângulo raso mede 180° e uma volta completa em torno de um ponto, correspondendo a dois ângulos rasos, mede 360°.

Um ângulo cuja medida é 90° é chamado *ângulo reto*, e corresponde à metade de um ângulo raso. Se a medida de um ângulo for menor que 90°, diremos que esse ângulo é *agudo*. Se a medida de um ângulo for maior que 90° e menor que 180°, diremos que esse ângulo é *obtuso* , conforme a seguinte figura.



(a) ângulo agudo. (b) ângulo reto. (c) ângulo obtuso.

Uma forma simples de visualizarmos e medirmos ângulos é através do uso de um *transferidor*, fazendo o centro do transferidor coincidir com o vértice do ângulo e a marcação zero coincidir com um dos lados do ângulo.

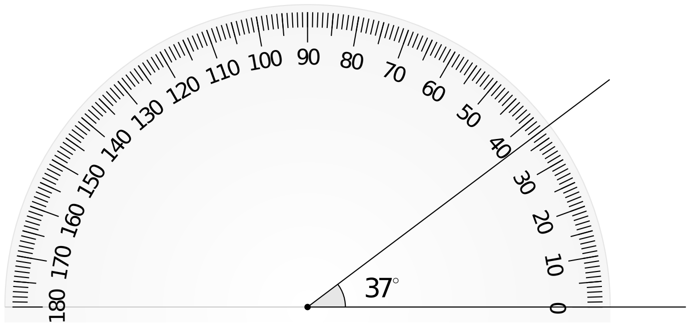


Figura 1.8: Um transferidor medindo um ângulo de 37°. Muitos transferidores são transparentes, para poderem ser utilizados de ambos os lados.

Em Geometria, é costume confundir um ângulo $\angle AOB$, visto como uma região do plano, com sua medida, isto é, usar a notação $\angle AOB$ também para indicar a sua medida. Isso não causa confusão, porque o contexto sempre vai deixar claro se, ao escrevermos $\angle AOB$, estaremos nos referindo ao ângulo como região do plano ou à sua medida.

Voltando à Figura 1.6, olhemos novamente o ângulo $\angle AOC$, formado pela justaposição dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$. O uso de um transferidor deixa claro que há uma relação bastante simples entre as medidas desses ângulos:

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC.$$

Observe que, na igualdade acima, $\angle AOC$, $\angle AOB$ e $\angle BOC$ denotam as *medidas* dos ângulos correspondentes.

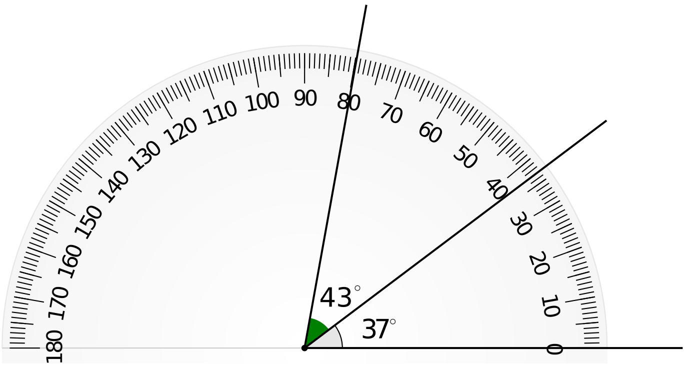


Figura 1.9: soma de ângulos com um transferidor.

Nesse ponto, introduzimos duas definições sobre ângulos que são muito comuns em diversos materiais sobre Geometria.

Definição 1.1.1
- Dois ângulos são ditos **complementares** quando são justapostos e a soma de suas medidas é $90°$.
- Dois ângulos são ditos **suplementares** quando são justapostos e a soma de suas medidas é $180°$.

Em Geometria, devido a história de seu desenvolvimento, também é comum e útil utilizar letras gregas minúsculas para denotar ângulos ou suas medidas. Uma vez que faremos uso desse tipo de notação daqui em diante, reunimos na tabela 1.1 algumas das letras gregas mais utilizadas. Procure familiarizar-se com os nomes e a escrita dessas letras gregas, pois elas aparecerão frequentemente, doravante.

Letra	minúscula	maiúscula
alfa	α	–
beta	β	–
gama	γ	Γ
delta	δ	Δ
téta	θ	Θ
pi	π	Π
sigma	σ	Σ
ômega	ω	Ω

Tabela 1.1: Algumas letras gregas comumente usadas em Geometria.

Consideremos, agora, duas retas r e s *concorrentes*, ou seja, que se intersectam em um único ponto. Nesse caso, elas determinam quatro ângulos, dois dos quais estão marcados em verde na figura 1.10. Os outros dois correspondem às regiões que não foram marcadas.

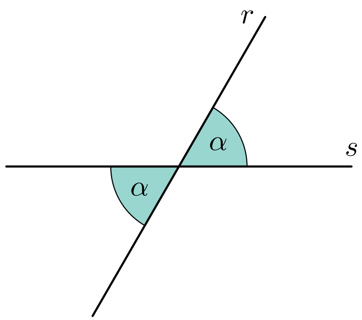
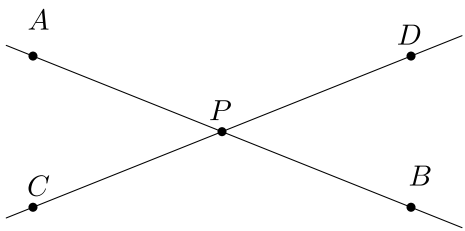


Figura 1.10: ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos que possuem um mesmo vértice e cujos lados estão alinhados de modo a determinar apenas duas retas, como na Figura 1.10, são chamados de ângulos *opostos pelo vértice* ou, abreviadamente, **OPV**. Ângulos opostos pelo vértice possuem uma mesma medida, ou seja, são congruentes. Esse fato pode ser *demonstrado* com os conhecimentos adquiridos até o momento.

Teorema 1.1 — Ângulos OPV. Sejam AB e CD duas retas concorrentes no ponto P, situado no interior dos segmentos AB e CD. Então, $\angle APD = \angle BPC$ e $\angle APC = \angle BPD$.



Demonstração. Já sabemos que ângulos rasos medem 180° e a medida da justaposição de dois ângulos é igual à soma das medidas dos mesmos. Assim, temos $\angle APD + \angle DPB = 180°$ e $\angle DPB + \angle BPC = 180°$. Portanto,

$$\angle APD + \angle DPB = \angle DPB + \angle BPC$$

e, cancelando a parcela comum $\angle DPB$, obtemos

$$\angle APD = \angle BPC.$$

De modo análogo, $\angle APC = \angle BPD$. ■

Nesse ponto, é conveniente dispormos de mais um pouco de terminologia: se P é um ponto em um ângulo $\angle AOB$ tal que $\angle AOP$ e $\angle POB$ são iguais, dizemos que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a **bissetriz** do ângulo $\angle AOB$.

Exercitemos o material discutido até aqui em alguns exercícios simples.

Exercício 1.5 Calcule o valor de α nos casos abaixo:

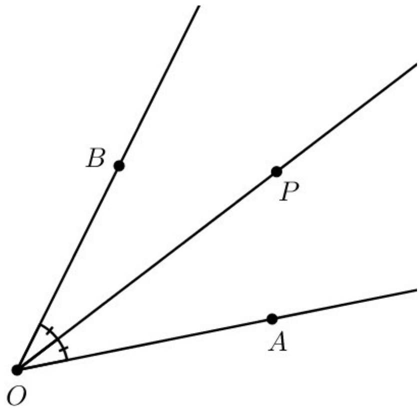
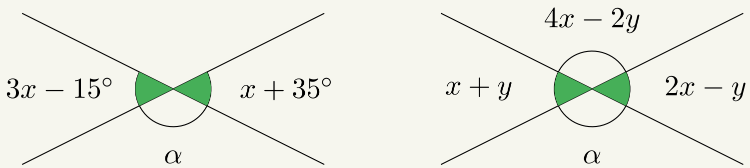


Figura 1.11: a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

(a) (b)



Solução.

(a) Pelo teorema 1.1, temos que $3x - 15° = x + 35°$. Como

$$3x - 15° = x + 35° \Leftrightarrow 2x = 50° \Leftrightarrow x = 25°,$$

$x = 25°$ e os ângulos verdes medem $x + 35° = 60°$, de sorte que

$$\alpha = 180° - 60° = 120°.$$

(b) Novamente pelo teorema 1.1, temos $x + y = 2x - y$. Logo, $x = 2y$ e, assim, $x + y = 3y$, de forma que cada ângulo verde mede $3y$. Daí, mais uma vez pelo teorema 1.1,

$$\alpha = 4x - 2y = 8y - 2y = 6y.$$

Por fim, usando o fato de que $\alpha + (x+y) = 180°$, temos

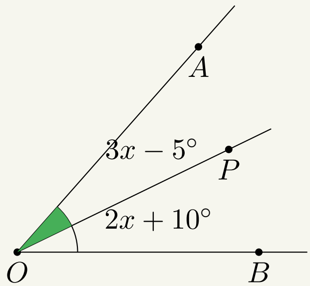
$$6y + 3y = 180°, \text{ ou seja, } 9y = 180°.$$

Portanto, $y = 20°$. Com isso, $\alpha = 6y = 120°$.

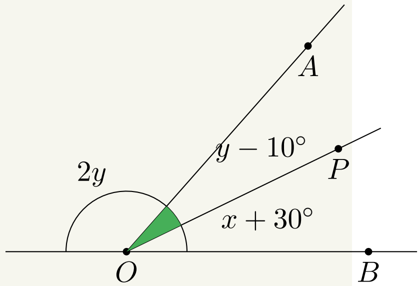
■

Exercício 1.6 Em cada uma das figuras a seguir, $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de $\angle AOB$. Calcule x em cada caso.

(a)



(b)



Solução.

(a) Como OP é bissetriz, temos $3x - 5° = 2x + 10°$. Logo, $x = 15°$.

(b) Novamente pelo fato de OP ser bissetriz, temos $x + 30° = y - 10°$, logo $y = x + 40°$. Por outro lado,

$$2y + (y-10) + (x+30) = 180°.$$

Assim,

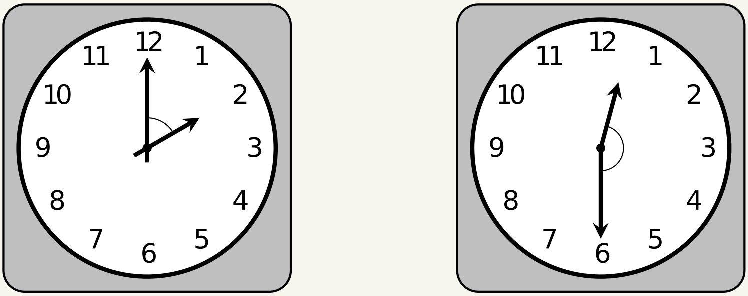
$$2(x+40) + (x+30) + (x+30) = 180,$$

ou seja,

$$4x + 140 = 180. \text{ Portanto, } x = 10°.$$

■

Exercício 1.7 — OBMEP 2006. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? E qual é este menor ângulo quando o relógio marca 12 horas e 30 minutos?



Solução. Observe que o ponteiro menor leva 12 horas para dar uma volta completa, que corresponde a 360°. Logo, em uma hora, este ponteiro terá percorrido $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Portanto, o ângulo destacado no relógio da esquerda corresponde a dois intervalos de 30°, logo mede 60°.

No relógio da direita, a posição do ponteiro maior indica que já se passou meia hora após uma hora cheia. Neste intervalo de tempo, o ponteiro menor percorreu $\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Logo, o ângulo destacado no relógio da direita mede $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$. ■

Nota ao Professor 1.2 Antes de apresentar a solução formal deste exercício, o professor pode pedir aos alunos que fotografem um relógio analógico e utilizem o GeoGebra para medir o ângulo assim como apresentado na Figura 1.12. Essa atividade irá chamar a atenção dos alunos, construindo um momento propício ao aprendizado. Também é recomendável que o professor compare o resultado obtidos algebricamente com o aquele obtido com a ajuda do software de geometria dinâmica.

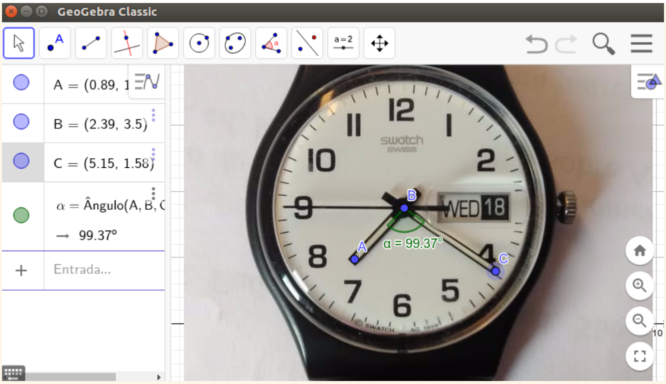


Figura 1.12: Usando o GeoGebra para calcular o ângulo formado entre os ponteiros de um relógio.

Nota ao Professor 1.3 Após resolver alguns problemas como esse, indicamos que o professor proponha o seguinte projeto de pesquisa aos estudantes: **Elaborar um programa em Python que calcule a medida do ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio.**

O projeto deve durar entre uma e duas semanas e envolver os alunos em equipes. O programa deve ter duas entradas: um número que representa as horas e outro que representa os minutos. E deve ter uma única saída que representa o ângulo em graus formado entre os ponteiros. Observe que para construir um programa que funcione sempre, os alunos deverão entender os conceitos que estão por trás de problemas específicos, generalizando a situação.

Os alunos devem apresentar seus programas e contar um pouco dos erros e acertos cometidos durante o processo, que serão vários. Um possível programa está descrito a seguir.

```
a=int(input('Qual é a hora? '))
b=int(input('Qual é o minuto? '))
ang = abs((a * 30 + b * 0.5) - (b * 6))
r = min(360-ang,ang)
print('O ângulo entre os ponteiros é', r)
```

Também é possível resolver esse problema computacionalmente utilizando softwares de planilha. Veja que a atividade proposta visa incentivar o desenvolvimento do pensamento computacional abordado na BNCC. Também permite a exploração da mesma situação através de formas de raciocínio distintas que se complementam.

1.2 – O quinto axioma de Euclides

Como vimos anteriormente, quando duas retas são concorrentes, elas se encontram em um único ponto e formam dois pares de ângulos opostos pelo vértice, os quais são congruentes. Por outro lado, em sua construção da Geometria, Euclides permitiu a possibilidade de duas retas não se encontrarem. Nesse caso, dizemos que tais retas são **paralelas**.

Obs A título de curiosidade, observamos que nem todas as teorias de Geometria permitem a existência de retas que não se encontram. Por exemplo, em Geometria Projetiva, quaisquer duas retas se encontram em um único ponto, de sorte que não há retas paralelas. Quando traçamos uma relação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva, retas que são paralelas na Geometria Euclidiana se encontram em um ponto da "reta do infinito" na Geometria Projetiva.

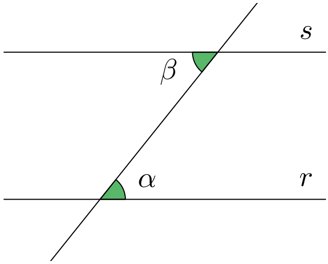
No caso de retas paralelas, Euclides postulou a seguinte afirmação que hoje é conhecida como o seu quinto axioma.

Quinto Axioma de Euclides

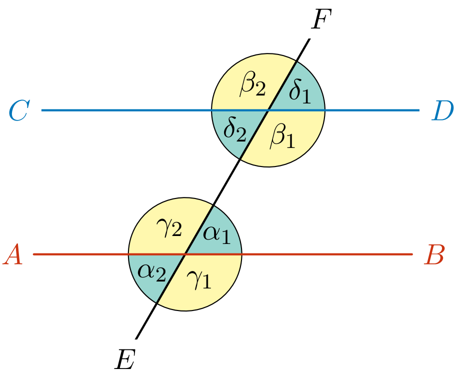
Se duas retas r e s são cortadas por uma terceira reta, então r

e s são paralelas se, e somente se, os ângulos marcados na figura – chamados de *alternos internos* – são iguais. Ou seja,

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$



Suponha, agora, que temos duas retas paralelas, digamos AB e CD. Uma terceira reta que intersecta as duas primeiras é chamada de reta *transversal*. Na Figura 1.13 a reta EF é uma transversal.



Se AB e CD são paralelas, então $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$.

Consequentemente,
$\alpha_1 = \alpha_2 = \delta_1 = \delta_2$ e
$\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2$.

Figura 1.13: duas retas paralelas e uma transversal.

Pelo Quinto Axioma, temos que $\alpha_1 = \delta_1$, logo

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + (180° - \delta_1) = 180°.$$

Por outro lado, $\alpha_1 + \gamma_2 = 180°$, pois AB é uma reta. Logo,

$$\gamma_2 = 180° - \alpha_1 = \beta_1.$$

Como $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\beta_1 = \beta_2$, pois são pares de ângulos OPV, concluímos que os quatro ângulos em amarelo da Figura 1.13 são congruentes. Da mesma forma, os quatro ângulos em verde são congruentes entre si, de forma que, dentre os oito ângulos que a reta EF forma com AB e CD, há apenas (no máximo) dois valores distintos.

As letras gregas que usamos aqui foram escolhidas arbitrariamente, ou seja, nem sempre o ângulo α_1 estará na posição indicada na figura. Por isso, para melhor falar sobre estes ângulos, nos usamos o seguinte vocabulário.

Ângulos que estão de um mesmo lado da reta transversal EF são chamados de *colaterais* – o prefixo *co* indica *mesmo*. Por exemplo, α_1, γ_1, β_1 e δ_1 são colaterais uns aos outros. Assim como os α_2, γ_2, β_2 e δ_2 são colaterais uns aos outros. Os ângulos que estão entre as retas paralelas são chamados de *internos*; em nosso caso, estes são α_1, β_1, γ_2 e δ_2. Por sua vez, os ângulos que não estão entre as paralelas são chamados de *externos*. Por fim, ângulos que estão em lados diferentes da reta EF são chamados de *alternos*, enquanto os ângulos que estão em uma mesma posição relativa às retas AB e CD são chamados *correspondentes*. Combinando esse vocabulário, podemos nos referir como segue a vários dos pares de ângulos da Figura 1.13.

Nomenclaturas de *alguns* dos pares de ângulos da Figura 1.13:

- α_1 e β_1 são *colaterais internos*.
- α_1 e δ_2 são *alternos internos*.
- α_1 e δ_1 são *correspondentes*.
- α_2 e δ_1 são *alternos externos*.
- α_2 e β_2 são *colaterais externos*.

Organizando as ideias, chegamos à seguinte conclusão.

