

Material Estruturado

MATEMÁTICA



Autores:

Angelo Papa Neto

Revisor:

Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:

Equipe Cientista Chefe

Módulo de Transição

Álgebra e Geometria Vetoriais - Parte 1



Coordenadoria de
Formação Docente e
Educação a Distância
CED



GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Educação


CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO


FUNCAP

11 | Álgebra e Geometria Vetoriais

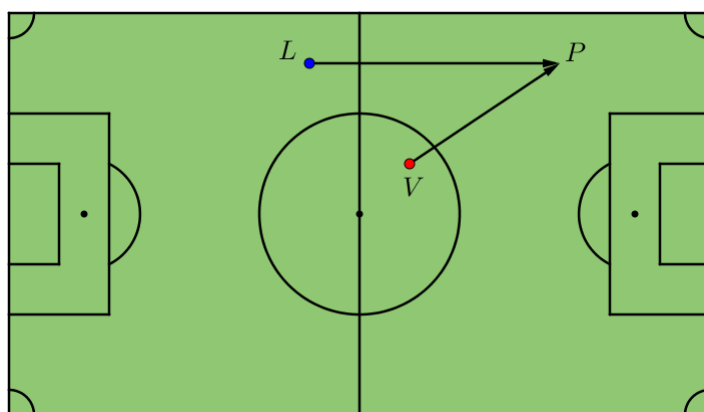
11.1 – Noção de vetor

Muitas grandezas físicas, como temperatura, pressão, massa ou densidade, ficam bem determinadas por um número. Outras grandezas, como velocidade, aceleração e força, não ficam definidas apenas com um número, que estabelece a sua intensidade, mas também precisam que sejam indicadas suas direção e sentido. Para descrevê-las de modo adequado, precisamos de um objeto geométrico chamado *vetor*. Neste módulo, vamos introduzir a noção de vetor, explorando sua conexão com a noção de deslocamento, ou translação, de pontos no plano ou no espaço.

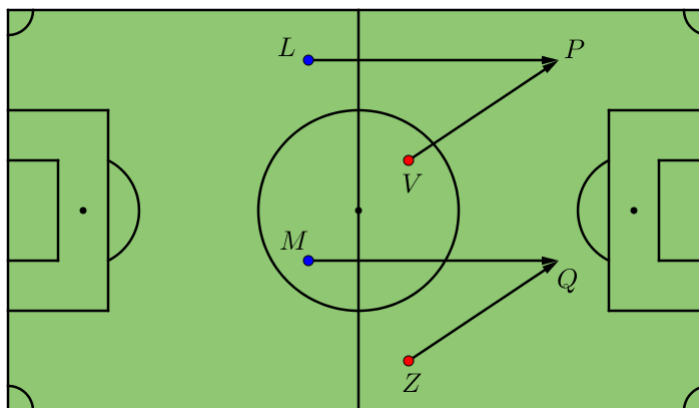


11.1.1 – Deslocamentos

A figura abaixo representa um campo de futebol onde dois times disputam uma partida. O pequeno círculo azul L representa o lateral esquerdo de um dos times. Ele recebe um lançamento e **se desloca** até o ponto P , a partir de onde pretende fazer o cruzamento para a grande área do time adversário. O pequeno círculo vermelho V representa o volante do outro time, que precisa interceptar o cruzamento. Para isso, ele também **se desloca** até o ponto P .



Os dois deslocamentos estão representados, na figura acima, por **setas**. Note que é necessário que usemos setas para que fique claro que os jogadores estão indo para o ponto P , ou seja, para que fique claro, além da direção, qual é o **sentido** do movimento de cada jogador.



Suponhamos, agora, que, no mesmo lance desta partida de futebol, um meio campista M se desloca até o ponto Q , nas proximidades da área adversária, para receber o cruzamento do seu companheiro de time. Enquanto isso, o zagueiro Z se desloca até o ponto Q para tentar interceptá-lo.

Observe que, embora os jogadores M e Z partam e cheguem em pontos diferentes dos dois jogadores anteriores (o lateral e o volante), *os deslocamentos são os mesmos*. Isso significa que, se o jogador M estivesse na posição do jogador L no início da jogada, após o deslocamento, em vez de chegar ao ponto Q , chegaria ao ponto P . Também, o mesmo valeria para o zagueiro Z , que, se estivesse na posição do volante V , ao final do movimento estaria no ponto P e não no ponto Q . Em resumo:

Um deslocamento pode ser representado por uma seta. Além disso, outra seta que tenha a mesma direção, sentido e tamanho representa o mesmo deslocamento.

Obs

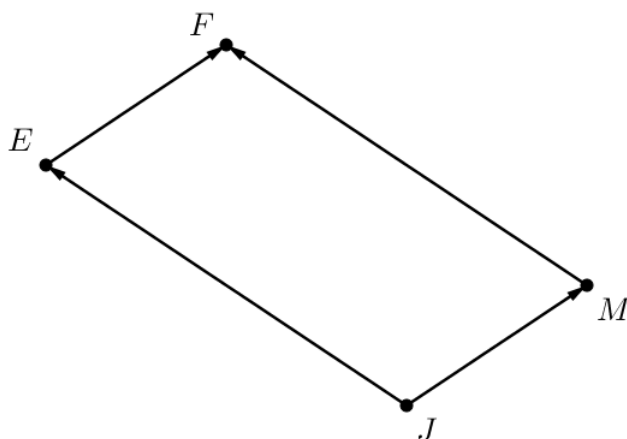
Ainda em relação à situação descrita acima, se representarmos o deslocamento do lateral por $\overrightarrow{LP}$ e o deslocamento do meio campista por $\overrightarrow{MQ}$, escreveremos $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{MQ}$ para significar que o deslocamento de ambos foi o mesmo nessa jogada. A mesma conclusão vale para os deslocamentos $\overrightarrow{VP}$ do volante e $\overrightarrow{ZQ}$ do zagueiro: podemos escrever $\overrightarrow{VP} = \overrightarrow{ZQ}$ para indicar que os deslocamentos são os mesmos.

Exercício 11.1 João e Maria moram em casas diferentes e estudam em escolas diferentes. Sabendo que os deslocamentos de ambos de casa até a escola são iguais, o que se pode afirmar sobre os deslocamentos entre as casas dos dois e entre suas escolas?

Solução. Pode-se afirmar que o deslocamento entre as casas é igual ao deslocamento entre as escolas. De fato, vamos representar pelo ponto J a casa de João e pelo ponto M a casa de Maria, pelo ponto E a escola de João e pelo ponto F a escola de Maria.

O enunciado afirma que os deslocamentos $\overrightarrow{JE}$ e $\overrightarrow{MF}$ são iguais (veja a figura a seguir), logo, os segmentos JE e MF têm um mesmo comprimento e são paralelos, e os sentidos (de J para E e de M para F são *concordantes*). Isso garante que o quadrilátero $EJMF$ é um paralelogramo. Em particular, a Geometria básica implica que os segmentos EF e JM têm um mesmo comprimento, são paralelos e os sentidos de E para F e de J para M também

concordam. Assim, ir da casa de João à casa de Maria requer o mesmo deslocamento que ir da escola de João à escola de Maria, ou seja, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{JM}$.



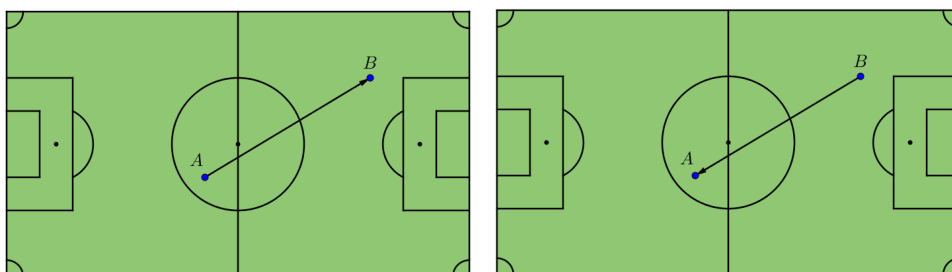
11.1.2 – A ideia de vetor

A ideia fundamental da seção anterior é que *deslocamentos podem ser representados por setas que não são afetadas por mudança de posição*. Vamos, agora, tratar essa ideia de maneira mais precisa, e chegaremos à noção de *vetor*.

Dados dois pontos A e B , o segmento de reta AB é o conjunto dos pontos pertencentes à reta determinada por A e B que estão *entre* A e B , incluindo esses dois pontos. Se escolhermos uma *orientação* para o segmento AB , passaremos a chamá-lo de **segmento orientado**.

Escolher uma orientação para um segmento significa simplesmente eleger um dos pontos, A ou B , para ser o *ponto inicial*, ou **origem**, do segmento, o que torna o outro ponto, automaticamente, o *ponto final*, ou **extremidade** do segmento. Ao representarmos um segmento orientado, desenhamos uma seta que parte da origem e vai até a extremidade do segmento.

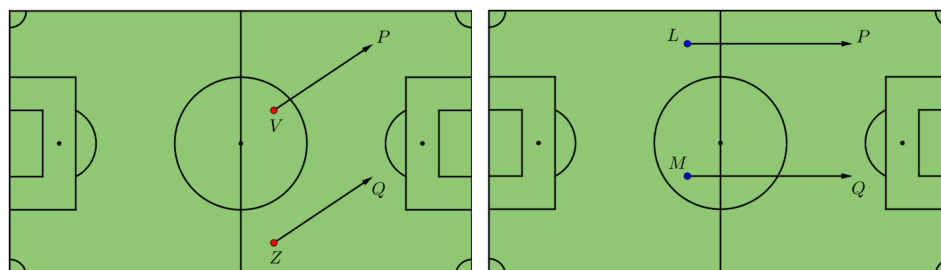
Usamos a mesma notação AB para representar um segmento não orientado ou orientado, com a diferença de que, no caso de um segmento orientado, AB e BA têm significados diferentes: em AB , a origem é A e a extremidade é B ; em BA ocorre o oposto. Por isso, se estivermos falando de segmentos orientados, escreveremos $BA = -AB$ para indicar que são conjuntos de pontos iguais, mas com orientações *opostas*.



Por exemplo, nas duas figuras acima, AB representa o deslocamento de um jogador que vai do ponto A até o ponto B , enquanto $BA = -AB$ representa o

deslocamento de um jogador que vai do ponto B até o ponto A . De outro modo, AB representa o deslocamento de ida, enquanto BA representa o deslocamento de volta, entre os pontos A e B .

Observando as figuras a seguir, podemos dizer que o zagueiro Z e o volante V deslocaram-se a mesma distância, na mesma direção e no mesmo sentido, portanto, o deslocamento de ambos foi *o mesmo*. Analogamente, o deslocamento do lateral L e do meia M foi o mesmo. No entanto, os segmentos orientados VP e ZQ são *diferentes*, assim como são diferentes os segmentos orientados LP e MQ , pois *estão em posições diferentes*.



Dessa forma, para representar adequadamente a noção de deslocamento, precisamos de um objeto geométrico que seja similar a um segmento orientado, mas que *possa ser movido livremente, desde que se preservem comprimento, direção e sentido*.

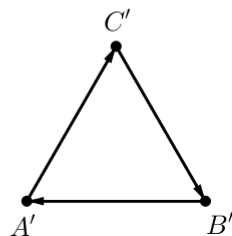
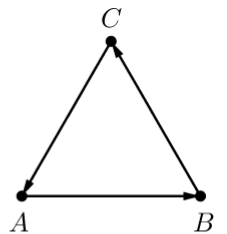
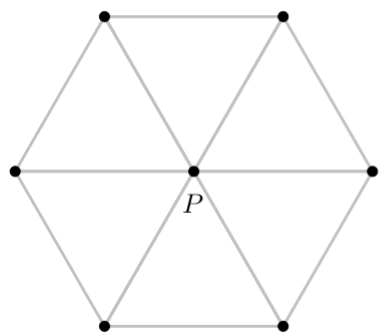
Dados dois pontos A e B , o **vetor** $\overrightarrow{AB}$ é o segmento orientado AB , ou qualquer outro segmento orientado que tenha *mesmo comprimento, direção e sentido* que AB . Por exemplo, nas figuras acima, $\overrightarrow{VP} = \overrightarrow{ZQ}$ e $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{MQ}$. Dizemos que um vetor $\vec{v}$ é **representado** por um segmento orientado AB se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Assim, embora os segmentos orientados VP e ZQ sejam diferentes (e possamos escrever $VP \neq ZQ$), os vetores que eles representam são iguais. De maneira análoga, os segmentos orientados LP e MQ são diferentes ($LP \neq MQ$), mas os vetores que eles representam são iguais.



A direção, o sentido e o comprimento de um vetor, são a direção, o sentido e o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente.

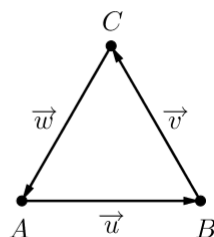
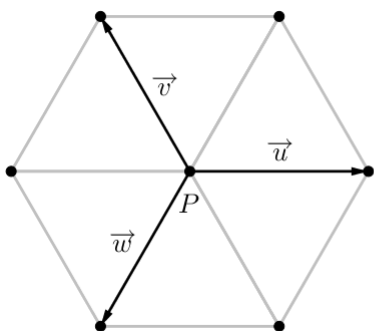
Um vetor $\vec{v}$ pode ser posicionado livremente, ou seja, para cada ponto C , existe um ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Isso significa que existe um segmento orientado CD com origem em C e que representa $\vec{v}$. Neste caso, dizemos que o vetor $\vec{v}$ está **aplicado** em C .

