Material Estruturado

MATEMÁTICA

SISEDU
Sistema Online de Avaliação, Suporte e Acompanhamento Educacional

Autores:
Jorge Lira
Annelise Maymone

Revisor:
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Razões, Proporções e Funções Afins - Parte I

Razões
Proporções

Coordenadoria de Formação Docente e Educação a Distância CED
Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Educação
Cientista Chefe Educação
FUNCAP

10 Razões, Proporções e Funções Afins - Parte I

10.1 – Escalas, Razões e Proporções

Além de permitir visualizar o espaço em que vivemos e localizar ruas, cidades e regiões, mapas são úteis para estimarmos distâncias entre localidades. Podemos, por exemplo, usar o seguinte mapa para determinar, aproximadamente, as distâncias entre as cidades de Juazeiro do Norte, Farias Brito e Santana de Cariri, representadas, respectivamente, pelos pontos A, B e C no mapa. As distâncias entre os pontos do mapa A, B e C no mapa **não são**, obviamente, iguais às distâncias reais! No entanto, estão na mesma proporção das distâncias reais. Que quer dizer isso?

Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Instituto de Pesquisa e Estratégia Econômica do Ceará (IPECE).

Observe a escala representada na parte de baixo do mapa. Os retângulos desenhados nesta escala nos dão uma informação essencial: o comprimento de cada um deles (digamos, 1 centímetro) corresponde, na realidade, a uma distância de 25 quilômetros. Ou seja, se dois pontos no mapa estão a uma distância igual a 1 centímetro, as duas localidades que estes pontos representam estarão distantes 10 quilômetros uma da outra na realidade.

Podemos verificar que a distância, no mapa, de A a B, por exemplo, é aproximadamente igual a 4,2 vezes o comprimento fixado na escala. Da mesma forma, a distância, no mapa, do ponto B ao ponto C é quase igual a 3,3 vezes o comprimento da escala. Finalmente, os pontos A a C, no mapa, estão distantes cerca de 4,7 vezes o comprimento da escala.

Portanto, podemos, com alguma margem de erro, dizer que as distâncias *reais* de Juazeiro do Norte a Farias Brito, de Farias Brito a Santana do Cariri e de Santana do Cariri a Juazeiro do Norte são, respectivamente, iguais a 42 quilômetros, 33 quilômetros e 47 quilômetros.

Portanto, a escala é o fator de comparação entre as distâncias no mapa e as distâncias reais. Neste nosso exemplo, a escala é dada por

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{10 \text{ quilômetros}}$$

Para simbolizar esta relação, digamos que x representa a distância real, em quilômetros, de Juazeiro do Norte (representada pelo ponto A) a uma localidade real representada por um ponto P no mapa. Assim, a distância, no mapa, entres os pontos A e P será dada, em centímetros, por

$$y = ax,$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{10}x.$$

Por exemplo, no mapa abaixo, o ponto P corresponde à cidade de Jardim, que fica a cerca de 46 quilômetros de Juazeiro do Norte. Logo, a distância representada no mapa é igual a

$$y = \frac{1}{10} \times 46 = 4{,}6 \text{ centímetros}.$$

Observamos que estas são as distâncias *geográficas*, não necessariamente as distâncias percorridas ao longo das estradas que ligam estas cidades.

Observação 10.1.1 Uma vez que

$$\begin{aligned} 10 \text{ quilômetros} &= 10.000 \text{ metros} = 10.000 \times 100 \text{ centímetros} \\ &= 1.000.000 \text{ centímetros}, \end{aligned}$$

a escala pode ser escrita comparando distâncias em centímetros, no mapa e na realidade:

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{1.000.000 \text{ centímetros}},$$

ou seja

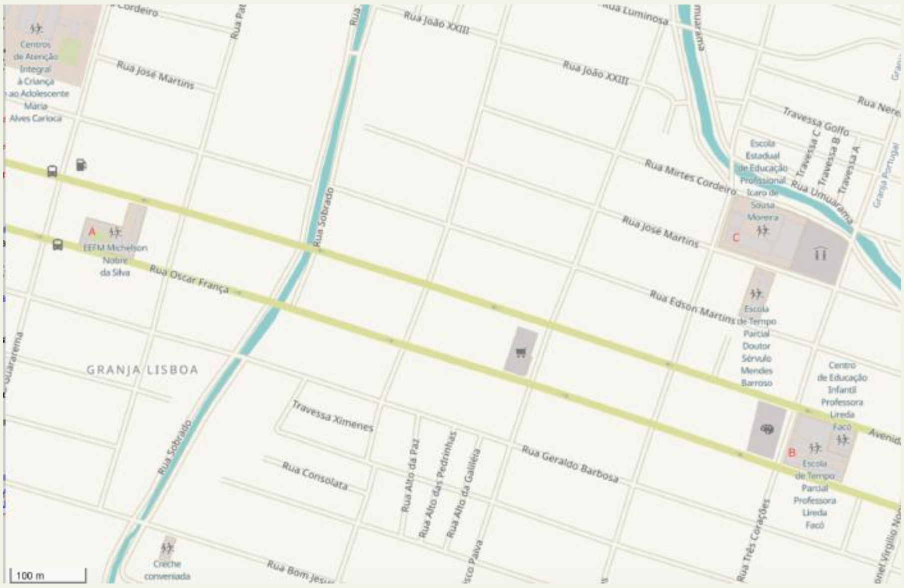
$$a = \frac{1}{1.000.000} = 1 : 1.000.000.$$

Esta última notação 1 : 1.000.000 é bastante usada em Cartografia (Geografia) e apenas indica uma *razão*, isto é, uma comparação entre dois números: 1 centímetro no mapa equivale a 1.000.000 de centímetros na realidade. Observe que esta razão nada mais é do que a fração

$$\frac{1}{1.000.000},$$

também igual ao número decimal 0,000001 (um milionésimo). Ou seja, a distância no mapa é um milionésimo da distância real.

Exercício 10.1 [a] O mapa abaixo representa uma região da Granja Lisboa, na cidade de Fortaleza. Note que a escala indicada no mapa é de um centímetro para 100 metros, ou seja 1 : 10.000.



© OpenStreetMap contributors

Sendo assim, estime:

1. a distância entre as escolas EEFM Michelson Nobre da Silva (ponto A) e a Escola Professora Lireda Facó (ponto B);
2. a distância entre essas escolas e a EEEP Ícaro de Sousa Moreira (ponto C);
3. as dimensões aproximadas dos quarteirões nesta parte do bairro;
4. a área dos quarteirões nesta parte do bairro.
5. a área ocupada pela escola Escola Professora Lireda Facó.

[a] Neste exercício, para obter resultados mais precisos, você pode utilizar o Google Maps com o seguinte *link*: `https://goo.gl/maps/kLi3VLpUVRgz6mnB9`

Solução. 1. Podemos usar uma régua para verificar que os pontos A e B no mapa estão a uma distância aproximadamente igual a 10 comprimentos da escala. Como cada um destes comprimentos corresponde a uma distância *real* de 100 metros, concluímos que a distância *real* entre as escolas representadas por A e B é igual a

$$10 \times 100 \text{ metros} = 1.000 \text{ metros} = 1 \text{ quilômetro.}$$

2. Também usando uma régua, podemos constatar que a distância no mapa entre os pontos A e C é igual a cerca de 8,5 comprimentos da escala e a distância entre os pontos B e C é aproximadamente igual a 3 comprimentos da escala. Portanto, as distâncias reais são, respectivamente, iguais a

$$8{,}5 \times 100 \text{ metros} = 850 \text{ metros} = 0{,}85 \text{ quilômetro}$$

da Escola Michelson Nobre da Silva à Escola Ícaro de Sousa Moreira e

$$3 \times 100 \text{ metros} = 300 \text{ metros} = 0{,}30 \text{ quilômetro.}$$

3. Podemos também medir, com a ajuda de uma régua, as dimensões de um quarteirão representado na mapa: são iguais, aproximadamente, a 1,5 comprimentos da escala e 0,75 do comprimento da escala. Portanto, suas dimensões reais são aproximadamente iguais a

$$1{,}5 \times 100 \text{ metros} = 150 \text{ metros} = 0{,}15 \text{ quilômetro}$$

(a menor dimensão) e

$$0{,}75 \times 100 \text{ metros} = 75 \text{ metros} = 0{,}075 \text{ quilômetro.}$$

4. Com estas estimativas para as dimensões médias de um quarteirão representado no mapa, podemos aproximar a área de um deles apenas multiplicando as dimensões estimadas:

$$150 \text{ metros} \times 75 \text{ metros} = 11.250 \text{ metros quadrados.}$$

Você observou alguma diferença nos cálculos para estimar a área em relação aos cálculos para estimar as distâncias?

Observe que, para estimar a área do quarteirão, poderíamos multiplicar as dimensões no mapa, isto é,

$$1,5 \times 0{,}75 = 1{,}125$$

e, em seguida, multiplicar este resultado pelo quadrado de 100, isto é, pelo quadrado do comprimento que a escala representa:

$$100 \text{ metros } \times 100 \text{ metros} = 10.000 \text{ metros quadrados.}$$

Teríamos, da mesma forma que antes,

$$1{,}125 \times 10.000 = 11.250 \text{ metros quadrados.}$$

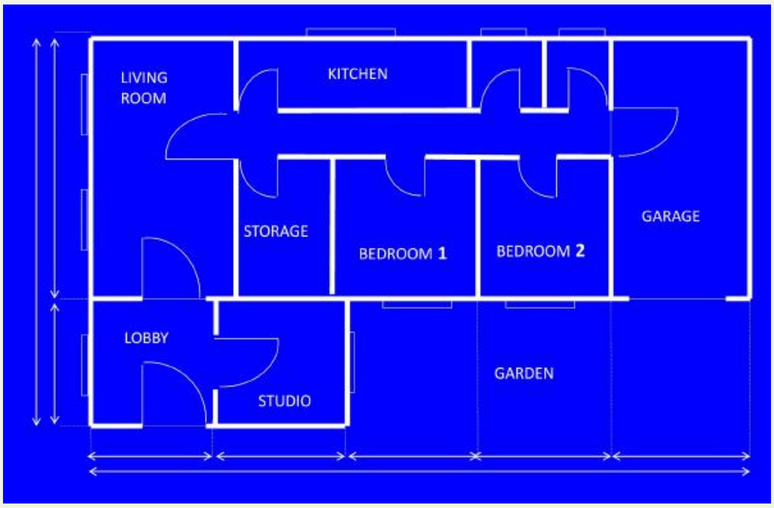
5. A Escola de Tempo Parcial Professora Lireda Facó ocupa, aproximadamente, metade do quarteirão. Portanto, estimamos sua área em

$$\frac{1}{2} \times 11.250 = 5.625 \text{ metros quadrados,}$$

ou seja, cerca de 5.600 metros quadrados de área.

10.2 – Exercícios Resolvidos

Exercício 10.2 A planta baixa de uma casa está representada na figura abaixo:



© by Tumisi from Pixabay

A área que representa a cozinha ("kitchen") é cerca da metade da área que representa a sala de estar ("living room") na planta. Sabendo que a cozinha tem 25 metros quadrados de área, qual a área, na realidade, da sala de estar?

Solução. Segundo o enunciado, a razão entre a área da sala de estar e a área da cozinha é igual a

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Caso a área da cozinha seja igual a 25 metros quadrados, a área da sala de estar deve ser o dobro desta, ou seja, 50 metros quadrados.

Solução alternativa. Representando a área da sala de estar por x, temos a seguinte proporção (igualdade ou equivalência de frações):

$$\frac{x}{25} = \frac{2}{1}.$$

Multiplicando os dois lados desta igualdade por 25, obtemos

$$x = 25 \times 2.$$

Portanto, $x = 50$ metros quadrados.

Exercício 10.3 Ainda com relação à planta no exercício anterior, suponhamos que a escala usada nesta planta é 1 : 200, ou seja, 1 centímetro na planta corresponde a 200 centímetros (ou seja, 2 metros) na realidade. Sendo assim, estime:

1. as dimensões do jardim ("garden"), sabendo que, na planta, as dimensões são 7 centímetros e 2 centímetros;
2. as dimensões da garagem ("garage"), sabendo que, na planta, as dimensões são 2,5 centímetros e 4,5 centímetros;
3. as dimensões da casa, sabendo que, na planta, as dimensões são 11 centímetros e 6,5 centímetros;

4. as áreas do jardim e da garagem.