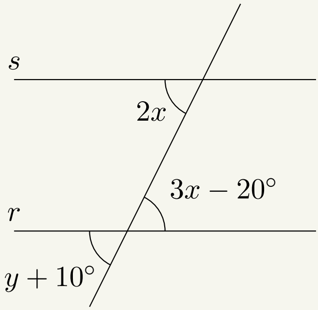
Em relação a duas retas paralelas cortadas por uma transversal, são válidas as seguintes afirmações.

i. Ângulos *colaterais* de um mesmo tipo , ambos internos ou ambos externos, somam 180°.
ii. Ângulos *alternos* de um mesmo tipo são congruentes.

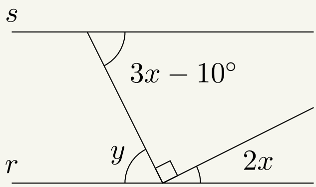
iii. Ângulos *correspondentes* são congruentes.

Exercício 1.8 Em cada uma das figuras abaixo, as retas r e s são paralelas. Calcule x e y.

(a)



(b)



Solução.

(a) Os ângulos de medidas $2x$ e $3x - 20°$ são alternos internos, logo, congruentes. Portanto,

$$2x = 3x - 20°, \text{ e assim, } x = 20°.$$

Além disso, os ângulos de medidas $y + 10°$ e $2x$ são correspondentes, logo congruentes. Então,

$$y + 10° = 2x = 40°, \text{ ou seja, } y = 30°.$$

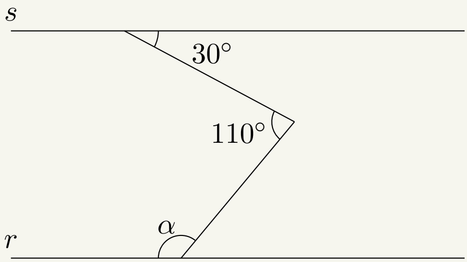
(b) Os ângulos de medidas y e $3x - 10°$ são alternos internos, logo congruentes. Somando todos os ângulos que estão sobre a reta r, temos $y + 90° + 2x = 180$ e, assim,

$$\begin{aligned} y + 90° + 2x = 180° &\Rightarrow (3x - 10°) + 90° + 2x = 180° \\ &\Rightarrow 5x = 100° \Rightarrow x = 20°. \end{aligned}$$

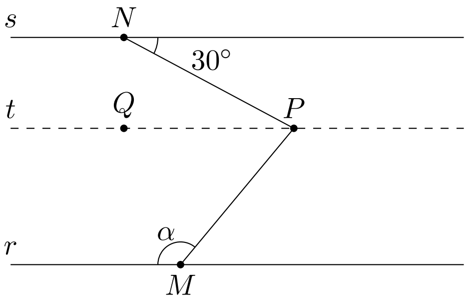
Portanto, $x = 20°$ e $y = 3x - 10° = 50°$.

■

Exercício 1.9 Sabendo que as retas r e s da figura são paralelas, calcule α.



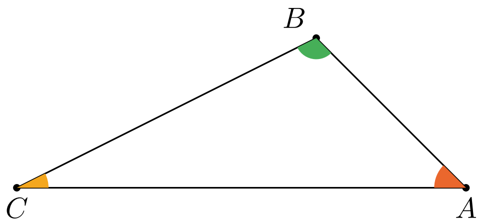
Solução. Sejam M, N e P os pontos marcados na figura a seguir. Trace a reta t paralela às retas r e s e passando pelo ponto P.



Seja Q um ponto sobre t conforme também indicado na figura. Em relação às paralelas s e t, a igualdade dos ângulos alternos internos determinados pela transversal NP dá $\angle NPQ = 30°$. Logo, $\angle QPM = 110° - 30° = 80°$. Como t e r também são paralelas, ângulos colaterais internos em relação à transversal MP somam $180°$. Logo, $\alpha + 80° = 180°$ e, daí, $\alpha = 100°$. ■

1.3 – Triângulos

Definimos um **triângulo** como um conjunto de três pontos não colineares A, B, C , denominados **vértices** do triângulo, juntamente com os segmentos AB, BC e CA, denominados **lados** do triângulo. Esse triângulo é representado simbolicamente como ΔABC e possui **ângulos internos** $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$. A região delimitada pelos lados do triângulo será chamada de interior do triângulo.



Um triângulo pode ser classificado de duas formas: de acordo com a quantidade de lados de medidas iguais que possui ou de acordo com as medidas de seus ângulos internos.

Classificação de triângulos de acordo com o número de lados iguais

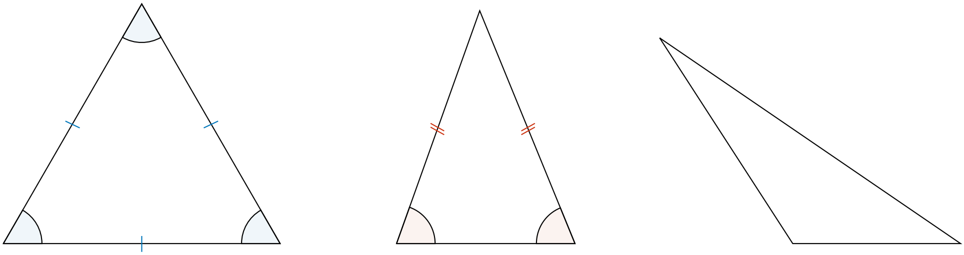
Um triângulo que possui

- três lados com medidas iguais é **equilátero**,
- dois lados com medidas iguais é **isósceles** e
- os três lados com medidas diferentes é **escaleno**.

Observe que, pela definição acima, triângulos equiláteros são isósceles e triângulos isósceles *podem ser ou não* equiláteros. Também, veremos mais adiante que os ângulos marcados na figura (a) são iguais, assim como também são iguais os ângulos marcados na figura (b).

Uma nomenclatura importante relativa a triângulos isósceles é que o terceiro lado de um triângulo isósceles (o lado que não é nenhum dos dois que sabemos serem iguais) é chamado de **base**.

Antes de discutirmos a classificação dos triângulos quanto ao tipos de ângulos que possuem, é conveniente fazermos mais alguns



(a) Equilátero. (b) Isósceles. (c) Escaleno.

comentários sobre o Quinto Axioma e provarmos um resultado muito importante. Primeiramente, pode ser mostrado que uma maneira equivalente de formular o Quinto Axioma é a seguinte.

Axioma das Paralelas

Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.

O Axioma das Paralelas é a ferramenta de que precisamos para demonstrar o teorema a seguir, o qual é um dos mais importantes resultados da Geometria Euclidiana.

Teorema 1.4 A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Utilizando o Axioma das Paralelas, tracemos a (única) reta r paralela ao lado AB e passando pelo ponto C, conforme a Figura 1.14. Marque pontos D e E sobre a reta r, situados em semirretas distintas em relação a C, conforme também mostrado na Figura 1.14.

O lado AC é uma transversal que corta duas retas paralelas e, consequentemente, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DCA$, destacados em verde, são congruentes, pois são alternos internos. Do mesmo modo, o lado BC corta duas retas paralelas e os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCE$, destacados em amarelo, são congruentes, por também são alternos internos. Logo,

$$\angle BAC+\angle CBA+\angle ACB = \angle DCA+\angle BCE+\angle ACB = \angle DCE = 180°.$$

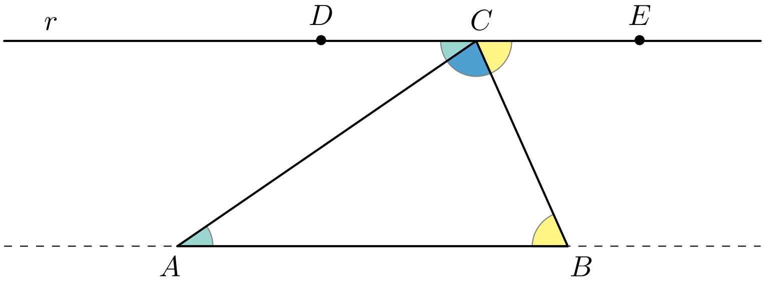


Figura 1.14: demonstração do Teorema 1.4.

A última igualdade é valida pelo fato do ângulo $\angle DCE$ ser um ângulo raso, já que os pontos D, C e E estão sobre uma mesma reta , a reta r. ■

O leitor pode consultar o vídeo que é direcionado pelo código a seguir para visualizar o Teorema 1.4 através de de recortes em um triângulo de papel.

Saiba Mais:

Uma consequência importante do teorema anterior é o fato de que, se em um triângulo ABC tivermos $\angle A \geq 90°$, então

$$\angle B + \angle C = 180° - \angle A \leq 90°.$$

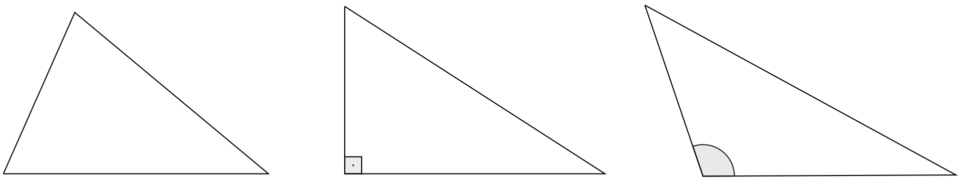
Consequentemente, $\angle B, \angle C < 90°$. Em palavras, todo triângulo tem *no máximo um* ângulo reto ou obtuso.

Podemos finalmente enunciar a classificação dos triângulos quanto a seus ângulos internos.

Classificação de triângulos quanto ao tipos de ângulos

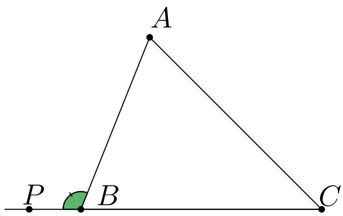
Um triângulo em que

- todos os seus agudos são agudos é chamado de **acutângulo**,
- um de seus ângulos é reto é chamado de **(triângulo) retângulo** – o lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados de *catetos* – e
- um de seus ângulos é obtuso é chamado de **obtusângulo**.



(a) Acutângulo. (b) Retângulo. (c) Obtusângulo.

Em um triângulo, um **ângulo externo** é um ângulo formado entre o prolongamento de um dos lados do triângulo e o outro lado adjacente a esse prolongamento. Nas notações da figura a seguir, $\angle ABP$ é um ângulo externo de ABC, *adjacente* ao ângulo interno $\angle ABC$.



O Teorema 1.4 tem uma consequência muito útil para a medida dos ângulos externos de um triângulo, conhecida como o **Teorema do Ângulo Externo**.

Teorema 1.5 — do Ângulo Externo. Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração. Nas notações da figura anterior, veja que $\angle ABP = 180^\circ - \angle ABC$. Por outro lado, uma vez que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°, temos $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$, logo $180^\circ - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB$. Então,

$$\angle ABP = 180^\circ - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB.$$

■

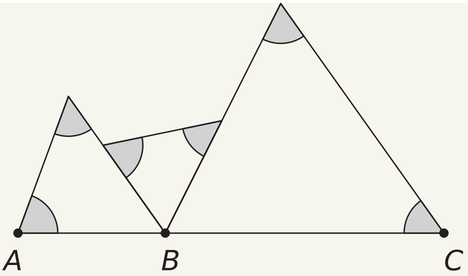
O próximo resultado pode ser visto como uma ligação entre as classificações de triângulos quanto a seus lados e quanto a seus ângulos. Trata-se de um fato que será muito importante para a resolução de diversos exercícios deste módulo. Assim, visando sua imediata aplicação, resolvemos antecipar sua exposição sem sua respectiva demonstração, deixando-a para o capítulo seguinte deste módulo, quando abordaremos o conceito de *congruência de triângulos*.

Teorema 1.6 — do triângulo isósceles. Um triângulo é isósceles se, e somente se, possui dois ângulos internos iguais. Em símbolos, no ΔABC, temos

$$AB = AC \Leftrightarrow \angle ABC = \angle ACB.$$

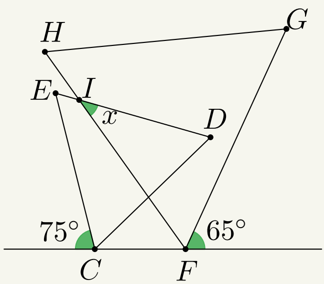
Como consequência desse resultado, podemos verificar que cada ângulo de um triângulo equilátero é igual a 60°. De fato, todos os ângulos um triângulo equilátero são iguais, pois todos os lados podem ser interpretados como base de um triângulo isósceles. Além disso, a soma dos três ângulos é 180°. Consequentemente, todos eles são iguais a 60°.

Exercício 1.10 — OBMEP 2014. Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



Solução. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Por outro lado, os três ângulos não marcados dos triângulos , com vértices em B, somam 180°, já que A, B e C estão alinhados. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180° \cdot 3) - 180° = 360°$. ■

Exercício 1.11 — OBM 2004. Na figura a seguir temos dois triângulos equiláteros. Calcule o valor de x.



Solução. Seja P o ponto de encontro entre os lados CD e HF. Note que

$$\angle PCF = 180° - 75° - \angle CDE = 105° - 60° = 45°$$

e que

$$\angle PFC = 180° - 65° - \angle GFH = 115° - 60° = 55°.$$

Como $\angle DPF$ é externo do triângulo PCF, temos que $\angle DPF = 45° + 55° = 100°$. Por outro lado, $\angle DPF$ também é externo do triângulo IPD. Logo ,

$$x + 60° = \angle DPF, \text{ ou seja, } x + 60° = 100°.$$

Portanto, $x = 40°$. ■

Exercício 1.12 O triângulo ABC é isósceles com $AB = AC$. Sobre o lado AB há um ponto P tal que $AP = PC = BC$. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

Solução. Seja $\alpha = \angle BAC$. Como o triângulo APC é isósceles de base AC, o Teorema 1.6 dá $\angle PCA = \alpha$. Daí, $\angle BPC = 2\alpha$, pois é ângulo externo do triângulo APC. Como BCP é isósceles de base BP, novamente pelo Teorema 1.6, temos $\angle PBC = 2\alpha$. Como ΔABC é isósceles de base BC, apelando uma vez mais para o Teorema 1.6, obtemos $\angle BCA = 2\alpha$. Por fim, somando todos os ângulos do triângulo ABC, temos

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°, \text{ ou seja, } 5\alpha = 180°.$$

Daí, $\alpha = 36°$ e, portanto, os ângulos do triângulo são $36°$, $72°$ e $72°$. ■

2 Congruências e Transformações Geométricas

2.1 – Introdução

Iniciaremos esse módulo tratando sobre um tipo especial de relação entre figuras planas, que chamaremos de *congruência*.

De maneira intuitiva, duas figuras são ditas congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre todos os pontos da primeira figura com pontos da segunda figura de modo que a distância entre quaisquer dois pontos na primeira figura seja igual à distância entre os pontos correspondentes na segunda figura. Para ilustrar essa noção, considere o desenho a seguir

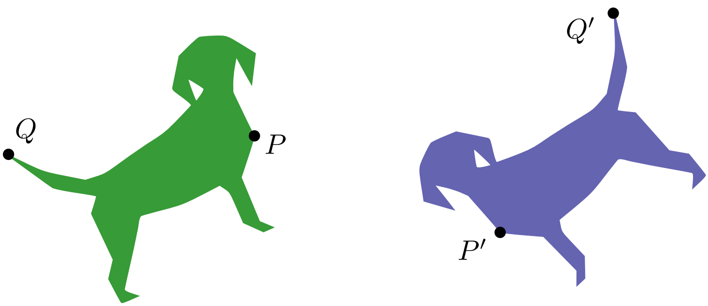


Figura 2.1: Duas figuras congruentes.

Na Figura 2.1, é possível visualizar dois desenhos iguais de cachorros, um verde e outro laranja, apenas dispostos em lugares diferentes da folha. Os pontos P e Q no desenho da esquerda são correspondentes aos pontos P' e Q' no desenho da direita, e a distância entre os pontos P e Q é a igual à distância entre P' e Q'. Fazendo um exercício mental, podemos reconhecer o fato de que a distância entre qualquer par de pontos no desenho da esquerda é igual à distância do par correspondente no desenho da direita. Assim, as figuras são *congruentes*.

Uma outra maneira de compreender a noção de congruência, é dizer que duas figuras planas são congruentes quando elas possuem a mesma forma e tamanho. Assim, é possível imaginar que podemos "recortar" a primeira figura do plano, como se ele fosse de papel, e encaixá-la perfeitamente sobre a segunda figura, ou ainda, imaginar que podemos mover a primeira, sem deformá-la, através de um movimento rígido, ou seja, um movimento que preserva ângulo e comprimento, de modo que ao final ela seja encaixada exatamente sobre a segunda. Os movimentos de translação, rotação e reflexão – movimentos que preservam ângulo e comprimento – serão estudados mais adiante neste texto.

Obs Agora que você já entendeu a noção de congruência, deve estar se perguntando qual é a relevância de estudarmos isso para a construção da Geometria Plana. Para responder a esta pergunta, apresentamos a seguinte alegoria.

Imagine que você pretende cozinhar uma macarronada durante alguns dias para seu almoço. Como você nunca cozinhou esse prato antes, é necessário antes "aprender" a fazer uma macarronada. Depois que você aprender, não precisa aprender por uma segunda vez, pois a macarronada será a mesma em todas as vezes em que você for fazê-la.

O mesmo ocorre com figuras congruentes: se você aprender as propriedades de uma delas, então qualquer das demais figuras congruentes terá as mesmas propriedades. Assim, evita-se o trabalho de restabelecer fatos já conhecidos anteriormente.

2.2 – Congruência de Triângulos

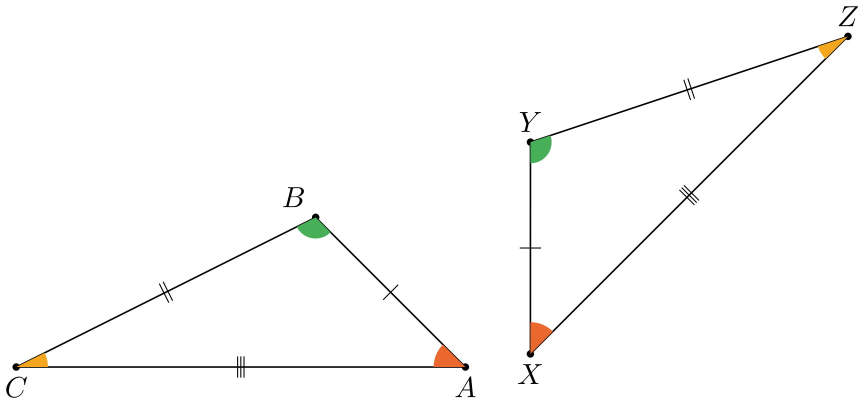
Para não precisar construir uma teoria de congruência muito complexa, nos concentraremos em estudar a congruência de figuras planas bem simples: os triângulos.