Exercício 11.2 Na figura a seguir, ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos equiláteros de lados paralelos e de mesmos comprimentos. O ponto P é o centro de um hexágono regular, que tem o mesmo lado que os dois triângulos e é tal que as diagonais traçadas são paralelas aos lados dos triângulos.

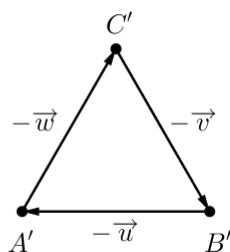
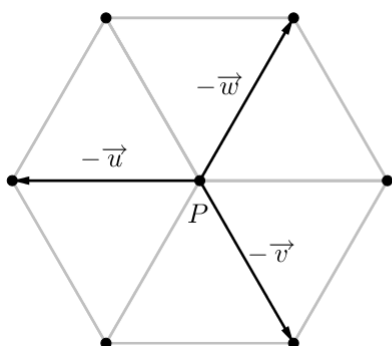


- (a) Transporte os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ para o ponto P .
 (b) Transporte os vetores $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{C'B'}$ e $\overrightarrow{B'A'}$ para o ponto P .

Solução. (a) Vamos chamar $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$. Esses três vetores, aplicados em P , são exibidos na figura a seguir.



- (b) Temos: $-\vec{u} = \overrightarrow{A'B'}$, $-\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$ e $-\vec{w} = \overrightarrow{C'A'}$. Esses três vetores, aplicados em P , são exibidos na figura a seguir.



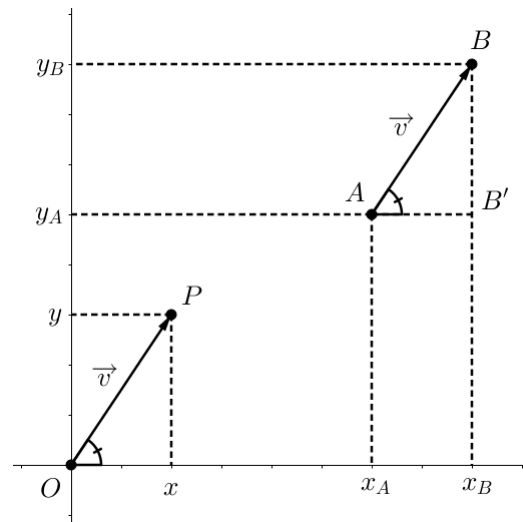
■

11.1.3 – Coordenadas

Sabemos que, uma vez escolhido e fixado um sistema de eixos cartesianos, cada ponto P do plano corresponde a um par ordenado de números reais. Escrevemos $P = (x, y)$ e dizemos que os números reais x e y são as *coordenadas* do ponto P . O plano com um sistema de eixos cartesianos é chamado de plano cartesiano. Da mesma forma, veremos a seguir que cada vetor $\vec{v}$ em um plano cartesiano também corresponde a um par ordenado de números reais.

Dado um vetor $\vec{v}$, seja OP o segmento orientado que representa $\vec{v}$, com origem no ponto $O = (0, 0)$. Dizemos que as **coordenadas do vetor** $\vec{v}$ são as coordenadas do ponto P , que é a extremidade de $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. De outro modo, as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ são as coordenadas do ponto P para onde $\vec{v}$ desloca a origem $O = (0, 0)$ do sistema de coordenadas.

Se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ são dois pontos tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então os segmentos orientados AB e OP têm mesmo comprimento, direção e sentido. Logo, os triângulos retângulos ABB' e OPx são congruentes (veja a figura a seguir).



Em particular, os catetos desses dois triângulos têm comprimentos respectivamente iguais, de sorte que $x = x_B - x_A$ e $y = y_B - y_A$. Podemos denotar isso de forma conjunta, escrevendo

$$(x, y) = (x_B - x_A, y_B - y_A). \quad (11.1)$$

Portanto, as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ são obtidas subtraindo-se as coordenadas de sua origem das coordenadas de sua extremidade.

Definindo a *subtração de pares ordenados* coordenada a coordenada, isto é, fazendo $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$, podemos escrever (11.1) de um modo mais simples: $\vec{v} = (x, y) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = B - A$, ou seja,

$$\vec{v} = B - A. \quad (11.2)$$

Assim, podemos dizer que *um vetor é a diferença entre sua extremidade e sua origem*.

A igualdade (11.2) pode ser reescrita como

$$B = A + \vec{v}, \quad (11.3)$$

onde podemos entender a operação “+” de duas maneiras:

- **Algebricamente:** como a soma das coordenadas de $\vec{v} = (x, y)$ às coordenadas de $A = (x_A, y_A)$, obtendo-se as coordenadas de $B = (x_B, y_B) = (x_A + x, y_A + y)$.
- **Geometricamente:** como o deslocamento do ponto A , dado pelo vetor $\vec{v}$, resultando no ponto B .

Exercício 11.3 A posição inicial de Pedro, em relação a um sistema de coordenadas escolhido e fixado, é o ponto $P = (1, 2)$. Ele se desloca até o ponto A , sendo seu deslocamento dado pelo vetor $\vec{v} = (-2, 1)$. Em seguida, ele vai de A até o ponto B e seu deslocamento, nesta etapa, é dado pelo vetor $\vec{w} = (3, 2)$. Encontre as coordenadas do ponto B .

Solução. Uma vez que o deslocamento de P até A é dado por $\vec{v}$, temos $\vec{v} = \vec{PA} = A - P$. Assim, $A = P + \vec{v} = (1, 2) + (-2, 1) = (1 + (-2), 2 + 1) = (-1, 3)$. Por outro lado, o deslocamento de A até B é dado por $\vec{w} = (3, 2)$, logo, $\vec{w} = \vec{AB} = B - A$, ou seja, $B = A + \vec{w} = (-1, 3) + (3, 2) = (-1 + 3, 3 + 2) = (2, 5)$. ■

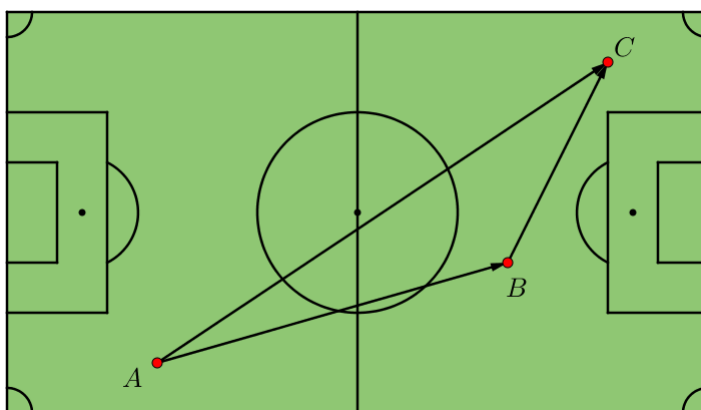
11.2 – Aritmética de vetores

Na seção anterior, vimos que é possível identificar pontos e vetores com pares ordenados de números reais. Nesta seção, vamos considerar duas operações que podem ser feitas com vetores, descrevendo o efeito das mesmas geometricamente e em termos de pares ordenados.



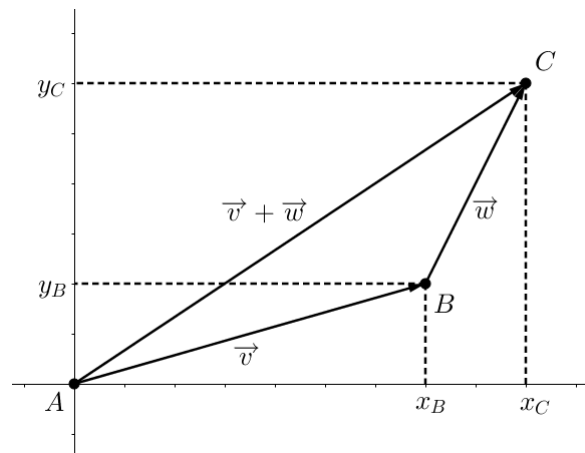
11.2.1 – Adição de vetores

Consideremos dois deslocamentos sucessivos feitos por um jogador em um campo de futebol. Primeiro ele vai do ponto A até o ponto B e depois do ponto B até o ponto C . O resultado desses dois deslocamentos, quando considerados conjuntamente, é um deslocamento de A até C , conforme mostrado na figura a seguir.



Interpretamos o deslocamento de A até C como a *soma* dos deslocamentos de A até B e de B até C , ou seja, se $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{w} = \vec{BC}$, então $\vec{v} + \vec{w} = \vec{AC}$. Aqui, o símbolo “+” significa que o deslocamento $\vec{v} + \vec{w}$ foi obtido fazendo-se primeiro o deslocamento $\vec{v}$ e depois o deslocamento $\vec{w}$.

Agora, consideremos um sistema cartesiano de coordenadas cuja origem coincide com a origem A do vetor $\vec{v}$. As coordenadas de $\vec{v} + \vec{w}$ são as coordenadas de C , ou seja, $\vec{v} + \vec{w} = (x_C, y_C)$. Se $\vec{w} = (x, y)$, então $\vec{w} = \vec{BC} = C - B = (x_C - x_B, y_C - y_B)$, e isso implica que $x = x_C - x_B$ e $y = y_C - y_B$. Portanto, $\vec{v} + \vec{w} = (x_C, y_C) = (x_B + x, y_B + y)$.



De acordo com a construção acima, as coordenadas da soma $\vec{v} + \vec{w}$ são as somas das coordenadas de $\vec{v}$ e de $\vec{w}$.

Uma vez que percebamos isto, podemos pensar no plano cartesiano simplesmente como o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

formado pelos pares ordenados de números reais, definindo uma **adição de pares ordenados** por

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'). \quad (11.4)$$

Essa adição corresponde exatamente à adição de vetores que consideramos acima.

Escrever a adição de vetores na forma (11.4) nos permite chegar a algumas conclusões importantes sobre esta operação. Por exemplo, se $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$, então

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ &= (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y) \\ &= \vec{v} + \vec{u}. \end{aligned}$$

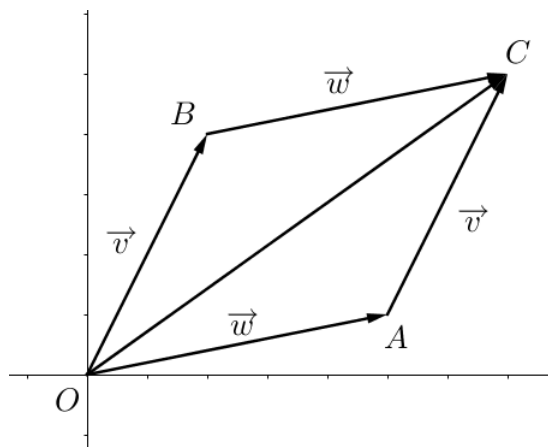
A propriedade acima é chamada *comutatividade*. De outra forma, dizemos que a adição de vetores é uma operação *comutativa*.

Podemos chegar à mesma conclusão usando a definição geométrica de adição, que vimos anteriormente. Vamos fazer isso resolvendo um problema.

Exercício 11.4 Dois amigos partem do ponto O , na figura a seguir. Um deles vai até o ponto A e o outro vai até o ponto B , sendo que os pontos O , A e B não são colineares. Ao chegarem aos pontos A e B , eles se comunicam, passando um ao outro as informações sobre que direção e sentido seguiram nessa primeira parte do percurso, e também qual a distância percorrida por cada um. De posse dessas informações, o que cada um dos amigos deve fazer para que, ao final da segunda parte do percurso, ambos se encontrem

no ponto C ?

Solução. Para que ambos cheguem ao mesmo ponto C , basta que, na segunda parte do percurso, eles invertam seus deslocamentos, ou seja, basta que cada um siga na mesma direção e sentido e percorra a mesma distância que o outro percorreu na primeira parte do percurso. A figura a seguir mostra uma possibilidade para os deslocamentos dos dois amigos:



Ainda em relação à figura acima, OB e AC são segmentos orientados que representam o mesmo vetor $\vec{v}$, ao passo que OA e BC são segmentos orientados que representam o mesmo vetor $\vec{w}$. Assim, o segmento orientado OC , que coincide com a diagonal do paralelogramo $OACB$, representa o vetor $\vec{v} + \vec{w}$ e também o vetor $\vec{w} + \vec{v}$, que, por isso, são iguais.

