MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA GEOMETRIA I

Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral do Ceará – EEMTI

COLEÇÃO COMPONENTES ELETIVOS FUNDANTES 2

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Camilo Sobreira de Santana
Governador
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho
Vice-Governadora
Eliana Nunes Estrela
Secretária da Educação
Maria Jucineide da Costa Fernandes
Secretária Executiva de Ensino Médio e Profissional
Gezenira Rodrigues da Silva
Coordenadora da Educação em Tempo Integral
Denylson da Silva Prado Ribeiro
Articulador da Coordenadoria da Educação em Tempo Integral
Daniela Bezerra de Menezes Gomes
Orientadora da Célula de Desenvolvimento da Educação em Tempo Integral

Elaboração e Acompanhamento
Equipe Técnica CEDTI:
Bruno Holanda
Ângelo Papa Neto
Esdras Medeiros
Revisão: Antonio Caminha M. Neto
Colaboradores: Equipe Cientista Chefe

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

H722g Holanda, Bruno
Geometria I [recurso eletrônico] / Bruno Holanda, Ângelo Papa Neto, Esdras Medeiros. - Fortaleza: SEDUC, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-89549-63-5 (E-book)

1. Perímetro. 2. Áreas. 3. Teorema de Pitágoras. I. Holanda, Bruno. II. Papa Neto, Ângelo. III. Medeiros, Esdras. IV. Título.

CDD: 516

APRESENTAÇÃO INSTITUCIONAL

A Secretaria da Educação do Estado do Ceará, por meio da Coordenadoria de Educação em Tempo Integral e Educação Complementar (COETI), apresenta às Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral - EEMTI essa coleção de fascículos que abordam componentes eletivos componentes da parte flexível do currículo. A disponibilização desse material para as EEMTI tem como objetivos: I. Oferecer apoio pedagógico e didático aos professores que lecionam esses componentes eletivos. II. Oportunizar aos estudantes subsídios para o desenvolvimento de competências e habilidades nos itinerários escolhidos, a partir de seus projetos de vida, favorecendo a aquisição de novos conhecimentos, a ampliação da aprendizagem e o seu crescimento cognitivo e socioemocional.

A elaboração desses fascículos está vinculada às ementas do Catálogo dos Componentes Eletivos de 2022. Nessa primeira tiragem, foram selecionados alguns componentes eletivos fundantes, ou seja, que apresentam assuntos essenciais e contextualizados, capazes de gerar interesses de aprofundamento nos jovens, a partir das temáticas abordadas. Esses componentes estão relacionados às quatro áreas de conhecimento da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e a uma unidade curricular de Formação Profissional.

Volume 1: Linguagens e suas tecnologias
Volume 2: Matemática e suas tecnologias
Volume 3: Ciências da Natureza e suas tecnologias
Volume 4: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
Volume 5: Formação Profissional

MENSAGEM AO PROFESSOR

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), dez competências gerais devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo do Ensino Médio. Na área de Matemática e suas Tecnologias, espera-se que todos possam conhecer e utilizar a linguagem matemática, bem como fazer uso dos seus códigos, símbolos, nomenclaturas e dos processos de desenvolvimento de pesquisas científicas e tecnológicas.

A Eletiva de GEOMETRIA BÁSICA I tem como objetivo introduzir noções e técnicas de Geometria no plano euclidiano, discutindo modelos e problemas envolvendo movimentos geométricos, perímetros, areas e uma breve introdução ao uso de coordenadas. Embasamos nossa abordagem em um balanço, pedagogicamente adequado, entre intuição, clareza nas definições e rigor formal. O intuito não é o de apresentar fatos e fórmulas, de modo isolado e sem justificativas. Em vez disso, partimos de problemas instigantes e, gradualmente, apresentamos os conceitos e métodos que podem ser combinados na modelagem e resolução desses problemas. O material cumpre, ainda, a dupla função de recuperar aprendizagens do Ensino Fundamental e conectá-las com metas de aprendizagem do Ensino Médio, descritas tanto nas habilidades da BNCC quanto nas competências do ENEM.

O fascículo encerra com uma seleta de exercícios apresentados em nível crescente de complexidade. Sempre que um novo conceito ou técnica é introduzido ou aprofundado em um exercício, apresentamos uma solução detalhada: recomendamos que o estudante tente intensamente resolver os exercícios antes de consultar a solução. Neste fascículo, trabalharemos, por conseguinte, as habilidades nos saberes 5 e 7 da **Matriz dos Saberes**.