Definição 2.2.1 Dois triângulos ABC e XYZ são *congruentes* se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre os vértices do primeiro e os vértices do segundo de modo que todos os lados e ângulos do primeiro triângulo sejam iguais aos lados e ângulos correspondentes no segundo triângulo. Assim, ABC e XYZ realmente são congruentes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow Y$ e $C \leftrightarrow Z$, quando

$$AB = XY, \;\; BC = YZ, \;\; CA = ZY$$

e

$$\angle ABC = \angle XYZ, \;\; \angle BCA = \angle YZX, \;\; \angle CAB = \angle ZXY.$$



Obs Utilizaremos o símbolo ($\equiv$) para denotar dois triângulos congruentes. Assim, nas notações da figura, escrevemos $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$, supondo implicitamente que a correspondência de vértices é $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow Y$ e $C \leftrightarrow Z$.

Para provar que dois triângulos são congruentes, não é necessário verificar todas as seis igualdades da definição. A seguir, veremos que certas combinações de três dessas seis igualdades serão suficientes para demonstrar que dois triângulos são congruentes. Chamaremos essas combinações de *casos de congruências*, e o primeiro deles é o seguinte

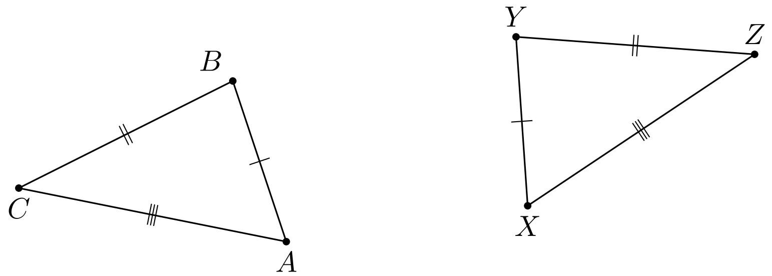
Caso LAL. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $BC = YZ$ e $\angle ABC = \angle XYZ$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Este caso de congruência é um *postulado* da Geometria Euclidiana. Ou seja, assim como outros axiomas que apresentamos no módulo

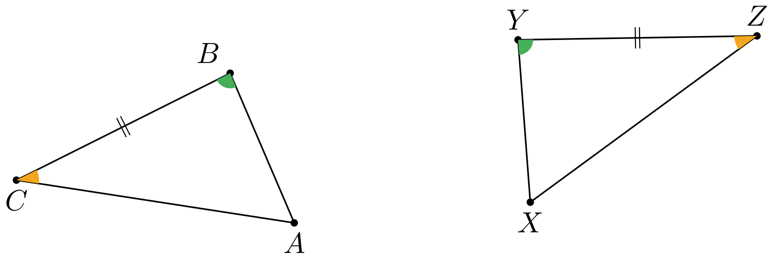
Geometria A, ele *não pode ser demonstrado* e deve ser simplesmente aceito como verdadeiro.

Por outro lado, os demais casos de congruência podem ser demonstrados a partir do caso LAL e são os seguintes.

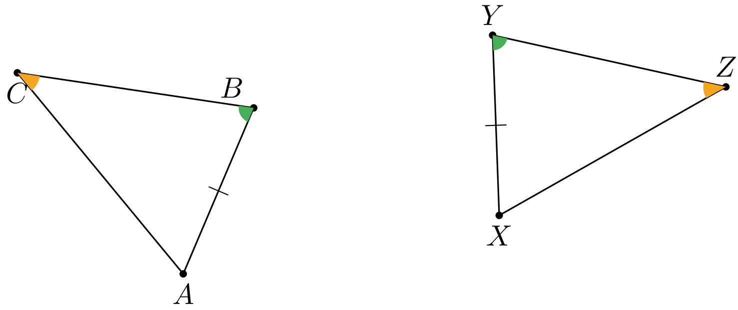
Caso LLL. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $BC = YZ$ e $CA = ZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.



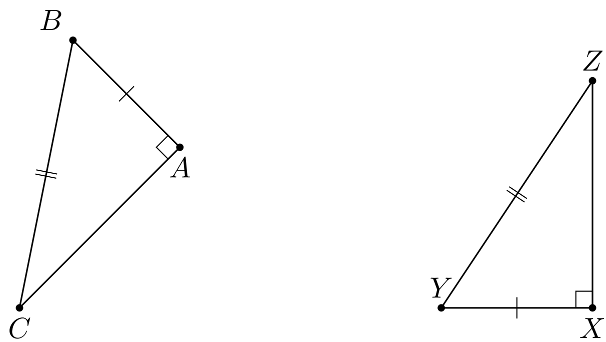
Caso ALA. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $\angle ABC = \angle XYZ$, $BC = YZ$ e $\angle BCA = \angle YZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.



Caso LAA$_o$. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $\angle ABC = \angle XYZ$ e $\angle BCA = \angle YZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

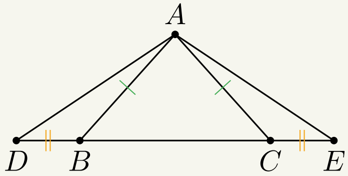


Caso Cateto-Hipotenusa. Se ABC e XYZ são dois triângulos retângulos com $\angle BAC = \angle YXZ = 90°$, $AB = XY$ e $BC = YZ$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.



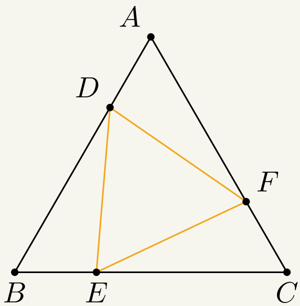
Os demais casos de congruência podem ser intuídos através de construções usando régua e compasso. Você poderá encontrar essa abordagem no livro *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 Geometria Euclidiana Plana* escrito por Antonio Caminha Muniz Neto. Neste módulo, porém, nos concentraremos em aprender a utilizar os casos de congruência para provar, na próxima seção, alguns fatos geométricos importantes.

Exercício 2.1 Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles de base BC. Como mostrado na figura, marque sobre a base BC segmentos congruentes BD e CE. Prove que o triângulo ADE é isósceles.



Solução. Como ABC é isósceles de base BC, temos $AB = AC$ e $\angle ABC = \angle ACB$. Então, $\angle ABD = \angle ACB$, pois tais ângulos são suplementos de ângulos iguais. Como $BD = CD$ por hipótese, concluímos que os triângulos ABD e ACE são congruentes pelo caso LAL. Portanto, $AD = AE$. ■

Exercício 2.2 Sobre os lados de um triângulo equilátero ABC, marcam-se os pontos D, E e F, conforme ilustrado na figura. Sendo $AD = BE = CF$, prove que o triângulo DEF também é equilátero.



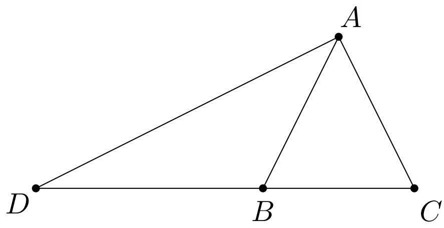
Solução. Sendo $AB = BC = AC = l$ e $AD = BE = CF = x$, observe que $DB = EC = AF = l - x$ e que $\angle DAF = \angle EBD = \angle FCE = 60°$. Portanto, $\Delta ADF \equiv \Delta BED \equiv \Delta CFE$, pelo caso LAL. Consequentemente, $DF = FE = ED$. ■

Exercício 2.3 Explique por que **LLA** não é um caso de congruência de triângulos.

Solução. Como mostrado na figura, considere um triângulo isósceles BAC com $BA = AC$, e um ponto D sobre o prolongamento da reta BC, mais próximo de B do que de C. Veja que os triângulos DBA e DAC são tais que $\angle ADB = \angle ADC$, AD é compartilhado e $AB = AC$. Portanto, esta situação se encaixaria em um possível caso LLA:

$$AB = AC,\ AD = AD \ \text{ e } \ \angle ADB = \angle ADC.$$

Entretanto, claramente percebemos que os triângulos DBA e DAC não são congruentes, uma vez que $CD > BC$.

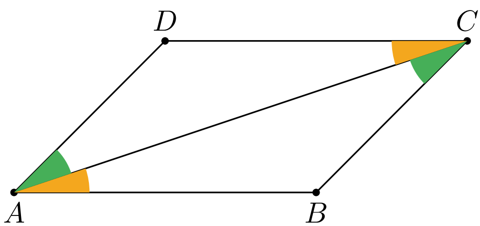


■

2.3 – Aplicações de Congruência de Triângulos

Começamos esta seção deduzindo uma propriedade muito importante dos paralelogramos.

Proposição 2.1 Em todo paralelogramo, os pares de lados opostos têm comprimentos iguais.



Prova. Considere um paralelogramo $ABCD$. Por definição, seus pares de lados opostos são paralelos. Assim, pelo quinto postulado de

Euclides, temos que

$$\angle CAB = \angle DCA \qquad \text{e} \qquad \angle ACB = \angle DAC.$$

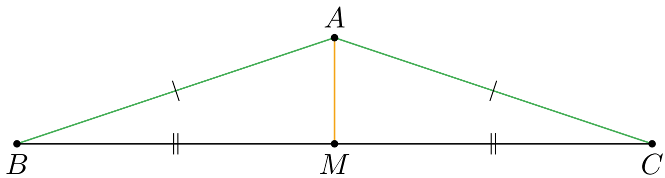
Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ pelo caso **LAL**. Portanto, $AB = CD$ e $CB = AD$. ■

O próximo resultado é um fato que já havíamos enunciado, sem demonstração, no capítulo anterior deste módulo. O fato é o seguinte.

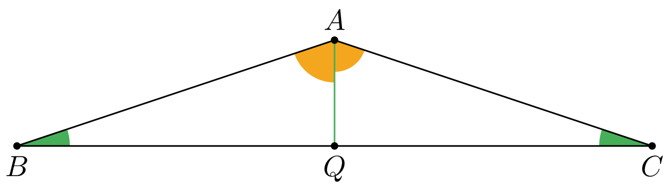
Proposição 2.2 Seja ABC um triângulo. Então $AB = AC$ se e somente se $\angle ABC = \angle ACB$.

Prova. Observe que essa proposição é *bicondicional*. Assim, devemos provar os dois sentidos da equivalência.

I. Assuma que $AB = AC$. Seja M o ponto médio do lado BC. Como $AB = AC$, $BM = CM$ e AM é comum, o caso LLL garante que os triângulos AMB e AMC são congruentes. Daí, $\angle ABC = \angle ACB$.



II. Assuma que $\angle ABC = \angle ACB$. Seja Q o pé da bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Como AQ é um lado comum, $\angle QAB = \angle QAC$ e $\angle QBA = \angle QCA$, concluímos que os triângulos AQB e AQC são congruentes pelo caso LAA_o. Assim, $AB = AC$.



■

Obs Apesar de serem visualmente quase idênticos, os dois desenhos utilizados para demonstrar a Proposição 2.2 são conceitualmente diferentes, pois são construídos com base em hipóteses distintas.

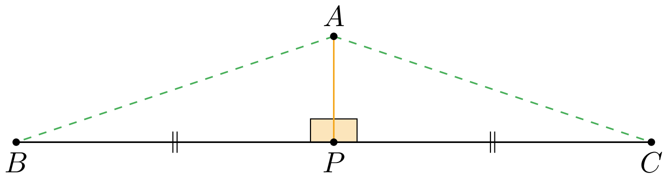
A **mediatriz** de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele. No que segue, utilizaremos congruência de triângulos para caracterizar a mediatriz como *lugar geométrico.*

Proposição 2.3 Se A é um ponto fora da reta BC, então $AB = AC$ se e somente se A está sobre a mediatriz de BC.

Prova.
Primeira parte: Suponha que A está sobre a mediatriz de BC. Sendo P o ponto médio de BC, então a definição de mediatriz garante que

$$\angle APC = \angle APB = 90^\circ \quad \text{e} \quad BP = PC.$$

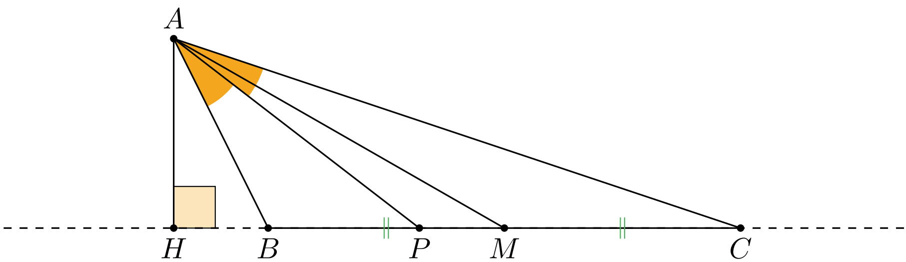
Com isso, $\Delta APC \equiv \Delta APB$ pelo caso LAL , pois o lado AP é comum aos dois triângulos. Portanto, $AB = AC$.



Segunda parte: Suponha que $AB = AC$. Então, o triângulo ABC é isósceles de base BC. Sendo P o ponto médio de BC, vimos na demonstração da Proposição 2.2 que os triângulos APC e APB são congruentes , pelo caso LLL. Logo, $BP = CP$ e $\angle APB = \angle APC$. Por fim, como tais ângulos somam 180°, cada um deles vale 90°. Consequentemente, a reta AP é perpendicular ao segmendo BC em seu ponto médio, de forma que é a mediatriz de BC. ■

Obs Em um triângulo, o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto é denominado uma **mediana** do triângulo.

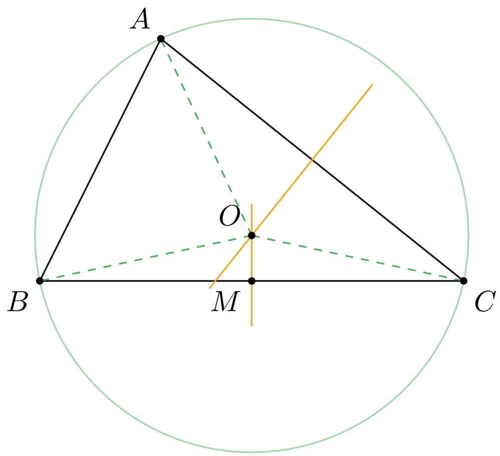
O segmento que sai de um vértice e incide perpendicularmente no lado oposto é denominado uma **altura** do triângulo. Por fim, o segmento que sai de um vértice a um ponto do lado oposto, dividindo ao meio o ângulo relativo a esse vértice, é denominado uma **bissetriz interna** do triângulo. Assim, todo triângulo tem três medianas, três alturas e três bissetrizes internas , uma para cada vértice. Na figura que segue, AM é mediana do triângulo ABC, AP é bissetriz do triângulo ABC e AH é altura do triângulo ABC, tudo relativo ao vértice A (ao lado BC),



Dadas as definições acima, uma consequência direta da Proposição 2.3 é o fato que, em um triângulo isósceles, a altura, a mediatriz, a bissetriz e a mediana relativas à base coincidem.

A partir das caracterizações para mediatriz que acabamos de desenvolver, podemos justificar a existência de dois pontos notáveis de um triângulo: o **circuncentro** e o **ortocentro**.

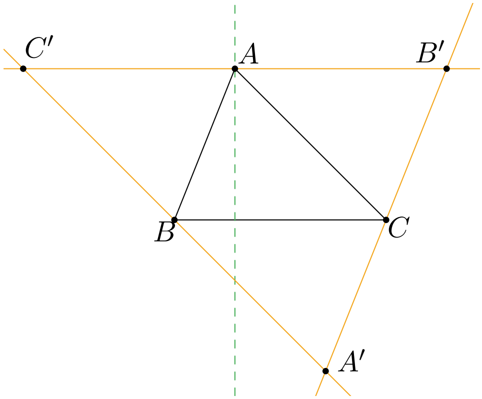
Proposição 2.4 Em um triângulo ABC, as mediatrizes dos lados AB, BC, CA encontram-se em um único ponto O, chamado de **circuncentro** do triângulo. Este ponto é o centro do **círculo circunscrito** ao triângulo ABC, isto é, do círculo que passa pelos vértices do triângulo.



Prova. Inicialmente, veja que as mediatrizes dos lados BC e AC não podem ser paralelas. Realmente, se o fossem, então, como elas são perpendiculares às retas BC e AC, teríamos que BC e AC também seriam paralelas, o que não é o caso. Portanto, podemos considerar o ponto de encontro O das mediatrizes dos lados BC e AC.

Uma vez que O pertence à mediatriz de BC, a Proposição 2.3 garante que $BO = CO$. Da mesma forma, como O pertence à mediatriz de AC, temos $AO = CO$. Então, $AO = BO$, de sorte que, novamente pela Proposição 2.3, O pertence à mediatriz de AB. Assim, as três mediatrizes se intersectam em um mesmo ponto O, com $AO = BO = CO$. Portanto, o círculo de centro O e raio igual a essa distância comum passa por A, B e C. ■

Proposição 2.5 Prove que as retas que contém as alturas de um triângulo se encontram em um único ponto, chamado de **ortocentro** do triângulo.



Prova. Por simplicidade, façamos a demonstração no caso de um triângulo ABC acutângulo. A demonstração para triângulos retângulos ou obtusângulos é essencialmente a mesma. Entretanto, no caso de um triângulo retângulo, o ortocentro estará localizado *em um vértice* do triângulo e, no caso de um triângulo obtusângulo, o ortocentro estará localizado *fora*) desse triângulo. Faça figuras para se certificar dessas afirmações.

Considere, pois, um triângulo acutângulo ABC. Trace, seguindo a figura acima, as retas paralelas aos lados BC, CA e AB, passando pelos pontos A, B e C, respectivamente, e sejam A', B' e C' os pontos de interseção entre essas retas.

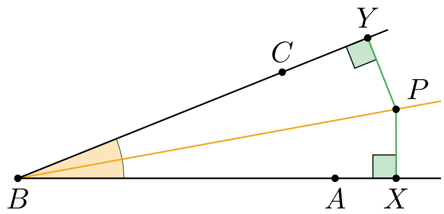
Note que $AB'CB$ é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados opostos paralelos. Com isso, a Proposição 2.1 garante que $BC = AB'$. De modo análogo, $ACBC'$ é paralelogramo, logo $BC = AC'$. Assim, $AB' = AC'$, ou seja, A é ponto médio de $B'C'$. Também, uma vez que as retas BC e $B'C'$ são paralelas e a altura relativa ao lado BC é perpendicular à reta BC, ela também é perpendicular à reta $B'C'$. Então, tal altura do triângulo ABC é a mediatriz do segmento $B'C'$.

Da mesma forma, as demais alturas do triângulo ABC também são mediatrizes do triângulo $A'B'C'$. Mas, pela Proposição 2.4, as mediatrizes do triângulo $A'B'C'$ se encontram em um único ponto. Logo, as alturas do triângulo ABC também se encontram em um único ponto. ∎

Exercício 2.4 Seja P um ponto no interior do ângulo $\angle ABC$. Sejam X e Y os pés das perpendiculares de P até as retas BA e BC, respectivamente. Prove que P está sobre a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ se e somente se $PX = PY$.