Outra propriedade importante da adição de vetores é a *associatividade*: se $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ e $\vec{w} = (x'', y'')$, então

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$

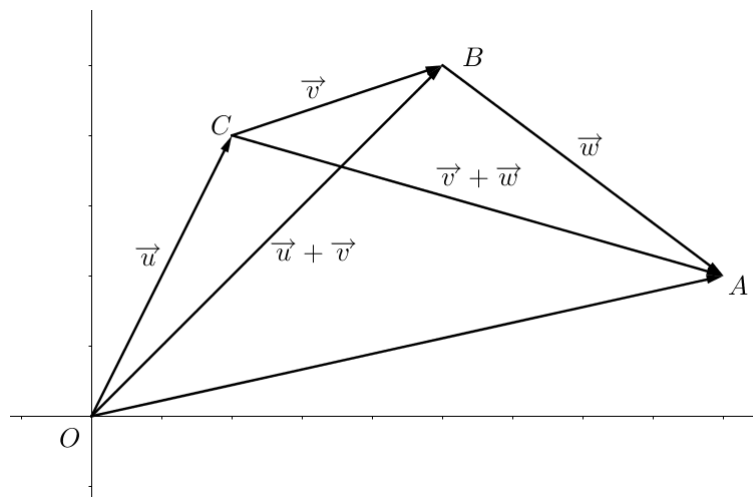
Essa igualdade ocorre porque, por um lado,

$$\begin{aligned}\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (x, y) + ((x', y') + (x'', y'')) \\ &= (x, y) + (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x + (x' + x''), y + (y' + y''));\end{aligned}$$

por outro, como em cada coordenada estamos somando números reais e a adição de números reais é associativa, podemos escrever

$$\begin{aligned}(x + (x' + x''), y + (y' + y'')) &= ((x + x') + x'', (y + y') + y'') \\ &= (x + x', y + y') + (x'', y'') \\ &= ((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.\end{aligned}$$

Aqui também podemos raciocinar geometricamente. Imagine, na figura a seguir, uma pessoa que esteja a princípio no ponto O e se desloque primeiro até o ponto C , depois de C até B e, finalmente, de B até A . O deslocamento de O até A pode ser visto como a soma do deslocamento de O até C com o deslocamento de C até A , ou como a soma do deslocamento de O até B com o deslocamento de B até A .



De um modo mais formal, na figura acima, os segmentos orientados OC , CB e BA representam, respectivamente, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. De acordo com a regra geométrica para a adição de vetores, o segmento orientado OB representa a soma $\vec{u} + \vec{v}$ e o segmento orientado CA representa a soma $\vec{v} + \vec{w}$. Assim, o segmento orientado OA representa a soma $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ e, também, a soma $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. Portanto, essas soma são iguais.

Obs

Escrevemos $\mathbf{0}$ ou $\vec{0}$ para denotar o **vetor nulo**. Este é o vetor representado pelos segmentos orientados AB , com $A = B$, ou seja, pelos segmentos orientados *degenerados em um ponto*. Como segmentos degenerados não têm direção nem sentido, o vetor nulo não tem direção nem sentido. As coordenadas do vetor nulo são dadas por $\vec{0} = (0,0)$.

A propriedade que torna o vetor nulo importante é a seguinte: se $\vec{v}$ é um vetor qualquer, então

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \text{ e } \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Por conta dessas igualdades, dizemos que $\vec{0}$ é o *elemento neutro* para a adição de vetores. Interpretado como um deslocamento, o vetor $\vec{0}$, aplicado a um ponto A , resulta no próprio ponto A , isto é, não desloca o ponto A .

11.2.2 – Multiplicação de vetor por número

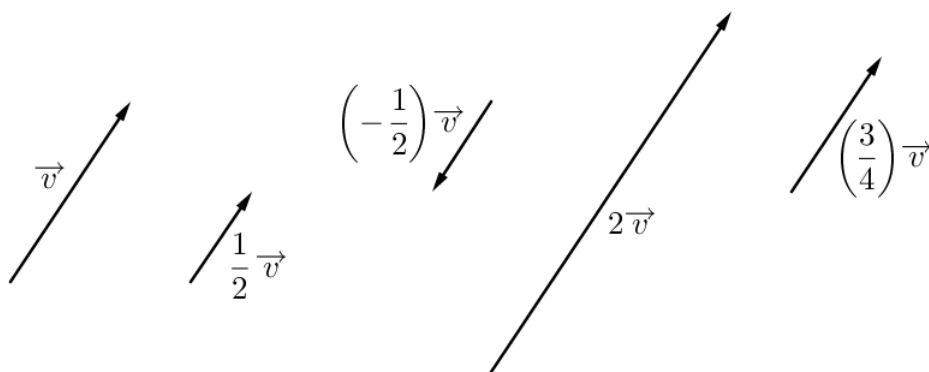
Agora, vamos considerar uma nova operação sobre vetores, desta vez envolvendo vetores e números. Se a é um número real e $\vec{v}$ é um vetor, usaremos a notação $a\vec{v}$ com o seguinte significado:

- Se $\vec{v} = \vec{0}$, então $a\vec{v} = \vec{0}$, para qualquer a real.
- Se $a = 0$, então $a\vec{v} = \vec{0}$;
- Se $a > 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $a\vec{v}$ é um vetor com mesma direção e sentido que $\vec{v}$ e com comprimento igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por a . (Lembremos que o comprimento de um vetor é o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente).
- Se $a < 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $a\vec{v}$ é um vetor com mesma direção que $\vec{v}$, com sentido contrário ao de $\vec{v}$ e com comprimento igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|a|$ (o valor absoluto de a).

Em palavras, ao multiplicar um vetor não nulo por um número real diferente de zero, obtemos um vetor com a mesma direção e que pode ter o mesmo sentido, se o número for positivo, ou sentido contrário, se o número for negativo. Além disso, a multiplicação de um vetor por um número $a \neq 0$ resulta em um vetor cujo tamanho é $|a|$ vezes o tamanho do vetor inicial.

Em qualquer caso, dizemos que $a\vec{v}$ é o **produto por escalar** do vetor $\vec{v}$ pelo escalar a . Essa nomenclatura vem da Física, onde grandezas não vetoriais são ditas *escalares*.

A figura a seguir representa alguns múltiplos escalares de um vetor $\vec{v}$. Note que todos esses vetores têm a mesma direção. O vetor $\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{v}$ tem o sentido contrário ao de $\vec{v}$, pois o escalar $-\frac{1}{2}$ é negativo. Os outros vetores têm o mesmo sentido de $\vec{v}$. O tamanho de cada vetor depende do tamanho de $\vec{v}$ e do escalar que o multiplica. Por exemplo, $2\vec{v}$ tem o dobro do tamanho de $\vec{v}$.



Em termos de coordenadas, se $\vec{v} = (x, y)$, então

$$a\vec{v} = (ax, ay). \quad (11.5)$$

A fim de compreendermos o porquê da validade da igualdade acima, notemos inicialmente que, se $a = 0$, então, por definição $0\vec{v} = \vec{0} = (0, 0)$. Da mesma forma, se $\vec{v} = \vec{0} = (0, 0)$, então $a\vec{v} = a\vec{0} = \vec{0} = (0, 0) = (a \cdot 0, a \cdot 0)$.

Podemos, então, supor que $a \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Neste caso, a identidade (11.5) pode ser verificada observando que os vetores $\vec{v}$ e $a\vec{v}$ são hipotenusas de triângulos retângulos semelhantes (veja a figura a seguir).

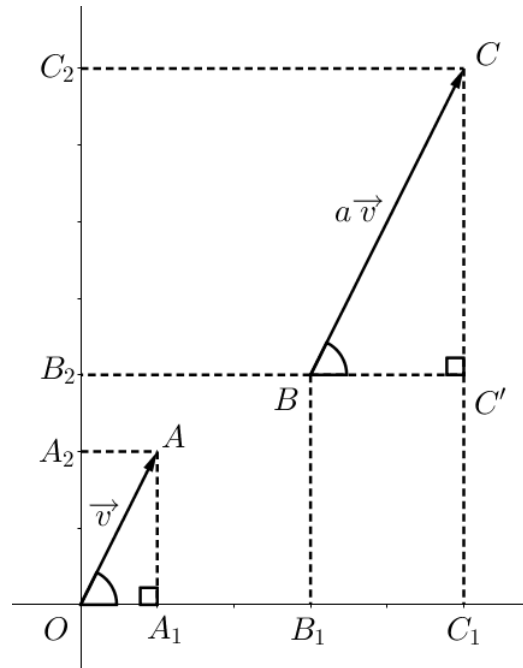
Os triângulos retângulos OAA_1 e BCC' são semelhantes porque os vetores $\vec{v}$ e $a\vec{v}$ têm a mesma direção, logo, os ângulos $\angle AOA_1$ e $\angle CBC'$ são congruentes. Dessa semelhança, segue que

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}} = a,$$

assim, $\overline{B_1C_1} = a\overline{OA_1} = ax$. Da mesma forma,

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{C'C}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}} = a,$$

logo, $\overline{B_2C_2} = a\overline{OA_2} = ay$. Portanto, as coordenadas de $a\vec{v}$ são ax e ay .



As operações *adição de vetores* e *multiplicação de vetor por escalar* podem ser feitas de modo conjunto, como nos exercícios a seguir.

Exercício 11.5 Considere os vetores $\vec{v} = (1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 1)$.

- (a) Calcule $\vec{v} + \vec{w}$, $2\vec{v} + 3\vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$.
 (b) Existem números reais x e y tais que $x\vec{v} + y\vec{w} = (2, 6)$?

Solução. (a) Vamos usar (11.4) e (11.5):

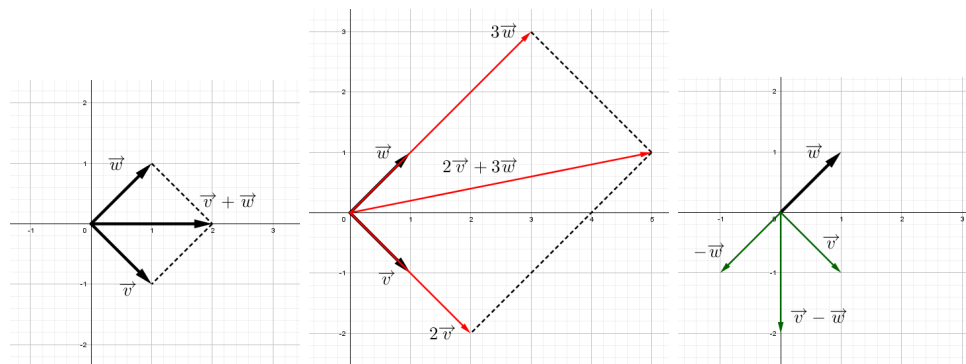
$$\vec{v} + \vec{w} = (1, -1) + (1, 1) = (1 + 1, -1 + 1) = (2, 0),$$

$$2\vec{v} + 3\vec{w} = 2(1, -1) + 3(1, 1) = (2, -2) + (3, 3) = (2 + 3, -2 + 3) = (5, 1)$$

e

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-1)\vec{w} = (1, -1) + (-1)(1, 1) = (-1, 1) + (-1, -1) = (0, -2).$$

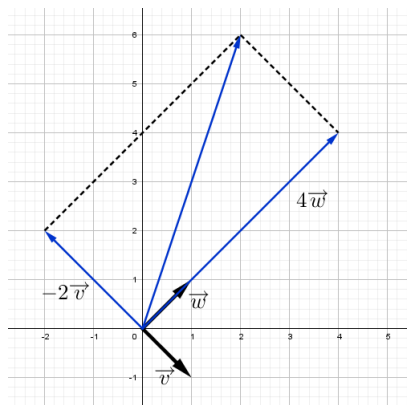
Os três vetores obtidos são exibidos na figura a seguir.



(b) Queremos decidir se existem números reais x e y tais que $x(1, -1) + y(1, 1) = (2, 6)$, ou seja, $(x, -x) + (y, y) = (2, 6)$. Somando coordenada a coordenada no primeiro membro, queremos que $(x + y, -x + y) = (2, 6)$. Como dois pares ordenados são iguais se, e somente se, suas coordenadas são iguais, a última igualdade é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

Somando as duas equações, eliminamos a incógnita x , obtendo $2y = 8$, logo, $y = 4$. Substituindo o valor de y em uma qualquer das equações, obtemos $x = -2$. Esta situação é representada geometricamente na figura a seguir.



■

Uma expressão do tipo $a\vec{v} + b\vec{w}$ é chamada de **combinação linear** dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim, no Exercício 11.5, verificamos que o vetor com coordenadas $(2, 6)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dados lá.

Exercício 11.6 Considere os vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

- Dado um vetor qualquer $\vec{v} = (x, y)$ no plano, é possível escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$?
- Obtenha todos os possíveis valores de x e y para que $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$.

Solução. (a) Observe que podemos escrever

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Logo, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear de $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

(b) Vimos em (a) que $x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$. Assim,

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Dessa forma, os únicos valores de x e y que tornam a combinação linear $x\vec{i} + y\vec{j}$ nula são $x = 0$ e $y = 0$. ■

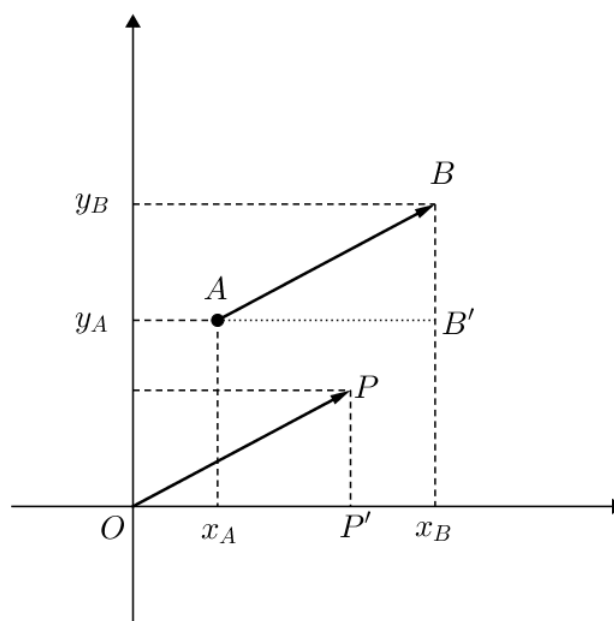
11.3 – Módulo e produto escalar

Nesta seção introduziremos a noção de *módulo* de um vetor, a qual nos permite medir a distância percorrida em um deslocamento em linha reta entre dois pontos. Discutiremos também a importante noção de *produto escalar* de vetores, com a qual poderemos decidir quando dois vetores são perpendiculares.