Esperamos, pois, que este fascículo contribua para enriquecer a sua prática pedagógica, auxiliando-o no planejamento das suas aulas e fortalecendo os processos de ensino e de aprendizagem.

Sucesso e boas aulas!

MENSAGEM AO ESTUDANTE

Parabéns por ter escolhido esta eletiva para o seu currículo, pois o conhecimento da linguagem algébrica das equações lineares possibilita modelar diversos problemas e pode fazer diferença em sua vida ajudando, entre outras coisas, a ampliar o domínio da noção de proporcionalidade e linearidade, presente nos modelos mais simples de relações entre dados e variáveis em todos os campos da vida cotidiano e do pensamento científico.

Prepare-se para a viagem do conhecimento que, por meio da Matemática, fará você aprender a aplicar métodos e a desenvolver procedimentos científicos e práticos, para além da teoria. Algumas das experiências que você vai realizar aqui foram desenvolvidas por grandes escritores, cientistas, matemáticos e suas descobertas podem abrir muitas portas para sua formação profissional.

Cada unidade que você vai estudar traz elementos para que, ao final da Eletiva, seja desenvolvida uma atividade prática que você, o professor e a turma irão produzir e apresentar em uma culminância que irá acontecer no final desta eletiva.

O objetivo é que este material o/a auxilie a exercer o protagonismo de modo que você identifique seus potenciais, interesses e paixões e estabeleça estratégias e metas para alcançar seus próprios objetivos em todas as dimensões. Logo, o presente material deve servir de apoio para se atingir esse objetivo.
Sucesso e bom estudo!

SUMÁRIO

PARTE I

Geometria Métrica 3

UNIDADE 1 - Perímetro e áreas - noções básicas 3

UNIDADE 2 - Recorte e remonte de áreas 10

UNIDADE 3 - Teorema de Pitágoras 15

UNIDADE 4 - Construindo malhas 20

PARTE II

Mais sobre círculos 24

UNIDADE 1 - Mais sobre círculos 24

Habilidades Desenvolvidas

BNCC

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

ENEM

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

SAEB

D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D11 - Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

1 Geometria Métrica

Uma das principais utilidades da Geometria Plana é sua capacidade de modelar situações reais e resolver problemas que envolvem conhecimentos sobre cálculos de medidas de comprimento, área e ângulo. Ao longo desse material desenvolveremos algumas técnicas de resolução de problemas da maneira mais prática possível: resolvendo-os.

1.1 – Perímetro e Áreas - Noções Básicas

Começamos nosso roteiro com um probleminha simples, em que recordamos a importância das principais unidades de medida de comprimento.

Problema 1 Fábio está treinando para uma corrida. Ele dividiu seu treino em três etapas: na primeira correu 2 km, na segunda andou 800 metros e na terceira correu 3 km. Quantos metros ele percorreu ao todo, durante esse treino?

Antes de resolvermos esse problema, devemos lembrar que para somarmos comprimentos de caminhos ou objetos calculados em medidas diferentes, devemos, antes, transformar todos os comprimentos para uma mesma medida. No caso do problema em que estamos pensando, isso é fácil, uma vez que as medidas mencionadas no enunciado fazem parte do **sistema métrico**.

O sistema métrico é um sistema de medição internacional **decimalizado**, que surgiu pela primeira vez na França, durante a Revolução Francesa, visando minimizar a dificuldade de funcionamento do comércio e da indústria, devido à existência de diversos padrões de medida.

Esse sistema é ancorado em dois conceitos básicos: uma medida-base, o *metro*, e medidas múltiplas e submúltiplas do metro, as quais são obtidas multiplicando-se a medida-base por potências de dez.

Existem situações nas quais o uso exclusivo da unidade-base deixa de ser prático. Isso ocorre quando queremos medir grandes extensões ou objetos muito pequenos.