Solução. 1. A escala da planta é de 1 centímetro para cada 200 centímetros, ou seja, 2 metros na construção real. Assim, 2 centímetros na planta correspondem a

$$2 \times 200 \text{ centímetros} = 400 \text{ centímetros} = 4 \text{ metros}$$

na casa real, ao passo que 7 centímetros na planta correspondem a

$$7 \times 200 \text{ centímetros} = 1.400 \text{ centímetros} = 14 \text{ metros}$$

na realidade.
2. De modo similar, vemos que as dimensões reais da garagem são

$$2{,}5 \times 200 \text{ centímetros} = 500 \text{ centímetros} = 5 \text{ metros},$$
$$4{,}5 \times 200 \text{ centímetros} = 900 \text{ centímetros} = 9 \text{ metros}.$$

3. Com respeito às dimensões reais da casa, temos

$$11 \times 200 \text{ centímetros} = 2.200 \text{ centímetros} = 22 \text{ metros},$$
$$6{,}5 \times 200 \text{ centímetros} = 1.300 \text{ centímetros} = 13 \text{ metros}.$$

Em geral, se x representa um comprimento (em centímetros) no mapa e y representa o comprimento (em centímetros) correspondente na realidade, temos

$$y = 200x,$$

ou seja,

$$\frac{y}{x} = 200,$$

sempre que $x \neq 0$.

4. A área do jardim é calculada *multiplicando* suas dimensões reais, isto é,

$$4 \times 14 = 56 \text{ metros quadrados}.$$

Observe que o produto das dimensões na escala é

$$2 \times 7 = 14 \text{ centímetros quadrados}.$$

A razão entre a área real e a área do jardim na planta é igual a

$$\frac{56 \text{ metros quadrados}}{14 \text{ centímetros quadrados}} = \frac{56 \times 100 \times 100 \text{ centímetros quadrados}}{14 \text{ centímetros quadrados}}$$
$$= \frac{56 \times 10.000}{14} = \frac{4 \times 10.000}{1} = 40.000.$$

Note que esta razão é o *quadrado* da razão entre os comprimentos, isto é, o quadrado de 200.

Já a área do garagem é dada também multiplicando suas dimensões reais:

$$5 \times 9 = 45 \text{ metros quadrados}.$$

A área total da casa, por fim, é dada por

$$22 \times 13 = 286 \text{ metros quadrados}.$$

Exercício 10.4 Para atrair compradores, as construtoras exibem maquetes, isto é, modelos em miniaturas de edifícios de apartamentos residenciais. Sabendo que a escala, isto é, a razão entre as dimensões da maquete e do que ela representa, é igual a $\frac{1}{50}$,

Image by Anna Pan'šina from Pixabay

qual é a altura real do edifício, sabendo que a maquete tem 90 centímetros de altura?

Solução. A razão

$$\frac{1}{50}$$

significa que 1 centímetro na maquete corresponde a 50 centímetros no edifício real. Portanto, 90 centímetros na maquete correspondem a

$$90 \times 50 \text{ centímetros} = 4.500 \text{ centímetros} = 45 \text{ metros}$$

no edifício real. Logo, a altura real é dada por 45 metros.

Exercício 10.5 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do maior apartamento, sabendo que o menor tem 120 metros quadrados de área?

Solução. Representemos a área do maior apartamento, que não conhecemos, por x. Como as áreas da maquete devem ser *proporcionais* às áreas dos apartamentos reais, temos a mesma *razão* entre as áreas na maquete, ou seja, $\frac{4}{3}$, e as áreas reais, isto é, $\frac{x}{120}$. Logo,

$$\frac{x}{120} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 120, temos

$$x = 120 \times \frac{4}{3} = 40 \times 4 = 160 \text{ metros quadrados},$$

o que nos fornece a área do maior apartamento.

Uma variação interessante deste exercício é a seguinte:

Exercício 10.6 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas

> é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do menor apartamento, sabendo que a soma das áreas dos dois apartamentos, um de cada tipo, é igual a 210 metros quadrados?

Solução. Este é um exemplo de uma divisão em partes proporcionais. Observe que a área do menor apartamento é $\frac{3}{4}$ da área do maior. Assim, se dividíssemos a área total dos dois, que é igual a 210 metros quadrados, em sete partes iguais de 30 metros quadrados, o apartamento menor corresponderia a 3 destas partes, isto é, a

$$3 \times 30 = 90 \text{ metros quadrados,}$$

enquanto que o apartamento maior corresponderia a 4 destas partes, isto é, a

$$4 \times 30 = 120 \text{ metros quadrados.}$$

A solução alternativa que propomos agora é mais algébrica e, portanto, também importante para o estudo das *equações lineares*, que faremos mais adiante.

Solução alternativa. Seja x a área do menor apartamento. Então, a área do maior é dada por $210 - x$, já que a área total dos dois é 210 metros quadrados. Logo, a razão entre a área do maior apartamento e a área do menor apartamento é

$$\frac{210 - x}{x} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando, agora, os dois lados por x, temos

$$210 - x = \frac{4}{3}x$$

Assim, somando x aos dois lados da equação, obtemos

$$210 = x + \frac{4}{3}x$$

Portanto

$$210 = \frac{7}{3}x.$$

Dividindo os dois lados da equação por 7, obtemos

$$30 = \frac{1}{3}x.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 3, concluímos que

$$x = 90 \text{ metros quadrados,}$$

a área do apartamento menor.

> **Exercício 10.7** O custo para revestir o piso do apartamento de 90 metros quadrados com porcelanato é igual a R$ 4.500,00. Nestas mesmas condições, qual é o custo para revestir o piso do apartamento de 120 metros quadrados?

Solução. Como o custo para revestir 90 metros quadrados de piso é igual a R$ 4.500,00, cada metro quadrado de porcelanato custa

$$\frac{4.500}{90} = 50 \text{ reais.}$$

Portanto, o revestimento de 120 metros quadrados com o mesmo material custa

$$120 \times 50 = 6.000 \text{ reais.}$$

Solução alternativa. Podemos resolver este problema do seguinte modo: se x simboliza o custo do revestimento do apartamento de 120 metros quadrados, temos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{4.500} = \frac{120}{90},$$

o que significa que o custo varia na mesma proporção que a área a ser revestida. Ou seja, o custo x está para R\$ 4.500 assim como a área 120 metros quadrados está para 90 metros quadrados.

Multiplicando os dois lados da equação por 4.500, obtemos

$$x = 4.500 \times \frac{120}{90},$$

donde concluímos que

$$x = 50 \times 120 = 6.000 \text{ reais.}$$

Podemos representar esta solução com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\text{90 metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ 4.500} \\
\downarrow & :90 & \downarrow \\
\text{1 metro quadrado} & \text{———} & \text{R\$ 50} \\
\downarrow & \times 120 & \downarrow \\
\text{120 metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ 6.000}
\end{array}$$

Exercício 10.8 Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R\$ 1.500,00 por metro quadrado, divididos, aproximadamente, do seguinte modo: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são relevantes. A partir destas informações, calcule

1. o custo médio, por metro quadrado, com material;
2. o custo médio, por metro quadrado, com mão-de-obra;
3. a razão, em média, entre o custo com material e o custo com mão-de-obra.

Observação 10.2.1 Lembramos que porcentagens são frações com denominador igual a 100. Por exemplo 40% é apenas uma *maneira de escrever* a fração $\frac{40}{100}$, que tem numerador 40 e denominador 100. Da mesma forma, 60% é, de fato, uma maneira alternativa de representar a fração $\frac{60}{100}$. Observe que quando escrevemos "40% de 120" queremos dizer

$$\frac{40}{100} \times 120 = \frac{40 \times 120}{100} = \frac{4800}{100} = 48.$$

Da mesma forma, "60% de 120' significa, apenas, a fração

$$\frac{60}{100} \times 120 = \frac{60 \times 120}{100} = 72.$$

Solução. 1 e 2. O custo com material por metro quadrado representa 40% do total, ou seja,

$$\frac{40}{100} \times 1.500 = 40 \times 15 = 600 \text{ reais,}$$

ao passo que o custo com mão-de-obra por metro quadrado representa 60% do total, isto é,

$$\frac{60}{100} \times 1.500 = 60 \times 15 = 900 \text{ reais.}$$

3. Logo, a razão entre o custo com material e o custo com mão-de-obra é igual a

$$\frac{600}{900} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Exercício 10.9 Estima-se que, em 2019, o custo médio para construção civil foi de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A previsão é que este custo aumente 5% em 2020. Com base nestas informações, responda:

1. qual a previsão de custo médio por metro quadrado em 2020?
2. Quanto passará a custar a construção de uma casa com 300 metros quadrados?
3. Qual o aumento previsto, de 2019 para 2020, do custo de construção de uma casa de 300 metros quadrados?

Solução. 1. A expressão "aumento de 5%" significa que devemos adicionar 5% de R$ 1.500,00 ao custo médio anterior, ou seja, a R$ 1.500. Portanto, calculemos, inicialmente 5% de R$ 1.500. Temos

$$5\% = \frac{5}{100}$$

e, portanto,

$$5\% \text{ de R\$}\,1.500 = \frac{5}{100} \times 1.500 = 5 \times 15 = 75 \text{ reais.}$$

Logo, o novo custo médio é de

$$1.500 + 5\% \text{ de } 1.500 = 1.500 + 75 = 1.575,$$

ou seja, R$ 1.575,00.
2. Com o custo médio por metro quadrado ajustado para R$ 1.575,00, o custo da construção de uma casa de 300 metros quadrados passa a ser

$$300 \times 1.575 = 472.500 \text{ reais.}$$

3. Note que o custo para construção dos mesmos 300 metros quadrados seria, antes do aumento de 5%, igual a

$$300 \times 1.500 = 450.000 \text{ reais.}$$

Portanto, o acréscimo no custo total para construção da casa é de

$$300 \times 1.575 - 300 \times 1.500 = 300 \times 75 = 22.500 \text{ reais.}$$

Este aumento corresponde à seguinte fração do custo total, calculado antes do aumento:

$$\frac{22.500}{450.000} = \frac{22.500 : 45}{450.000 : 45} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%,$$

como seria de suspeitar.

Exercício 10.10 O custo total da construção de um imóvel tem a seguinte composição: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são consideradas relevantes. Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A partir destas informações, responda:

1. qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com material passassem dos atuais R$ 600,00 para R$ 540,00?
2. Qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com mão-de-obra passassem dos atuais R$ 900,00 para R$ 720,00?
3. Qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com material aumentassem 10%?
4. Qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com mão-de-obra aumentassem 10%?
5. Quais seriam os custos com material e mão-de-obra, por metro quadrado, caso o custo total por metro quadrado aumentasse 10%?

Solução. 1. No enunciado, afirma-se que os custos com material representam 40% dos custos totais. Então

$$40\% \text{ do custo total} = \frac{40}{100} \text{ do custo total} = 540 \text{ reais.}$$

Portanto, dividindo cada um destes números por 4, deduzimos que

$$10\% \text{ do custo total} = \frac{10}{100} \text{ do custo total} = \frac{540}{4} = 135 \text{ reais.}$$

Logo, multiplicando cada um deste números por 10, concluímos que

$$100\% \text{ do custo total} = \frac{100}{100} \text{ do custo total} = 135 \times 10 = 1.350 \text{ reais.}$$

Portanto, o custo total do metro quadrado passa a ser de R$ 1.350,00, caso o custo com material reduza de R$ 600,00 para R$ 540,00.

Podemos resumir estes cálculos no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{40}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ 540,00} \\
\downarrow & : 4 & \downarrow \\
\frac{10}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ 135,00} \\
\downarrow & \times 10 & \downarrow \\
\frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ 1.350,00}
\end{array}$$

Observe que, na prática, para passarmos da primeira linha para a última, dividimos por 4 e multiplicamos por 10, isto é, multiplicamos por

$$\frac{10}{4}.$$

De fato,

$$540 \times \frac{10}{4} = \frac{5.400}{4} = 1.350.$$

Observação 10.2.2 Note que os custos com material passam de R\$ 600,00 para R\$ 540,00, ou seja, *diminuem* R\$ 60,00. Observe que

$$\frac{60}{600}=\frac{60:6}{600:6}=\frac{10}{100}=10\%.$$

Ou seja, o custo com material diminui o equivalente a 10% do custo inicial.

2. Da mesma forma que no item anterior, observamos que o enunciado afirma que os custos com mão-de-obra representam 60%, ou seja, $\frac{60}{100}$ dos custos totais da construção. Então

$$\begin{array}{ccc}
\frac{60}{100}\text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ 720,00}\\
\downarrow & :6 & \downarrow\\
\frac{10}{100}\text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ 120,00}\\
\downarrow & \times 10 & \downarrow\\
\frac{100}{100}\text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ 1.200,00}
\end{array}$$

Observe que, na prática, para passarmos da primeira linha para a última, dividimos por 6 e multiplicamos por 10, isto é, multiplicamos por

$$\frac{10}{6}.$$

De fato,

$$720\times\frac{10}{6}=\frac{7.200}{6}=1.200\text{ reais},$$

o novo custo médio por metro quadrado, neste caso.