11.3.1 – O comprimento de um vetor

O **módulo** ou *comprimento* de um vetor é o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente. Em termos de coordenadas, se o vetor $\vec{v}$ é representado por um segmento orientado AB , com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ (veja a figura a seguir), então o módulo de $\vec{v}$ é dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \quad (11.6)$$



Nas notações da figura acima, isso é uma consequência do Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo $AB'B$.

Em particular, se $\vec{v}$ é representado por um segmento orientado OP , onde O é a origem, ou seja, $O = (0,0)$, e $P = (x_P, y_P)$, então

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}.$$

O módulo de um vetor é igual a zero se, e somente se, o vetor é o vetor nulo. De fato, se $\vec{v} = (a,b)$ é um vetor no plano, então $|\vec{v}| = 0$ é equivalente a $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, ou seja, $a^2 + b^2 = 0$, o que ocorre se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores com a mesma direção e sentido, então

$$\vec{w} = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}. \quad (11.7)$$

Realmente, uma vez que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm mesma direção e sentido, temos $\vec{w} = a \vec{v}$, com $a > 0$; então, calculando módulos, obtemos $|\vec{w}| = |a \vec{v}| = a |\vec{v}|$, logo, $a = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$.

Por outro lado, caso $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tenham mesma direção mas sentidos contrários, um raciocínio análogo ao acima fornece

$$\vec{w} = -\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}.$$

Reunimos a discussão acima na afirmação a seguir:

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores não nulos e com mesma direção, então $\vec{w} = t\vec{v}$, onde $t = \pm \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$ e escolhemos o sinal $+$ ou $-$ conforme $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tenham sentidos iguais ou contrários, respectivamente.

O número real t faz o *ajuste* do tamanho do vetor $\vec{v}$, esticando-o ou contraindo-o para que ele fique com o mesmo tamanho (mesmo módulo) que o vetor $\vec{w}$. Além disso, no caso em que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm sentidos contrários, o número real t deve ser negativo, para inverter o sentido do vetor $\vec{v}$, fazendo com que os vetores $\vec{w}$ e $t\vec{v}$ tenham sentidos iguais.

Um vetor $\vec{u}$ é chamado **unitário** se o seu módulo é igual a 1: $|\vec{u}| = 1$. Se $\vec{v}$ é um vetor não nulo, então o vetor $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$ é unitário e tem a mesma direção e sentido de $\vec{v}$. Realmente, uma vez que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos iguais, (11.7) (com $\vec{u}$ no lugar de $\vec{w}$) dá $\vec{u} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$. Portanto, $|\vec{u}| = 1$ se, e só se, $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$. É costume denotarmos o vetor unitário $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ por $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Seguiremos esse uso no restante deste módulo, sem maiores comentários.

Exercício 11.7 Encontre o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v} = (4,3)$. Encontre também os vetores de módulo 7 que têm a mesma direção de $\vec{v}$.

Solução. O módulo de $\vec{v}$ é $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Assim, o vetor unitário $\vec{u}$ que tem a mesma direção e sentido de $\vec{v}$ é

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5} \vec{v} = \frac{1}{5} (4,3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

Se $\vec{w}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$, então $\vec{w} = t\vec{v}$, para algum t real. Logo, $\vec{w} = t(4,3) = (4t, 3t)$. Para que $|\vec{w}| = 7$, devemos ter $\sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} = 7$, ou seja, $\sqrt{25t^2} = 7$. Elevando ao quadrado, obtemos $25t^2 = 49$, isto é, $t^2 = \frac{49}{25}$, o que fornece dois valores para t : $t_1 = \frac{7}{5}$ ou $t_2 = -\frac{7}{5}$. Portanto, os vetores procurados são

$$\vec{w}_1 = t_1 \vec{v} = \left(\frac{28}{5}, \frac{21}{5} \right) \quad \text{e} \quad \vec{w}_2 = t_2 \vec{v} = \left(-\frac{28}{5}, -\frac{21}{5} \right).$$

■

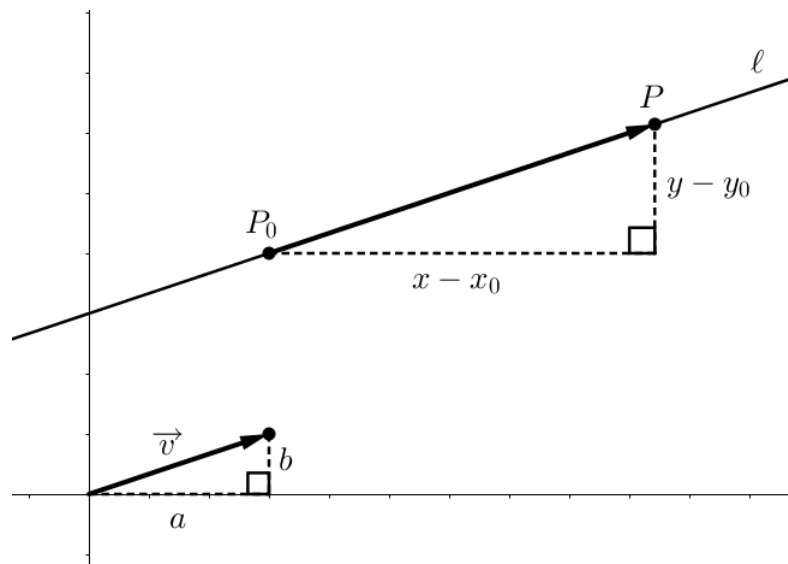
11.3.2 – Equação vetorial de uma reta

Fixado um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b)$, vamos descrever a reta que passa pelo ponto P_0 e tem a direção do vetor $\vec{v}$. Mais precisamente, queremos encontrar uma maneira de verificar se um ponto qualquer $P = (x, y)$ do plano pertence ou não a essa reta.

Sempre que tivermos um critério claro para decidir quando um ponto dado pertence ou não a essa reta, dizemos que podemos *determinar* a reta. Isso

pode ser feito usando-se *equações*. A seguir, vamos obter três tipos de equações para uma reta.

A reta ℓ que passa pelo ponto P_0 e tem a direção do vetor $\vec{v}$ é o conjunto formado por todos os pontos P tais que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$, ou seja, $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$, para algum número real t . O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor** da reta. Note que, qualquer vetor que tenha a mesma direção que a reta ℓ pode ser considerado um vetor diretor de ℓ .



Em termos de coordenadas, sendo $P = (x, y)$, temos

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) = t(a, b) = (ta, tb).$$

Assim, $x - x_0 = ta$ e $y - y_0 = tb$, isto é,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (11.8)$$

Em palavras, as expressões em (11.8) dão as coordenadas de um ponto qualquer P da reta em termos de um *parâmetro* t , que pode variar livremente no conjunto dos números reais. Podemos escrever $x(t)$ e $y(t)$, em vez de x e y para enfatizar que essas coordenadas dependem de t . Dessa forma, as equações (11.8) são denominadas de **equações paramétricas da reta**.

As duas equações em (11.8) podem ser sintetizadas na expressão

$$P = P_0 + t\vec{v}, \quad (11.9)$$

de sorte que o ponto P depende do parâmetro t . A equação (11.9) é chamada de **equação vetorial da reta**.

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, podemos igualar o valor de t calculado a partir das duas equações em (11.8), escrevendo

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (11.10)$$

Na expressão (11.10) não aparece o parâmetro t , e sim uma relação entre as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer da reta. Por isso, chamamos (11.10) de **equação cartesiana da reta**.

Exercício 11.8 Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $P_0 = (1,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (-2,1)$. Encontre o ponto de interseção dessa reta com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Solução. Qualquer ponto $P = (x,y)$ dessa reta satisfaz a condição (11.9):

$$P = P_0 + t\vec{v},$$

ou seja,

$$(x,y) = (1,2) + t(-2,1).$$

Assim, as coordenadas x e y de P dependem de t segundo as expressões $x(t) = 1 - 2t$ e $y(t) = 2 + t$.

A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta formada pelos pontos que têm abscissa e ordenada iguais, ou seja, pontos (x,y) tais que $x = y$. Para que um ponto da reta que encontramos acima seja também um ponto dessa bissetriz, devemos ter $x(t) = y(t)$, ou seja, $1 - 2t = 2 + t$. Essa equação dá $3t = -1$, logo, $t = -1/3$. Assim, o ponto de interseção procurado é

$$\left(x\left(\frac{-1}{3}\right), y\left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \left(1 - 2\left(\frac{-1}{3}\right), 2 + \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

■

Exercício 11.9 Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1,2)$ e $B = (4,3)$.

Solução. A reta determinada pelos pontos A e B passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\vec{AB} = B - A = (4,3) - (1,2) = (3,1)$. Então, as equações paramétricas da reta são dadas pela igualdade

$$(x(t), y(t)) = A + t\vec{AB} = (1,2) + t(3,1).$$

Assim, $x(t) = 1 + 3t$ e $y(t) = 2 + t$.

■



Na solução anterior, poderíamos ter escolhido $\vec{BA} = A - B = (-3, -1)$ como vetor diretor. Em consequência (usando s , em vez de t , como parâmetro), obteríamos as equações paramétricas

$$(x(s), y(s)) = B + s\vec{BA} = (4,3) + s(-3, -1) = (4 - 3s, 3 - s).$$

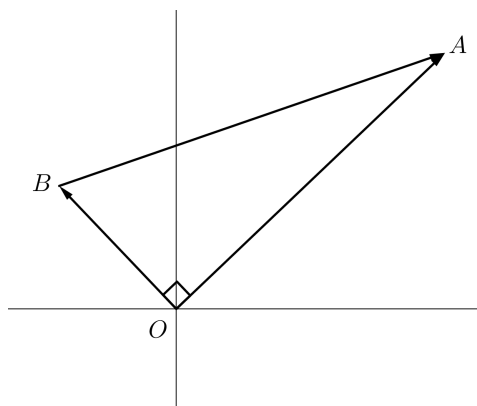
Tal descrição também é correta e é equivalente à da solução anterior. Realmente, fazendo $s = 1 - t$, obtemos

$$(4 - 3s, 3 - s) = (4 - 3(1 - t), 3 - (1 - t)) = (1 + 3t, 2 + t).$$

11.3.3 – Ortogonalidade

Dizemos que dois vetores *não nulos* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** ou **perpendiculares**, e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, se dois segmentos orientados que representem esses vetores e tenham a mesma origem formarem um ângulo reto.

A seguir, veremos uma condição necessária e suficiente sobre as coordenadas de dois vetores para que estes sejam *perpendiculares*. Vamos supor que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam vetores perpendiculares e vamos representá-los por segmentos orientados OA e OB , onde O é a origem do plano cartesiano (veja a figura a seguir). Fazendo isso, vemos que OA e OB são os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é AB .



As coordenadas dos pontos A e B são $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Assim, o Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2, \quad (11.11)$$

pode ser reescrito como

$$\left(\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \right)^2 + \left(\sqrt{x_B^2 + y_B^2} \right)^2 \quad (11.12)$$

isto é,

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2. \quad (11.13)$$

Desenvolvendo os quadrados no primeiro membro dessa igualdade e cancelando os termos que se repetem em ambos os lados, obtemos

$$-2x_A x_B - 2y_A y_B = 0,$$

ou seja,

$$x_A x_B + y_A y_B = 0. \quad (11.14)$$

O argumento acima mostra que a perpendicularidade entre os vetores $\vec{u} = (x_A, y_A)$ e $\vec{v} = (x_B, y_B)$ implica a igualdade (11.14). Isso significa que essa igualdade é uma condição *necessária* para que os dois vetores sejam perpendiculares.

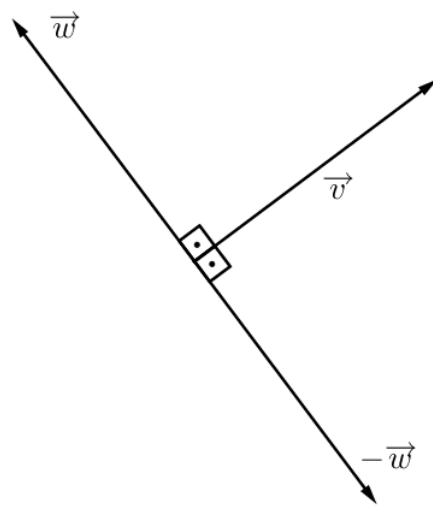
Mas, além disso, a igualdade (11.14) também é uma condição *suficiente* para a perpendicularidade de dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Isto porque, se vale

(11.14), então (11.13) também vale (pois (11.14) foi obtido de (11.13) por um simples cancelamento de parcelas). Por sua vez, (11.13) é o mesmo que (11.12), ou seja, que (11.11). Então, a recíproca do Teorema de Pitágoras garante que o triângulo OAB é retângulo em O , o que implica a perpendicularidade de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

■ **Exemplo 11.1** Dado um vetor não nulo $\vec{v} = (x, y)$, o vetor $\vec{w} = (-y, x)$ tem o mesmo módulo de $\vec{v}$ e é perpendicular a $\vec{v}$.