Por tais razões, emprega-se os múltiplos e submúltiplos do metro, os quais também são chamados de *unidades secundárias* de comprimento. Elas são definidas de acordo com as tabelas a seguir:

Múltiplo	**Nome**	**Símbolo**
10^0	metro	m
10^1	decâmetro	dam
10^2	hectômetro	hm
10^3	quilômetro	km
10^6	megametro	Mm
10^9	gigametro	Gm
10^{12}	terametro	Tm
10^{15}	petametro	Pm
10^{18}	exametro	Em
10^{21}	zettametro	Zm
10^{24}	iotametro	Ym

Submúltiplo	**Nome**	**Símbolo**
10^0	metro	m
10^{-1}	decímetro	dm
10^{-2}	centímetro	cm
10^{-3}	milímetro	mm
10^{-6}	micrometro	μm
10^{-9}	nanômetro	nm
10^{-12}	picometro	pm
10^{-15}	femtômetro	fm
10^{-18}	attometro	am
10^{-21}	zeptômetro	zm
10^{-24}	yoctômetro	ym

Nas tabelas, os expoentes escritos nas potências de dez representam o número de vezes que o metro deve ser multiplicado por 10 para obtermos a referida medida. Por exemplo, o quilômetro está associado com 10^3. Isso significa que devemos pegar um metro e multiplicarmos por 10 três vezes consecutivas para obtermos 1 quilômetro. De forma análoga, um expoente negativo significa o número de vezes que 1 metro é divido por 10 para obtermos a medida referida. Por exemplo, o nanômetro está associado ao expoente -9 pois um metro precisa ser dividido por 10 vezes para obtermos 1 nanômetro.

Solução. Convertendo quilômetros para metros, temos que $2\,\text{km} = 2000\,\text{m}$ e $3\,\text{km} = 3000\,\text{m}$. Somando-se todas as medidas em metros, obtemos:

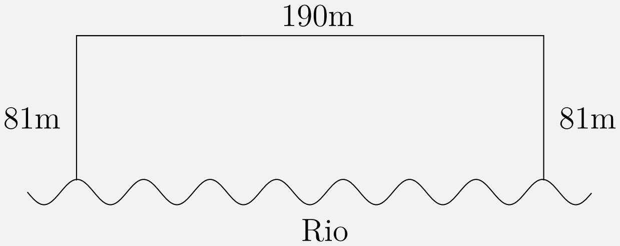
$$2000 + 800 + 3000 = 5800$$

metros. ∎

O vídeo a seguir traz uma interessante forma de comparação entre as escalas das unidades de medida do sistema métrico.

Saiba mais

Problema 2 — Enem–2013. Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 11. (E) 12.

Solução. Uma vez que um dos lados é margeado pelo rio, devemos desconsiderar esse lado ao calcular o perímetro do terreno, pois não utilizaremos tela alguma aí. Desse modo, a quantidade de tela utilizada para cercar todo o terreno é igual a $81 + 81 + 190 = 352$ metros. Por outro lado, a tela é vendida em rolos de 48 metros. Assim, para calcular a quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar o terreno, devemos começar dividindo 352 por 48:

$$\begin{array}{r|l} 352 & 48 \\ \hline 16 & 7 \end{array}$$

Veja que 7 rolos de tela não são suficientes para cercar o terreno, pois ainda ficariam 16 metros sem cerca. Assim, a quantidade mínima de rolos para cercar o terreno é $7 + 1 = 8$, embora o oitavo rolo não seja utilizado completamente. ∎

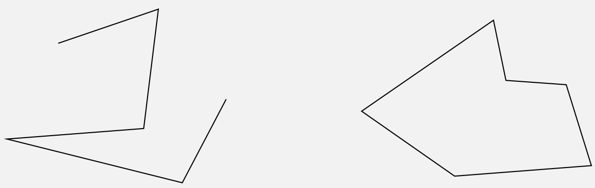
Você pode utilizar a sequência de aulas da Khan Academy para aprender e praticar um pouco mais sobre conversões entre diferentes unidades do sistema métrico.

Saiba mais

Observe que nas soluções dos problemas anteriores, utilizamos intuitivamente um conceito básico da Geometria: a medida do comprimento de uma **concatenação de dois caminhos abertos** é igual a soma dos comprimentos dos caminhos originais.

Podemos entender um caminho aberto como um traço no plano cujos pontos inicial e final são diferentes. Isso ocorre quando você sai da sua casa e vai a pé até a casa de um amigo que mora próximo.

Já um **caminho fechado** é quando os pontos inicial e final coincidem. Um exemplo é quando você dá uma volta ao redor de uma praça. Caminhos fechados simples (formados por um número finito de segmentos de retas que encontram-se apenas em suas extremidades) geram figuras planas que possuem **área** e **perímetro**.