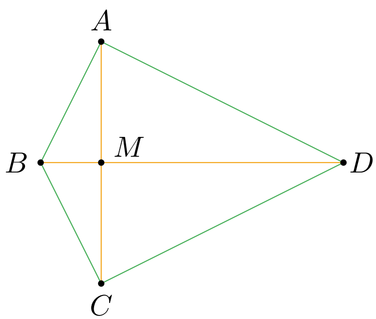
Prova.

Primeira parte: Se P está sobre a bissetriz do ângulo $\angle ABC$, então os triângulos PBX e PYB são congruentes pelo caso LAA$_o$, pois BP é um lado em comum, $\angle PBX = \angle PBY$ e $\angle PXB = \angle PYB = 90°$. Logo, $PX = PY$.



Segunda parte: Se $PX = PY$, então os triângulos retângulos BPX e BPY têm mesma hipotenusa e catetos PX e PY iguais. Logo, são congruentes pelo caso Cateto-Hipotenusa. Segue que $\angle ABP = \angle PBC$. ■

Exercício 2.5 Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB = BC$ e $AD = DC$. Mostre que suas diagonais são perpendiculares.



Prova. Como $AB = CB$ e $AD = CD$, a mediatriz do segmento AC passa pelos pontos B e D, logo, coincide com a reta BD. Portanto, a reta BD intersecta o segmento AC em seu ponto médio M, com BD perpendicular a AC. ■

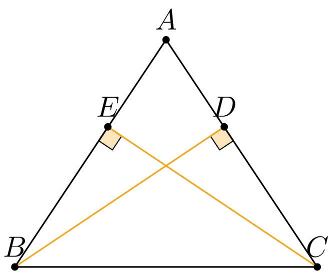
Exercício 2.6 Mostre que um triângulo que possui duas alturas de comprimentos iguais é isósceles.

Prova. Analisemos somente o caso em que ABC é acutângulo. Os casos em que ABC é retângulo ou obtusângulo podem ser tratados de modo análogo.

Considere, pois, um triângulo acutângulo ABC, com alturas iguais BD e CE, como mostrado na figura a seguir. Em primeiro lugar, veja que

$$\angle ECA = 90^\circ - \angle EAC = 90^\circ - \angle DAB = \angle DBA.$$

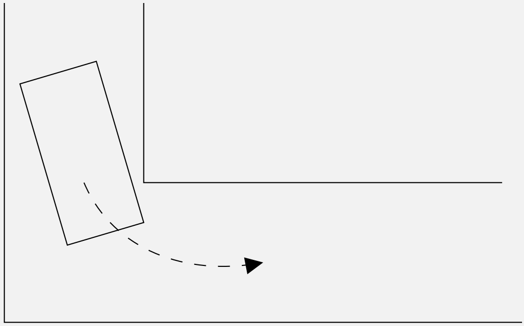
Portanto, para os triângulos AEC e ADB, temos $BD = CE$, $\angle ECA = \angle DBA$ e $\angle CAE = \angle BAD$, de forma que tais triângulos são congruentes pelo caso ALA. Consequentemente, $AB = AC$. ■



2.4 – Transformações Geométricas

Em nosso primeiro contato com a Geometria, é usual que sejamos apresentados a objetos estáticos. Porém, em muitas situações do cotidiano, lidamos com objetos que podem ser movimentados em uma determinada região. Observe o seguinte exemplo.

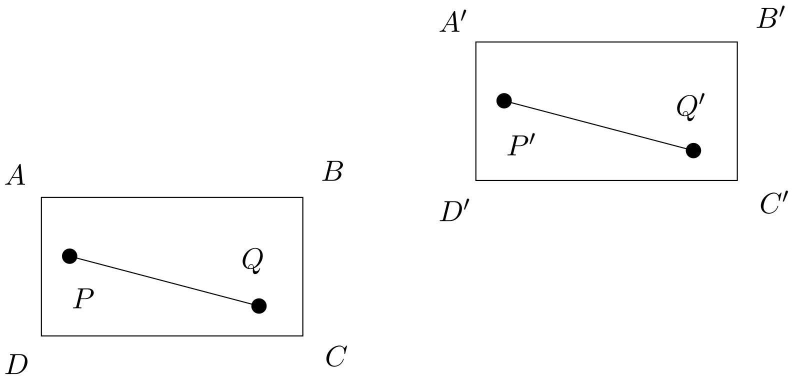
Problema 1 Considere um corredor em formato de "L"com 1,5 m de largura e uma mesa de dimensões x e y que precisa ser levada de uma extremidade à outra do corredor. Quais são os possíveis pares (x,y) que permitem esse transporte?



Nosso objetivo não será resolver o problema anterior. De fato, para obtermos uma solução completa e rigorosa, precisamos de técnicas e conteúdos que são apresentados apenas em cursos de nível superior. Por outro lado, a situação descrita nesse problema é suficientemente rica para motivarmos essa seção.

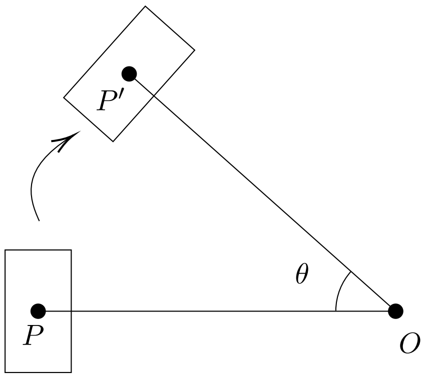
Note que podemos facilmente imaginar uma pessoa tentando levar a mesa de uma ponta à outra do corredor. Nessa tentativa, a pessoa irá movimentar a mesa realizando basicamente dois tipos de movimentos: a translação e a rotação.

A translação é caracterizada pelo "deslizamento" retilíneo em alguma direção. A figura a seguir apresenta um retângulo sendo transladado em uma direção dentre uma infinidade de direções possíveis.



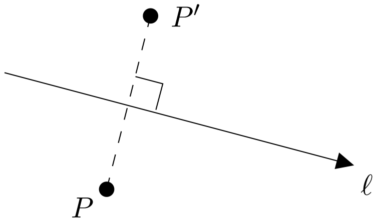
Quando realizamos uma translação em que levamos os pontos P e Q aos pontos P' e Q', respectivamente, percebe-se que os segmentos PQ e $P'Q'$ são paralelos.

Já a rotação pode ser mais facilmente compreendida quando definida formalmente. Seja O um ponto no plano e θ um ângulo direcionado. Uma rotação de centro O e ângulo θ leva o ponto P ao ponto P' de modo que $\angle P'OP = \theta$ e $OP' = OP$. Na ilustração a seguir podemos visualizar uma possível rotação de um retângulo.



A rotação e translação fazem parte de um conjunto de transformações de figuras planas conhecidas como *movimentos rígidos*. Dizemos que uma figura foi levada em outra através de um movimento rígido se qualquer conjunto de três pontos P', Q' e R' da segunda figura, correspondentes aos pontos P, Q e R da primeira figura forem tais que os triângulos PQR e $P'Q'R'$ sejam congruentes.

Além da rotação e da translação, outra importante transformação rígida é a *reflexão*. Para definirmos uma reflexão, precisamos de uma reta ℓ. Assim, uma reflexão sobre ℓ leva o ponto P a um ponto P' de modo que $PP' \perp \ell$ e que o ponto médio de PP' esteja sobre ℓ.



A reflexão está associada com a noção de simetria. Dizemos que uma figura plana possui um eixo de simetria quando existe uma reta ℓ que divide a figura em duas partes, sendo uma parte a reflexão da outra sobre ℓ. A imagem a seguir apresente um trio de figuras simétricas.

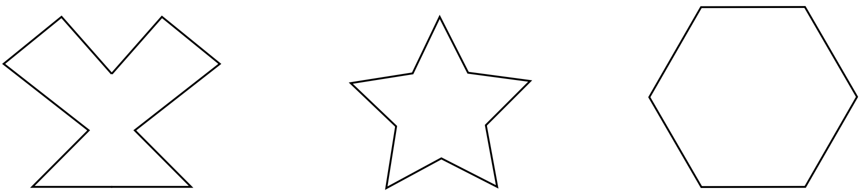


Figura 2.7: três desenhos simétricos.

Nota ao Professor 2.6 A noção de simetria é um conceito intuitivo que é fácil de ser compreendido informalmente, mas que é difícil de ser formalizado em um primeiro momento. O professor pode utilizar-se desse fato para solicitar que a turma defina formalmente a noção de simetria. Dentre as possíveis definições que poderão ser sugeridas pelos alunos, destacamos a seguinte: *"Uma figura é simétrica quando é possível dividi-la em duas partes iguais"*. Nesse momento, o professor pode dirigir-se novamente à turma e perguntar se a definição corresponde à noção intuitiva de simetria ou se há algum contra-exemplo. Observe que a Figura 2.8 respeita a essa definição, mas não é simétrica. Após algum debate, apresente a definição formal de simetria. Na sequencia, resolva o Exercício 2.7.

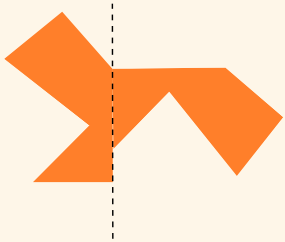


Figura 2.8: é possível dividir essa figura em duas partes congruentes através da reta tracejada, mas ela não possui nenhum tipo de simetria.

Exercício 2.7 Quantos eixos de simetria possuem cada um dos três desenhos apresentados na Figura 2.7?

O professor pode explorar esse exercício em aula desenhando as figuras no quadro e solicitando que os alunos apontem os eixos de simetria identificados por eles. Termine a atividade apenas quando todos forem descobertos.

Solução. O desenho da esquerda tem 1 eixo de simetria, a estrela possui 5 eixos de simetria e o hexágono possui 12. ■

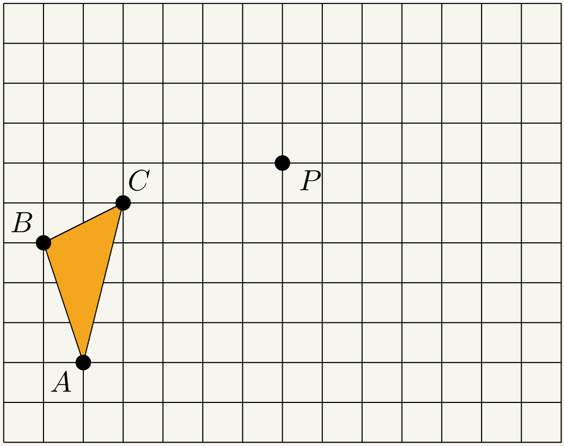
Outra atividade que pode ser realizada para fixar a noção de simetria é a seguinte: Tire uma foto frontal de alguém e utilize um software de edição de fotos para separar a foto ao meio. Em seguida, faça uma reflexão em cada um dos lados da fotos e obtenha assim duas imagens simétricas. Através desse experimento é possível perceber empiricamente que a maioria dos rostos não são simétricos.

Figura 2.9: Nessa figura, vemos a esquerda, a foto original de uma pessoa. As outras duas são obtidas através da aplicação de simetria em relação a um dos lados da face.

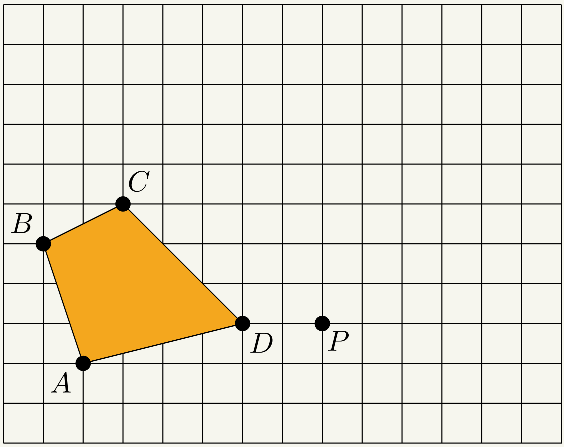
Os movimentos rígidos do plano estão totalmente relacionados com a congruência de figuras. De fato, existe um teorema que garante que quaisquer duas figuras são congruentes se e somente se existe uma sequência de movimentos rígidos que leva uma na outra. Apesar de não apresentarmos uma prova formal, tal resultado pode ser identificado quando realizamos a atividade proposta na introdução desse capítulo. Na Figura 2.1, é possível imaginar uma sequência com uma rotação, uma reflexão e uma translação que posiciona o cachorro verde exatamente sobre o azul.

Agora faremos alguns exercícios para praticar os conceitos de transformações geométricas que foram apresentados nessa seção. Como sempre, convidamos o leitor a pensar um pouco em cada exercício antes de olhar a solução.

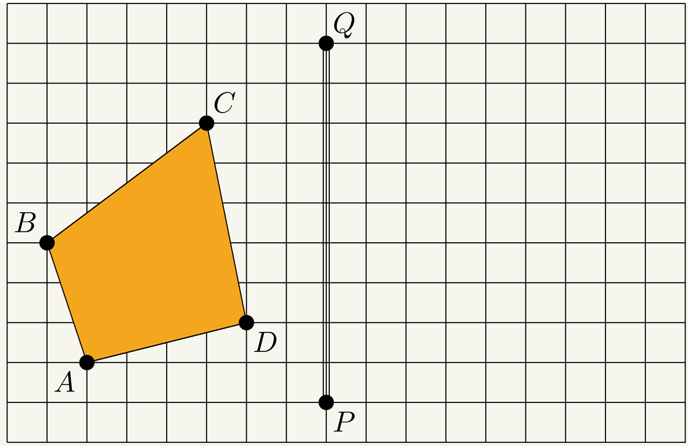
Exercício 2.8 Na figura a seguir, faça uma translação sobre o triângulo ABC de modo que o ponto B fique sobre o ponto P.



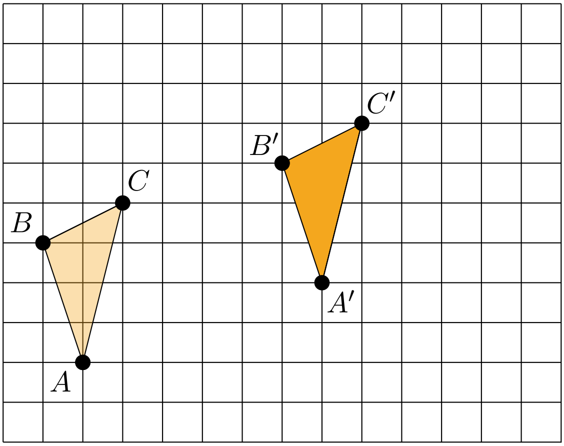
Exercício 2.9 Na figura a seguir, faça uma rotação sobre o quadrilátero $ABCD$ de centro no ponto P e ângulo de 90° no sentido horário.



Exercício 2.10 Na figura a seguir, determine a reflexão do quadrilátero $ABCD$ sobre a reta PQ.



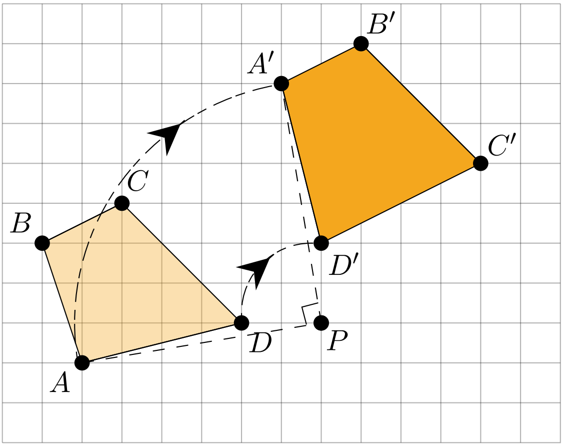
Solução do Exercício 2.8. Se a translação lava os pontos A, B e C nos pontos A', B' e C' respectivamente, então os segmentos AA', BB' e CC têm o mesmo comprimento e mesma inclinação. Dessa forma, os quadriláteros $AA'B'B$, $BB'C'C$ e $CC'A'A$ são **paralelogramos** , um tipo especial de figura que iremos estudar em mais detalhes ainda nesse módulo. Veja a figura a seguir onde $B' = P$.



■

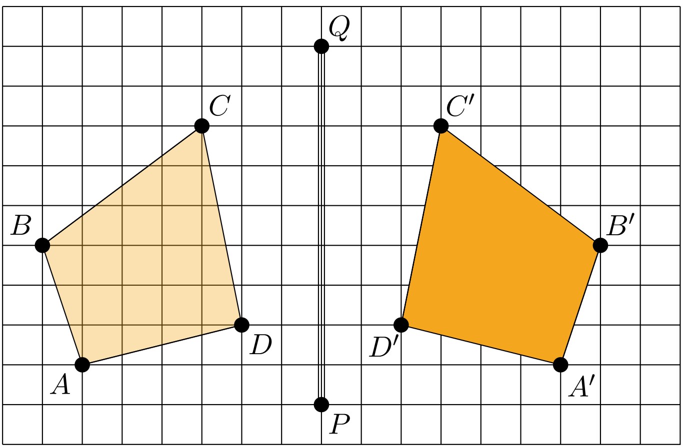
Solução do Exercício 2.9. Se a translação lava o ponto X no ponto X', então o triângulo XPX' é **retângulo isósceles**. Portanto, basta desenhar quatro triângulos retângulos isósceles com ângulos retos em

P e vértices nos pontos A, B, C e D. Obtém-se a seguinte figura na qual o triângulo retângulo isósceles APA' aparece com os lados PA e PA' destacados como segmentos tracejados.



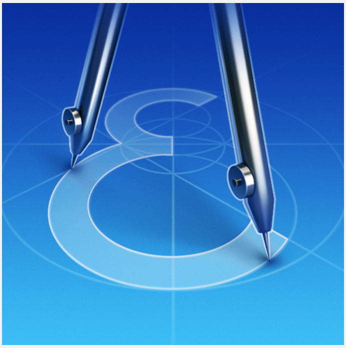
■

Solução do Exercício 2.10. Se desejamos desenhar a reflexão X' do ponto X sobre a reta PQ, então devemos lembrar que PQ será a mediatriz do segmento XX'. Assim, para cada ponto X trace a perpendicular de X até PQ e prolongue essa perpendicular até X' de modo que o ponto médio de XX' esteja sobre PQ. Fazendo isso para os pontos A, B, C e D obtemos a seguinte figura.



■

Uma forma interessante de exercitar os conceitos matemáticos, apresentados até agora, é por meio do jogo **Euclidea, o qual** possui uma coleção de desafios geométricos que podem ser resolvidos sem efetuar cálculos complexos. Ele está disponível para os sistemas Android ou iOS.



2.5 – Desigualdades no Triângulo

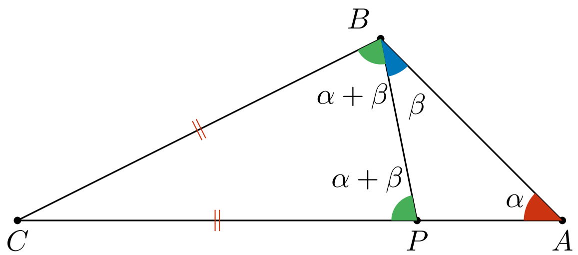
Nesta seção, utilizaremos o material discutido até aqui para estabelecer algumas desigualdades importantes envolvendo os comprimentos dos lados de um triângulo. Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 2.7 Em qualquer triângulo, a ordem entre dois lados coincide com a ordem entre os ângulos opostos a esses lados. Em particular, o maior lado é oposto ao maior ângulo, e vice-versa.