De fato, $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|\vec{w}| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{v}|$. Além disso, como $x(-y) + yx = 0$, podemos concluir por (11.14) que $\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{w} = (-y, x)$ são perpendiculares.

Note que o vetor $-\vec{w} = (y, -x)$ também é perpendicular a $\vec{v}$. Pode ser facilmente verificado (faça isso!) que o vetor $\vec{w}$ é obtido a partir de $\vec{v}$ por uma rotação de 90° no sentido anti-horário, enquanto $-\vec{w}$ é obtido a partir de $\vec{v}$ por uma rotação de 90° no sentido horário.



As informações do Exemplo 11.1 são importantes e, por isso, vamos resumilas a seguir:

Se um vetor $\vec{v} = (x, y)$ for girado 90° no sentido anti-horário, o resultado será o vetor $\vec{w} = (-y, x)$. Se a rotação de $\vec{v}$ for no sentido horário, o resultado será o vetor $-\vec{w} = (y, -x)$.

11.3.4 – Produto escalar

O **produto escalar** de dois vetores $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$ é o número

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = ac + bd. \quad (11.15)$$

Com a definição acima, podemos reescrever a discussão sobre perpendicularidade de vetores da seguinte maneira: se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois vetores não nulos, então:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0. \quad (11.16)$$

Exercício 11.10 São dados os pontos $A = (2,1)$ e $B = (8,5)$. Encontre um ponto P , pertencente ao eixo das abscissas, tal que o triângulo ABP seja retângulo em P .

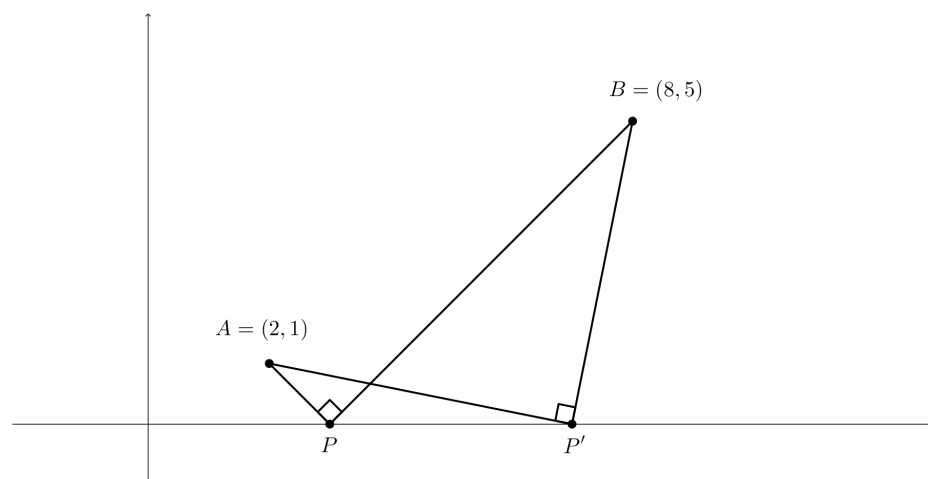
Solução. Como o ponto P pertence ao eixo das abscissas, podemos escrever $P = (x,0)$. Como ABP deve ser retângulo em P , o ângulo $\angle APB$ entre os vetores $\overrightarrow{PA} = A - P = (2-x,1)$ e $\overrightarrow{PB} = B - P = (8-x,5)$ é reto.

Então, segue de (11.16) que

$$(2-x,1) \cdot (8-x,5) = 0,$$

isto é, $(2-x)(8-x) + 5 = 0$. Por sua vez, essa equação é o mesmo que $16 - 2x - 8x + x^2 + 5 = 0$ ou, ainda, $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Como as raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$, concluímos que existem dois pontos sobre o eixo das abscissas que satisfazem a condição do problema: os pontos $P = (3,0)$ e $P' = (7,0)$. A figura a seguir ilustra esses dois pontos.



Exercício 11.11 Com o auxílio de (11.15), verifique a validade das seguintes propriedades do produto escalar:

- (1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
- (2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- (3) $(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\alpha \vec{w}) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
- (4) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

Solução. Se $\vec{v} = (a,b)$ e $\vec{w} = (c,d)$, (11.15) dá $\vec{v} \cdot \vec{w} = ac + bd$. Portanto,

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (c,d) \cdot (a,b) = ca + db = ac + bd = \vec{v} \cdot \vec{w},$$

o que demonstra (a).

Para (b), sendo $\vec{u} = (e, f)$, temos

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= (e, f) \cdot (a + c, b + d) = e(a + c) + f(b + d) \\ &= ea + ec + fb + fd = (ea + fb) + (ec + fd) \\ &= (a, f) \cdot (a, b) + (e, f) \cdot (c, d) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

Se α é um número real, então $\alpha \vec{v} = (\alpha a, \alpha b)$. Assim,

$$\begin{aligned}(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (\alpha a, \alpha b) \cdot (c, d) = (\alpha a)c + (\alpha b)d \\ &= a(\alpha c) + b(\alpha d) = (a, b) \cdot (\alpha c, \alpha d) \\ &= \vec{v} \cdot (\alpha \vec{w}).\end{aligned}$$

A demonstração de que $\vec{v} \cdot (\alpha \vec{w}) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$ é análoga e será deixada a você.

Por fim, quanto a (d), note que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a^2 + b^2 \geq 0,$$

pois uma soma de quadrados de números reais não pode ser negativa. Além disso, os cálculos acima garantem que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0,$$

o que, por sua vez, ocorre se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$, isto é, se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$. ■

Uma última observação é que podemos escrever o módulo de um vetor $\vec{v}$ como

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Realmente, sendo $\vec{v} = (x, y)$, temos

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \vec{v} \cdot \vec{v} = (x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2.$$

11.4 – Dimensões superiores a 2

“A essência da Matemática é sua liberdade”. Nesta seção vamos dar um exemplo que ilustra essa afirmação do matemático alemão George Cantor (1845–1918).

Nas seções anteriores, estudamos a noção de vetor *no plano*. Vimos que um vetor pode ser associado a um *par ordenado*. Também definimos três operações: adição, multiplicação por número e produto escalar e vimos que é possível expressar essas operações usando pares ordenados:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2),$$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

O conjunto dos pares ordenados de números reais é o *produto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que, por conveniência, representamos usando a notação $\mathbb{R}^2$. Em geral, se n é um número inteiro maior ou igual a 2, podemos escrever

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

para indicar o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo, n vezes. Esse é o conjunto formado por todas as *listas ordenadas* de n números reais: $(x_1, \dots, x_n)$. O importante, nessas listas, é que elas são conjuntos formados pelos elementos, de x_1 a x_n , onde a *posição na lista é relevante*. Por exemplo, as listas $(1, 2, 3, 4)$ e $(1, 3, 2, 4)$ têm os mesmos elementos, mas não são iguais, porque os elementos 2 e 3 não ocupam as mesmas posições nas duas listas. Duas listas $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ são iguais se, e somente se, os elementos nas mesmas posições sejam iguais, ou seja, $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

As operações entre pares ordenados que escrevemos acima, e que têm um significado geométrico, podem ser definidas da mesma maneira para listas ordenadas quaisquer:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n),$$

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Estas operações têm as mesmas propriedades algébricas que aquelas que tínhamos definido anteriormente para pares ordenados. Elas nos permitem levar as propriedades geométricas correspondentes do plano $\mathbb{R}^2$ para um “espaço” $\mathbb{R}^n$ qualquer.

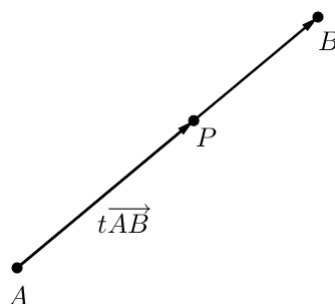
Um caso de interesse imediato é aquele em que $n = 3$, pois os trios ordenados de números reais estão em correspondência com os pontos do espaço tridimensional onde vivemos.

O exercício a seguir ilustra como podemos usar coordenadas para estender um resultado do plano para o espaço.

Exercício 11.12 Sejam $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$ dois pontos distintos em $\mathbb{R}^n$.

- Se P é um ponto do segmento AB , é possível escrever suas coordenadas em função das coordenadas de A e de B ?
- Verifique que o ponto médio M do segmento AB tem coordenadas $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$.

Solução. (a) Se P é um ponto do segmento AB , então $\overrightarrow{AP}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, logo $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, com $t \geq 0$.



Como P está entre A e B , o módulo do vetor $\overrightarrow{AP}$ é menor ou igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$, logo $|t\overrightarrow{AB}| \leq |\overrightarrow{AB}|$. Podemos dividir essa desigualdade por $|\overrightarrow{AB}|$, pois $A \neq B$. Logo $0 \leq t \leq 1$.

Suponha que $P = (p_1, \dots, p_n)$. Assim como no caso $n = 2$ (plano) que discutimos anteriormente, também aqui o vetor $\overrightarrow{AP}$ representa o deslocamento do ponto A ao ponto P . Em particular, as coordenadas desse vetor são dadas pelas diferenças entre as coordenadas de P e de A : $\overrightarrow{AP} = (p_1 - a_1, \dots, p_n - a_n)$. Comparando as coordenadas obtemos $p_1 - a_1 = t(b_1 - a_1), \dots, p_n - a_n = t(b_n - a_n)$, ou seja, $p_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, p_n = a_n + t(b_n - a_n)$. Portanto, podemos escrever as coordenadas de P :

$$P = (a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n)),$$

onde $0 \leq t \leq 1$. Se $t = 0$, então $P = A$, se $t = 1$, então $P = B$.

(b) Se $P = M$, o ponto médio do segmento AB , então o vetor $\overrightarrow{AM}$ tem metade do tamanho do vetor $\overrightarrow{AB}$. Por isso, neste caso, $t = 1/2$ e

$$M = (a_1 + (1/2)(b_1 - a_1), \dots, a_n + (1/2)(b_n - a_n)) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right).$$

■

O Exercício 11.12 é um exemplo de como o uso de coordenadas nos permite levar argumentos geométricos para os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n > 3$, mesmo que estes espaços não possam ser visualizados.

11.5 – Aritmética de matrizes

Já vimos neste módulo que vetores no plano podem ser interpretados como deslocamentos, ou seja, como um tipo de movimento, chamado *translação*.

Outros movimentos, como rotações, podem ser descritos utilizando um conceito algébrico denominado de *matriz*. Com vistas também a outras aplicações, desenvolveremos os fatos mais básicos sobre matrizes de maneira mais geral do que seria necessário para descrever rotações



11.5.1 – Matrizes

Uma tabela com m linhas e n colunas, preenchida com mn números reais, é denominada uma **matriz** $m \times n$ (lê-se, *m por n*). Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & \pi & 6 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 & 3/5 \end{pmatrix} \quad (11.17)$$

é uma matriz 3×4 , porque tem 3 linhas e 4 colunas.

Em geral, escrevemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}, \quad (11.18)$$

ou simplesmente $(a_{ij})_{m \times n}$, para indicar uma matriz $m \times n$. Os elementos a_{ij} , com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ são as **entradas** da matriz. Os índices i e j determinam a posição da entrada na matriz da seguinte forma: a entrada a_{ij}

está na linha i e na coluna j . Por exemplo, em (11.17), se $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, então $a_{23} = \pi$, pois este é o número que está escrito na segunda linha e na terceira coluna. Por outro lado, temos que $a_{14} = 3$, pois este o número que ocupa a entrada situada na primeira linha e quarta coluna.

Se uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ tem apenas uma linha, ou seja, se $m = 1$, dizemos que A é uma **matriz-linha**. Se $n = 1$, ou seja, se a matriz A tem apenas uma coluna, dizemos que ela é uma **matriz-coluna**. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são matrizes-linha, ao passo que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são matrizes-coluna.

Se a quantidade de linhas de uma matriz for igual à quantidade de colunas, ou seja, se $m = n$, diremos que a matriz é **quadrada**. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

são matrizes quadradas 2×2 , 3×3 e 4×4 , respectivamente. O número de linhas (e de colunas) de uma matriz quadrada é sua **ordem**. Assim, dizemos que as matrizes acima têm ordens 2, 3 e 4, respectivamente.

Em uma matriz quadrada de ordem n , os elementos $a_{11}, \dots, a_{nn}$ formam uma diagonal na tabela, que chamamos de **diagonal principal** da matriz. Os elementos $a_{1n}, \dots, a_{n1}$, ou seja, os elementos a_{ij} , com $i + j = n + 1$, formam a outra diagonal da tabela, chamada **diagonal secundária** da matriz. Por exemplo, na matrizes a seguir, as diagonais estão destacadas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ \mathbf{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Dizemos que uma matriz quadrada é **triangular superior** se todos os elementos que estão **abaixo** da diagonal principal são iguais a zero. Dizemos que uma matriz quadrada é **triangular inferior** se todos os elementos que estão **acima** da diagonal principal são iguais a zero. Por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

é triangular superior, enquanto a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

é triangular inferior.