Caminho Aberto Caminho Fechado

O perímetro de uma figura plana é a medida do comprimento do seu contorno. Quando a figura é um polígono, cujo contorno é um camnho fechado simples, o perímetro é igual à soma das medidas de seus lados. A seguir, dois problemas que tratam sobre esse assunto.

Problema 3 Um pentágono é formado da seguinte maneira: dado o lado com a menor medida, o próximo lado mede o dobro do seu comprimento, o seguinte mede o triplo, e o quarto e o quinto medem o quádruplo do de menor medida. Sabendo que o perímetro desse pentágono é igual a 280 cm, qual é a medida do seu maior lado?

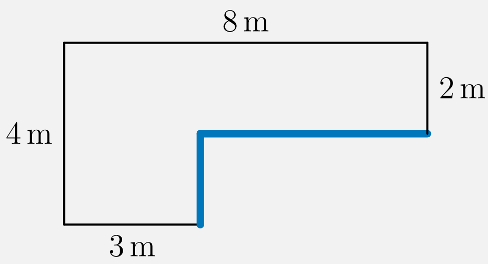
(a) 10 cm.
(b) 50 cm.
(c) 80 cm.
(d) 100 cm.
(e) 20 cm.

Solução. Seja x a medida do menor lado. Os demais lados terão medidas $2x$, $3x$, $4x$ e $4x$. Assim,

$$x + 2x + 3x + 4x + 4x = 280, \text{ ou seja,}$$
$$14x = 280, \text{ o que dá}$$
$$x = 20.$$

Portanto, o maior lado terá medida $4x = 80$ cm. **Letra C.** ■

Problema 4 Na figura a seguir, temos um polígono em forma de "L", tal que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°. Joaquim deseja criar uma cerca contornando todo o perímetro desse terreno. Qual será o tamanho dessa cerca?



Antes de resolvermos o problema, note que não conhecemos, a princípio, as medidas de alguns trechos da cerca, destacados com segmentos "mais grossos". Para encontrar o perímetro dessa figura, devemos primeiro descobrir essas medidas.

Solução. Antes de tudo, vamos denotar os vértices do terreno com as letras A, C, D, F, G e H. Agora, para esse terreno é dito no enunciado que todos os ângulos internos entre lados consecutivos medem 90° ou 270°. Como um quadrilátero com todos os seus ângulos internos retos é um retângulo, não é difícil perceber que podemos dividir esse primeiro terreno em dois retângulos, conforme mostrado na Figura 1.1 (veja o segmento de reta tracejado BF):

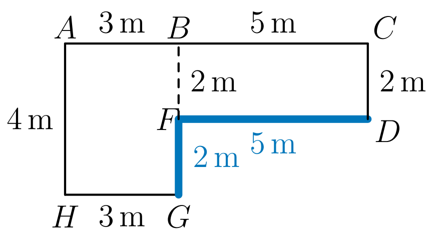


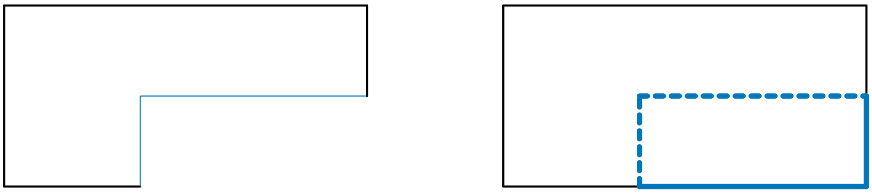
Figura 1.1: cálculo dos comprimentos dos lados remanescentes do "L".

Como os lados opostos de um retângulo têm as mesmas medidas, o segmento BF tem a mesma medida do segmento CD, ou seja, $\overline{BF} = 2$ m. Da mesma forma, o segmento BG tem medida igual à do segmento AH, de forma que $\overline{BG} = 4$ m e, assim, $\overline{FG} = \overline{BG} - \overline{BF} = 4\text{ m} - 2\text{ m} = 2$ m. Agora, observe que o lado horizontal maior AC, que mede 8 m, ficou dividido em dois segmentos, AB e BC. Novamente pelo fato de $ABGH$ ser um retângulo, temos $\overline{AB} = 3$ m. Então, $\overline{DF} = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 8\text{ m} - 3\text{ m} = 5$ m. Portanto, o perímetro do terreno em forma de "L" é

$$4 + 8 + 2 + 5 + 2 + 3 = 24 \text{ metros.}$$

■

Outro modo de explorar a geometria da figura, para calcular o perímetro do terreno em forma de "L", consiste em *explorar uma simetria escondida*, mais precisamente, perceber que esse perímetro é igual àquele do retângulo esboçado na figura abaixo, à direita:

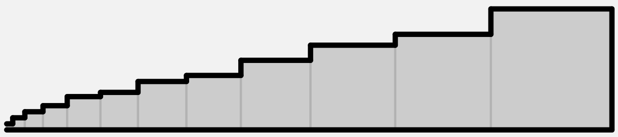


Isto porque, nela, o quadrilátero de bordas destacadas é um retângulo, o que é também consequência da condição sobre os ângulos internos formados por lados consecutivos do polígono "L". Logo, a soma das medidas de dois lados consecutivos do mesmo é igual à soma das medidas dos outros dois lados. Desse modo, o perímetro pedido é igual a

$$2 \cdot (\overline{AH} + \overline{AC}) = 2 \cdot (4 + 8) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ metros.}$$

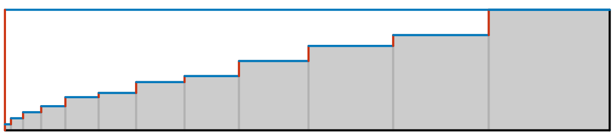
Utilizaremos mais uma vez essa estratégia no problema a seguir.

Problema 5 — OBMEP. Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em destaque) da figura formada por esses quadrados?



(a) 220 cm.
(b) 240 cm.
(c) 260 cm.
(d) 300 cm.
(e) 400 cm.

Solução. Inicialmente, completamos um retângulo cujos lados medem 100 cm e 20 cm, conforme mostrado a seguir:



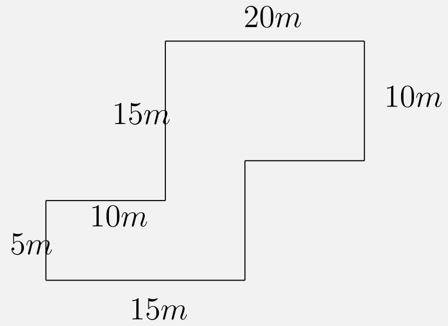
Na figura, a soma das medidas dos segmentos verticais, que fazem parte do contorno da figura descrita no enunciado, é igual à medida do lado vertical do retângulo construído. Do mesmo modo, a soma das medidas dos segmentos horizontais, que estão da figura original, é igual à medida do lado horizontal do retângulo construído. Assim, o seu perímetro que se quer calcular é igual a

$$2 \cdot (100 + 20) = 2 \cdot 120 = 240 \text{ cm.}$$

A alternativa correta é a letra **(b)**. ■

Duas figuras planas estão concatenadas quando compartilham um lado (ou parte de lado) comum. Uma propriedade intuitiva sobre áreas afirma que, ao concatenarmos duas figuras planas, a figura resultante possui área cuja medida é igual à soma das medidas das áreas das figuras originais. Essa propriedade torna-se especialmente útil quando a aplicamos do sentido reverso. Mais especificamente, quando estamos em uma situação na qual devemos calcular a área de uma figura complexa, podemos particioná-la em figuras menores e mais simples, cujas áreas sabemos calcular. Um exemplo dessa estratégia é encontrado na solução do problema a seguir:

Problema 6 Calcule a área do polígono a seguir, em que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°.



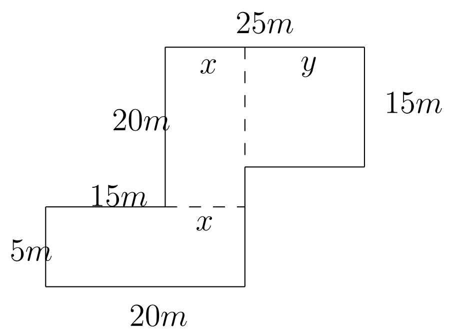


Figura 1.2: Decompondo uma figura complexa em outras mais simples.