Demonstração. Assuma que, no triângulo ABC, tenhamos $BC < AC$. Temos de provar que $\angle BAC < \angle ABC$. Para tanto, usando o fato de que $BC < AC$, podemos marcar um ponto P sobre o lado AC tal que $CP = CB$, conforme a figura que segue.

Agora, sendo $\angle PAB = \alpha$ e $\angle ABP = \beta$, Teorema do Ângulo Externo dá $\angle CPB = \alpha + \beta$. Mas, como ΔBCP é isósceles de base BP, segue do Teorema 1.6 que $\angle CBP = \alpha + \beta$. Portanto,

$$\angle ABC = \alpha + 2\beta > \alpha = \angle CAB.$$

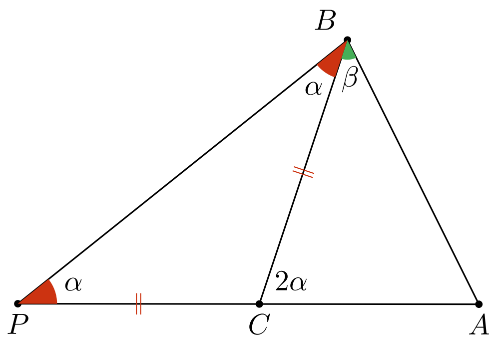


■

O próximo resultado confirma nossa intuição, construída no dia-a-dia, de que para ir de um ponto a outro a melhor trajetória possível é seguir *em linha reta*. Talvez você ache um tanto surpreendente o fato de que isso é um teorema, e não meramente uma manifestação de nossa intuição.

Teorema 2.8 — Desigualdade Triângular. Em todo triângulo, o maior lado é menor do que a soma dos outros dois.

Demonstração. Se AB é o maior lado do triângulo ABC, temos de mostrar que $AB < AC + BC$. Para tanto, marque P um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $CP = CB$ e o ponto C esteja entre A e P, conforme esboçado na próxima figura.



Uma vez que o triângulo ΔPCB é isósceles de base BP, temos $\angle CPB = \angle CBP$. Denotando tais ângulos por α e sendo $\beta = \angle ABP$, temos

$$\angle ABP = \alpha + \beta > \alpha = \angle APB.$$

Portanto, aplicando o Teorema 2.7 ao triângulo APB, concluímos que $AP > AB$. Mas $AP = AC + CP = AC + BC$, de sorte que $AC + BC > AB$. ■

Obs Note que esse resultado também pode ser declarado da seguinte forma: *Em qualquer triângulo, a medida de um dos lados será menor do que a soma das medidas dos outros dois.*

Exercício 2.11 Três segmentos, medindo 5, 7 e x centímetros, são os lados de um triângulo. Quais são os possíveis valores que x pode assumir?

Solução. Pela desigualdade triangular, devemos ter $x < 5 + 7 = 12$. Por outro lado, $7 < x + 5$, de sorte que $2 < x$. Juntando essas duas desigualdades, temos que

$$2 < x < 12.$$

Observe que a terceira desigualdade, $5 < x + 7$, não se constiui numa terceira restrição para a solução do problema, posto que ela é satisfeita por qualquer valor positivo de x. ■

Exercício 2.12 Encontre o intervalo de variação de x, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

Solução. Pela desigualdade triangular, devemos ter

$$(x + 10) + (2x + 4) > 20 - 2x,$$

$$(x + 10) + (20 - 2x) > 2x + 4 \quad \text{e}$$

$$(2x + 4) + (20 - 2x) > x + 10.$$

Como,

$$\begin{aligned}(x+10)+(2x+4)>20-2x &\iff 3x+14>20-2x\\ &\iff 5x>6 \iff x>\frac{6}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+10)+(20-2x)>2x+4 &\iff 30-x>2x+4\\ &\iff 26>3x \iff x<\frac{26}{3},\end{aligned}$$

$$(2x+4)+(20-2x)>x+10 \iff 24>x+10 \iff x<14$$

e $\frac{26}{3}<14$, os valores de x, que satisfazem simultaneamente as três desigualdades triangulares, são os valores que satisfazem a desigualdade

$$\frac{6}{5}<x<\frac{26}{3}.$$

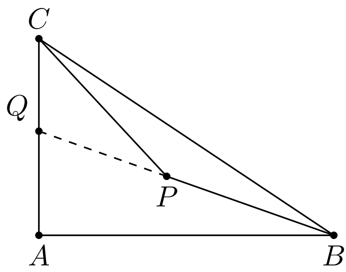
■

Obs A solução do exercício anterior esconde a seguinte sutileza. Dados números reais a, b e c, em princípio poderíamos ter $a+b>c$, $a+c>b$ e $b+c>a$, mas pelo menos um dos números a, b e c poderia ser negativo, de forma que a, b e c não fossem lados de triângulo algum. Isso não ocorre! Realmente, se $a+b>c$, $a+c>b$ e $b+c>a$, então $a>c-b$ e $a>b-c$. Como

$$\left.\begin{array}{l} a>c-b\\ a>b-c\end{array}\right\} \Rightarrow 2a>(c-b)+(b-c)\Rightarrow 2a>0\Rightarrow a>0,$$

temos que $a>0$. Da mesma forma, concluímos que $b>0$ e $c>0$.

Exercício 2.13 Se P é um ponto no interior de um triângulo ABC, mostre que $BP+PC<AB+AC$.



Solução. Prolongue $\overrightarrow{BP}$ até ela encontrar AC em um ponto Q. Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos ABQ e QPC, temos que:

$$BQ < AB + AQ \qquad \text{e} \qquad PC < PQ + QC.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos

$$BQ + PC < AB + AQ + PQ + QC$$

Por outro lado, $BQ = BP + PQ$ e $AQ + QC = AC$. Portanto,

$$(BP + PQ) + PC < AB + AC + PQ.$$

Então, cancelando a parcela PQ que aparece dos dois lados, ficamos com

$$BP + PC < AB + AC.$$

■

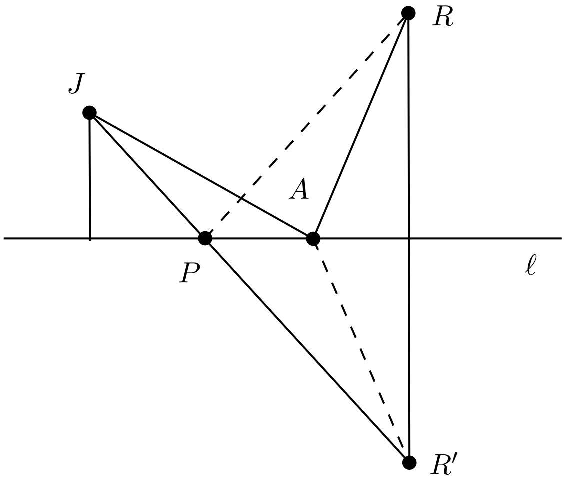
Agora já estamos prontos para resolver o Exercício 1.1.

Solução. Façamos um desenho com uma reta ℓ que representa o rio, um ponto J que representa a casa de Joaquim e um ponto R que representa o restaurante. Já sabemos que o caminho mais curto entre dois pontos é dado pelo segmento de reta que liga esses dois pontos. Seja R' o reflexo de R sobre a reta ℓ. Trace o segmento que liga os pontos J e R'. Esse segmento irá cortar a reta ℓ no ponto P. Vamos provar que a junção dos segmentos JP e PR é o menor caminho entre J e R que possui um ponto sobre a reta ℓ.

De fato, seja A um ponto sobre ℓ diferente de P. Note que $AR = AR'$ e que $PR = PR'$ pelas propriedades da reflexão. Por outro lado, JAR' é um triângulo e, pela desigualdade triangular, temos que

$$JA + AR = JA + AR' > JR' = JP + PR' = JP + PR.$$

Concluímos que a junção dos segmentos JP e PR é o menor caminho entre J e R que possui um ponto sobre a reta ℓ. ■



3 Polígonos e Círculos

3.1 – Quadriláteros

Um **quadrilátero** $ABCD$ é o conjunto formado por quatro pontos A, B, C e D , os seus **vértices**, tal que não há três deles colineares, e pelos segmentos AB, BC, CD e DA , os seus **lados**.

Um quadrilátero é dito **convexo** quando a reta definida por cada um de seus lados deixa os outros dois vértices de um mesmo lado, conforme a Figura 3.1. Nesta seção, vamos considerar apenas quadriláteros convexos, de forma que, daqui em diante, omitiremos a palavra *convexo*.

Se $ABCD$ é um quadrilátero, seu **interior** é a interseção dos quatro semiplanos definidos por cada lado e que contêm os outros dois vértices. Dizemos também que $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são os **ângulos internos** de $ABCD$ e os segmentos AD e BC são suas **diagonais**. Note que elas estão contidos na união dos lados com o interior de $ABCD$.

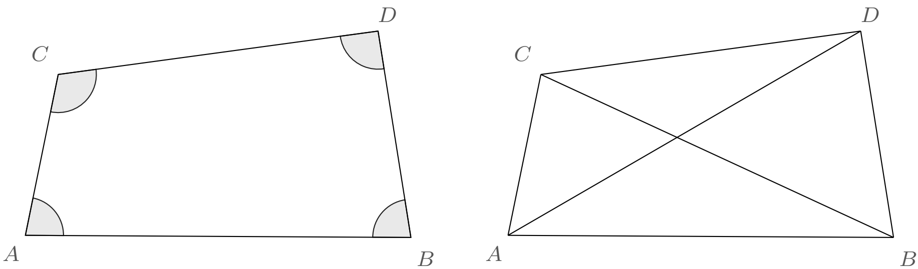


Figura 3.1: Um quadrilátero (à esquerda) e suas diagonais (à direita).

Por vezes, dizemos que AB e CD são **lados opostos** de $ABCD$. De modo equivalente, BD e AC também são lados opostos.

Assim como ocorre com os triângulos, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é invariante, ou seja, é igual em todos os quadriláteros. Mas, no caso de quadriláteros, o valor obtido é 360°.

Teorema 3.1 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$.

Demonstração. Desenhando apenas uma das diagonais, dividimos o quadrilátero em dois triângulos. Podemos observar facilmente que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual à soma dos ângulos internos desses dois triângulos. Logo, a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a $2 \cdot 180°$, ou seja, $360°$. ■

Vamos, agora, definir alguns tipos especiais de quadriláteros, segundo seus ângulos e lados. À medida que você ler as definições, observe os vários tipos especiais de quadriláteros na figura 3.3.

- **Retângulo** é um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos.
- **Losango** é um quadrilátero que possui todos os seus lados iguais.
- **Quadrado** é um quadrilátero que possui todos os ângulos retos e todos os lados iguais. Portanto, um quadrilátero é um quadrado se, e somente se, for simultaneamente um retângulo e um losango.
- **Paralelogramo** é um quadrilátero que possui seus dois pares de lados opostos paralelos.
- **Trapézio** é um quadrilátero que possui um par de lados (opostos) paralelos , que são chamados de **bases**.

Retângulos também têm uma forte aplicação na construção civil. Durante a construção de um prédio, as paredes e pisos são pavimentados por tijolos com faces retangulares. Isso decorre do fato de que tijolos retangulares são mais fáceis de transportar e mais baratos de fabricar. Além disso, eles podem preencher as paredes retas sem deixar nenhum espaço vazio , como pode ser visto na Figura 3.2.

Observe que todo paralelogramo também é trapézio. Por outro lado, em um trapézio, seus outros dois lados podem ou não ser paralelos. Contudo, a fim de ter uma nomenclatura que funcione em todos os casos, se $ABCD$ for um trapézio de bases AB e CD, diremos que AD e BC são os **lados não paralelos** do trapézio, lembrando que eles *podem vir a ser* paralelos. A nomenclatura é um tanto infeliz, mas está consagrada pelo uso e não gerará confusões, pois o contexto sempre deixará cada situação bastante clara.

Figura 3.2: Possíveis ladrilhamentos utilizando tijolos.

Uma última definição: se $ABCD$ for um trapézio de bases AB e CD, diremos que $ABCD$ é **isósceles** se $\angle BAD = \angle ABC$. Nesse caso, é possível usar o Teorema 1.6 para mostrar que $AD = BC$.

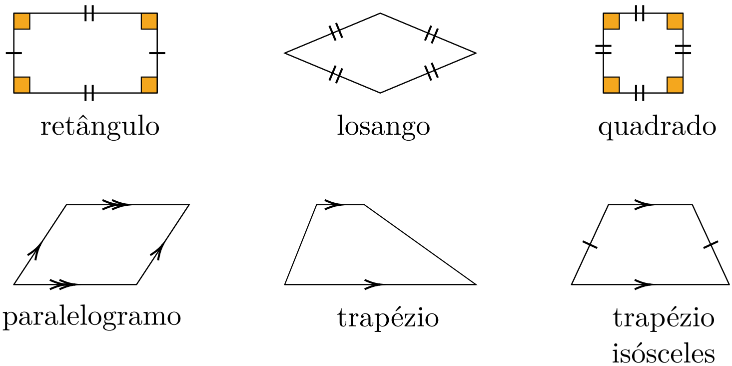


Figura 3.3: Tipos de quadriláteros.

Nota ao Professor 3.2 Ao falar sobre retângulos, o professor pode comentar sobre o retângulo áureo. Um *retângulo áureo* é todo aquele cuja razão entre os comprimentos do lado maior e do lado menor é igual número áureo, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é um número irracional aproximadamente igual a 1,618. Um retângulo áureo pode ser construído pela união de um retângulo áureo menor com dimensões $a \times b$, onde $a > b$, e de um quadrado de lado a, de tal sorte que o retângulo áureo maior tenha dimensões $(a+b)\times a$, como na Figura 3.4. Isso funciona porque o número φ é uma raiz da equação de segundo grau $\varphi^2 = \varphi + 1$, logo satisfaz

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

E, por isso, como $\frac{a}{b} = \phi$, temos que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi.$

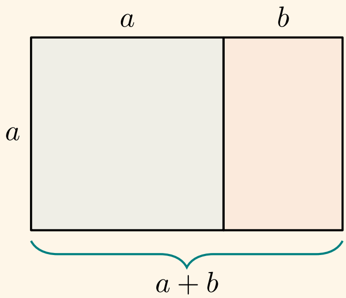


Figura 3.4: construção de um retângulo áureo a partir de um menor.

Figura 3.5: Aplicação na arquitetura: o Partenon.

Muitos artistas e arquitetos são fascinados, desde a antiguidade clássica, pelo pressuposto de que o retângulo áureo é uma forma esteticamente atraente. Ele pode ser encontrado em vários projetos arquitetônicos antigos e modernos, incluindo o Partenon [a] (veja

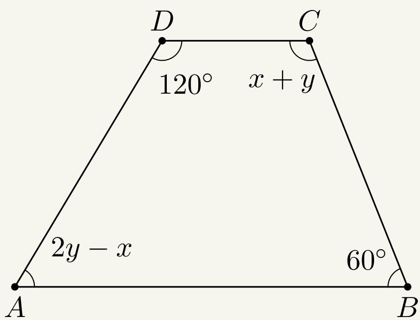
Figura 3.5), um famoso templo na Grécia construído em 447 a.C. Para saber mais sobre o número áureo, leia o código a seguir para assistir a um vídeo do canal *Isto é Matemática*.

Saiba Mais:

[a]https://pt.wikipedia.org/wiki/Partenon

Analisaremos mais algumas propriedades dos tipos especiais de quadriláteros listados acima no próximo módulo de Geometria, quando formalizarmos o conceito de congruência de triângulos.

Exercício 3.1 Na figura a seguir, $ABCD$ é um trapézio de bases AB e CD. Encontre x e y.



Solução. Por paralelismo, temos

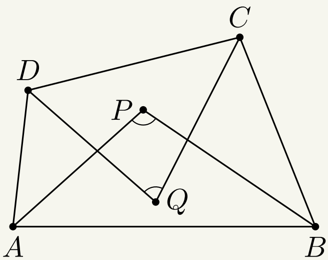
$$2y - x + 120^\circ = 180^\circ \quad \text{e} \quad 60^\circ + x + y = 180^\circ,$$

ou seja,

$$2y - x = 60^\circ \quad \text{e} \quad x + y = 120^\circ.$$

Somando estas duas equações, chegamos a $3y = 180°$. Logo, $y = 60°$ e, consequentemente, $x = 60°$. Observe que, graças a esses valores, $ABCD$ é um trapézio isósceles. ■

Exercício 3.2 Na figura a seguir, P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$, enquanto que Q é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$. Ache o valor de $\angle APB + \angle CQD$.



Solução. Sejam

$$2\alpha = \angle DAB,\ 2\beta = \angle ABC,\ 2\theta = \angle BCD \ \text{ e } \ 2\delta = \angle CDA,$$

as medidas dos ângulo do quadrilátero $ABCD$. Note que

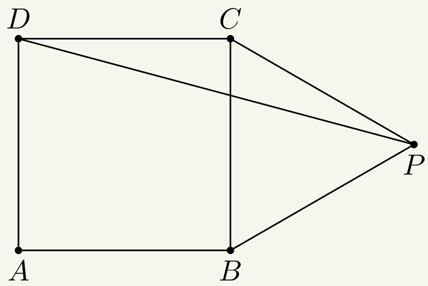
$$\angle APB = 180° - \alpha - \beta \qquad \text{e} \qquad \angle CQD = 180° - \theta - \delta.$$

Somando essas duas equações, temos que

$$\angle APB + \angle CQD = 360° - (\alpha + \beta + \theta + \delta).$$

Por outro lado, 2α, 2β, 2θ e 2δ são as medidas dos ângulos de um quadrilátero, consequentemente, a soma desses ângulos é $360°$. Assim, $\alpha+\beta+\theta+\delta = 180°$ e, daí, $\angle APB+\angle CQD = 360° - 180° = 180°$. ■

Exercício 3.3 A figura a seguir é formada por um quadrado e um triângulo equilátero. Calcule a medida do ângulo $\angle PDC$.



Solução. Como $CD = BC$ e $BC = CP$, temos que $CD = CP$. Assim, ΔCDP é um triângulo isósceles e, pelo Teorema 1.6,

$$\angle CDP = \angle CPD = x.$$

Por outro lado, sendo $ABCD$ um quadrado e CBP um triângulo equilátero, temos $\angle BCD = 90°$ e $\angle BCP = 60°$. Logo,

$$\angle DCP = 90° + 60° = 150°.$$

Por fim, calculando a soma dos ângulos do triângulo ΔCDP, obtemos

$$2x + 150° = 180°, \text{ ou seja, } 2x = 30°.$$

Assim, $x = 15°$. ■

3.2 – Polígonos

Generalizando triângulos e quadriláteros, definimos um **polígono de n lados** $A_1A_2 \ldots A_n$ como o conjunto formado por n pontos A_1, A_2, $\ldots$, A_n , denominados seus **vértices**, tal que não há três deles colineares, e pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 , denominados seus **lados**.