Uma matriz (quadrada) que é triangular superior e também triangular inferior, é chamada de **matriz diagonal**. Em uma matriz diagonal, os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Contudo, não há exigência sobre os elementos da diagonal principal; alguns deles, ou mesmo todos, podem ser iguais a 0.

A matriz quadrada de ordem n na qual todas as entradas da diagonal principal são iguais a 1 e as demais entradas são iguais a 0 é chamada de **matriz identidade**. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 5.

Exercício 11.13 Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, as entradas satisfazem a seguinte condição: $a_{ij} = 0$ se $i > j$. O que podemos afirmar sobre essa matriz?

Solução. Na matriz A , os elementos a_{ij} tais que $i > j$ são a_{21} , a_{31} e a_{32} . Todos esses elementos são iguais a zero, pela condição dada no enunciado. Escrevendo a matriz A , obtemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz A é triangular superior. ■

Exercício 11.14 Em uma matriz quadrada de ordem 2, as entradas são dadas por $a_{ij} = i - j$. Escreva essa matriz.

Solução. $a_{11} = 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 1 - 2 = -1$, $a_{21} = 2 - 1 = 1$ e $a_{22} = 2 - 2 = 0$. Assim, a matriz procurada é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Exercício 11.15 As matrizes $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tem seus elementos dados pelas seguintes regras:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j - 1 \\ 0 & \text{se } i \neq j - 1 \end{cases}.$$

Encontre A e B para $n = 4$.

Solução. Como $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, os elementos que não estão na diagonal principal são iguais a zero. Isso significa que a matriz A é diagonal. Como $a_{ij} = 1$, se $i = j$, os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1, logo, a matriz A é a matriz identidade de ordem 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na matriz B , os únicos elementos que não são nulos são iguais a 1, e correspondem às entradas b_{ij} , tais que $i = j - 1$. Como $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, temos $j - 1 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Temos de descartar a possibilidade $j - 1 = 0$, pois ela não corresponde a um valor possível para i . Assim, as entradas não nulas da matriz B são $b_{21} = b_{32} = b_{43} = 1$ e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

11.5.2 – Adição e multiplicação por número

Podemos somar duas matrizes, desde que elas tenham os mesmos números de linhas e de colunas. Por exemplo, a adição

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pode ser feita (pois ambas as matrizes são 2×3), mas a adição

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

não pode ser feita, uma vez que as matrizes têm números diferentes de colunas.

Quando duas matrizes podem ser somadas, o resultado é uma matriz que tem os mesmos números de linhas e colunas das duas parcelas. Assim, o resultado da adição

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

é também uma matriz 2×3 .

Por outro lado, *por definição*, cada entrada da matriz-soma é a soma das entradas respectivas das duas parcelas. Em palavras, dizemos que a soma de duas matrizes é dada “entrada a entrada”. Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-2 & 1-1 & 2+0 \\ 2+1 & 0+1 & -1+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em geral, para matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n},$$

para todos $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.

Exercício 11.16 Considere as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule todas as possíveis somas dessas matrizes.

Solução. Como só podemos somar matrizes que têm os mesmos números de linhas e de colunas, as únicas somas possíveis são

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Multiplicar uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um número real α é multiplicar cada uma de suas entradas por esse número α . Por exemplo,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Em geral, se α é um número e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz, então αA é a matriz $m \times n$ cujas entradas são obtidas multiplicando-se as entradas de A por α , ou seja,

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}.$$

Obs

A adição de matrizes e o produto de uma matriz por um número têm as mesmas propriedades que a adição de vetores e o produto de um vetor por um número. Por outro lado, um vetor (no plano) pode ser visto como uma matriz linha 1×2 ou como uma matriz coluna 2×1 . Para isso, basta escrever as coordenadas do vetor como sendo as entradas da matriz (linha ou coluna).

Exercício 11.17 Escreva o vetor $\vec{v} = (1, 3)$ como uma matriz-linha e como uma matriz-coluna.

Solução. O vetor $\vec{v}$ pode ser escrito como a matriz linha $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ ou como matriz coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ■

11.5.3 – Multiplicação de matrizes

Já vimos que, assim como vetores, matrizes podem ser somadas e multiplicadas por números. Vimos também que existe outra operação entre vetores, o produto escalar, que gera um número a partir de dois vetores. Veremos agora como multiplicar matrizes. A primeira observação importante é a seguinte:

Obs

A multiplicação de matrizes é uma generalização do produto escalar.

Para explicar a observação acima, consideremos dois exemplos.

Exercício 11.18 Sueli vai fazer um bolo usando, em sua receita, os seguintes ingredientes: 500g de farinha de trigo, 500ml de leite, 200g de manteiga e 4 ovos. Ela deseja saber quanto vai gastar em seu bolo com esses ingredientes, cujos preços são dados pelas variáveis a seguir, em reais: x é o preço do quilo de farinha de trigo, y é o preço do litro de leite, z é o preço de um pote com 400g de manteiga e w é o preço de uma dúzia de ovos. Escreva uma expressão que dependa dessas variáveis e que indique a Sueli quanto ela gastará com ingredientes para fazer seu bolo.

Solução. Se 1kg de farinha de trigo custa x reais, 500g = 0,5kg custam $x/2$ reais. O mesmo vale para o leite, que custa y reais o litro, logo, 500ml = 0,5l custam $y/2$ reais. Com um pote de 400g, que custa z reais, Sueli faz duas receitas, logo, em uma receita ela gasta $z/2$ reais. Finalmente, como 4 ovos são $1/3$ de uma dúzia, o seu custo é de $w/3$ reais.

Somando os custos com cada ingrediente, obtemos

$$f(x,y,z,w) = (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w, \quad (11.19)$$

que é o total gasto por Sueli para fazer o bolo.

Podemos expressar $f(x,y,z,w)$ como um produto escalar:

$$f(x,y,z,w) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/3) \cdot (x, y, z, w).$$

Esse produto também pode ser escrito da seguinte maneira

$$f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

no qual escrevemos o vetor $(1/2, 1/2, 1/2, 1/3)$ como a matriz-linha

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$$

e o vetor (x, y, z, w) está escrito como a matriz coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}_{4 \times 1}.$$

O símbolo “.” em (11.20) não é mais um produto escalar, mas um *produto de matrizes*. ■

Inspirados pelo Exercício 11.18 definimos o produto de uma matriz linha 1×4 , $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}_{1 \times 4}$ por uma matriz coluna 4×1 , $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}_{4 \times 1}$ como sendo o número $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$.

Neste ponto, podemos fazer duas perguntas:

- (1) Qual é a vantagem de fazer isso, já que a função do Exemplo 11.18 já podia ser escrita como um produto interno?
- (2) Uma desvantagem do produto escalar é que, embora os fatores sejam vetores, o resultado é um número. Essa desvantagem permanece no nosso produto de matrizes. Temos como corrigir isso?

Em relação à primeira pergunta, a vantagem de escrever assim é que, fazendo isso, o produto pode ser generalizado e tem interpretações geométricas importantes, como veremos mais adiante. Em relação à segunda pergunta, podemos identificar números com matrizes 1×1 , ou seja, matrizes com uma linha e uma coluna. Dessa forma, o produto de matrizes, continua a ser uma matriz, mas com ordem diferente das ordens das matrizes que são fatores da multiplicação.

Exercício 11.19 Sueli quer fazer dois bolos, um deles seguindo a mesma receita do Exercício 11.18 e o outro seguindo outra receita, que leva os mesmos ingredientes, mas em outras quantidades : 400g de farinha de trigo, 250ml de leite, 100g de manteiga e 3 ovos. Escreva uma expressão que dependa das variáveis dadas no Exemplo 11.18 e que forneça o quanto Sueli gastará com ingredientes em cada bolo.

Solução. Como já vimos no Exemplo 11.18, o custo que Sueli terá para fazer o primeiro bolo é dado, em função dos preços dos ingredientes, pela expressão $f(x,y,z,w) = (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w$, que pode ser escrita como

$$f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

O custo que Sueli terá para fazer o segundo bolo é dado por uma expressão análoga, mas onde as entradas da matriz linha correspondem às novas quantidades dos ingredientes: $g(x,y,z,w) = (2/5)x + (1/4)y + (1/4)z + (1/4)w$, ou seja,

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Queremos representar as duas situações por uma única expressão. Vamos fazer isso escrevendo uma matriz coluna

$$\begin{pmatrix} f(x,y,z,w) \\ g(x,y,z,w) \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w \\ (2/5)x + (1/4)y + (1/4)z + (1/4)w \end{pmatrix}_{2 \times 1},$$

onde a entrada na primeira linha indica o custo dos ingredientes na produção do primeiro bolo e a entrada na segunda linha indica o custo do segundo bolo. Se

quisermos obter essa última matriz a partir da matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ fazendo

uma só operação, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 2/5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w \\ (2/5)x + (1/4)y + (1/4)z + (1/4)w \end{pmatrix}_{2 \times 1},$$

onde a matriz 2×4 da esquerda é formada juntando-se as matrizes-linha

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

■

Seguindo o modelo do Exemplo 11.19, podemos definir o produto de uma matriz 2×4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

por uma matriz-coluna 4×1

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}$$

como sendo a matriz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} \end{pmatrix}_{2 \times 1}.$$

Esse produto é, portanto, uma matriz coluna 2×1 , onde cada linha é um “produto escalar”. Mais precisamente, a matriz $A \cdot B$ tem duas linhas e uma coluna, portanto, tem apenas duas entradas: a da primeira linha é obtida fazendo-se o produto escalar da primeira linha da matriz A pela única coluna da matriz B . O elemento da segunda linha é obtido fazendo-se o produto escalar da segunda linha da matriz A pela única coluna da matriz B .

Podemos considerar, agora, duas matrizes A e B com uma única restrição: *o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B* . Isso permite que possamos fazer produtos escalares das linhas de A pelas colunas de B . Vamos começar com um exemplo.

■ **Exemplo 11.2** Vamos considerar as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Essas matrizes podem ser multiplicadas de duas maneiras: $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Calcule esses produtos.

Solução. Para calcularmos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

devemos proceder da seguinte maneira:

- (1) Calcular o produto escalar da primeira linha da matriz A pela primeira coluna da matriz B . Isso vai produzir a entrada que está na primeira linha e na primeira coluna da matriz $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & \\ & \end{pmatrix}.$$

Note que $(2, 2, -1) \cdot (1, 5, -1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) = 2 + 10 + 1 = 13$.

- (2) Calcular o produto escalar da primeira linha da matriz A com a segunda coluna da matriz B . Isso vai produzir a entrada que está na primeira linha e na segunda coluna da matriz $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ & \end{pmatrix}.$$

Note que $(2, 2, -1) \cdot (4, 2, 1) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 8 + 4 - 1 = 11$.

- (3) Para obtermos a entrada que ocupa a segunda linha e a primeira coluna da matriz $A \cdot B$, devemos calcular o produto escalar da segunda linha da matriz A pela primeira coluna da matriz B : $(3, 1, 2) \cdot (1, 5, -1) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) = 6$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & \end{pmatrix}.$$

- (4) Finalmente, o produto escalar da segunda linha de A pela segunda coluna de B vai produzir a entrada que está na segunda linha e na segunda coluna de $A \cdot B$: $(3, 1, 2) \cdot (4, 2, 1) = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 12 + 2 + 2 = 16$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Assim, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$.

É importante observarmos que a multiplicação de A por B só foi possível, da maneira que fizemos, porque o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .

Neste exemplo, como o número de colunas de B também é igual ao número de linhas de A , logo, além de $A \cdot B$ podemos calcular o produto $B \cdot A$. Para isso, devemos proceder da mesma forma:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cada uma das três linhas de A tem dois elementos, pois a matriz A tem duas colunas. Cada coluna de B tem dois elementos, pois a matriz B tem duas linhas. Se i e j são números pertencentes ao conjunto $\{1,2,3\}$, o produto escalar da linha i pela coluna j é a entrada da matriz $B \cdot A$ que ocupa a linha situada na linha i e coluna j do produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Além de exercitarem produtos de matrizes, os cálculos acima também mostram que o resultado da multiplicação de duas matrizes A e B *depende da ordem dos fatores*, mesmo quando ambos os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ puderem ser efetuados. De fato, os cálculos acima deram $A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$, uma matriz

2×2 , e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, uma matriz 3×3 . Portanto, a multiplicação de matrizes, em geral **não é comutativa**. ■

Em geral, se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times \ell$, então o produto $A \cdot B$ é uma matriz $C_{m \times \ell}$, e cada entrada de C é obtida fazendo-se o produto escalar de uma linha de A por uma coluna de B . Mais precisamente, se

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

é a linha i da matriz A e

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

é a coluna j da matriz B , então

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

é a entrada que ocupa a linha i e a coluna j da matriz $C = A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2\ell} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}_{n \times \ell} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i\ell} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}_{m \times \ell}$$

Exercício 11.20 É possível multiplicar, em alguma ordem, as matrizes

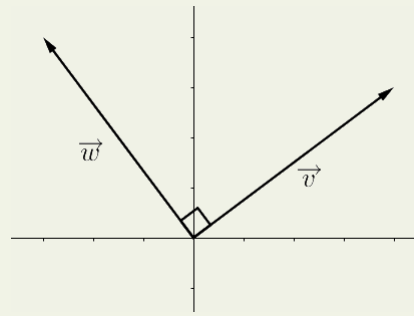
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Solução. Não! Uma das matrizes tem duas linhas e três colunas, e a outra tem cinco linhas e quatro colunas. Para que o produto fosse possível, o número de linhas de uma das matrizes teria que ser igual ao número de colunas da outra, o que não ocorre. ■

11.5.4 – Funções lineares no plano

Vamos, agora, dar uma interpretação geométrica para a multiplicação de matrizes, que, de certa forma, justifica a escolha que fizemos para a maneira de multiplicar uma matriz por outra.