3 e 4. Caso os custos com material aumentassem em $10\%=\frac{10}{100}$, passariam de R\$ 600,00 para

$$600+\frac{10}{100}\times 600=600+60=660\text{ reais}.$$

Caso o custo com mão-de-obra permanecesse o mesmo, o custo total por metro quadrado passaria a ser igual a

$$660+900=1.560\text{ reais}.$$

Por sua vez, se o custo com mão-de-obra aumentasse em $10\%=\frac{10}{100}$, passaria de R\$ 900,00 para

$$900+\frac{10}{100}\times 900=900+90=990\text{ reais}.$$

Com isto, supondo, desta vez, que o custo com material continuasse o mesmo, o custo por metro quadrado passaria a ser, em média,

$$600+990=1.590\text{ reais}.$$

5. Por fim, o aumento de 10% é, agora, aplicado sobre o custo total por metro quadrado: temos

$$1.500+\frac{10}{100}\times 1.500=1.500+150=1.650\text{ reais}.$$

Neste caso, os novos custos médios de material e de mão-de-obra por metro quadrado seriam, respectivamente,

$$40\% \times 1.650 = \frac{40}{100} \times 1.650 = 660 \text{ reais}$$

e

$$60\% \times 1.650 = \frac{60}{100} \times 1.650 = 990 \text{ reais.}$$

Observação 10.2.3 Observe que, nos itens 3, 4 e 5 deste exercício, nos referimos sempre a aumento de 10%, mas sobre coisas diferentes: em 3, sobre os custos com material; em 4, sobre os custos com mão-de-obra; em 5, o aumento foi relativo aos custos totais. Por esta razão, obtivemos valores finais diferentes para os novos custos totais. No primeiro caso, temos 10% de aumento sobre algo que representa 40% do custo total, isto é,

$$\frac{10}{100} \times \frac{40}{100} \times 1.500 = 60 \text{ reais.}$$

No item 4, o aumento de 10% é sobre mão-de-obra, que representa 60% do custo total, ou seja,

$$\frac{10}{100} \times \frac{60}{100} \times 1.500 = 90 \text{ reais.}$$

Por fim, no item 5, o aumento de 10% incide diretamente sobre os 100% do custo total. Portanto,

$$\frac{10}{100} \times 1.500 = 150 \text{ reais.}$$

Exercício 10.11 O custo total da construção de um imóvel tem a seguinte composição: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são consideradas relevantes. Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A partir destas informações, responda:

1. qual seria o custo médio por metro quadrado, caso os custos com mão-de-obra representassem 50% do custo total, mantidos os custos com material?
2. Qual seria o custo médio por metro quadrado, caso os engenheiros conseguissem diminuir os custos com material para 25% do custo total, mantidos os custos com mão-de-obra?

Solução. 1. Já vimos que os custos com material por metro quadrado totalizam R$ 600,00. Se estes custos passarem a representar

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \text{ do custo total,}$$

então o custo total passa a ser

$$2 \times 600 = 1.200 \text{ reais,}$$

ou seja, R$ 1.200,00.

2. A redução é feita nos custos com material, mas ainda são mantidos os mesmos R\$ 900,00 de custos com mão-de-obra, por metro quadrado. Este valor representa agora, com as mudanças feitas pelos engenheiros, $100\% - 25\% = 75\%$ do custo médio por metro quadrado. Assim

$$\begin{array}{ccc} \frac{75}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 900{,}00 \\ \downarrow & : 75 & \downarrow \\ \frac{1}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 12{,}00 \\ \downarrow & \times 100 & \downarrow \\ \frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 1.200{,}00 \end{array}$$

Portanto, o custo médio por metro quadrado passaria a ser de R\$ 1.200,00.

Observação 10.2.4 Reunindo os cálculos que fizemos no item 2), temos

$$\frac{900 \times 100}{75},$$

fração igual a

$$12 \times 100 = 1.200 \text{ reais.}$$

Esta solução pode ser representada no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 75\% \text{ do custo total} & \text{———} & 900 \text{ reais} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{———} & x \text{ reais} \end{array}$$

onde

$$\frac{x}{900} = \frac{100}{75},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 900,

$$x = \frac{900 \times 100}{75} = 1.200 \text{ reais.}$$

Exercício 10.12 Na construção de um condomínio de casas, os engenheiros responsáveis conseguiram modernizar as técnicas de construção, o que permite dispensar 10% da mão-de-obra, mantendo o mesmo cronograma e qualidade da empreita. Com isto, a construção passou a ter 450 empregados. Quantos empregados havia antes da dispensa de mão-de-obra?

Solução. Esses 450 empregados representam, de acordo com o enunciado

$$100\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100}$$

do total de empregados que havia antes da dispensa de mão-de-obra. Logo, podemos arranjar estes dados no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 90\% \text{ do custo total} & \text{———} & 450 \text{ empregados} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{———} & x \text{ empregados} \end{array}$$

onde x é o número de empregados antes da dispensa de mão-de-obra. Portanto,

$$\frac{x}{450} = \frac{100}{90},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 100,

$$x = \frac{450 \times 100}{90} = 5 \times 100 = 500 \text{ empregados.}$$

Exercício 10.13 (EsSA – 1988) Doze pedreiros fizeram 5 barracões em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia. O número de horas por dia que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazer 10 barracões em 20 dias é:

A) 8.
B) 9.
C) 10.
D) 12.
E) 15.

Solução. Observamos, inicialmente, que os doze pedreiros trabalham

$$30 \times 6 = 180 \text{ horas,}$$

ou seja, 6 horas por dia, durante 30 dias, para construir 5 barracões. Portanto, para construir um barracão apenas, os mesmos doze pedreiros trabalhariam cinco vezes menos, ou seja,

$$\frac{180}{5} = 36 \text{ horas}$$

apenas. Logo, um pedreiro sozinho teria que trabalhar doze vezes mais, isto é,

$$12 \times 36 = 432 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Obviamente, dezoito pedreiros gastariam um tempo 18 vezes menor que um pedreiro, ou seja,

$$\frac{1}{18} \times 432 = \frac{12 \times 36}{18} = \frac{2}{3} \times 36 = 24 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Logo, os dezoito pedreiros utilizariam

$$10 \times 24 = 240 \text{ horas}$$

para construir 10 barracões. Este é o total de horas trabalhadas pelos 18 pedreiros em 20 dias. Portanto, esta equipe de 18 pedreiros trabalharia

$$\frac{240}{20} = 12 \text{ horas}$$

por dia, trabalhando durante 20 dias.

Observação 10.2.5 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos

$$\frac{30 \times 6 \times 12 \times 10}{5 \times 18 \times 20},$$

fração igual a

$$\frac{10 \times 12 \times 10}{5 \times 20} = 12 \text{ horas.}$$

Esta solução pode ser representada no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
12 \text{ pedreiros} & \text{———} & 5 \text{ barracões} & \text{———} & 30 \text{ dias} & \text{———} & 6 \text{ horas} \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
18 \text{ pedreiros} & \text{———} & 10 \text{ barracões} & \text{———} & 20 \text{ dias} & \text{———} & x \text{ horas}
\end{array}$$

onde

$$\frac{x}{6} = \frac{30 \times 10 \times 12}{20 \times 5 \times 18}$$

Logo,

$$x = 12 \text{ horas},$$

como já havíamos calculado. Deste modo, obtemos a resposta da questão, a alternativa D).

Exercício 10.14 (Colégio Militar de Brasília – 2008) Uma montadora recebeu uma encomenda de 40 carros. Para entregá-los, a montadora trabalhou 5 dias, utilizando 6 robôs, de mesmo rendimento, que trabalham 8 horas por dia cada um. Uma outra encomenda foi feita, dessa vez para montar 60 carros. Contudo, um dos robôs apresentou um defeito e não pôde ser usado no trabalho. Para atender o cliente, a montadora precisou, então, trabalhar 12 horas por dia, por alguns dias. O número de dias que a fábrica trabalhou para entregar o segundo pedido foi igual a:

A) 5.
B) 6.
C) 11.
D) 12.
E) 13.

Solução. De acordo com o enunciado, são usados 6 robôs para montar 40 carros em um total de

$$5 \times 8 = 40 \text{ horas}.$$

Portanto, os seis rôbos montam 40 carros em 40 horas, ou seja, montam

$$\frac{40}{40} = 1 \text{ carro por hora}.$$

Assim, gastariam

$$60 \times 1 = 60 \text{ horas}$$

para montar 60 carros. Sendo assim, um robô, apenas, consumiria seis vezes mais tempo para montar os 60 carros, isto é, consumiria

$$6 \times 60 = 360 \text{ horas}$$

para montar os 60 carros. Logo, cinco robôs levariam cinco vezes menos tempo para montar esses 60 carros, quer dizer,

$$\frac{360}{5} = 72 \text{ horas}.$$

Utilizando os robôs 12 horas por dia, seriam necessários

$$\frac{72}{12} = 6 \text{ dias}.$$

Concluímos, que seriam necessários 6 dias para que 5 robôs, funcionando 12 horas por dia, montassem 60 carros.

Observação 10.2.6 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos

$$\frac{5 \times 8 \times 60 \times 6}{40 \times 5 \times 12},$$

fração igual a

$$\frac{60 \times 6}{5 \times 12} = 6 \text{ dias.}$$

Montamos o seguinte diagrama a partir dos dados no enunciado:

$$\begin{array}{ccccccc}
6 \text{ robôs} & \text{———} & 40 \text{ carros} & \text{———} & 8 \text{ horas} & \text{———} & 5 \text{ dias} \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
5 \text{ robôs} & \text{———} & 60 \text{ carros} & \text{———} & 12 \text{ horas} & \text{———} & x \text{ dias}
\end{array}$$

onde

$$\frac{x}{5} = \frac{8 \times 60 \times 6}{12 \times 40 \times 5}.$$

Portanto,

$$x = \frac{5 \times 8 \times 60 \times 6}{12 \times 40 \times 5} = \frac{60 \times 6}{12 \times 5} = 6.$$

Assim, concluímos que

$$x = 6 \text{ dias},$$

como já havíamos calculado. Somados aos 5 dias anteriores, temos 11 dias. Assim, obtém-se a resposta da questão, a saber, a alternativa C).

Solução alternativa. Neste problema, a quantidade de carros montada (que indicaremos pela letra Q) depende de três *variáveis*: o número n de robôs em funcionamento, a quantidade de dias d em que estes robôs operam e o total t de horas por dia em que funcionam.

Portanto, Q aumenta *na mesma proporção* em que aumentam n, d ou t. Por exemplo, se tivermos mais robôs operando, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável n, aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (d e t) forem mantidas constantes.

Da mesma forma, se tivermos mais dias de funcionamento dos robôs, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável d, aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (n e t) forem mantidas constantes.

Podemos escrever tudo isto de forma mais abreviada, dizendo que existe um número a fixo tal que

$$Q = a \times n \times d \times t,$$

ou seja, de modo que a razão

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = a$$

é sempre constante e igual ao número a.

Voltando à resolução do problema, observamos que, na primeira encomenda, tivemos

$$Q = 40 \text{ carros}$$

com os seguintes valores das variáveis n, d e t:

$$\begin{aligned} n &= 6 \text{ robôs} \\ d &= 5 \text{ dias} \\ t &= 8 \text{ horas.} \end{aligned}$$

Assim, na primeira encomenda, tivemos

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = \frac{40}{6 \times 5 \times 8}$$

Sobre a segunda encomenda, sabemos que

$$Q = 60 \text{ carros}$$

e que

$$\begin{aligned} n &= 5 \text{ robôs} \\ t &= 12 \text{ horas.} \end{aligned}$$

No entanto, devemos calcular o valor correspondente da variável d (o número de dias), o qual não foi informado desta vez. Para isso, usamos o fato de que a razão nas duas encomendas foi a mesma, ou seja, que a razão (ou fração)

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

não muda, embora os valores das variáveis mudem! Assim, igualando estas razões nas duas encomendas, temos

$$\frac{40}{6 \times 5 \times 8} = \frac{60}{5 \times d \times 12}$$

Logo, simplificando o lado direito da igualdade, temos

$$\frac{40}{6 \times 5 \times 8} = \frac{1}{d},$$

ou seja,

$$d = \frac{6 \times 5 \times 8}{40} = 6 \text{ dias.}$$

Exercício 10.15 Com a tecnologia atual, 15 profissionais executam 810 metros quadrados de construção em seis dias, em uma jornada diária de 9 horas de trabalho. Nestas mesmas condições, calcule:

1. quantos profissionais seriam necessários para construir 3.240 metros quadrados em seis jornadas diárias de 9 horas;
2. quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em duas jornadas diárias de 9 horas;
3. quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em seis jornadas diárias de 3 horas;
4. quantos profissionais seriam necessários para construir 3.600 metros quadrados em quatro jornadas diárias de 6 horas;
5. quantos metros quadrados podem ser construídos com o trabalho de 50 profissionais em quatro jornadas diárias de 6 horas.

Solução. Segundo o enunciado, 15 trabalhadores constroem 810 metros quadrados em seis dias, trabalhando 9 horas por dia. É natural *supor* que a quantidade Q de metros construídos dependa *proporcionalmente* das variáveis

$$\begin{aligned} n &= \text{ número de profissionais,} \\ d &= \text{ número de dias de trabalho,} \\ t &= \text{ número de horas por dia ou jornada.} \end{aligned}$$

isto significa que, fixadas duas destas variáveis, a quantidade Q aumenta (respectivamente, diminui) à mesma proporção em que a variável restante aumenta (respectivamente, diminui). Em termos matemáticos, existe um número fixo a, a razão entre essas variáveis, tal que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = a.$$

Com os dados do enunciado, sabemos que

$$Q = 810 \text{ metros quadrados}$$

se

$$\begin{aligned} n &= 15 \text{ profissionais,} \\ d &= 6 \text{ dias de trabalho,} \\ t &= 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Calculada esta razão, podemos determinar os valores das variáveis em cada uma das situações nos itens do problema.