Um polígono de n-lados também é chamado de **n-ágono**. No entanto, em geral usamos palavras específicas quando n varia de 3 a 10. Já conhecemos esses nomes quando $n = 3$ ou $n = 4$: polígono de 3 lados é denominado triângulo e de 4 lados é denominado quadrilátero. A seguir, listamos os nomes usados para $5 \leq n \leq 10$, os quais são formados pela contração do prefixo grego correspondente a n , sublinhado, com a terminação *ágono*, como segue descrito.

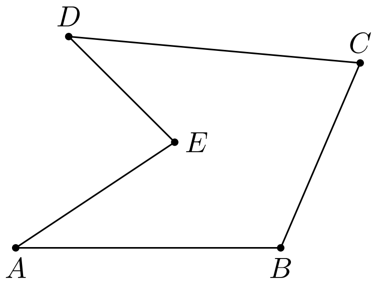
i. $n = 5$: pentágono.
ii. $n = 6$: hexágono.
iii. $n = 7$: heptágono.
iv. $n = 8$: octógono.
v. $n = 9$: eneágono.
vi. $n = 10$: decágono.

Da mesma forma, nesses casos podemos nomear os vértices do polígono usando as primeiras letras maiúsculas do alfabeto, a partir de A. Assim, podemos falar do pentágono $ABCDE$, do octógono $ABCDEFGH$, etc.

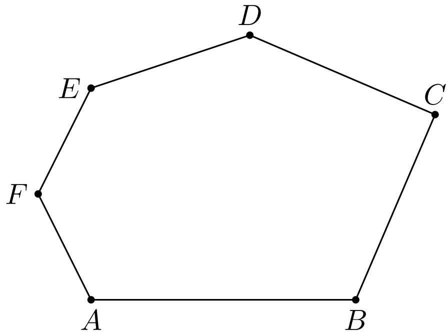
Podemos encontrar , facilmente, polígonos dos mais diversos tipos na Natureza, que evoluiu , ao longo de milhares de anos, para otimizar as estruturas que dão suporte à vida. Por exemplo, se fatiarmos uma colmeia de abelhas, é possível encontrar uma malha hexagonal , como a apresentada na Figura 3.6. O local, no qual o mel é depositado, é composto por pequenos espaços cujos contornos são polígonos com seis lados que se encaixam lado a lado . Isso minimiza a quantidade de cera necessária para moldar a colmeia e maximiza o espaço onde fica armazenado o mel.

Figura 3.6: Para otimizar o armazenamento do mel, as abelhas constroem uma colmeia composta por hexágonos. Fonte: Matthew T Rader (unsplash).

Um polígono de n lados é dito **convexo** quando a reta definida por cada um de seus lados deixa os outros $n-2$ vértices de um mesmo lado do plano. As Figuras 3.7 mostram dois exemplos de polígonos, um pentágono não convexo à esquerda e um hexágono convexo à direita. Nesta seção, vamos considerar apenas polígonos convexos, de forma que, daqui em diante, omitiremos a palavra *convexo*.



(a) Um pentágono não convexo.



(b) Um hexágono convexo.

Figura 3.7: Dois exemplos de polígonos.

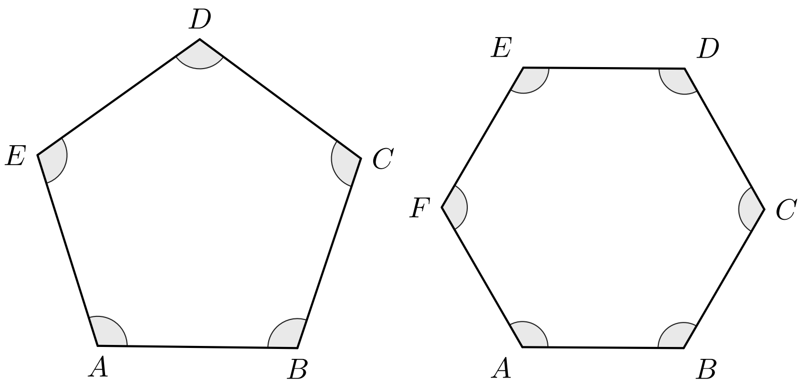
Se $A_1A_2\ldots A_n$ é um n-ágono, seu **interior** é a interseção dos n semiplanos definidos por cada lado e que contêm os outros $n-2$ vértices. Dizemos também que $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\ldots$, $\hat{A}_n$ são os **ângulos internos** do polígono.

Definição 3.2.1 Um **polígono regular** é um polígono em que todos os lados têm um mesmo comprimento e todos os ângulos internos são congruentes.

Na Figura 3.8, ilustramos o pentágono regular – polígono regular de 5 lados, e o hexágono regular – polígono regular de 6 lados.

Triângulos equiláteros e quadrados são polígonos regulares. No caso dos triângulos equiláteros, recorde que , pelo Teorema 1.6, a igualdade dos lados implicava a igualdade dos ângulos. Entretanto, já no caso dos quadrados, tivemos de exigir as igualdades dos lados e dos ângulos internos , pois há retângulos que não são quadrados.

De maneira similar, para todo $n \geq 4$, não é difícil esboçarmos exemplos de n-ágonos *equiláteros*, isto é, com todos os lados iguais, ou *equiângulos*, isto é, com todos os ângulos iguais, mas que não são regulares. Por exemplo, imaginando que os lados do pentágono regular da figura acima são barras de ferro conectadas por pinos nos vértices, vemos que o conjunto das barras não é *rígido*; podemos achatá-lo ou alongá-lo e, assim fazendo, obter outros pentágonos, equiláteros mas não equiângulos.



(a) Pentágono regular. (b) Hexágono regular.

Figura 3.8

Da mesma forma, escolha um ponto qualquer A' no interior do quadrilátero $ABPE$, onde P é o encontro das diagonais EC e DB (veja a Figura **??**) e, em seguida, marque os pontos B' sobre BC e E' sobre DE tais que $A'B'$ seja paralela a AB e $A'E'$ seja paralela a AE; então, $A'B'CDE'$ é um pentágono equiângulo, mas não equilátero (pois $B'C < BC = CD$).

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento que une dois vértices não adjacentes , ou seja, que não são extremidades de um mesmo lado. Já sabemos que o quadrado possui duas diagonais e, na Figura 3.10(b) ilustramos , à esquerda, as diagonais de um heptágono que partem de um vértice, bem como todas as diagonais , no polígono à direita.

Vamos, agora, calcular a quantidade de diagonais em um polígono convexo qualquer, em função do número de lados.

Teorema 3.3 Um polígono convexo de n lados possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Demonstração. Ao fixar um vértice qualquer do polígono, note que o número de diagonais que partem dele é igual a $n-3$. Por exemplo, na Figura 3.10(a), temos $n = 7$ vértices e $7 - 3 = 4$ diagonais partindo de A. Assim, podemos contabilizar todas as diagonais somando as

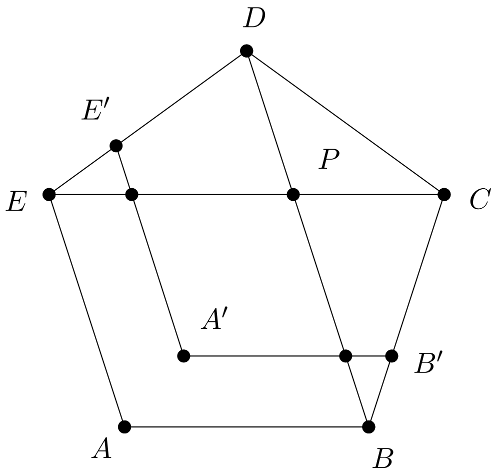
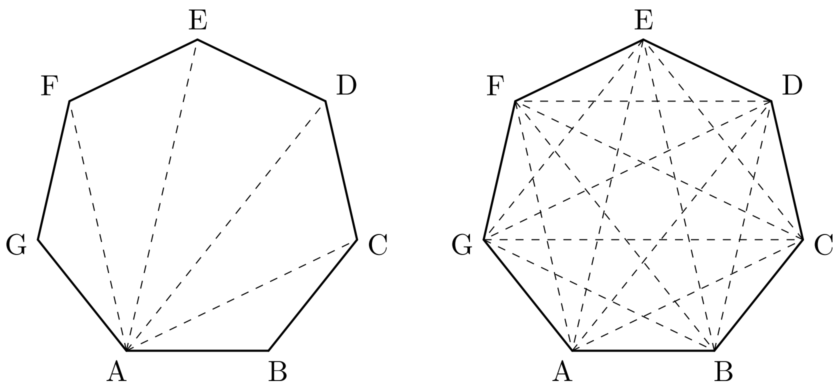


Figura 3.9: Pentágono equiângulo.



(a) Diagonais em um pentágono partindo de um vértice.

(b) Um heptágono tem 14 diagonais.

Figura 3.10

contribuições de diagonais que partem de cada vértice, o que dá

$$\underbrace{(n-3)+(n-3)+\ldots+(n-3)}_{n \text{ parcelas}} = n(n-3)$$

diagonais. Contudo, o cálculo acima tem *redundâncias*: cada diagonal foi contada uma vez a partir de cada dos seus dois vértices, logo foi contada duas vezes. Portanto, o total de diagonais, sem repetições, é $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

Vimos anteriormente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, enquanto que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°. O próximo teorema generaliza esses dois resultados, calculando a soma dos ângulos internos em qualquer n-ágono convexo.

Teorema 3.4 A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180°(n-2)$.

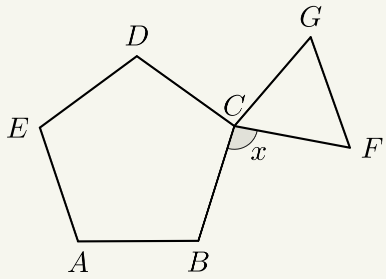
Demonstração. Escolha um vértice do polígono e trace todas as $n-3$ diagonais que partem dele , conforme a Figura 3.10(a) para o caso em que $n = 7$. Desse modo, subdividimos o polígono em $n-2$ triângulos: $7-2 = 5$ triângulos no exemplo da Figura 3.10(a). Observe, agora, que a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de todos esses $n-2$ triângulos. Logo, a soma total é $180°(n-2)$. ■

Como consequência imediata do resultado anterior, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.5 Em um polígono regular de n lados, cada ângulo interno mede $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Demonstração. Como a soma dos ângulos é $180°(n-2)$ e há n ângulos, todos de mesma medida, cada um deles deve medir $\frac{180°(n-2)}{n}$. ■

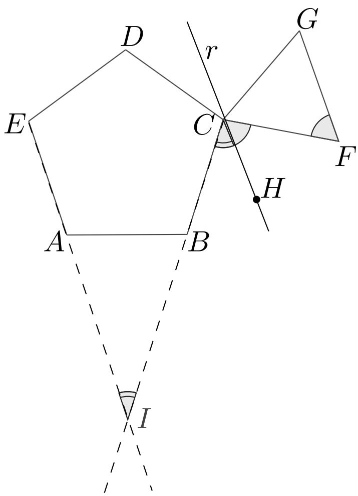
Exercício 3.4 Na figura a seguir, vemos um pentágono regular $ABCDE$ e um triângulo equilátero CFG, unidos pelo vértice comum C. Calcule a medida do ângulo $x = \angle BCF$ para que os lados AE e FG estejam contidos em retas paralelas.



Solução. Os lados EA e GF são paralelos se, e somente se, eles são paralelos a uma mesma reta r. Seja r uma reta passando por C e por um ponto H, distinto de C, conforme a figura que segue.

A reta r é paralela ao segmento GF se, e somente se, os ângulos $\angle HCF$ e $\angle CFG$ são iguais, por serem alternos internos para as retas CH e FG, em relação à transversal CF. Como o triângulo CFG é equilátero, $\angle CFG = 60°$ e, portanto, $\angle HCF = 60°$ é condição necessária e suficiente para que r e GF sejam paralelos.

Seja I o ponto de interseção dos prolongamentos dos lados CB e AE do pentágono e marque um ponto H sobre a reta r, conforme mostrado na figura a seguir.



Os ângulos $\angle IAB$ e $\angle IBA$ são os suplementos dos ângulos internos $\angle EAB$ e $\angle ABC$, respectivamente. Como o pentágono é regular, temos

$$\angle EAB = \angle ABC = \frac{(5-3)180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Assim,

$$\angle IAB = \angle IBA = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Calculando a soma dos ângulos do triângulo AIB, segue que

$$\angle AIB + 72^\circ + 72^\circ = 180^\circ, \text{ ou seja, } \angle AIB = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

A reta r é paralela ao segmento EA se, e somente se, os ângulos $\angle AIB$ e $\angle BCH$ são iguais, pois são alternos internos para as retas AE e r, em relação à transversal CI. Logo, $\angle BCH = 36^\circ$ é condição necessária e suficiente para que r e EA sejam paralelos.

Portanto, devemos ter

$$x = \angle BCH + \angle HCF = 36^\circ + 60^\circ = 96^\circ$$

para que os lados GF e EA sejam paralelos.

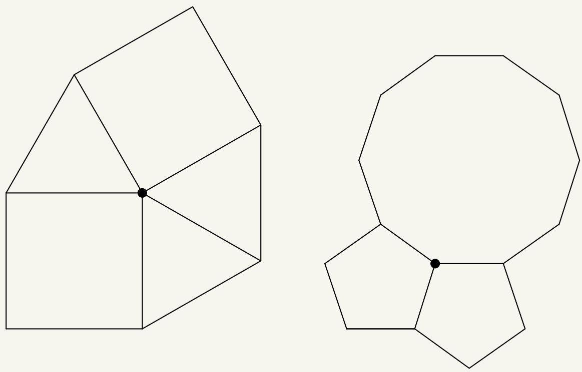
■

Exercício 3.5 — OBMEP 2007.

(a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos é de um polígono regular de n lados é $(n-2)\cdot 180°$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5		
6		
8		

Dizemos que três ou mais polígonos regulares *se encaixam* se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



(b) Um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam? Justifique sua resposta.

(c) Um triângulo equilátero, um heptágono regular e um outro polígono regular se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

Solução.
(a) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5$, 6 e 8 na fórmula $(n-2)\cdot 180°$. Para completar a segunda coluna, basta , conforme visto no Corolário 3.5, dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n, ou seja, calcular $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. A tabela completa é dada abaixo.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°

(b) O ângulo interno de um quadrado é 90° e o de um octógono regular é 135°. Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360°. Como $90° + 135° + 135° = 360°$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares realmente se encaixam.

(c) O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60° e o de um heptágono regular é $\frac{(7-2)\cdot 180°}{7} = \frac{5\cdot 180°}{7}$. Seja n o número de lados do terceiro polígono. O ângulo interno desse polígono é $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Como os três polígonos se encaixam, devemos ter

$$60° + \frac{5\cdot 180°}{7} + \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360°,$$

ou ainda, dividindo os dois lados por 60°,

$$1 + \frac{5\cdot 3}{7} + \frac{(n-2)\cdot 3}{n} = 6.$$

Multiplicando ambos os membros por $7n$, obtemos

$$7n + 15n + 21(n-2) = 42n$$

de sorte que $n = 42$. Logo, o terceiro polígono tem 42 lados. ■

Nota ao Professor 3.6 Como vimos na Figura 3.2, várias cópias congruentes de um retângulo são capazes de cobrir perfeitamente o plano sem deixar buracos ou formando sobreposições. A Figura 3.6 mostra que hexágonos regulares também possuem essa característica. Pode parecer que trata-se de uma propriedade fácil de se encontrar em polígonos, mas não é.

Encontrar polígonos que podem cobrir o plano trata-se de uma de um campo de pesquisa da Matemática com importantes aplicações em diversas áreas como Computação Gráfica, mas acessível a estudantes com um bom nível de dedicação. Por exemplo, um novo tipo de pentágono com essa propriedade foi descoberto em 2015 com a ajuda de um estudante universitário. A Figura 3.11 apresenta os quinze tipo de pentágonos que possuem a propriedade de cobrir o plano que conhecemos até então. Não sabe-se se há outros.

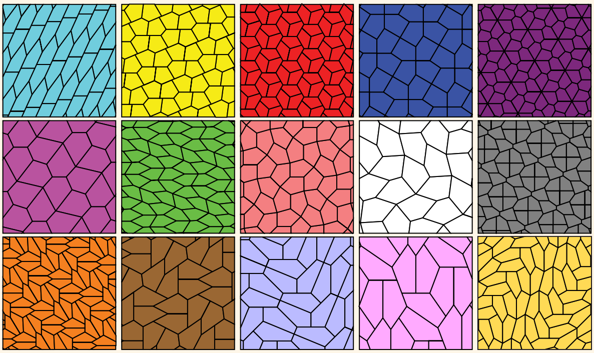


Figura 3.11: Cobertura do plano com pentágonos irregulares. Fonte: Wikimedia Commons.

Coberturas no plano através de polígonos congruentes também possuem uma forte conexão com o mundo da arte. O artista plástico holandês Maurits Cornelis Escher (1898–1972) criou diversas obras inspiradas pela matemática. Dentre os seus trabalhos mais famosos está a famosa litografia que mostra a cobertura do plano através de figuras que representam lagartos. Essa obra de Escher é baseada na Figura 3.12.

Saiba mais sobre M. C. Escher:

Figura 3.12: cobertura do plano com lagartos.

O professor pode trabalhar o conteúdo dessa seção de várias formas possíveis. Seguem algumas sugestões.

(a) Após apresentar a cobertura do plano através de retângulos, solicite que seus alunos pensem em coberturas envolvendo outros polígonos: triângulos, pentágonos, hexágonos, e outros. Após fazerem o desenho, oriente-os a fazer um molde usando cartolina e tesoura. Esse único molde deve ser utilizado para fazer as várias cópias que cobrem o plano.

(b) Conte um pouco sobre as coberturas do plano através de pentágonos. Não é sempre que o professor tem uma oportunidade de aproximar seus alunos com pesquisa científica de ponta. Aproveite o momento para ensinar que a Matemática está em constante desenvolvimento e que muitas perguntas ainda não foram respondidas.

(c) Este é um projeto que pode ser desenvolvido em conjunto com o professor de Artes. Apresente a cobertura de lagartos de Escher. Separe a turma em grupos e desafie-os a encontrar um polígono oculto que descreve a cobertura. Há várias possibilidades. Uma delas é apresentada na Figura 3.13.