Exercício 11.21 Para cada vetor não nulo $\vec{v}$ no plano, seja $\vec{w}$ o vetor obtido a partir de $\vec{v}$ fazendo-se uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem, como na figura a seguir:



Considere as coordenadas de $\vec{v}$ e $\vec{w}$: $\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{w} = (x', y')$. É possível escrever x' e y' em função de x e y ?

Solução. Como $\vec{w}$ é obtido a partir de $\vec{v}$ por uma rotação, temos que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm módulos iguais: $|\vec{v}| = |\vec{w}|$, ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$. Elevando ao quadrado esta última igualdade, obtemos

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2. \quad (11.21)$$

Uma vez que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, o que, em termos de coordenadas, é $xx' + yy' = 0$. Supondo que $y \neq 0$, temos $y' = -\frac{xx'}{y}$. Logo, a igualdade (11.21) pode ser reescrita como

$$(x')^2 + \left(-\frac{xx'}{y}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$(x')^2(x^2 + y^2) = y^2(x^2 + y^2).$$

Como estamos supondo que o vetor $\vec{v}$ não é nulo, podemos cancelar $x^2 + y^2$, obtendo $(x')^2 = y^2$, logo, $x' = \pm y$. Por fim, já que a rotação é no sentido anti-horário, devemos escolher $x' = -y$, pois a abscissa x' de $\vec{w}$ deve ter sinal contrário ao da ordenada y de $\vec{v}$ (veja a figura anterior). Substituindo $x' = -y$ em $y' = -xx'/y$, obtemos $y' = x$.

Em resumo, a rotação de 90° no sentido anti-horário, em torno da origem, do vetor $\vec{v} = (x, y)$, resulta no vetor $\vec{w} = (-y, x)$.

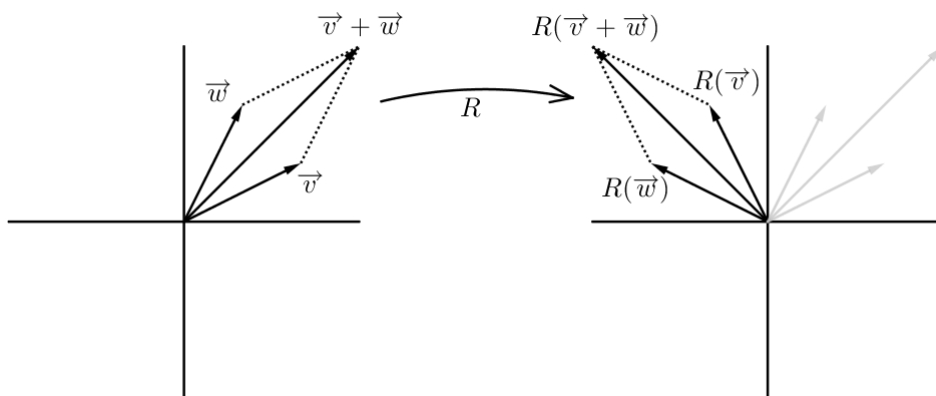
Identificando esses dois vetores com matrizes-coluna e observando que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (11.22)$$

vemos que a ação de girar o vetor $\vec{v} = (x, y)$ de 90° no sentido anti-horário é o mesmo que multiplicar a matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Em outras palavras, **essa rotação pode ser representada por uma multiplicação de matrizes.** ■

Podemos ver a rotação do Exercício 11.21 como uma função, ou transformação, R , do plano no plano, que leva cada vetor $\vec{v} = (x, y)$ em um vetor $\vec{w} = R(\vec{v}) = (-y, x)$. O vetor $\vec{w}$ é obtido pela rotação de 90° , no sentido anti-horário, em torno da origem. Assim, identificando os pares (x, y) e $(-y, x)$ com matrizes colunas, a rotação R pode ser vista como a multiplicação pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, da maneira descrita em (11.22).

Na figura a seguir, à esquerda, são mostrados dois vetores, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e sua soma $\vec{v} + \vec{w}$.



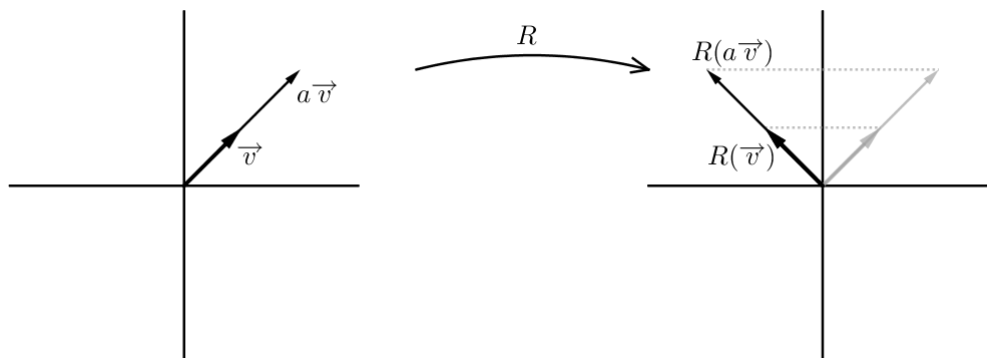
À direita são mostrados os vetores $R(\vec{v})$, $R(\vec{w})$ e $R(\vec{v} + \vec{w})$, obtidos girando-se os vetores à esquerda de 90° , no sentido anti-horário e em torno da origem. A posição antiga dos vetores, antes da rotação, é mostrada à direita em um tom mais claro.

Note que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são lados de um paralelogramo com uma diagonal igual à soma $\vec{v} + \vec{w}$. A rotação R gira por igual todo o paralelogramo; em particular, a diagonal do paralelogramo girado, que aparece à direita, é $R(\vec{v} + \vec{w})$. No entanto, essa mesma diagonal é a soma dos vetores $R(\vec{v})$ e $R(\vec{w})$, que correspondem aos lados desse paralelogramo. Assim, concluímos que a transformação R *preserva somas*, ou seja

$$R(\vec{v} + \vec{w}) = R(\vec{v}) + R(\vec{w}). \quad (11.23)$$

A figura abaixo, à esquerda, mostra um vetor não nulo $\vec{v}$ e um múltiplo escalar $a\vec{v}$, onde a é um número real diferente de zero (no caso da figura em questão, $a > 1$). À direita são mostrados os vetores $R(\vec{v})$ e $R(a\vec{v})$, obtidos a partir de $\vec{v}$ e $a\vec{v}$ por uma rotação de 90° , no sentido anti-horário e em torno da origem. A posição antiga dos vetores, antes da rotação, é mostrada à direita em um tom mais claro.

Vamos nos ater ao caso em que a é positivo. O caso em que $a < 0$ pode ser tratado da mesma forma.



Uma vez que $|\vec{v}| = |R(\vec{v})|$ e $\vec{v} \perp R(\vec{v})$, os vetores $\vec{v}$ e $R(\vec{v})$ correspondem aos catetos de um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa é representada, na figura acima à direita, por um segmento pontilhado. Da mesma forma, como $|a\vec{v}| = |R(a\vec{v})|$ e $a\vec{v} \perp R(a\vec{v})$, os vetores $a\vec{v}$ e $R(a\vec{v})$ correspondem aos catetos de outro triângulo retângulo isósceles.

Assim, esses dois triângulos são necessariamente semelhantes, de forma que

$$\frac{|R(a\vec{v})|}{|R(\vec{v})|} = \frac{|a\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{a|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = a;$$

então, $|R(a\vec{v})| = a|R(\vec{v})|$. Por fim, uma vez que os vetores $R(a\vec{v})$ e $aR(\vec{v})$ têm mesmos sentido e módulo, segue que

$$R(a\vec{v}) = aR(\vec{v}), \quad (11.24)$$

ou seja, a transformação R também *preserva multiplicação por escalar*.

Se uma função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem as duas propriedades acima, ou seja, se

- (1) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ e
- (2) $T(a\vec{u}) = aT(\vec{u})$,

para todos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e todos os escalares a , dizemos que T é **linear**. A rotação R é uma função linear.

Funções lineares têm um comportamento muito *simples* e *previsível*. Vamos considerar uma função linear no plano, ou seja, uma função T que associa, a cada vetor $\vec{v}$ do plano, um vetor $\vec{w}$, também do plano. Como já fizemos no caso da rotação, indicamos isso escrevendo $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Note que não é proibido que esses dois vetores sejam iguais.

Se escolhermos um sistema de coordenadas, os vetores podem ser escritos como pares ordenados. Dentre esses pares ordenados, existem dois especiais, os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$. Eles são especiais porque, a partir deles, podemos escrever todos os outros vetores. Realmente, sendo $\vec{v} = (x,y)$, temos

$$\vec{v} = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Dizemos que a última expressão acima é uma *combinação linear* dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Vamos supor, agora, que sabemos o que a função linear T faz com os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$: digamos que $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$, com a , b ,

c, d constantes reais. Então,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x\vec{i} + y\vec{j}) = T(x\vec{i}) + T(y\vec{j}) \\ &= xT(\vec{i}) + yT(\vec{j}) = xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(a,c) + y(b,d) = (ax,cx) + (by,dy) \\ &= (ax + by, cx + dy). \end{aligned}$$

Em resumo, se a função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear e sabemos o que ela faz com os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$, digamos, $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$, então conseguimos determinar completamente a função:

$$T(x,y) = (ax + by, cx + dy). \quad (11.25)$$

Mais ainda, a expressão em (11.25) pode ser escrita como

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (11.26)$$

Note que as *colunas* da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ são exatamente as imagens dos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ pela função T .

Exercício 11.22 Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função linear do plano tal que $T(1,0) = (1,2)$ e $T(0,1) = (-1, -1)$. Encontre $T(6,5)$.

Solução. A função T é dada por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y, 2x - y).$$

Em particular, $T(6,5) = (6 - 5, 2 \cdot 6 - 5) = (1,7)$. ■

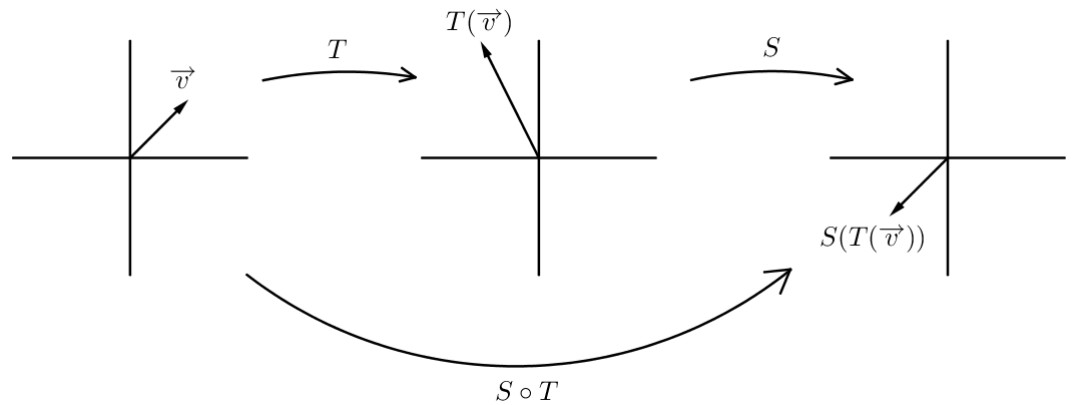
Vamos considerar, agora, duas funções lineares S e T no plano, tais que

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O que acontece quando aplicamos uma dessas funções e depois a outra? Um vetor $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ é levado pela função T no vetor $T(\vec{v})$, e este vetor é levado em $S(T(\vec{v}))$ pela função S . Assim, as funções T e S , aplicadas uma depois da outra, nessa ordem, dão origem a uma nova função, que transforma o vetor $\vec{v}$ diretamente no vetor $S(T(\vec{v}))$. Usamos a notação $S \circ T$ para indicar essa função, e a chamamos de **função composta** de S e T .