1. Nesta primeira situação, são informados os valores das seguintes variáveis

$$Q = 3.240 \text{ metros quadrados,}$$

se

$$\begin{aligned} d &= 6 \text{ dias de trabalho,} \\ t &= 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.} \end{aligned}$$

O problema é determinar n, o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos o total d de dias e o número t de horas por dia, serão necessários 4 vezes mais profissionais, já que a quantidade Q de metros quadrados é também 4 vezes maior, isto é,

$$3.240 = 4 \times 810.$$

Portanto, serão necessários

$$4 \times 15 = 60 \text{ profissionais}$$

para esta nova quantidade de metros quadrados.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{3.240}{n \times 6 \times 9} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}$$

Note que os valores $d = 9$ e $t = 6$ foram mantidos. Multiplicando os dois lados da igualdade por estes valores comuns, temos

$$\frac{3.240}{n} = \frac{810}{15},$$

Portanto, multiplicando os dois lados por n e por 15 e dividindo o resultado por 810, obtemos

$$n = \frac{3.240}{810} \times 15 = 4 \times 15 = 60.$$

2. Nesta segunda situação, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e } t = 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.}$$

No entanto, passamos a ter

$$d = 2 \text{ dias de trabalho.}$$

O problema é, uma vez mais, determinar n, o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos os valores Q e t e o novo número de dias corresponde a $\frac{1}{3}$ do anterior, isto é,

$$2 \text{ jornadas diárias} = \frac{1}{3} \times 6 \text{ jornadas diárias,}$$

serão necessários 3 vezes mais profissionais, ou seja,

$$3 \times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para esta nova (e menor) quantidade de jornadas diárias.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{810}{n \times 2 \times 9} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}$$

Note que os valores $Q = 810$ e $t = 9$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n \times 2} = \frac{1}{15 \times 6},$$

Concluímos que

$$2n = 15 \times 6,$$

ou seja

$$n = 15 \times 3 = 45 \text{ profissionais,}$$

como já havíamos calculado.

3. Desta vez, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e } d = 6 \text{ jornadas diárias.}$$

No entanto, passamos a ter

$$t = 3 \text{ dias de trabalho},$$

ou seja, $\frac{1}{3}$ ou 3 vezes menos horas por jornada. Como os valores das demais variáveis foram mantidos, podemos deduzir que serão necessários 3 vezes mais profissionais, ou seja

$$3 \times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para esta nova (e menor) quantidade de horas por jornada diária.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{810}{n \times 6 \times 3} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}.$$

Note que os valores $Q = 810$ e $d = 6$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n \times 3} = \frac{1}{15 \times 9},$$

Concluímos que

$$3n = 15 \times 9,$$

ou seja

$$n = 15 \times 3 = 45 \text{ profissionais},$$

como já havíamos calculado.

4. Nesta situação, são alterados os valores das variáveis Q, d e t. Temos:

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	3.600	n	4	6

Assim, igualando as razões

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

nas duas situações, obtemos

$$\frac{3.600}{n \times 4 \times 6} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Deste modo, deduzimos que

$$\frac{1}{n} = 1 \times \frac{4 \times 6}{3.600}$$

ou

$$n = \frac{3.600}{4 \times 6} = \frac{900}{6} = 150 \text{ profissionais}.$$

5. Por fim, neste último caso, são alterados os valores das variáveis n, d e t. Temos:

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	Q	50	4	6

Já vimos que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = 1$$

em *qualquer* cenário. Logo,

$$Q = 6 \times n \times d \times t.$$

Portanto, na nova situação exposta no enunciado, calculamos

$$Q = 6 \times 50 \times 4 \times 6 = 6 \times 6 \times 2 \times 100 = 7.200 \text{ metros quadrados.}$$

10.3 – Velocidades, Razões e Proporções

As linhas vermelhas no mapa abaixo indicam os trajetos de ônibus urbanos que ligam o centro de Fortaleza ao terminal rodoviário do Papicu. Um destes ônibus segue pela Avenida Santos Dumont, passando pelo cruzamento com a Avenida Dom Manuel às 6:00 da manhã e pelo cruzamento com a Avenida Virgílio Távora às 6:15. A distância percorrida total é igual a cerca de 3 quilômetros. Observe que o tempo decorrido neste percurso é igual a 15 minutos, ou seja,

$$\frac{1}{4} \text{ de hora.}$$

Portanto, a velocidade média do ônibus é igual a

$$v = \frac{3 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{4} \text{ hora}} = \frac{3 \times 4 \text{ quilômetros}}{1 \text{ hora}} = 12 \, \frac{\text{quilômetros}}{\text{hora}}.$$

Isto significa que, neste itinerário, o ônibus percorre, em média, 12 quilômetros a cada hora (sessenta minutos) ou 6 quilômetros a cada meia hora (trinta minutos) ou, ainda, 3 quilômetros a cada um quarto de hora (quinze minutos). Ou seja, a velocidade média do ônibus é dada por

$$v = \frac{12 \text{ quilômetros}}{1 \text{ hora}} = \frac{6 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{2} \text{ hora}} = \frac{3 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{4} \text{ hora}}$$

ou

$$v = \frac{12 \text{ quilômetros}}{60 \text{ minutos}} = \frac{6 \text{ quilômetros}}{30 \text{ minutos}} = \frac{3 \text{ quilômetros}}{15 \text{ minutos}}.$$

Usando a escala no mapa, observamos que os pontos A e B estão a uma distância real de 1,8 quilômetros. Com esta informação, podemos estimar o tempo t, em minutos, esperado para que o ônibus percorra a distância entre estes pontos da Avenida Santos Dumont.

Usamos um argumento de proporção: se o ônibus leva trinta minutos para percorrer 6 quilômetros, deve levar um décimo deste tempo para percorrer 0,6 quilômetro. Logo, deve levar *três décimos* deste tempo para percorrer 1,8 quilômetros. Portanto, o ônibus leva três décimos de trinta minutos, ou seja, 9 minutos, para percorrer a distância de 1,8 quilômetros entre os pontos representados por A e B.

$$\begin{array}{ccc}
30 \text{ minutos} & \text{———} & 6 \text{ quilômetros} \\
\downarrow & :10 & \downarrow \\
3 \text{ minutos} & \text{———} & 0{,}6 \text{ quilômetro} \\
\downarrow & \times 3 & \downarrow \\
9 \text{ minutos} & \text{———} & 1{,}8 \text{ quilômetros}
\end{array}$$

O argumento pode ser escrito algebricamente da seguinte forma

$$\frac{6}{30} = \frac{1{,}8}{t}.$$

As frações do lado esquerdo e do lado direito são equivalentes. Dizemos que 6 *está para* 30, *assim como* 1,8 *está para* t *minutos*. Uma vez que

$$\frac{6}{30} = \frac{6:10}{30:10} = \frac{0{,}6}{3} = \frac{0{,}6\times 3}{3\times 3} = \frac{1{,}8}{9},$$

concluímos que

$$\frac{6}{30} = \frac{1{,}8}{9}$$

e, portanto, $t = 9$ minutos. Logo, o ônibus deve levar cerca de 9 minutos para percorrer a distância entre os pontos na Avenida Santos Dumont representados por A e B no mapa.

Da mesma forma, podemos usar a escala para comprovar que a distância, no mapa, entre os pontos B e C é igual a cerca de 0,6 quilômetro. Sendo assim, o tempo t que o ônibus deve levar para percorrer esta distância é dado por

$$\frac{6}{30} = \frac{0{,}6}{t}.$$

Uma vez que

$$\frac{6}{30} = \frac{6:10}{30:10} = \frac{0{,}6}{3},$$

concluímos que o tempo esperado para que o ônibus realize este segundo percurso é igual a 3 minutos.

Com estas estimativas, podemos montar a seguinte tabela de horários aproximados para esta linha de ônibus em seu trajeto ao longo da Avenida Santos Dumont:

Parada	Horário previsto
Dom Manuel	6:00
Ponto A	6:02
Ponto B	6:11
Ponto C	6:14
Virgílio Távora	6:15

Observação 10.3.1 Em resumo, se denotarmos por s a distância percorrida desde a posição inicial, no cruzamento com a Avenida Dom Manuel, e por t o intervalo de tempo decorrido desde o instante inicial 6 horas da manhã, a velocidade média do ônibus neste trajeto é igual a

$$\frac{s}{t} = v.$$

Portanto, multiplicando os dois lados desta equação por t, temos

$$s = vt.$$

No exemplo acima, vimos que

$$v = 12 \text{ quilômetros por hora.}$$

Exercício 10.16 Estime o tempo necessário para que o ônibus, com $\frac{3}{4}$ da velocidade média que calculamos antes, percorra o trecho entre os pontos D e E do mapa na figura.

10.3.1 – Continentes em Movimento

O mapa abaixo representa os continentes sul-americano e africano.

Observe a impressionante semelhança das partes dos litorais do Brasil e da África representadas no mapa. Podemos perceber facilmente que os dois litorais encaixam-se quase perfeitamente, como peças em um quebra-cabeça, conforme mostrado na figura abaixo.

A Teoria de Deriva Continental foi proposta em 1912 pelo geofísico alemão Alfred Wegener para explicar semelhanças como essas na forma dos continentes. Wegener *conjecturou* que os continentes se movem por conta dos deslocamentos das *placas tectônicas*. Se pudéssemos retroceder milhões de anos no tempo, veríamos como continentes que estiveram próximos foram lentamente de afastando. No seguinte vídeo, podemos ver um filme passando ao contrário: da Terra em sua aparência atual para o passado remoto em que os continentes formavam um supercontinente, a Gondwana. Isso também explica por que regiões tão distantes hoje tem fósseis de animais muito semelhantes, que viveram há milhões de anos atrás:

https://www.youtube.com/watch?v=J2b5vZsiNyU

Medidas muito precisas confirmaram a ousada teoria de Wegener. As placas se movem ao longo do Oceano Atlântico e afastam os litorais do Brasil e da África a uma *taxa constante* de cerca de 2,5 centímetros por ano.

Exercício 10.17 Considerando o texto acima, resolva os seguintes exercícios:

1. a esta taxa, estime há quanto tempo atrás os continentes africano e sul-americano estiveram unidos, sabendo que a menor distância atual entre eles é de 2.575 quilômetros.
2. Estime a distância entre estes continentes em 2050, supondo que a deriva continental ocorra sempre à mesma taxa.
3. Escreva uma expressão matemática que permita calcular a distância esperada entre estes continentes daqui a t anos.

10.4 – Razões e Proporções: Aplicações

Os problemas nesta seção demonstram como razões e proporções aparecem nas mais variadas aplicações, tanto na vida cotidiana quanto nas Ciências que estudamos no Ensino Médio ou na universidade. Portanto, aprecie a importância do aprendizado que este módulo proporciona!

Exercício 10.18 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um estacionamento cobrava R$ 18,00 por três horas de utilização e agora passou a cobrar R$ 18,00 por duas horas. O percentual de aumento do preço cobrado pelo estacionamento, em relação ao preço inicial, foi:

- 0%.
- 1%.
- 3%.
- 18%.
- 50%.

Solução. Houve um aumento do preço por hora do estacionamento: antes, o preço por hora era igual a

$$\frac{18 \text{ reais}}{3 \text{ horas}} = 6 \text{ reais por hora},$$

ao passo que, agora, o preço por hora foi ajustado para

$$\frac{18 \text{ reais}}{2 \text{ horas}} = 9 \text{ reais por hora}$$

Portanto, o aumento absoluto do preço por hora foi igual a

$$9 - 6 = 3 \text{ reais por hora.}$$

Logo, o aumento relativo ao preço que era cobrado é igual a

$$\frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o aumento relativo em termos de porcentagem é dado por

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%.$$

Exercício 10.19 Em 2019, a inflação acumulada de preços para famílias de baixa renda (i.e, as que têm renda de até R$ 1.643,78 por mês) foi de 4,43%. Para estas famílias, 70% da inflação se deve às altas dos preços de alimentos e habitação. Uma família que gastava R$ 840,00 com esses dois itens, no início de 2019, teve que gastar quanto a mais no fim do ano, para continuar atendendo suas necessidades no mesmo nível de antes?
Fontes: IPEA, IBGE e Agência Brasil

Solução. Inflação, neste caso, significa alta de preços ao consumidor: para calculá-la, comparamos os preços de vários itens no fim e no começo de um certo período (um ano, neste caso) e calculamos a *variação percentual*:

$$\frac{\text{preços finais} - \text{ preços iniciais}}{\text{preços iniciais}}.$$

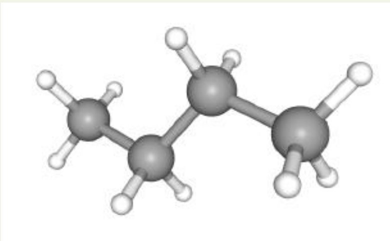
A inflação específica com alimentos e habitação foi, no ano de 2019, segundo os dados, igual a

$$70\% \text{ de } 4{,}43\% = \frac{70}{100} \times 4,43\% = 3{,}101\% \cong 3{,}1\%$$

Portanto, despesas com alimentos e habitação, que totalizavam R$ 840,00 no início do ano, passaram a ser, corrigidas por esta inflação, iguais a

$$840 + \frac{3{,}1}{100} \times 840 \cong 840 + 26{,}05 = 866{,}05 \text{ reais.}$$

Exercício 10.20 O gás butano é o composto orgânico usado como gás de cozinha. Sua fórmula química é C_4H_{10}, o que significa que uma molécula deste gás é composta por 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio.