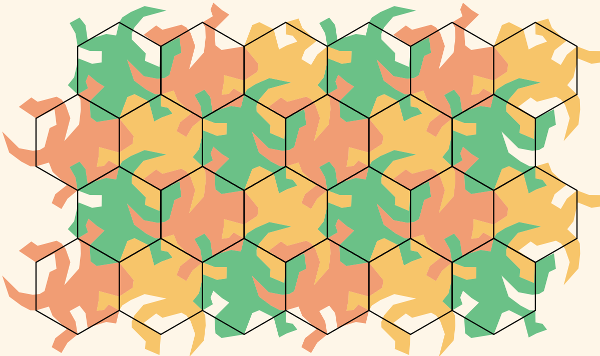


Figura 3.13: Padrão oculto de hexágonos regulares na obra de Escher.

Após perceberem o padrão, o professor de artes deve orientá-los a criar suas próprias obras de artes inspiradas nesse trabalho de Escher. No final, pode-se montar uma exposição para toda a escola.

(d) Resolva o desafio a seguir. Utilize moldes de cartolina para facilitar o raciocínio dos estudantes. Esteja atento principalmente à argumentação desenvolvida pelos alunos, chamando a atenção para possíveis falhas argumentativas.

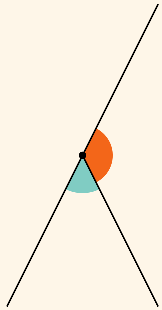
Problema 2 — OBM 2008.

(a) É possível cobrir o plano com pentágonos regulares?

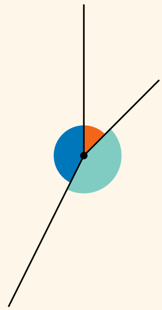
(b) Seja $ABCDE$ um pentágono com todos os lados iguais e tal que a medida do ângulo interno nos vértices A e B são $\widehat{A} = 100°$ e $\widehat{B} = 80°$. Mostre como é possível cobrir todo o plano com cópias desse pentágono, sem sobreposições.

Solução.

(a) Para que seja possível cobrir o plano com diversas cópias de um mesmo polígono, em cada vértice determinado pelo encontro figuras congruentes, a soma dos ângulos internos deve ser 180° ou 360°, conforme ilustrado na seguinte figura.



Soma 180°.



Soma 360°.

Como o ângulo interno de um pentágono regular é 108°, temos que

$$108^\circ < 180^\circ < 2 \cdot 108^\circ \qquad \text{e} \qquad 3 \cdot 108^\circ < 360^\circ < 4 \cdot 108.$$

Portanto, não é possível cobrir o plano com cópias de um pentágono regular.

(b) Note que $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ e que EA e BC são paralelos. Assim, $EABC$ é um losango. Logo, $CE = DE = CD$ e CDE é um triângulo equilátero. Consequentemente, é possível cobrir o plano com várias cópias do pentágono $ABCDE$, como mostrado na seguinte figura.

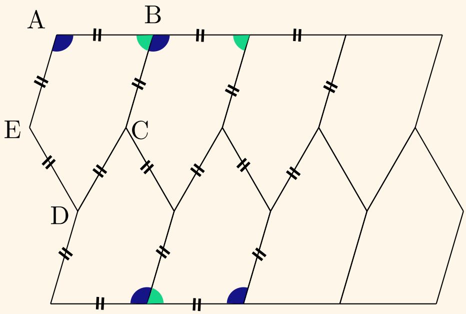


Figura 3.15: Cobrindo o plano com pentágonos irregulares.

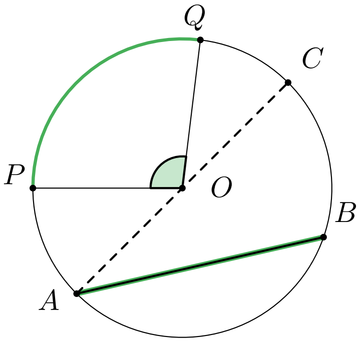
■

3.3 – Ângulos no Círculo

Considere um ponto O no plano. Um círculo de **centro** O é o conjunto de todos os pontos que estão a uma mesma distância fixada de O, distância esta denominada de **raio** do círculo. Assim, se os pontos P e Q estão sobre um mesmo círculo de centro O, então $OP = OQ$; também, por vezes dizemos que os próprios segmentos OP e OQ são *raios* do círculo.

Se P e Q são dois pontos sobre um círculo de centro O, o segmento PQ é uma **corda** do círculo. Toda corda divide o círculo em dois arcos $\overset{\frown}{PQ}$: um maior e outro menor, mas eventualmente iguais.

Um tipo especial de corda, chamada de **diâmetro**, é aquela que passa pelo centro do círculo. Nesse caso , e somente nele, a corda divide o círculo em dois arcos iguais. Evidentemente, o comprimento de um diâmetro de um círculo é igual ao dobro da medida do raio.



Considere um círculo Γ de centro O e dois pontos A e B sobre ele. Dizemos que o arco $\widehat{AB}$, percorrido de A para B no sentido anti-horário, corresponde ao **ângulo central** $\angle AOB$, também percorrido no sentido anti-horário, conforme a figura que segue. Nesse caso, com um certo abuso de notação, escreveremos $\angle AOB = \widehat{AB}$.

Na discussão do parágrafo anterior, o adjetivo *central* refere-se ao fato de que o vértice do ângulo é o centro do círculo Γ. Por outro lado, se P é um ponto de Γ que não está sobre o arco $\widehat{AB}$, percorrido no sentido horário, dizemos que $\angle APB$ é um **ângulo inscrito**. Assim, o vértice de um ângulo inscrito em um círculo é um ponto do mesmo.

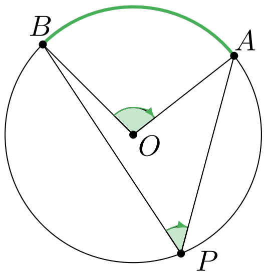
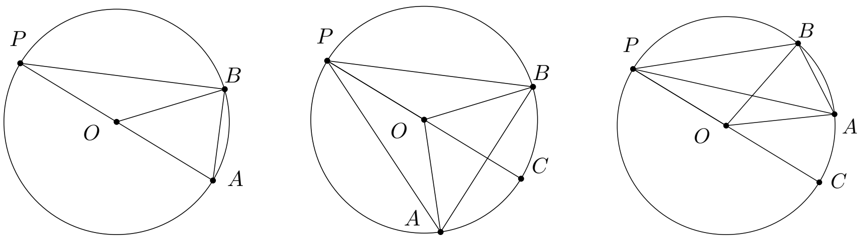


Figura 3.16: Ângulo central $\angle AOB$ e ângulo inscrito $\angle APB$.

O resultado a seguir , de grande importância, relaciona as medidas de ângulos centrais e inscritos relativos a um mesmo arco de círculo.

Teorema 3.7 — Ângulo inscrito. O ângulo inscrito é metade do ân-



(a) Caso $O \in PA$. (b) Caso $O \in \Delta APB$. (c) Caso $O \notin \Delta APB$.

Figura 3.17: Casos de ângulos inscritos.

gulo central correspondente.

Prova. Vamos dividir a demonstração em três casos, de acordo com as três situações apresentadas na Figura 3.17.
i. O está sobre AP: neste caso, $\angle BPO = \angle PBO = \alpha$, pois o triângulo ΔOPB é isósceles com $OP = OB$. Logo, $\angle AOB = 2\alpha$, porque $\angle AOB$ é ângulo externo do ΔPOB. Assim, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

ii. O está no interior do ângulo $\angle APB$: neste caso, seja C o segundo ponto de encontro da reta PO com o círculo. Pelo item anterior, temos $\angle BOC = 2\angle BPO$ e $\angle COA = 2\angle OPA$. Daí,

$$\angle BOA = \angle AOC + \angle COB = 2(\angle APC + \angle BPC) = 2\angle BPA.$$

iii. O está no exterior do ângulo $\angle APB$: neste caso, seja C o segundo ponto de encontro da reta PO com o círculo. Pelo item (a), já sabemos que $\angle BOC = 2\angle BPO$ e $\angle COA = 2\angle OPA$. Daí,

$$\angle BOA = \angle BOC - \angle AOC = 2(\angle BPC - \angle APC) = 2\angle BPA.$$

■

A partir da noção de ângulo inscrito, podemos estudar outros dois tipos de ângulos notáveis no círculo.

I. O **ângulo interior** $\angle APC$ é construído da seguinte forma. Dado um ponto P no interior do círculo Γ, traçamos duas cordas AB

e CD de Γ que se intersectam em P , conforme a figura 3.18(a). Tem-se

$$\angle APC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DB}}{2}.$$

Prova. Temos que $\angle APC$ é externo ao triângulo APB. Logo

$$\angle APC = \angle PAB + \angle PBA = \frac{\overset{\frown}{DB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

■

II. O **ângulo exterior** $\angle APC$ é construído da seguinte forma. A partir de um ponto externo P ao círculo Γ, traçamos duas retas r e s secantes a Γ nos pares de pontos A, B e C, D, respectivamente, com B situado sobre o segmento AP e D situado sobre o segmento CP , conforme a figura 3.18(b). Tem-se

$$\angle APC = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2}.$$

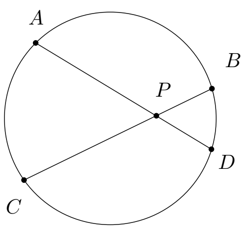
Prova. Temos que $\angle ADC$ é externo ao triângulo APD. Logo,

$$\angle ADC = \angle BAD + \angle APC,$$

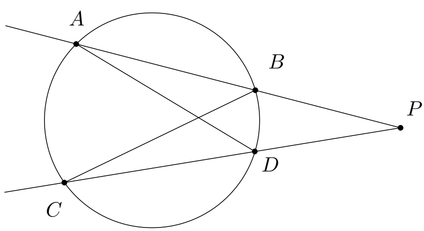
ou seja,

$$\angle APC = \angle ADC - \angle BAD = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}.$$

■

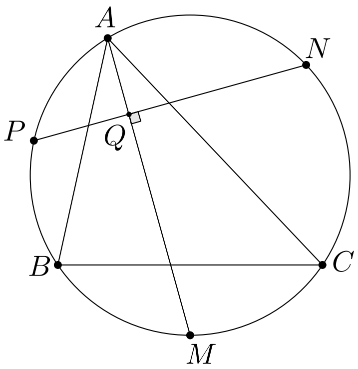


(a) Ângulo interior.



(b) Ângulo exterior

Proposição 3.8 Em todo triângulo ABC, as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ encontram-se em um único ponto I chamado de **incentro** do triângulo.



Prova. Considere o círculo Γ que passa pelo três vértices A, B e C e sejam M, N e P os pontos médios, respectivamente, dos arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ e $\overset{\frown}{AB}$ que não contêm os vertices opostos. Veja que

$$\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \angle ACB,$$
$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \angle BAC \quad \text{e}$$
$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \angle ABC.$$

Portanto, sendo Q o ponto de encontro das cordas AM e PN, temos

$$\begin{aligned}\angle NQM &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{MN}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{CN})\\ &= \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC)\\ &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,\end{aligned}$$

ou seja, as cordas AM e PN são perpendiculares.

O raciocínio acima mostra que, se por um lado AM é uma bissetriz do triângulo ABC, por outro é uma altura do triângulo MNP. Da mesma forma, BN e CP são as outras duas alturas desse triângulo e, como já sabemos que as alturas de todo triângulo são concorrentes, concluímos que AM, BN e CP são concorrentes. ■

Para o que segue, dizemos que uma reta é **tangente** a um círculo se tiver um único ponto em comum com o círculo. Nesse caso, tal ponto é o **ponto de tangência** entre a reta e o círculo.

Teorema 3.9 Considere um círculo Γ de centro O e um ponto A sobre esse círculo. Se uma reta r passando por A é perpendicular a AO, então r é tangente à Γ.

Prova. Sendo B outro ponto de r, temos que ΔAOB é retângulo em A – convém esboçar uma figura para acompanhar esta demonstração. Logo, a hipotenusa OB é o maior lado do triângulo, de forma que $OB > OA$, ou seja, a distância de B ao centro de Γ é maior que o raio de Γ. Logo, B não pertence ao círculo Γ. Assim, A é o único ponto em comum entre r e Γ, de modo que r é tangente a Γ. ■

O próximo resultado diz que a reta tangente a um círculo por um ponto do mesmo é única.

Teorema 3.10 Considere um círculo Γ de centro O e um ponto A sobre esse círculo. Se uma reta r passa por A e é tangente a Γ, então $r \perp AO$.

Prova. Basta mostrar que se r é uma reta que passa por A mas não é perpendicular a AO, então r não é tangente a Γ – veja a Figura 3.19 para acompanhar esta demonstração. A reta AO claramente não é tangente a Γ. Seja r, distinta da reta AO, uma reta passando pelo ponto A e não perpendicular ao raio OA de Γ. Então, r forma um ângulo α, inscrito a Γ e agudo, com o raio OA. Seja s a reta passando por O e formando com o raio OA um ângulo de medida $180° - 2\alpha$, de modo que este ângulo e o ângulo inscrito α sejam colaterais internos em relação ao raio OA. Logo, r e s não são paralelas. Então, seja B o ponto de interseção entre r e s. Como $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$, o

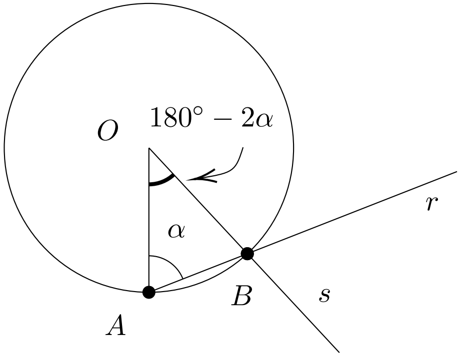


Figura 3.19: Reta que não é tangente a um círculo.

triângulo OAB é isósceles com $OA = OB$. Portanto, B pertence a Γ com B distinto de A e, assim, r não é tangente ao círculo Γ. ■

A partir dos dois resultados anteriores, podemos apresentar um outro ângulo notável: o *ângulo semi-inscrito*. Temos um círculo de centro O e dois pontos B e C sobre ele, como pode ser acompanhando na figura que segue. Um reta BD é tangente ao círculo no ponto B, de modo que C e D estejam no mesmo semiplano em relação à reta OB. Nessa configuração, dizemos que $\angle CBD$ é um **ângulo semi-inscrito** ao arco $\overset{\frown}{BC}$.

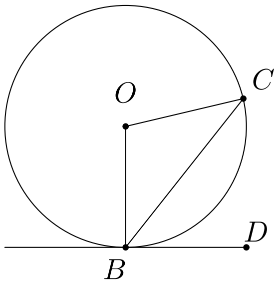
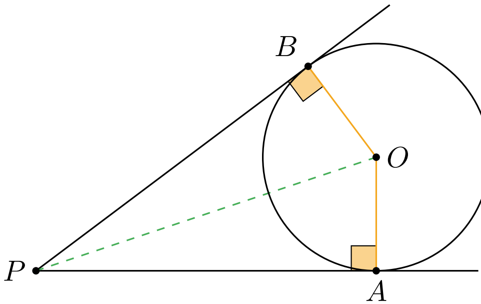


Figura 3.20: Ângulo semi-inscrito.

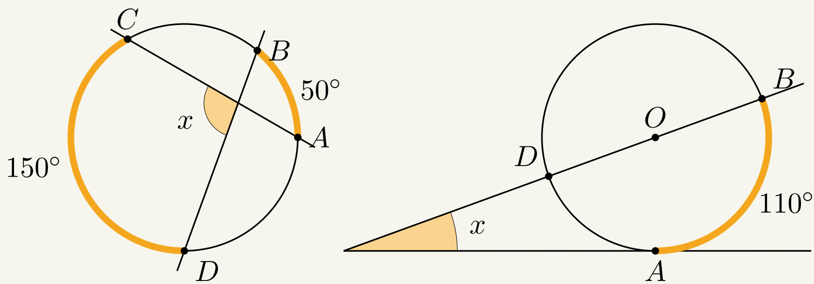
Veja que $\angle OBC = \angle OCB$, pois $OB = OC$. Daí, se $\angle COB = 2\alpha$, temos $\angle OBC = 90° - \alpha$ e, por conseguinte, $\angle CBD = \alpha$. Assim, $\angle CBD = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Teorema 3.11 — do Bico. Seja P um ponto fora de um círculo Γ de centro O. Sejam A e B pontos sobre Γ tais que PA e PB sejam tangentes ao círculo. Então, $PA = PB$.



Prova. Pelo Teorema 3.10, temos que $\angle PAO = \angle PBO = 90°$. Além disso, $OA = OB$, pois ambos esses segmentos são raios do círculo. Logo, $\Delta APO \equiv \Delta PBO$ pelo caso Cateto-Hipotenusa, de sorte que $PA = PB$. ■

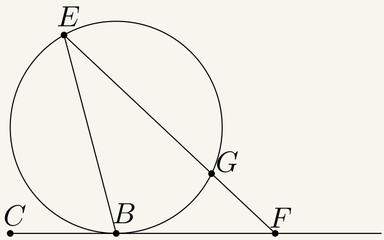
Exercício 3.6 Nas figuras a seguir, calcule o valor de x.



Solução.
(a) Veja que x é um ângulo interior. Portanto, sua medida é a média aritmética das medidas dos arcos, ou seja, $x = \frac{50°+150°}{2} = 100°$.

(b) Note que $\overset{\frown}{AD} = 180° - \overset{\frown}{AB} = 70°$. Veja que x é um ângulo exterior. Portanto, sua medida é metade da diferença das medidas dos arcos que ele determina. Assim, $x = \frac{110°-70°}{2} = 20°$. ■

Exercício 3.7 — OBM 2005 - adaptado. Na figura a seguir, CF é tangente ao círculo em B. Se $\angle EBC = 70°$ e $EB = EG$, qual é o valor de $\angle EFB$?



Solução. Note que $\overset{\frown}{EB} = 140°$, pois $\angle EBC$ é semi-inscrito. Assim, $\angle EGB = 70°$, pois esse ângulo está inscrito no arco $\overset{\frown}{EB}$. Como BEG é isósceles, temos $\angle EBG = 70°$. Sendo C, B e F colineares, vem que

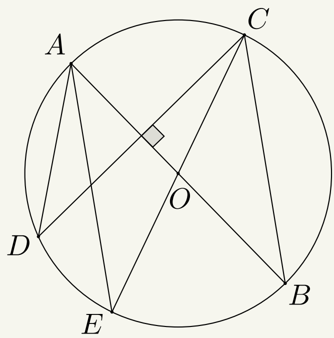
$$\angle GBF = 180° - \angle CBE - \angle EBG = 180° - 70° - 70° = 40°.$$

Agora, em relação ao triângulo GBF, $\angle EGB$ é ângulo externo. Logo, $\angle EGB = \angle GBF + \angle GFB$. Assim,

$$\angle GFB = \angle EGB - \angle GBF = 70° - 40° = 30°.$$

■

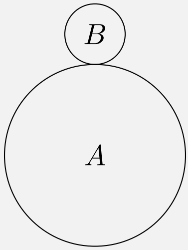
Exercício 3.8 — OBM 2013. Na figura a seguir, o ponto O é o centro do círculo que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35°$, calcule o valor em graus do ângulo $\angle DAE$.