Podemos calcular $S(T(\vec{v}))$, considerando as coordenadas de $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} S(T(x,y)) &= S(ax + by, cx + dy) \\ &= (a'(ax + by) + b'(cx + dy), c'(ax + by) + d'(cx + dy)) \\ &= ((a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y, (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y) \\ &= \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O fato notável, aqui, é que a matriz que corresponde à função composta $S \circ T$ é

$$\begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

que é o produto das matrizes de S e de T . Assim, encontramos mais uma razão para fazermos a multiplicação de matrizes da forma como explicamos anteriormente. Ao todo, temos três justificativas para realizarmos a multiplicação de matrizes dessa maneira. São elas:

- (1) A multiplicação de matrizes generaliza o produto interno.
- (2) Podemos associar funções lineares a matrizes. Embora isto valha em geral, fizemos aqui apenas o caso em que a função linear é uma transformação do plano, que corresponde a uma matriz 2×2 .
- (3) A composta de duas funções lineares corresponde ao produto das matrizes que as representam.

Exercício 11.23 A rotação R , do Exercício 11.21, é dada, de acordo com a expressão (11.22), por

$$R(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encontre a matriz da rotação de 180° em torno da origem.

Solução. A rotação de 180° é obtida a partir de duas rotações de 90° . Logo, esta rotação é dada pela função composta $R \circ R$, cuja matriz correspondente é o produto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, aplicar a rotação de 180° a um vetor $\vec{v} = (x, y)$ equivale a multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

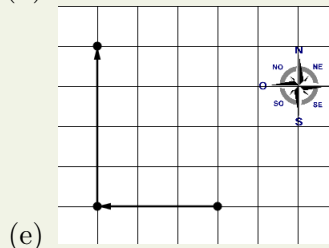
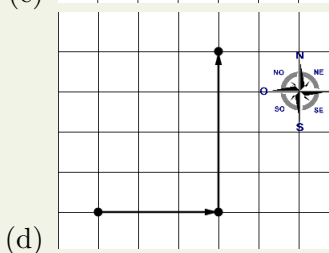
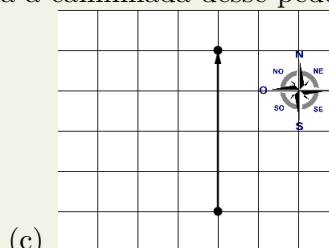
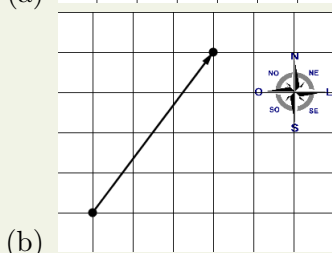
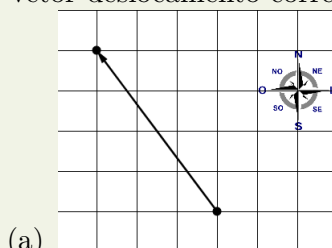
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix},$$

ou seja, a rotação de 180° transforma o vetor $\vec{v} = (x, y)$ no vetor $-\vec{v} = (-x, -y)$. ■

11.6 – Exercícios

Nível 1

Exercício 11.24 Em um bairro cujos quarteirões são quadrados de lado $100m$, um pedestre caminhou quatro quarteirões de Sul para Norte e depois três quarteirões de Leste para Oeste. Assinale a figura que melhor representa o vetor deslocamento correspondente a toda a caminhada desse pedestre.



Exercício 11.25 A soma de uma quantidade finita de vetores no plano é igual ao vetor nulo. Um desses vetores é $\vec{v} = (1, -2)$. Se retirarmos esse vetor, a soma dos demais vetores é igual a:

- (a) $\vec{0}$.
- (b) $\vec{v}$.
- (c) $(-1, 2)$.
- (d) $-\vec{v}$.
- (e) Não é possível determiná-la.



Exercício 11.26 Considere os três vetores $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (1,2)$ e $\vec{w} = (7,11)$. Calcule $\vec{u} + 5\vec{v} - \vec{w}$.

Exercício 11.27 O vetor $\vec{v} = (x,y)$ do plano é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (1,2)$ e tem o mesmo comprimento que este vetor. Pode-se afirmar que:

- (a) $\vec{v} = (1,2)$ ou $\vec{v} = (-1, -2)$.
- (b) $\vec{v} = (2,1)$ ou $\vec{v} = (-2, -1)$.
- (c) $\vec{v} = (-2, -1)$ ou $\vec{v} = (2,1)$.
- (d) $\vec{v} = (2, -1)$ ou $\vec{v} = (-2,1)$.
- (e) $\vec{v} = (1,2)$ ou $\vec{v} = (-1,2)$.

Exercício 11.28 Um grupo com quatro pessoas está conversando sobre os livros que já leram. Eles fizeram uma lista com cinco livros e querem organizar as informações sobre quem já leu esses livros. Para isso, compuseram uma tabela na qual só aparecem zeros e uns, com as pessoas correspondendo às linhas e os livros às colunas. Um 0 significa que uma pessoa não leu um livro, e um 1 significa que uma pessoa leu um livro. Supondo que a tabela obtida foi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

assinale a única alternativa verdadeira:

- (a) Uma pessoa leu todos os livros.
- (b) Um livro foi lido por todas as pessoas.
- (c) Uma pessoa não leu livros.
- (d) Duas pessoas leram exatamente os mesmos livros.
- (e) Um livro foi lido por apenas uma pessoa.

Exercício 11.29 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule as potências A^2 , A^3 , A^4 , etc. A potência A^{2020} é igual a.

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nível 2

Exercício 11.30 Considere um pentágono $ABCDE$. A soma de vetores

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

é igual a:

- (a) $\vec{0}$.
- (b) $\overrightarrow{EA}$.
- (c) $-\overrightarrow{AB}$.
- (d) $\overrightarrow{AE}$.
- (e) Essa soma depende da forma do pentágono.

Exercício 11.31 Considere os três vetores $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (1,2)$ e $\vec{w} = (7,11)$. Encontre dois números reais x e y tais que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$.

Exercício 11.32 Considere a função que associa a cada vetor $\vec{v} = (x,y)$ o número $f(\vec{v}) = f(x,y) = 2x + 3y$.

- (1) Verifique que $f(3, -2) = 0$.
- (2) Suponha que o vetor $\vec{v} = (x,y)$ seja perpendicular ao vetor $\vec{u} = (2,3)$. Determine o valor de $f(x,y)$.
- (3) Se $f(x,y) = 0$, o que podemos afirmar sobre os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (x,y)$?

Exercício 11.33 A tabela a seguir mostra o preço, em reais, de três itens, A , B e C , em dois supermercados, X e Y .

	A	B	C
X	12	10	25
Y	11	15	22

Suponha que uma pessoa deseje comprar 6 unidades do produto A , 7 unidades do produto B e 5 unidades do produto C . Em qual supermercado será mais vantajoso fazer a compra?

- (a) Somente no supermercado X .
- (b) Somente no supermercado Y .
- (c) Em qualquer dos dois.
- (d) Não há dados suficientes.

Exercício 11.34 A *inversa* de uma matriz A é uma matriz B tal que $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são iguais à matriz identidade. Suponha que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e que

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a inversa de A . A partir da igualdade

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos concluir que.

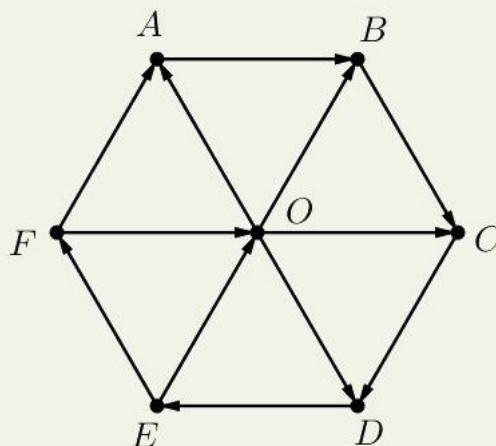
- (a) $a = 0, b = 0, c = 1$ e $d = 1$.
- (b) $a = 0, b = 1, c = 0$ e $d = 1$.
- (c) $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$.
- (d) $a = 1, b = 1, c = 0$ e $d = 0$.
- (e) $a = 1, b = 0, c = 1$ e $d = 0$.

Nível 3

Exercício 11.35 Sejam $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (-1,2)$. Suponha que $\vec{w}$ é um vetor do plano, perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Então, podemos afirmar que

- (a) $\vec{w} = \vec{u}$.
- (b) $\vec{w} = \vec{v}$.
- (c) $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.
- (d) $\vec{w} = \vec{0}$.
- (e) não é possível determinar $\vec{w}$.

Exercício 11.36 Na figura abaixo, $ABCDEF$ é um hexágono regular.



Pode-se afirmar corretamente que:

- (a) $\vec{FA} = \vec{EO}$ e $\vec{AB} = \vec{DE}$.
- (b) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AO} + \vec{EF}$.
- (c) $\vec{EF} + \vec{OC} = \vec{CD}$.
- (d) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{OF}$.
- (e) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OA}$.

Exercício 11.37 Seja $\vec{u}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $\vec{u}_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$. Encontre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que

- (1) $\vec{u}_2 = \vec{v} + 2\vec{w}$;
- (2) $\vec{w} \cdot \vec{u}_1 = 0$, e
- (3) $\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{u}_1$.

Exercício 11.38 A tabela a seguir mostra o preço, em reais, de três itens, A , B e C , em dois supermercados, X e Y .

	A	B	C
X	12	10	25
Y	11	15	22

Suponha que uma pessoa deseje comprar 6 unidades do produto A e 5 unidades do produto C .

- (1) Se o consumidor comprar 3 unidades do produto A , 6 unidades do produto B e 9 unidades do produto C , ele vai gastar mais em algum dos supermercados?
- (2) Qual é o maior número de unidades do produto B que o consumidor pode comprar de modo que seja mais vantajoso comprar no supermercado Y ?

Exercício 11.39 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos afirmar corretamente que:

- (a) $A^8 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- (b) $A^6 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- (c) $A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.
- (d) $A^{12} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$.
- (e) $A^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 128 & 0 \\ 128 & 0 & 128 \\ 0 & 128 & 0 \end{pmatrix}$.

Nível 4

Exercício 11.40 Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Sejam M , N , P e Q os pontos médios de AB , BC , CD e DA , respectivamente. Verifique que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

Exercício 11.41 Considere os vetores $\vec{v} = (1,1)$ e $\vec{w} = (-1,2)$. Existem números *inteiros* m e n tais que $m\vec{v} + n\vec{w} = (4,25)$? Em caso afirmativo, determine-os.

Exercício 11.42 Considere os vetores $\vec{u} = (1,1,0)$ e $\vec{v} = (1,0,1)$. Dentre os vetores a seguir, assinale o único que é perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- (a) $\vec{w} = (1,1,1)$.
- (b) $\vec{w} = (1,1,-1)$.
- (c) $\vec{w} = (-1,1,1)$.
- (d) $\vec{w} = (1,-1,1)$.
- (e) $\vec{w} = (0,1,1)$.

Exercício 11.43 Considere os pontos $A = (3,2)$, $B = (1,-1)$ e $P = (x,y)$. Suponha que estes três pontos sejam *colineares*, ou seja, os três pontos estejam em uma mesma reta. Então podemos afirmar que as coordenadas do ponto P satisfazem a equação:

- (a) $3x - 2y = 0$.
- (b) $3x - 2y - 5 = 0$.
- (c) $2x - 3y = 0$.
- (d) $3x - 2y + 5 = 0$.
- (e) $3x - 3y - 1 = 0$.

Exercício 11.44 O vetor $\vec{w} = (x',y')$ é obtido a partir do vetor $\vec{v} = (x,y)$ fazendo-se uma rotação de 60° , no sentido anti-horário. Se a matriz 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisfaz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

podemos dizer que:

- (a) $a = 1/2$, $b = -\sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.
- (b) $a = -1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.
- (c) $a = 1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.
- (d) $a = 1/2$, $b = -\sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = -1/2$.
- (e) $a = 1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $c = -\sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.

Exercício 11.45 Encontre

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{2020}.$$

Sugestão: calcule as primeiras potências dessa matriz, com expoente 1, 2, 3, 4, etc., e tente descobrir um padrão nessas potências. Alternativamente, conclua primeiro que a matriz dada, aplicada a um vetor (x, y) , corresponde a uma rotação de 45° no sentido anti-horário. Então, veja o efeito de 2020 rotações de 45° .

Exercício 11.46 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Calcule A^2 , A^3 e A^4 .
- (2) Verifique que $(I - A)(I + A + A^2 + A^3) = I - A^4$, onde I é a matriz identidade 4×4 .
- (3) Determine, usando os itens anteriores, a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 11.47 A *transposta* de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é a matriz $A^t = (b_{ji})_{n \times m}$, onde $b_{ji} = a_{ij}$, para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Isto significa que as linhas de A^t são as colunas de A e as colunas de A^t são as linhas de A .

Dizemos que uma matriz A é *simétrica*, quando $A^t = A$. Dizemos que uma matriz A é *antissimétrica* quando $A^t = -A$.

- (1) Verifique que matrizes simétricas e antissimétricas são quadradas.
- (2) Verifique que os elementos da diagonal principal de uma matriz antissimétrica são todos nulos.
- (3) Dada uma matriz quadrada A , construa as matrizes $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t$ e $T = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t$. Verifique que S é simétrica e T é antissimétrica.
- (4) Verifique que $A = S + T$, ou seja, toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.
- (5) Verifique que a única maneira de escrever uma matriz quadrada como a soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica é a descrita nos itens (3) e (4).