Disponível em https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/Butane

Uma das mais belas leis da Química afirma que a massa (em gramas) de um mol de átomos de um elemento químico é *numericamente* igual à massa atômica desse elemento, isto é, ao número de prótons e nêutrons deste átomo, aproximadamente. Sabendo que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio, determine a massa, em gramas, do carbono presente em 1.740 gramas de gás butano.

Lembrete: *um mol de uma substância química é igual a, aproximadamente,* 6×10^{23} *moléculas desta substância.*

Solução. Em cada molécula de gás butano há um total de 14 átomos: 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio. Portanto, em um mol de moléculas de gás butano, há 4 moles de átomos de carbono e 10 moles de átomos de hidrogênio. Logo, se a massa de um mol de átomos de hidrogênio é igual a x gramas, então, a massa total de um mol de moléculas de gás butano é

$$4 \times 12x + 10x = 58x.$$

(O fator 12, no cálculo acima, vem de que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio.) Portanto, a massa de carbono presente em um mol de moléculas de gás butano corresponde a

$$\frac{48}{58}$$

da massa deste mol (uma razão fixa). Assim, em 1.740 gramas de gás butano, temos

$$\frac{48}{58} \times 1.740 = 48 \times 30 = 1440 \text{ gramas}$$

de carbono.

Exercício 10.21 (Canguru 2014 - Nível J, Questão 9) Numa cidade, a razão entre os números de homens adultos e de mulheres adultas é $2 : 3$ e a razão entre os números de mulheres adultas e de crianças é $8 : 1$. Qual é a razão entre os números de adultos (homens e mulheres) e de crianças?

A) $5 : 1$.
B) $10 : 3$.
C) $13 : 1$.
D) $12 : 1$.
E) $40 : 3$.

Solução. De acordo com o enunciado, para cada criança na cidade há 8 mulheres adultas. Assim, para cada 3 crianças, há 3×8 mulheres adultas. Como para cada 3 mulheres adultas, há 2 homens adultos, segue que para 3×8 mulheres adultas, há 2×8 homens adultos.

Concluímos que, para cada 3 crianças na cidade, há $3 \times 8 = 24$ mulheres adultas e $2 \times 8 = 16$ homens adultos. Ou seja, para cada 3 crianças, há $24 + 16 = 40$ adultos (homens e mulheres). Assim, a razão entre adultos e crianças é $\frac{40}{3}$, ou seja,

$$40 : 3,$$

o que corresponde à alternativa E).

Exercício 10.22 Os trens de alta velocidade que ligam Paris e Londres atravessam um túnel submarino de cerca de 50 quilômetros sob o Canal da Mancha, que separa a França da Inglaterra, a uma velocidade média de 160 quilômetros por hora. Sabendo que a distância de aproximadamente

500 quilômetros entre Paris e Londres é percorrida por estes trens a uma velocidade média de 200 quilômetros por hora, em quanto tempo é percorrido o trecho em terra, ou seja, fora do Canal?

Solução. Observe que o tempo t gasto no trajeto total pode ser calculado da seguinte forma

$$\frac{500}{t} = 200.$$

Portanto

$$\frac{500}{200} = t,$$

ou seja,

$$t = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ horas}.$$

Como 0,5 de uma hora são $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ minutos, concluímos que o tempo total do percurso é, em média, 2 horas e 30 minutos. O trecho do túnel é percorrido em

$$\frac{50}{160} = \frac{5}{16} = 0{,}3125 \cong 0{,}3\text{hora},$$

ou seja, 3 *décimos* de hora, que equivalem a 18 minutos. Assim, o trecho do percurso fora do túnel leva cerca de 2 horas e 12 minutos.

Exercício 10.23 Uma estrela de nêutrons tem, tipicamente, 1,4 vezes a massa do Sol e um raio de cerca de 20 quilômetros, apenas. Sabendo que o Sol tem um raio de quase 700.000 quilômetros, calcule quantas vezes uma estrela de nêutrons é mais densa que o Sol.

Solução. Observe que o raio (aproximado) do Sol (em quilômetros) pode ser escrito em *notação científica* como

$$7 \times 10^5.$$

Se m denota a massa do Sol, então sua densidade é *proporcional* a

$$\frac{m}{7^3 \times 10^{15}} \text{ quilogramas por quilômetro}$$

De fato, *densidade* é definida como a razão

$$\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

e o volume do Sol (e da estrela de nêutrons) é *proporcional* ao cubo de seus respectivos raios.

Logo, a densidade da estrela de nêutrons, que tem massa igual a 1,4 vezes a massa do Sol, é proporcional a

$$\frac{1{,}4\, m}{20^3} = \frac{7m}{4 \times 10^4} \text{ quilogramas por quilômetro.}$$

Portanto, a comparação das densidades da estrela de nêutrons e da densidade do Sol resulta em

$$\frac{\frac{7m}{4\times 10^4}}{\frac{m}{7^3\times 10^{15}}} = \frac{7m}{m} \times \frac{7^3 \times 10^{15}}{4 \times 10^4} = 7^4 \times 25 \times 10^9 = 60.025 \times 10^9 \cong 6 \times 10^{13}.$$

Portanto, uma estrela de nêutrons é cerca de 10^{13} vezes mais densa que o Sol. Esta é a *ordem de grandeza* da comparação entre essas densidades.

Observação 10.4.1 Por sua vez, a densidade do Sol é cerca de 1,4 gramas por centímetro cúbico, enquanto a densidade da água é de cerca de 1 grama por centímetro cúbico (a depender, sempre, de condições como a temperatura e pressão). Assim, a densidade de uma estrela de nêutrons é, tipicamente,

$$6 \times 10^{13} \times 1{,}4 = 8{,}4 \times 10^{13} \cong 8 \times 10^{13}$$

vezes a densidade da água. Portanto, em um centímetro cúbico de uma estrela de nêutrons há tanta massa quanto na quantidade de água de 4 Castanhões cheios. Se ficou curioso sobre o assunto, veja

https://www.youtube.com/watch?v=FRftmkRBUxQ

Esse exercício explora a noção de ordens de grandeza. Em particular, vimos algumas das impressionantes *diferenças de escala* que existem no Universo e na Natureza. Para entender visualmente as escalas com as quais a Ciência trabalha, veja, por exemplo,

https://www.youtube.com/watch?v=8Are9dDbW24

Para entender melhor como razões e proporções são fundamentais para estimar distâncias astronômicas, assista

https://www.youtube.com/watch?v=CWMh61yutjU

e outros vídeos do mesmo tipo.

Exercício 10.24 Segundo o Banco Central do Brasil, a *taxa de câmbio* entre o dólar americano e o real, no dia 13 de março de 2020, foi, aproximadamente,

$$1 \text{ dólar americano} = 4{,}88 \text{ reais.}$$

Fixada esta taxa, quantos dólares americanos equivaleriam a R$ 1.220,00?

Solução. A taxa de câmbio nada mais é do que a razão

$$\frac{1 \text{ dólar americano}}{4{,}88 \text{ reais}}.$$

Portanto, o número x de dólares que podem ser comprados com R$ 1.220,00 é dada pela seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{x \text{ dólares americanos}}{1.220 \text{ reais}} = \frac{1 \text{ dólar americano}}{4{,}88 \text{ reais}},$$

ou seja,

$$x = 1.220 \times \frac{1}{4{,}88} = 250 \text{ dólares americanos.}$$

10.5 – Razões e Proporções: Variáveis Diretamente Proporcionais

Na seção anterior, vimos exemplos de variáveis que dependem proporcionalmente uma da outra, ou seja, de variáveis diretamente proporcionais. Isto significa que a razão entre estas variáveis é sempre a mesma:

$$\frac{y}{x} = \text{constante}$$

Ou seja, dividindo-se os valores da variável y pelos valores *correspondentes* da variável x, encontramos sempre uma constante, a razão entre estas variáveis. Escrevemos

$$\frac{y}{x} = a$$

ou

$$y = ax.$$

Supomos, sempre, que a razão a é um número diferente de zero.

Em outras palavras, as variáveis x e y são diretamente proporcionais quando, aumentando (respectivamente, diminuindo) o valor da variável x, o valor da variável y aumenta (respectivamente, diminui) *na mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela:

Valores de x	3	4	5	6	10	35
Valores de y	9	12	15	18	30	105

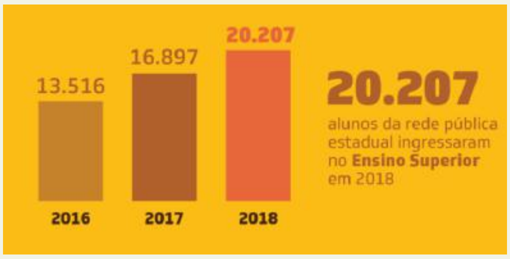
Observemos que, dividindo os valores de y pelos valores correspondentes de x, sempre obtemos o mesmo resultado:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{30}{10} = \frac{105}{35} = 3.$$

Portanto, a razão entre as variáveis y e x é constante e igual a 3. Como esta razão é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 40$ é $y = 3 \times 40 = 120$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 135$ é $x = \frac{1}{3} \times 135 = 45$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos de problemas envolvendo variáveis que são diretamente proporcionais.

Exercício 10.25 Nas últimos anos, tem crescido o número de alunos da escola pública estadual (vocês!) no ensino superior. Veja o quadro abaixo, com dados dos anos de 2016 a 2018:



Percebemos que o número de alunos aumenta cerca de 3.300 a cada ano. Se esta tendência persistir, quantos alunos da rede pública estadual se espera que entrem no ensino superior em 2021?

Solução. Supondo que a tendência seja mantida, isto é, que a cada ano ingressem *mais* 3.300 alunos da rede pública no ensino superior, o número *a mais* de ingressos (y) dependeria linearmente do número de anos desde 2016 (x) da seguinte forma

$$y = 3.300x.$$

Dada esta tendência, em 2021, ou seja, quando $x = 2021 - 2016 = 5$, deveremos ter

$$y = 3.300 \times 5 = 16.500$$

alunos *a mais* do que em 2016. Portanto, o número total deve ser, em 2021, cerca de

$$13.516 + 16.500 = 30.016$$

alunos da rede pública estadual nas universidades.

Exercício 10.26 Dois amigos, professores de Matemática, foram almoçar em um restaurante *self-service*. Um deles serviu-se de 360 gramas e pagou R$ 14,40, enquanto o outro pagou R$ 16,80 por 420 gramas de comida. Qual o valor de um quilograma de comida neste restaurante?

Solução. O valor pago depende proporcionalmente, ou linearmente, do peso. A razão entre o valor pago e o peso é dada por

$$\frac{14{,}40}{360} = \frac{16{,}80}{420} = 0{,}04,$$

ou seja, 4 centavos de real por grama de comida. Assim, o preço de uma quilograma de comida é $0{,}04 \times 1.000 = 40$ reais. De modo geral, se x representa o peso da comida em gramas e y o valor a ser pago, temos

$$y = 0{,}04x.$$

10.5.1 – Variáveis Inversamente Proporcionais

Veremos, agora, situações em que duas variáveis são inversamente proporcionais. Isto significa apenas que o produto (e não a razão) destas variáveis permanece constante. Ou seja, multiplicando o valor de uma dessas variáveis (digamos, a variável x) pelo valor correspondente da outra (a variável y, digamos), obtém-se sempre a mesma constante, isto é,

$$yx = \text{constante}$$

De outra forma, existe um número real não nulo k tal que

$$yx = k$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{\frac{1}{x}} = k.$$

Assim, as variáveis x e y são inversamente proporcionais quando, aumentando (respectivamente, diminuindo) o valor da variável x, o valor de variável y diminui (respectivamente, aumenta) na *mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela:

Valores de x	4	5	6	10	12	24
Valores de y	30	24	20	12	10	5

Observemos que, multiplicando os valores de y pelos valores correspondentes de x, obtemos sempre o mesmo resultado:

$$4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 10 \times 12 = 12 \times 10 = 24 \times 5 = 120.$$

Portanto, o produto das variáveis x e y é constante e igual a 120. Como este produto é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 30$ é $y = 120 \times \frac{1}{30} = 4$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 6$ é $x = 120 \times \frac{1}{6} = 20$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos e problemas envolvendo variáveis que são inversamente proporcionais.