Solução. Uma vez que $\angle ECB = 35°$ é inscrito, temos $\overset{\frown}{EB} = 70°$. Note que $\angle EOB = 70°$, pois é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{EB}$. Agora, veja que $\angle AOC = \angle EOB = 70°$, pois tais ângulos são opostos pelo vértice O. Seja P o ponto de encontro de CD e AB. No triângulo retângulo CPO, $\angle PCO = 90° - \angle POC = 90° - 70° = 20°$. Todavia, note que tanto o ângulo $\angle DAE$ quanto o ângulo $\angle DCE$, igual ao ângulo $\angle PCO$ de medida $20°$, são inscritos no arco $\overset{\frown}{DE}$. Portanto, ambos possuem a mesma medida , igual à metade da medida do arco $\overset{\frown}{DE}$, de forma que $\angle DAE = 20°$. ■

Nota ao Professor 3.12 Apresentaremos uma sugestão de atividade baseada em um problema que apareceu no SAT de 1982. O *Scholastic Assessment Test (SAT)* é um exame padronizado aplicado nos EUA e que serve como critério de admissão em universidades norte-americanas. O problema, que ficou conhecido como paradoxo das moedas, tem enunciado relativamente simples e é apresentado a seguir:

Problema 3 — SAT 1982. Na figura a seguir, o raio do círculo B é $\frac{1}{3}$ do raio do círculo A. O círculo menor, desloca-se no sentido horário, girando ao redor do círculo maior até voltar à posição original. Quantas voltas o círculo A dá em torno de si próprio durante esse percurso?



Na época, esse problema causou uma grande polêmica pois nenhuma das cinco opções de resposta apresentadas , $3/2, 3, 6, 9/2$ e 9, estava correta. Isso ocorreu pois os próprios criadores da questão haviam resolvido-a de maneira errada. A solução apresentada pelos elaboradores é exibida a seguir.

Solução (errada). Se o raio do círculo menor for r, seu comprimento será $2\pi r$. Além disso, o raio do círculo maior será $3r$ e seu perímetro $2\pi(3r) = 6\pi r$. Portanto, o comprimento do círculo A é três vezes maior do que o comprimento do círculo B. Portanto, serão necessárias três voltas. ■

Porém, ao construirmos um modelo real da situação exposta no problema, verificamos que a moeda menor realiza um total de quatro voltas. Isso pode ser assistindo ao vídeo que pode ser acessado através do código a seguir.

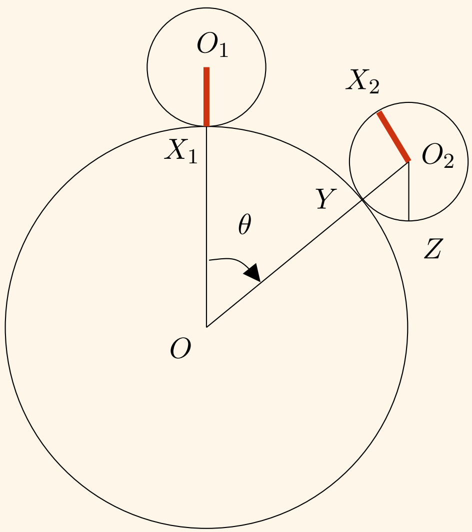
Saiba Mais:

A solução anterior possui um erro argumentativo: o círculo menor não está deslocando-se sobre uma reta. Ele está deslocando-se ao redor de um outro círculo. Assim, devemos considerar uma volta extra, totalizando $3 + 1 = 4$ voltas. Podemos justificar essa resposta formalmente através da seguinte solução.

Solução (correta). Seja O o centro do círculo maior e O_1 a posição inicial do centro do círculo menor. Além disso, considere o ponto X_1, sobre o círculo menor, que está inicialmente representando o ponto de tangência entre os dois círculos.

Note que a medida que o círculo menor desloca-se para a direita, o segmento que liga X_1 ao centro O_1 desse círculo gira no sentido horário.

Agora suponha que o centro do círculo menor descolou-se até o ponto O_2 e que o segmento O_1X_1 girou até a posição O_2X_2 , sendo X_2 a nova posição de X_1, como mostrado na figura. Sejam, ainda, Y o ponto de tangência entre os dois círculos quando o menor está na segunda posição e Z um ponto sobre o menor círculo tal que que O_2Z é paralelo a O_1X_1.



Observe que, devido ao descolamento, o comprimento do arco

X_1Y, no círculo maior, é igual ao comprimento do arco X_2Y, no círculo menor. Seja θ a medida do ângulo $\angle X_1OY$. Como o raio de B é três vezes menor do que o raio de A, temos que $\angle YO_2X_2 = 3\angle X_1OY = 3\theta$. Porém, para medirmos a rotação que o círculo B deu em torno do seu eixo, devemos comparar a direção de O_2X_2 em relação à sua direção original que é O_1X_1.

Agora, se O_2Z é paralelo a O_1X_1, então basta calcular o ângulo $\angle ZO_2X_2$. Veja que $\angle YO_2Z = \angle X_1OY = \theta$ pelo axioma das retas paralelas. Assim,

$$\angle ZO_2X_2 = \angle YO_2Z + \angle YO_2X_2 = \theta + 3\theta = 4\theta.$$

Para considerarmos uma volta completa do círculo menor ao redor do círculo maior, devemos tomar $\theta = 360°$. Neste caso, 4θ corresponderá a um total de $4 \cdot 360°$. Ou seja, quatro voltas.

■

O professor pode explorar essa situação da seguinte forma.

(a) Apresentar o problema à turma e reservar alguns minutos para que eles pensem na resposta.
(b) Quando alguém der a resposta três, pergunte como o(a) aluno(a) chegou a essa resposta.
(c) Separe os alunos em grupos e solicite que eles elaborem modelos reais da situação usando papelão, régua, compasso e tesoura. Em seguida, convide-os a simular o movimento da moeda menor em torno da maior, assim como feito no vídeo indicado anteriormente.
(d) Discuta com a turma qual foi o erro argumentativo da primeira solução e como corrigi-lo.
(e) Apresente, a solução correta e crie um debate sobre como generalizar o problema para uma situação na qual o raio do círculo A é n vezes maior do que o raio do círculo B. A resposta é $n + 1$ voltas.
(f) Por fim, pode-se criar uma aplicação no GeoGebra para simular o paradoxo das moedas. Para ver um exemplo, leia o código ao lado.

Saiba Mais:

3.4 – Problemas Propostos

3.4.1 – Nível 1

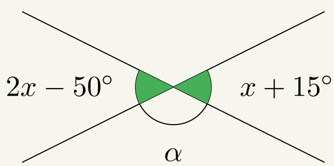
Exercício 3.9 Em cada uma das figuras a seguir, calcule $\overline{AB}$, sendo M ponto médio de AB.

(a) $AM = 3x - 7$ e $MB = x + 1$.

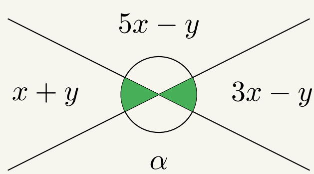
(b) $AM = x$, $AP = 5x - 6$ e $BP = x + 3$.

Exercício 3.10 Calcule o valor de α em cada um dos itens a seguir.

(a)



(b)

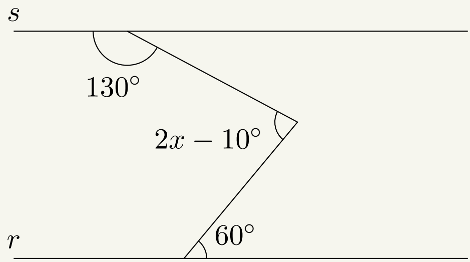


Exercício 3.11 Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando este indica 3 horas e 40 minutos.

Exercício 3.12 Calcule as medidas dos ângulos de um triângulo, sabendo que, quando as expressamos em graus, elas são proporcionais a 1, 2 e 3.

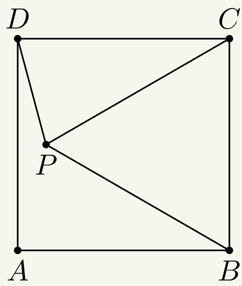
Exercício 3.13 Obtenha o intervalo de variação de x, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 20$, $3x + 5$ e $25 - 2x$.

Exercício 3.14 As retas r e s da figura são paralelas. Encontre x.



Exercício 3.15 Os ângulos internos de um quadrilátero convexo valem $2x + 50°$, $150° - 4x$, $x + 40°$ e $4x + 90°$. Calcule o valor de x.

Exercício 3.16 A figura a seguir é formada a partir de um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero BCP. Calcule a medida do ângulo $\angle ADP$.



Exercício 3.17 Seja $ABCDE$ um pentágono regular. Calcule a medida do ângulo $\angle BEC$.

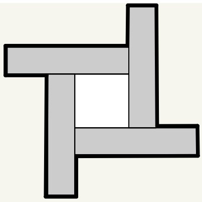
Exercício 3.18 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ACE.

3.4.2 – Nível 2

Exercício 3.19 — UFMG 1992. Os pontos A, B, C, D são colineares e tais que $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 8$ cm e $BD = 7$ cm. Nessas condições, uma possível disposição desses pontos é

(a) $A\ D\ B\ C$.
(b) $A\ B\ C\ D$.
(c) $A\ C\ B\ D$.
(d) $B\ A\ C\ D$.
(e) $B\ C\ D\ A$.

Exercício 3.20 — OBMEP 2014. Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



Exercício 3.21 — PUC SP 1983. Duas retas concorrentes são *perpendiculares* se se encontram formando um ângulo de 90°. A esse respeito, considere a seguinte sentença.

"Num plano, se duas retas são ..... então toda reta ..... a uma delas é ..... à outra."

A alternativa que preenche corretamente as lacunas é

(a) paralelas - perpendicular - paralela.
(b) perpendiculares - paralela - paralela.
(c) perpendiculares - perpendicular - perpendicular.
(d) paralelas - paralela - perpendicular.
(e) perpendiculares - paralela - perpendicular.

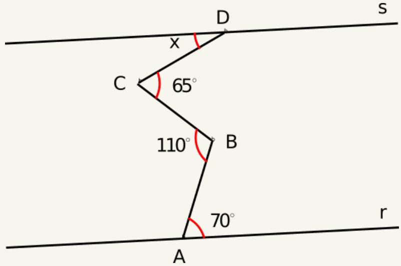
Exercício 3.22 — PUC SP 1984. Em um triângulo isósceles, a média aritmética das medidas de dois de seus ângulos é 50°. A medida de um dos ângulos do triângulo pode ser

(a) 100°.
(b) 90°.
(c) 60°.
(d) 30°.
(e) 20°.

Exercício 3.23 Mostre que todas as diagonais de um pentágono regular têm a mesma medida.

Exercício 3.24 Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Explique por que $\angle BPC > \angle BAC$.

Exercício 3.25 Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule a medida do ângulo x.



Exercício 3.26 — UFMG 1992. Sobre figuras planas, é correto afirmar que

(a) um quadrilátero convexo é um retângulo se os lados opostos têm comprimentos iguais.
(b) um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.
(c) um trapézio que tem dois ângulos consecutivos congruentes é isósceles.
(d) um triângulo equilátero é também isósceles.
(e) um triângulo retângulo é aquele cujos ângulos são retos.

Exercício 3.27 — ENEM 2004. Um fabricante planeja colocar no mercado duas linhas de cerâmicas para revestimento de pisos. Diversas formas possíveis para as cerâmicas foram apresentadas e decidiu-se que o conjunto P de formas possíveis seria composto apenas por figuras poligonais regulares.
Duas formas geométricas que podem fazer parte de P são

(a) triângulo e pentágono.

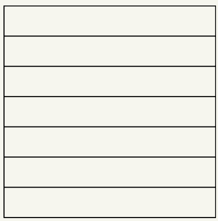
(b) triângulo e hexágono.
(c) triângulo e octógono.
(d) hexágono e heptágono.
(e) hexágono e octógono.

Exercício 3.28 — UNICAMP 1987. O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos mede 1440° tem, exatamente,

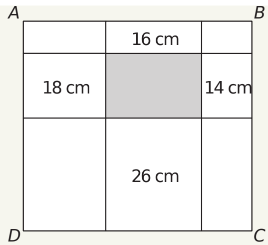
(a) 15 diagonais.
(b) 20 diagonais.
(c) 25 diagonais.
(d) 30 diagonais.
(e) 35 diagonais.

3.4.3 – Nível 3

Exercício 3.29 Um quadrado é dividido em sete retângulos, como mostrado na figura abaixo. Se o perímetro de cada um desses retângulos é 32cm, qual o perímetro do quadrado?



Exercício 3.30 — OBMEP 2016. O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. Se o perímetro do retângulo $ABCD$ é 54cm, qual o perímetro do retângulo cinza?

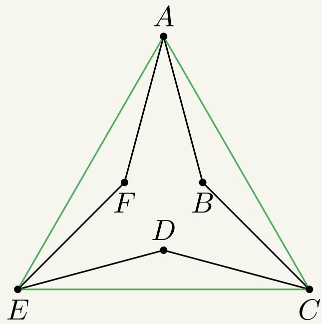


Exercício 3.31 — UERJ 2019. No desenho a seguir, está ilustrada uma estrela de três pontas iguais, com lados

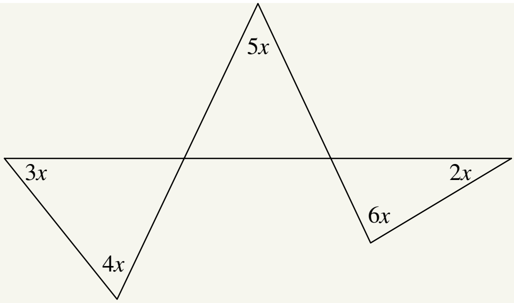
$$AB = BC = CD = DE = EF = FA,$$

inscrita no triângulo equilátero ACE. Se $\angle ABC = 150°$, os ângulos $\angle FAB$, $\angle BCD$ e $\angle DEF$ medem

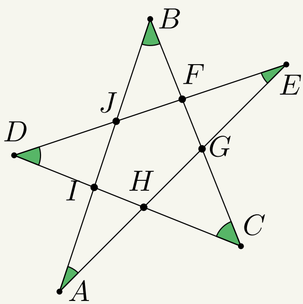
(a) 15°.
(b) 20°.
(c) 25°.
(d) 30°.



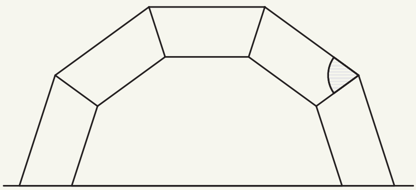
Exercício 3.32 — OBM 2004. Na figura, quanto vale x?



Exercício 3.33 Calcule a soma dos cinco ângulos da estrela $ABCDE$.



Exercício 3.34 — OBMEP 2009. A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?



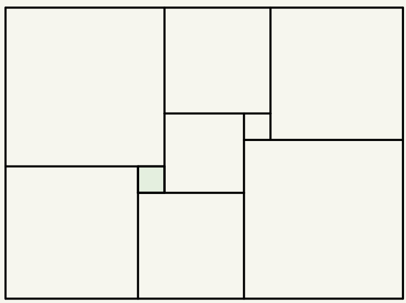
Exercício 3.35 Seja $ABCDEFG$ um heptágono regular. Qual é a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e DE?

Exercício 3.36 Em um polígono convexo, A, B e C são três vértices consecutivos. O **ângulo externo** do polígono, em B, é o ângulo formado entre o prolongamento do lado AB , prolongado de A para B, e o lado BC. Esboce uma figura para garantir que entendeu a definição. Graças ao Teorema 1.1, poderíamos ter definido o ângulo externo do polígono , em B, como o ângulo formado entre o prolongamento do lado BC , prolongado de C para B, e o lado AB. Prove que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer , sendo somente um ângulo externo por cada vértice, é sempre igual a 360°.

3.4.4 – Nível 4

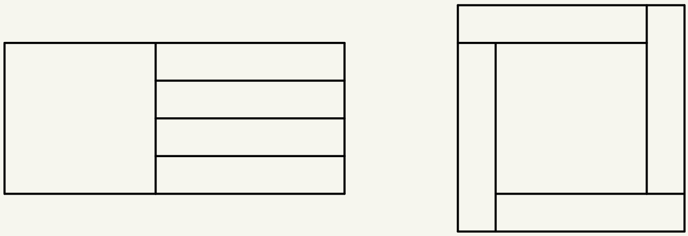
Exercício 3.37 Qual é o número máximo de regiões em que três retas podem dividir o plano? E se forem 10 retas?

Exercício 3.38 Na figura a seguir, temos um retângulo dividido em vários quadrados menores. Sabendo que o quadrado azul tem lado igual a 1cm, qual é o perímetro do retângulo maior?



Exercício 3.39 — OBM 2017 - adaptado. Manoela tem cinco pedaços de papel: um quadrado e quatro retângulos iguais. Utilizando os cinco pedaços ela primeiro monta um retângulo de perímetro

780cm e, em seguida, desmonta o retângulo e usa os cinco pedaços para montar um quadrado conforme mostrado na figura a seguir. Qual é o perímetro deste quadrado?



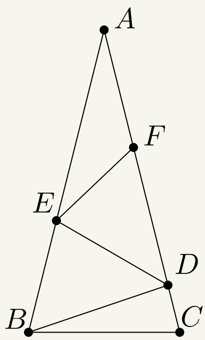
Exercício 3.40 — OBM 2011. Em um triângulo ABC com

$$\angle ABC - \angle BAC = 50°,$$

a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $\angle CDE = 90°$. Qual é medida do ângulo $\angle ADE$?

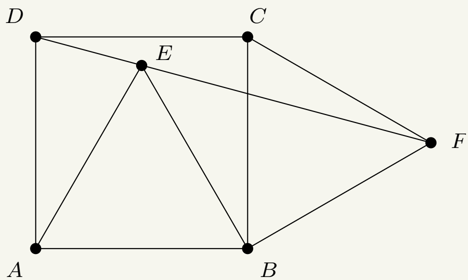
Exercício 3.41 O triângulo ABC da figura é isósceles com vértice em A. Calcule os ângulos deste triângulo, sabendo que

$$BC = BD = DE = EF = FA.$$



Exercício 3.42 No triângulo ABC, $AB = AC$, D está sobre BC e E está sobre AC de modo que $AE = AD$ e $\angle BAD = 30°$. Calcule $\angle EDC$.

Exercício 3.43 Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e os triângulos ABE e BFC são equiláteros. Prove que os pontos D, E e F se localizam sobre uma mesma reta. **Observação:** apesar disso ser *sugerido* pela figura, para verificar que D, E e F são realmente colineares, temos de mostrar que $\angle AED + \angle AEB + \angle BEF = 180°$.



Exercício 3.44 Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos

internos iguais a 120°. Mostre que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC.$$