Solução. Em primeiro lugar, iremos decompor a figura do enunciado em três retângulos, utilizando segmentos tracejados paralelos aos lados do polígono original, conforme a Figura 1.2. Utilizando o fato de um retângulo ter pares de lados paralelos, podemos encontrar as medidas dos segmentos x e y. De fato, $x = 20 - 15 = 5$ e $y = 25 - x = 20$. Assim, a área A da figura é a soma das áreas dos três retângulos, ou seja,

$$\begin{aligned} A &= (5 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 15 \cdot 20)\ m^2 \\ &= 20 \cdot (5 + 5 + 15)\ m^2 = 20 \cdot 25\ m^2 = 500\ m^2. \end{aligned}$$

■

Obs O problema anterior também pode ser resolvido "completando" o retângulo, com lados paralelos aos do polígono, no qual o polígono está inscrito. Em seguida, calcula-se a área desse retângulo e subtrai-se as áreas dos dois retângulos que foram acrescentados ao polígono. Veja a Figura 1.3.

Cabe lembrar que o perímetro de uma figura, que é obtida através da concatenação de outras, **não é igual** à soma dos perímetros das figuras originais. Isso ocorre pelo fato dos lados compartilhados deixarem, obrigatoriamente, de ser contabilizados no cálculo do perímetro da figura resultante. Veja o problema a seguir em que um mesmo conjunto de retângulos pode ser organizado para formar duas figuras com perímetros diferentes.

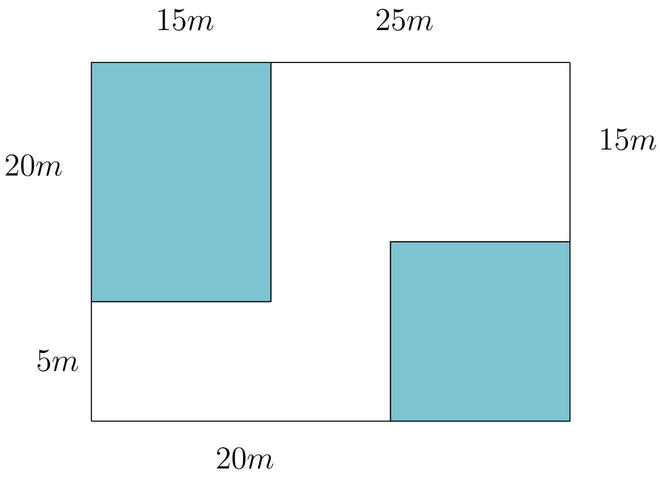
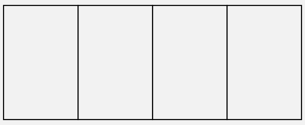


Figura 1.3: Completando um retângulo e subtraindo a área do que foi acrescentado.

Problema 7 Oito retângulos idênticos foram utilizados para formar as duas seguintes figuras retangulares. O perímetro da primeira é 42 cm e o da segunda é 48 cm. Qual é o perímetro de cada um dos quatro retângulos idênticos?



Perímetro 42 cm

Perímetro 48 cm

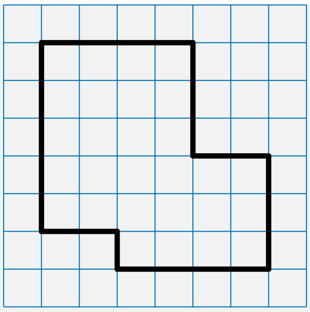
Solução. Sejam x e y as dimensões dos quatro retângulos idênticos, sendo x a menor. As dimensões da primeira figura são y (a menor) e $4x$ (a maior), de forma que seu perímetro vale $8x + 2y$. Assim, $8x + 2y = 42$. As dimensões da segunda figura são x (a menor) e $4y$ (a maior), de forma que seu perímetro é $2x + 8y$. Assim $2x + 8y = 48$.

Somando-se as duas equações, temos que $10x + 10y = 90$. Dividindo ambos os lados por 5, chegamos a $2x + 2y = 18$, que é o perímetro dos quatro retângulos iguais. ■

Obs Veja que utilizamos as incógnitas na resolução anterior apenas para facilitar a explicação, não tendo sido necessário resolver o sistema de equações. De fato, ao somarmos os perímetros das duas figuras, cada um dos quatro lados do retângulo original é somado 10 vezes. Assim, para calcularmos o perímetro deste retângulo basta dividir o resultado de $48 + 42 = 90$ por 5, obtendo-se 18 cm.

Polígonos, cujos lados e vértices estão sobre as grades de um reticulado, podem ter seus perímetros e áreas calculados facilmente através de contagem manual. Veja o próximo problema.