Exercício 10.27 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um pai resolve premiar seus dois filhos com R$ 140,00. Este valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais ao número de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2 e 5. Então, a quantia a ser recebida pelo filho com menos faltas é:

A) R$ 7,00.
B) R$ 20,00.
C) R$ 40,00.
D) R$ 100,00.

Solução. Pelo enunciado, essas partes são inversamente proporcionais a 2 e 5. Portanto, são *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{5}$. Logo, a soma destas partes, ou seja, os 140 reais, são *diretamente* proporcionais à soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

Logo, a primeira parte está para o todo, isto é, para 140 reais, como $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Portanto, é igual a

$$140 \times \frac{\frac{5}{10}}{\frac{7}{10}} = 140 \times \frac{5}{7} = 20 \times 5 = 100 \text{ reais}.$$

Da mesma forma, a segunda parte está para 140 reais como $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Logo, é dada por

$$140 \times \frac{\frac{2}{10}}{\frac{7}{10}} = 140 \times \frac{2}{7} = 20 \times 2 = 40 \text{ reais}.$$

Solução alternativa. Sejam a e b as partes dadas pelo pai aos filhos. Sendo assim, temos

$$a + b = 140 \tag{10.1}$$

e

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}},$$

ou seja

$$2a = 5b. \tag{10.2}$$

Note que, multiplicando os dois lados de (10.1) por 2, obtém-se

$$2a + 2b = 280.$$

Agora, levando em conta a igualdade em (10.2), deduz-se que

$$5b + 2b = 280,$$

logo,

$$7b = 280.$$

Assim, a parte menor (que cabe ao filho que faltou mais) é igual a $b = 40$ reais. Por conseguinte, a parte maior (que cabe ao filho que faltou menos) é dada por $a = 100$ reais. A alternativa correta é D).

De modo geral, dividir um número, digamos, 140, em partes *inversamente* proporcionais a dois números (positivos) m e n significa dividi-lo em partes *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$. A soma destas partes é, portanto, diretamente proporcional a

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{mn}{m+n}$$

Portanto, as partes são diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{1}{m}}{\frac{mn}{m+n}} = \frac{n}{m+n} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{mn}{m+n}} = \frac{m}{m+n},$$

nesta ordem.

Exercício 10.28 (Canguru 2014, Nível J, Questão 10) O perímetro da roda maior de uma bicicleta é 4,2 metros e o perímetro da menor é 0,9 metro. Num certo momento, as duas válvulas dos pneus estão em seu ponto mais baixo e a bicicleta caminha para a esquerda. Depois de quantos metros as duas válvulas estarão novamente em sua posição mais baixa?

A) 4,2.
B) 6,3.
C) 12,6.
D) 25,2.

Solução. O produto da circunferência (o perímetro) pelo número de voltas de cada roda é igual à distância percorrida pela bicicleta. Assim, a condição do enunciado impõe que tenhamos

$$4{,}2 \times m = 0{,}9 \times n,$$

onde m e n são números (inteiros de voltas) das rodas, maior e menor, respectivamente, até que as válvulas estejam em suas posições mais baixas. Logo,

$$42 \times m = 9 \times n$$

ou, simplificando,

$$14 \times m = 3 \times n.$$

A igualdade anterior pode ser reescrita como

$$2 \times 7 \times m = 3 \times n.$$

Os menores valores (inteiros positivos) para os quais esta igualdade ocorre são $m = 3$ e $n = 2 \times 7 = 14$, de modo que

$$2 \times 7 \times 3 = 3 \times 2 \times 7$$

Assim, a distância percorrida até que as válvulas voltem às posições mais baixas pela primeira vez é $4{,}2 \times 3 = 12{,}6$ metros, o que corresponde à alternativa C).

Exercício 10.29 (UNICAMP) A quantia de R$ 1.280,00 será dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

a. a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
b. A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

Solução. a) Dizer que as três partes são *diretamente proporcionais* a $8, 5$ e 7 significa que são proporcionais a

$$\frac{8}{8+5+7} = \frac{8}{20}, \qquad \frac{5}{8+5+7} = \frac{5}{20} \qquad \text{e} \qquad \frac{7}{8+5+7} = \frac{7}{20}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{8}{20} \times 1.280 = 512, \qquad \frac{5}{20} \times 1.280 = 320 \qquad \text{e} \qquad \frac{7}{20} \times 1.280 = 448$$

reais.

b) Dizer que as três partes são *inversamente proporcionais* a $5, 2$ e 10 significa que são diretamente proporcionais a $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{10}$, respectivamente. Portanto, a soma dessas partes é diretamente proporcional a

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}.$$

Logo, as partes são, respectivamente, diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{2}{8}, \qquad \frac{\frac{5}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{5}{8} \qquad \text{e} \qquad \frac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{2}{8} \times 1.280 = 320, \qquad \frac{5}{8} \times 1.280 = 800 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{8} \times 1.280 = 160$$

reais.

Exercício 10.30 Uma corrente elétrica de 20 Ampères percorre um fio condutor que se bifurca em dois, o primeiro ligado a uma resistência de 4 Ohms e o outro a uma resistência 6 Ohms. Que proporções da corrente total passarão por cada um destes dois fios?

Solução. Aqui, trata-se um problema de divisão em partes inversamente proporcionais. De fato, a corrente que passa por um fio condutor é (ao menos para valores pequenos) *inversamente proporcional* à chamada *resistência* do material deste fio. Portanto, as proporções da correntes nos fios com resistências 4 e 6 Ohms, respectivamente, são iguais a

$$20 \times \frac{6}{4+6} = 12 \text{ Ampères}$$

e

$$20 \times \frac{4}{4+6} = 8 \text{ Ampères.}$$

10.6 – Equivalência de frações e propriedades das proporções

Veja os módulos sobre Números Racionais

Em nosso estudo de Aritmética de números racionais, aprendemos que frações como $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ são equivalentes ou iguais:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

De fato

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}.$$

Outra forma de justificar a equivalência (ou igualdade) destas duas frações é a seguinte: multiplicando cada uma das frações pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores que, neste caso, é igual a 12, obtemos

$$12 \times \frac{3}{4} = 12 \times \frac{9}{12}.$$

Cancelando um fator 4 no primeiro membro e um fator 12 no segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$3 \times 3 = 9.$$

De modo similar, verifiquemos se as frações

$$\frac{6}{9} \quad \text{e} \quad \frac{8}{12}$$

são equivalentes. Neste caso, multiplicamos cada uma das frações pelo produto dos dois denominadores, isto é, 12×9, e checamos se a igualdade

$$12 \times 9 \times \frac{6}{9} = 12 \times 9 \times \frac{8}{12}$$

é realmente verdadeira. Cancelando um fator 9 no lado esquerdo e um fator 12 no lado direito, chegamos a

$$12 \times 6 = 9 \times 8.$$

Como essa última igualdade é verdadeira (os dois produtos valem 72), concluímos que, de fato, as frações $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ são iguais.

Assim como neste exemplo particular, o seguinte *teste* é válido para provar que duas frações *quaisquer* são equivalentes:

Teorema 10.6.1 As frações

$$\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d}$$

são iguais ou equivalentes se, e somente, se

$$a \times d = b \times c.$$

Dizemos, portanto, que essas frações são iguais se, e somente, se o produto dos *meios* b e c for igual ao produto dos *extremos* a e d.

Demonstração. Se as frações são iguais, então, multiplicando os dois lados da igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

pelo produto $b \times d$, temos

$$\frac{a}{b} \times b \times d = b \times d \times \frac{c}{d}.$$

Portanto, dividindo b por b do lado esquerdo e d por d do lado direito, obtém-se

$$a \times d = b \times c,$$

ou seja, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Na direção contrária, se o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja, se

$$a \times d = b \times c,$$

então, dividindo os dois lados desta igualdade pelo produto $b \times d$, obtém-se

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}.$$

Portanto, dividindo d por d do lado esquerdo e b por b do lado direito, chegamos à igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

■

Exercício 10.31 Calcule o valor de x para o qual as frações

$$\frac{x}{8} = \frac{9}{12}$$

são equivalentes (ou seja, iguais).

Solução. Estas frações são iguais se, e somente se, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, isto é,

$$12 \times x = 8 \times 9.$$

Dividindo os dois lados desta expressão por 12, concluímos que as frações são iguais se, e somente se,

$$x = \frac{8 \times 9}{12},$$

isto é, se e somente se,

$$x = 6.$$

Sendo assim, a igualdade entre frações é escrita como

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12}.$$

Estas frações são, de fato, equivalentes, uma vez que

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}.$$

Conforme veremos nos exercícios subsequentes, as duas equivalências listadas no teorema a seguir são muito úteis para lidarmos *aritmeticamente* com frações.

Teorema 10.6.2 Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

e

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração. Sendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Isso é o mesmo que

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Por outro lado, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica

$$ad = bc$$

e, portanto,

$$ad + cd = bc + cd.$$

Assim,

$$(a+c)d = (b+d)c,$$

o que equivale a

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d},$$

como queríamos demonstrar. ■

Exercício 10.32 A razão entre a soma e a diferença de dois números positivos, distintos um do outro, é 2. Quais a razão entre esses números?

Solução. Sendo a e b os dois números, temos

$$\frac{a+b}{a-b} = 2.$$

Aplicando o Teorema 10.6.1, obtemos

$$2(a-b) = a+b,$$

ou seja,

$$a = 3b.$$

Assim, a razão entre esses números é

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Exercício 10.33 As idades de pai e filho somam 60 anos, sendo que a razão entre essas idades é igual a 3. Calcule as idades dos dois.

Solução. Sejam a e b as idades de pai e filho, respectivamente. Sendo assim, temos

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Portanto, pela primeira parte do Teorema 10.6.2, temos

$$\frac{a+b}{b} = \frac{3+1}{1},$$

ou seja

$$\frac{60}{b} = 4.$$

Logo,

$$b = \frac{60}{4} = 15 \text{ anos}$$

(a idade do filho), de onde segue que a idade do pai é

$$a = 60 - 15 = 45 \text{ anos}.$$

Exercício 10.34 As proporções de rapazes e moças em duas turmas da segunda série de uma escola de tempo parcial são ambas iguais a $\frac{3}{4}$. Sabendo que o total de alunos nestas turmas é de 84 alunos, calcule quantas moças há nas duas turmas, ao todo.

Solução. Sejam a e b as quantidades de rapazes e moças, respectivamente, na primeira turma; e c e d as quantidades de rapazes e moças, respectivamente, na segunda turma. O enunciado informa que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$$

Portanto, pela segunda parte do Teorema 10.6.2, temos

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$$

Como a quantidade total de alunos é 84, temos

$$(a+c) + (b+d) = 84.$$

A quantidade total de moças é $b+d$. Para calculá-la, usamos novamente a segunda parte do Teorema 10.6.2:

$$\frac{(a+c)+(b+d)}{b+d} = \frac{3+4}{4}$$

ou, ainda,

$$\frac{84}{b+d} = \frac{7}{4}.$$

Logo,

$$7(b+d) = 84 \times 4,$$

ou seja,

$$b+d = \frac{84 \times 4}{7} = 48.$$

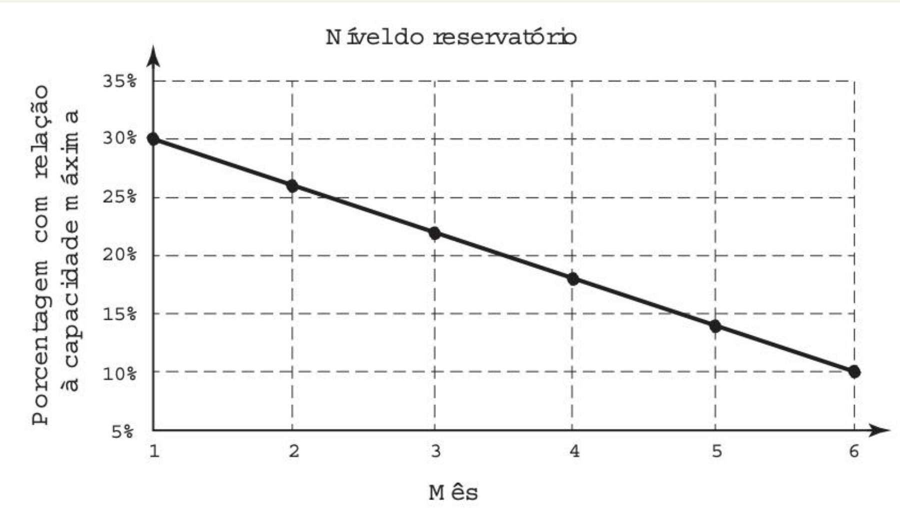
10.7 – Relações lineares entre grandezas

O Ceará tem boa parte de seu território em um região semiárida, com chuvas irregulares. As estações de *seca* têm se tornado cada vez mais frequentes. Já no ano de 1901, em *Os Sertões*, Euclides da Cunha mencionava este fenômeno, falando do centenário açude do Cedro em Quixadá:

> *As cisternas, poços artesianos e raros, ou longamente espaçados lagos como o de Quixadá, têm um valor local, inapreciável. Visam, de um modo geral, atenuar a última das consequências da seca – a sede.*

Os nossos reservatórios precisam repor suas cargas de água para abastecer o consumo humano, a agricultura industrial e de subsistência e o saneamento básico. A propósito deste contexto da importância do manejo adequado de recursos hídricos, consideremos o seguinte problema, retirado de uma dos cadernos do ENEM 2016.

Exercício 10.35 (ENEM 2016, Questão 158, Caderno Azul) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, especialmente os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por certo período, sendo o resultado mostrado no gráfico abaixo. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

Antes de passarmos à solução, cumpre fazermos algumas observações. Inicialmente, o *gráfico*, ou seja, a linha reta inclinada na figura, passa pelos seis pontos destacados com círculos. Um destes pontos corresponde ao *mês* 1 e à *porcentagem* $30\% = \frac{30}{100}$ da capacidade máxima do reservatório. Outro destes pontos corresponde ao mês 6 e à porcentagem $10\% = \frac{10}{100}$ da capacidade máxima do reservatório.

Portanto, as observações foram feitas em um intervalo de tempo de

$$6 - 1 = 5 \text{ meses,}$$

durante o qual a porcentagem da capacidade máxima do reservatório *variou negativamente*, isto é, diminuiu

$$10\% - 30\% = -20\% = -\frac{20}{100}.$$

Podemos *inferir* que, a cada mês, neste período de 5 meses, a porcentagem da capacidade máxima diminuiu

$$\frac{-20\%}{5} = -4\% = -\frac{4}{100},$$

ou seja $-\frac{4}{100}$ a cada mês. Sendo assim, no mês 2, ou seja, passado 1 mês, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} = \frac{26}{100}.$$

Da mesma forma, no mês 3, isto é, passados 2 meses, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% \times 2 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 2 = \frac{22}{100}.$$

Procedendo de forma similar, vemos que, passados 3 meses e 4 meses, ou seja, nos meses 4 e 5, respectivamente, as porcentagens da capacidade máxima seriam

$$30\% - 4\% \times 3 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 3 = \frac{18}{100}$$

e

$$30\% - 4\% \times 4 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 4 = \frac{14}{100},$$

respectivamente. Finalmente, no mês 6, isto é, após 5 cinco meses, a porcentagem da capacidade máxima ainda disponível no reservatório seria dada por

$$30\% - 4\% \times 5 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 5 = \frac{10}{100},$$

como já havíamos observado. Podemos organizar estes dados na seguinte tabela

Mês	Porcentagem da capacidade máxima
1	30%
2	26%
3	22%
4	18%
5	14%
6	10%

De modo geral, se indicamos por x a variável *mês*, cujos valores estão exibidos na coluna da esquerda, então os números na coluna da direita representam os valores da variável

$$y = 30\% - 4\% \times (x - 1)$$

ou seja

$$y = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}(x - 1). \tag{10.3}$$

Esta variável representa a *porcentagem da capacidade máxima* do reservatório no mês x. A expressão (10.3) significa que y *depende linearmente* de x. Reagrupando os termos, podemos escrever

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x.$$

Essa dependência linear pode ser vista na tabela: de uma linha para outra, temos um *incremento* (ou seja, um aumento) de um mês. Portanto, a variável x aumenta uma unidade de uma linha para a seguinte. Esta variação de x implica uma variação de y: de uma linha para outra da tabela, a variável y *diminui* 4 pontos percentuais, isto é, 4%. Portanto, passados x meses, a *variação* correspondente de y neste período é igual a

$$y - \frac{30}{100} = -\frac{4}{100}(x-1).$$

Logo, a *variação* de y, dividida (ou comparada) com a *variação* de x, é dada por

$$\frac{y - \frac{30}{100}}{x-1} = -\frac{4}{100}.$$

Portanto, a razão entre as *variações* de y e de x é constante e igual a $-\frac{4}{100}$.

Pela análise da figura, percebemos que os valores nas duas colunas da tabela correspondem às coordenadas dos pontos destacados na linha reta inclinada. Estes pontos, alinhados sobre a reta inclinada, têm coordenadas

$$(x, y),$$

onde

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x. \tag{10.4}$$

Portanto, as coordenadas desses pontos são, exatamente, os números da tabela: o primeiro número do par ordenado, o valor da variável x, é lido na primeira coluna da tabela. O segundo número do par ordenado, o valor da variável y (correspondente ao valor de x) é informado na coluna da direita.

O enunciado da questão faz referência à *tendência linear* observada no gráfico: isto significa, justamente, que as coordenadas dos pontos dependem linearmente uma da outra. Vimos acima que esta relação linear é dada por (10.4).

Finalizando estes comentários, observamos, pela figura do enunciado, que o gráfico da relação entre x e y, ou seja, a linha inclinada, determina um triângulo ABC (acompanhe na próxima figura) com lados BC de "comprimento"

$$30\% - 10\% = 20\% = \frac{20}{100}$$

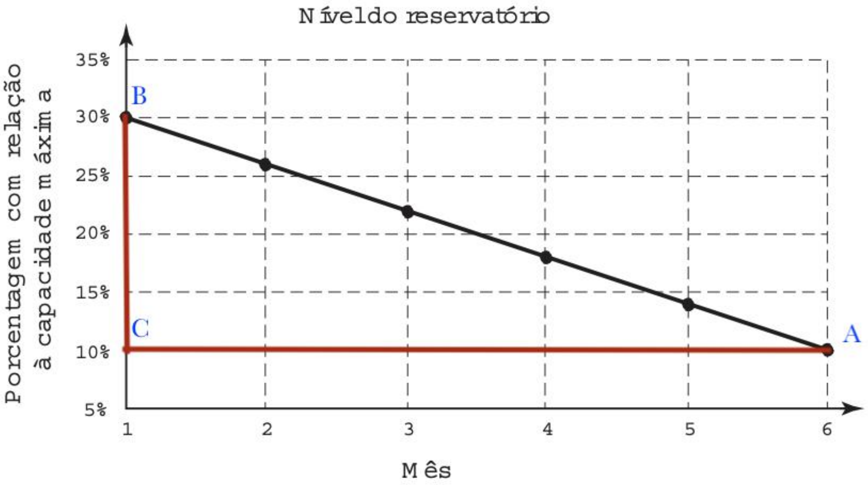
no eixo vertical, e AC de comprimento

$$6 - 1 = 5$$

no eixo horizontal. Portanto, a *inclinação* desta reta pode ser medida como a seguinte razão

$$\frac{\frac{20}{100}}{5} = \frac{4}{100}.$$

Esta razão é a *tangente* do ângulo no vértice A, oposto ao lado BC, conforme a figura.



Note ainda que, trocando o sinal deste valor, obtemos o coeficiente $-\frac{4}{100}$ que multiplica a variável x na expressão (10.4)

Por fim, apresentamos a resolução da questão, utilizando boa parte da discussão anterior.

Solução. Devemos calcular em qual mês (ou seja, para qual valor da variável x) teremos "zerado" toda a capacidade do reservatório, isto é, teremos

$$y = 0.$$

Considerando a expressão (10.4), vemos que isto ocorre quando

$$\frac{34}{100} - \frac{4}{100}x = 0,$$

ou seja, quando

$$x = \frac{\frac{34}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{34}{4} = \frac{32}{4} + \frac{2}{4} = 8 + \frac{1}{2} = 8{,}5.$$

Logo, mantida a tendência observada no gráfico, o reservatório atingirá o nível zero de sua capacidade entre o mês 8 e o mês 9, dois meses e meio depois do mês 6.

10.8 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 10.36 Quais das seguintes igualdades são válidas?

A) $\frac{15}{24} = \frac{40}{64}$.

B) $\frac{10}{12} = \frac{22}{24}$.

C) $\frac{19}{24} = \frac{57}{72}$.

D) $\frac{54}{14} = \frac{75}{35}$.

Corrija as igualdades que não são verdadeiras.

Exercício 10.37 Calcule o valor de x para o qual a seguinte igualdade de frações é válida:

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{18}.$$

Exercício 10.38 Determine o valor positivo de x para o qual a seguinte igualdade de frações é válida:

$$\frac{x}{9} = \frac{16}{x}.$$

Exercício 10.39 Calcule as seguintes porcentagens:

A) 10% de 480.
B) 25% de 480.
C) 150% de 480.
D) 0,15% de 480.

Exercício 10.40 Suponha que uma passagem de ônibus de Iguatu a Juazeiro do Norte custe R$ 21,00. Calcule quanto passaria a custar caso houvesse:

A) aumento de 20% no preço;
B) diminuição de 20% no preço;
C) aumento de 30%, seguido de diminuição de 10%;
D) diminuição de 10%, seguida de aumento de 30%;
E) dois aumentos sucessivos de 10%;
F) duas diminuições sucessivas de 10%.

Exercício 10.41 Sabendo que duas variáveis, x e y, são diretamente proporcionais, complete a tabela com os valores adequados destas variáveis:

Valores de x	10	16	20	?	20	32
Valores de y	15	24	?	18	30	48

Qual a razão entre os valores das variáveis x e y?

Exercício 10.42 Sabendo que duas variáveis, x e y, são inversamente proporcionais, complete a tabela com os valores adequados destas variáveis:

Valores de x	10	15	20	?	30	40
Valores de y	36	24	?	15	12	9

Qual o produto dos valores das variáveis x e y?

Exercício 10.43 Em uma escola de ensino médio, a razão entre os números de alunos que estudam pela manhã e os que estudam à tarde é de $\frac{3}{5}$. Sabendo que há um total de 240 alunos nestes dois turnos, quantos estudam pela manhã?

Exercício 10.44 Um suco de caju em uma caixa de 960 mililitros tem $\frac{3}{4}$ de polpa de fruta e $\frac{1}{4}$ de água. Aline diluiu este suco, adicionando 120 mililitros de água. Qual passou a ser a proporção de polpa no suco após este acréscimo de água?

Exercício 10.45 Os 45 colegas de uma turma da primeira série de uma escola em Arneiroz decidiram dividir entre eles as despesas de uma excursão nas férias de fim de ano. Porém, com a desistência de 5 deles, cada um dos demais terá que pagar, agora, R$ 7,00 a mais do que pagaria antes. Qual o total das despesas da excursão a serem pagas por todos?

Exercício 10.46 Um relógio em um torre da igreja de uma pequena cidade atrasa dois segundos a cada hora. Quanto tempo de atraso acumulará em 2 dias?

Exercício 10.47 (UECE) Sejam x e y duas grandezas inversamente proporcionais. Se x sofre um acréscimo de 25%, o decréscimo percentual sofrido por y é:

A) 20%.
B) 22%.
C) 24%.
D) 25%.

Exercício 10.48 (OBM – 1999) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos ele ainda pode carregar?

A) 132.
B) 144.
C) 146.
D) 148.
E) 152.

Exercício 10.49 Uma vendedora em uma loja de roupas recebe, como comissão, 6% do valor das vendas que realizar. Qual o total de vendas que ela deve realizar para que receba R$ 120,00?

Exercício 10.50 O preço de um litro de gasolina custava R$ 0,55 em julho de 1994, quando o Plano Real foi lançado. No fim de 2019, chegou a R$ 4,55. Qual o percentual de aumento do litro de gasolina em todo este período?

Nível 2

Exercício 10.51 Com um consumo de 6.000 litros, o volume de uma cisterna baixou de $\frac{3}{4}$ para $\frac{3}{8}$ de sua capacidade total. Sabendo disto, determine a capacidade desta cisterna em litros.

Exercício 10.52 (IBMEC) Se aplicativo e meio executa tarefa e meia em minuto e meio, quantas tarefas executa um aplicativo em seis minutos?

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 8.
E) 16.

Exercício 10.53 (ESPM – 2003) Certo grupo de funcionários realiza certo trabalho em 6 horas. Descobriu-se que, se eles fossem 40% mais eficientes, com 2 funcionários a menos esse mesmo trabalho seria feito em 5 horas. O número de funcionários em questão é:

A) 10.
B) 11.
C) 12.
D) 13.
E) 14.

Exercício 10.54 (Mackenzie) Um taxista inicia o dia de trabalho com o tanque de combustível de seu carro inteiramente cheio. Percorre 325 quilômetros e reabastece, sendo necessários 25 litros para completar o tanque; em seguida, percorre 520 quilômetros até esvaziar completamente o tanque. Com base nessas informações, concluímos que a capacidade do tanque do carro, em litros, é:

A) 40.
B) 45.
C) 50.
D) 55.
E) 60.

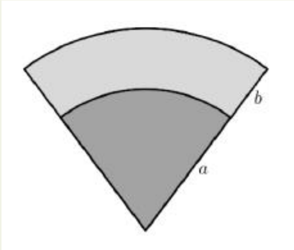
Exercício 10.55 (UECE – Vestibular 2018.1) Se a base de um triângulo é aumentada em 10% e a altura diminuída em 10%, então, em relação à área do triângulo alterado, comparada com a área do triângulo inicial, é correto afirmar que ela

A) diminui 1%;
B) permanece a mesma;
C) aumenta 0,01%;
D) diminui 0,1%.

Exercício 10.56 (FUVEST – 2016) Um veículo viaja entre dois povoados da Serra da Mantiqueira, percorrendo a primeira terça parte do trajeto à velocidade média de 60 quilômetros por hora, a terça parte seguinte a 40 quilômetros por hora e o restante do percurso a 20 quilômetros por hora. O valor que melhor aproxima a velocidade média do veículo nessa viagem, em quilômetros por hora, é:

A) 32,5.
B) 35.
C) 37,5.
D) 40.
E) 42,5.

Exercício 10.57 (UNICAMP – Vestibular 2018) A figura abaixo exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área.



A razão $\frac{a}{b}$ é igual a

A) $\sqrt{3}+1$.
B) $\sqrt{2}+1$.
C) $\sqrt{3}$.
D) $\sqrt{2}$.

Exercício 10.58 Considere que um reservatório de água, inicialmente vazio, seja abastecido por duas torneiras. Para enchê-lo sozinha, a primeira torneira gastaria 2 horas. Já usando apenas a segunda, seriam gastas três horas para encher o reservatório. Com as duas torneiras abertas simultaneamente, o tanque estará cheio em:

A) 36 minutos.
B) 60 minutos.
C) 72 minutos.
D) 300 minutos.

Exercício 10.59 (Portal da Matemática, Módulo Razões e Proporções, Exercício 7, adaptado) Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas simultaneamente. Observou-se que o comprimento restante de uma era o dobro do comprimento restante da outra. Por quanto tempo ficaram acesas?

Exercício 10.60 A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

Alimento	A	B
Quantidade	20 gramas	20 gramas
Valor energético	60 quilocalorias	80 quilocalorias
Sódio	10 miligramas	20 miligramas
Proteína	6 gramas	1 grama

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre as quantidades de proteína em A e em B é igual a:

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 10.

Exercício 10.61 (OBM) Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa em 30 segundos, enquanto Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta de número 80, Paulinho estará completando a volta de número:

A) 79.
B) 78.
C) 76.
D) 77.
E) 75.

Exercício 10.62 (Portal da Matemática, Módulo de Razões e Proporções, Exercício 15) Dois recipientes, R_1 e R_2, contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções $3:5$ em R_1 e $2:3$ em R_2. Juntando-se, em um terceiro recipiente, os conteúdos de R_1 e R_2, qual a proporção de água e álcool nesta mistura?

Exercício 10.63 De julho a novembro de 2019, o preço de quilograma de carne subiu, em média, 25%. Após este período de alta de preços, houve uma redução de 20%, de novembro para dezembro de 2019. O que aconteceu, portanto, com o preço da carne em dezembro com relação a julho?

A) Aumentou 5%.
B) Aumentoiu 10%.
C) Aumentou 45%.
D) Aumentou 50%.

Exercício 10.64 (UNICAMP – Vestibular 2018) Dois anos atrás, certo carro valia R$ 50.000,00 e, atualmente, vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a:

A) R\$ 25.600,00.
B) R\$ 24.400,00.
C) R\$ 23.000,00.
D) R\$ 18.000,00.

Exercício 10.65 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 6) A razão entre a área do quadrado inscrito em um semicírculo de raio R e a área do quadrado inscrito em um círculo de raio R é:

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) $\frac{3}{4}$.
D) $\frac{2}{5}$.
E) $\frac{1}{4}$.

Exercício 10.66 (OBM – 1998) Para fazer 12 bolinhos, preciso de exatamente de 100 gramas de açúcar, 50 gramas de manteiga, meio litro de leite e 400 gramas de farinha. A maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500 gramas de açúcar, 300 gramas de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha é:

A) 48.
B) 60.
C) 72.
D) 54.
E) 42.

Nível 3

Exercício 10.67 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 7) Um comerciante comprou mercadorias para revendê-las. Ele deseja marcar essas mercadorias com preços tais que, ao dar descontos de 20% sobre os preços marcados, ele ainda obtenha um lucro de 25% sobre o preço de compra. Em relação ao preco de compra, o preco marcado nas mercadorias é:

A) 30% maior.
B) 40% maior.
C) 45% maior.
D) 50% maior.
E) mais de 50% maior.

Exercício 10.68 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 10) Duas velas do mesmo tamanho são acesas no mesmo instante. A primeira é consumida totalmente em 4 horas e a segunda, em 3 horas. Suponha que cada uma das velas seja consumida a uma velocidade constante. Após serem acesas, o tamanho da primeira vela será o triplo do tamanho da segunda, decorridas:

A) 2 horas e 45 minutos.
B) 2 horas e 40 minutos.
C) 2 horas e 48 minutos.
D) 2 horas e 52 minutos.
E) 2 horas e 30 minutos.

Exercício 10.69 (Colégio Militar de Fortaleza – 2007) Daniel tem ração suficiente para alimentar quatro galinhas durante 18 dias. No fim do sexto dia, ele comprou mais duas galinhas. Com o restante da ração, ele poderá alimentar suas galinhas durante:

A) 2 dias.
B) 4 dias.
C) 6 dias.
D) 8 dias.
E) 10 dias.

Exercício 10.70 (Colégio Militar de Salvador – 2007) Rodrigo e Júnior trabalham carregando caminhões. Para carregar um caminhão, Rodrigo leva 20 minutos. Juntos, conseguem fazê-lo em 15 minutos. Em quanto tempo Júnior, sozinho, é capaz de carregar um caminhão?

(A) 15 minutos.
(B) 20 minutos.
(C) 35 minutos.
(D) 45 minutos.
(E) 60 minutos.

Exercício 10.71 (Canguru 2014, Nível J, Questão 15) Um tipo especial de jacaré tem sua cauda com comprimento igual a um terço de seu comprimento total. Sua cabeça tem 93 cm de comprimento, correspondente a um quarto do comprimento total, descontada a cauda. Qual é o comprimento total do jacaré, em centímetros?

A) 186.
B) 372.
C) 490.
D) 496.
E) 558.

Exercício 10.72 (Canguru 2014, Nível J, Questão 17) Ana andou 8 km com velocidade constante de 4 km/h e passou a correr com velocidade constante de 8 km/h. Quanto tempo ela correu com esta velocidade até que a sua velocidade média no percurso atingiu 5 km/h ?

A) 15 minutos.
B) 20 minutos.
C) 30 minutos.

D) 35 minutos.
E) 40 minutos.

Exercício 10.73 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 158) O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em www1.folha.uol.com.br. Acesso em 26 de abril de 2020 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:

A) R$ 900,00.
B) R$ 1.200,00.
C) R$ 2.100,00.
D) R$ 3.900,00.
E) R$ 5.100,00.

Exercício 10.74 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 159) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 metros cúbicos de concreto. Qual é o volume de cimento, em metros cúbicos, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A) 1,75.
B) 2,00.
C) 2,33.
D) 4,00.
E) 8,00.

Exercício 10.75 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 163) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

A) R$ 15,00.
B) R$ 14,00.
C) R$ 10,00.
D) R$ 5,00.
E) R$ 4,00.

Exercício 10.76 (FGV, 2017, Prova C - Rosa, Questão 15) O custo de produção de uma peça é composto de: 40% de mão de obra; 25% de matéria-prima; 20% de energia elétrica e 15% das demais despesas. Num certo momento, ocorrem os seguintes aumentos: mão de obra, 10%; matéria-prima, 20%; energia elétrica, 15%; e demais despesas, 10%. O aumento percentual no custo total da peça foi de

A) 13,0%.
B) 13,5%.
C) 12,0%.
D) 12,5%.
E) 11,5%.

Nível 4

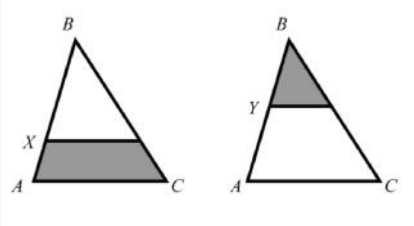
Exercício 10.77 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 167 - adaptado) Suponha que uma peça de cerâmica, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 centímetros e 15 centímetros. Após o cozimento da argila, necessário para fabricar a cerâmica, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça de cerâmica, após o cozimento, ficou reduzida em:

A) 4%.
B) 20%.
C) 36%.
D) 64%.
E) 96%.

Exercício 10.78 (Canguru 2014, Nível J, Questão 24) Numa ilha, os sapos são verdes ou azuis. O número de sapos azuis cresceu 60%, enquanto que o número de sapos verdes diminuiu 60%. Se a razão entre o número de sapos azuis e o número de sapos verdes é, agora, o inverso dessa razão antes da variação, qual a porcentagem da variação do número total de sapos?

A) 0%.
B) 20%.
C) 30%.
D) 40%.
E) 50%.

Exercício 10.79 (Canguru 2015, Nível J, Questão 24) No triângulo ABC, podemos traçar as paralelas à base AC, pelos pontos X e Y, tal que as áreas das regiões cinzentas sejam iguais. Se a razão $BX : XA$ é igual a $4 : 1$, então qual é a razão $BY : YA$?



A) 1 : 1.
B) 2 : 1.
C) 3 : 1.
D) 3 : 2.
E) 4 : 3.

Exercício 10.80 (Colégio Militar de Fortaleza, 2006 – adaptado) Um comerciante vendeu $\frac{3}{10}$ de seu estoque de certo produto com lucro de 30% e o restante desse estoque com prejuízo de 10%. No total da operação, o comerciante:

(A) teve lucro de 20%.
(B) Teve lucro de 2%.
(C) Teve prejuízo de 20%.
(D) Teve prejuízo de 2%.
(E) Não teve lucro nem prejuízo.

Exercício 10.81 (Colégio Naval, 1980) Um pai resolveu premiar seus três filhos com R$ 1.900,00. Esse valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais aos números de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2, 4 e 5. Então, a quantia que caberá ao que recebeu menos é de:

(A) R$ 300,00.
(B) R$ 400,00.
(C) R$ 500,00.
(D) R$ 600,00.
(E) R$ 700,00.

Exercício 10.82 (UEG, 2010) Em uma liga metálica de 160 gramas, o teor de ouro é de 18%, enquanto o restante é prata. A quantidade de gramas de prata que deve ser retirada desta liga a fim de que o teor de ouro passe a ser de 32%, é:

(A) 80.
(B) 70.
(C) 66.
(D) 46.

Exercício 10.83 (OBM, 2005) Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, composto de 20% de polpa e 80 % de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

(A) 5%.
(B) 7%.
(C) 8%.
(D) 20%.
(E) 60%.

Exercício 10.84 (OBM, 2005) Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio

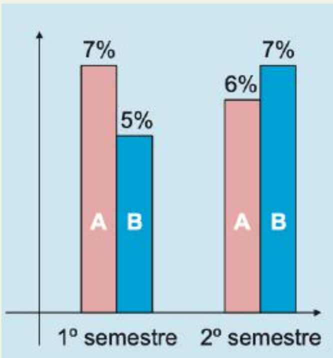
"*Compre um e leve outro pela metade do preço.*"

Outro anúncio que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é

(A) "*Leve dois e pague um.*"
(B) "*Leve três e pague um.*"
(C) "*Leve três e pague dois.*"
(D) "*Leve quatro e pague três.*"
(E) "*Leve cinco e pague quatro.*"

Exercício 10.85 (OBM, 2004) Na população de uma espécie rara de 1.000 aves da Floresta Amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

Exercício 10.86 (OBMEP 2016, Primeira Fase, Nível 3, Questão 4) O gráfico representa o percentual de aumento do preço de dois produtos, A e B, em uma mercearia, no primeiro e no segundo semestres do ano passado.



As afirmativas abaixo referem-se ao período completo do ano passado. Qual delas é a correta?

A) O aumento percentual do preço de B foi maior do que o de A.
B) O aumento percentual dos precos dos dois produtos foi o mesmo.
C) O aumento percentual do preço de A foi de exatamente 13%.
D) O preço de A diminuiu e o de B aumentou.
E) O aumento percentual do preço de B foi maior do que 12%.

Exercício 10.87 (OBMEP 2017, Primeira Fase, Nível 3, Questão 17) Ana e Beto foram os únicos candidatos na eleição para a presidência do grêmio estudantil da escola em que ambos estudam. Nessa eleição, votaram ao todo 1.450 alunos. Durante a apuração, houve um momento em que Ana teve a certeza de que, no final, ela teria pelo menos a metade dos votos válidos. Naquele momento, os percentuais eram os seguintes:

- votos não válidos: 20% dos votos apurados;
- votos em Ana: 60% dos votos válidos;
- votos em Beto: 40% dos votos válidos.

Quantos votos tinham sido apurados até aquele momento?

A) 1.110.
B) 1.150.
C) 1.200.
D) 1.250.
E) 1.300.