Problema 8 — CMF–2017. Na malha quadriculada abaixo, a figura em destaque representa uma ciclovia. Um ciclista deu quatro voltas completas nessa pista, percorrendo um total de 288 metros. É correto afirmar que a área delimitada por essa pista, em metros quadrados, é igual a:



(a) $243\,\text{m}^2$.
(b) $252\,\text{m}^2$.
(c) $279\,\text{m}^2$.
(d) $2016\,\text{m}^2$.
(e) $4032\,\text{m}^2$.

Solução. O ciclista deu 4 voltas e percorreu 288 metros. Logo, em cada volta ele precorreu $\frac{288}{4} = 72$ metros. Contando diretamente na figura, observamos que, em cada volta, o ciclista passa por 24 lados de quadrados da malha. Assim, o lado de cada quadrado representa uma distância de $\frac{72}{24} = 3$ metros. Logo, a área de cada quadrado corresponde a $3^2 = 9\,\text{m}^2$. Por fim, também contando diretamente na figura, vemos que o número de quadrados na região delimitada pela ciclovia é 28. Portanto, a área dessa região é $28 \cdot 9 = 252\,\text{m}^2$. ∎

1.2 – Recorte e remonte de áreas

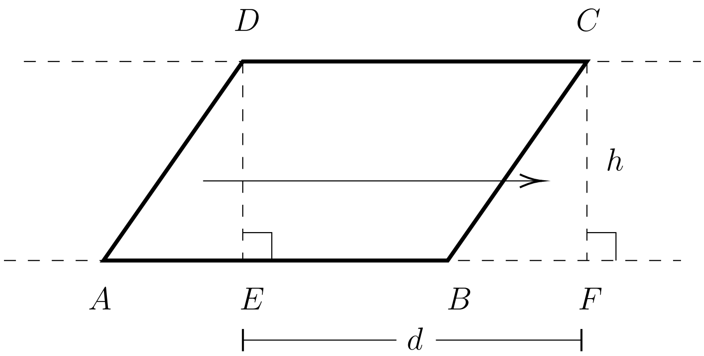
Além das figuras que podem ser particionadas em retângulos, também podemos encontrar as áreas de figuras simples através de estratégias do tipo "recorte e remonte". Essas figuras são os paralelogramos, os triângulos e os trapézios.

Definição 1.2.1 Um **paralelogramo** é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos.

Paralelogramos possuem diversas propriedades que podem ser demonstradas com o uso do conceito de *congruência de triângulos*. Como essa ferramenta só será formalmente desenvolvida no próximo módulo de Geometria, utilizaremos essas propriedades de forma intuitiva.

Considere um paralelogramo $ABCD$, ilustrado na figura a seguir. Obteremos, com auxílio desta figura, a fórmula para a área do paralelogramo. Para isso, sejam F e E as *projeções ortogonais* dos pontos C e D, respectivamente, sobre a reta que contém o lado AB — reta suporte de AB.

Obs Nas notações da figura abaixo, dizer que E é a **projeção ortogonal** de D sobre a reta AB, significa dizer que E pertence à reta suporte de AB, e que esta reta é perpendicular à reta suporte de DE, isto é, formam um ângulo de $90°$ uma com a outra.



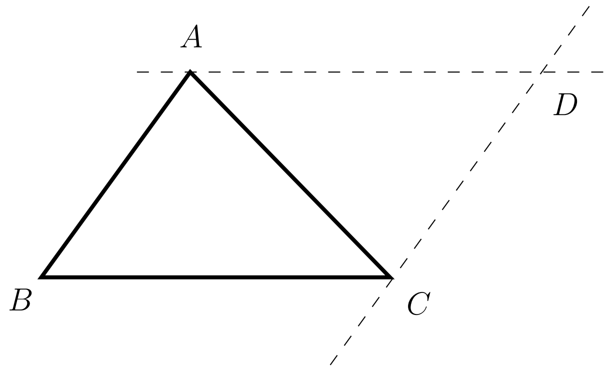
Como CD e AB são paralelos, temos $CF = DE$. A medida comum dos segmentos CF e DE será denotada por h, sendo conhecida como a **altura** do paralelogramo $ABCD$, relativa ao lado AB. Nesse caso, AB é chamado de **base** relativa à altura h.

Observe que $DEFC$ é um retângulo, logo, sua área é igual ao produto de suas dimensões. Como $AB = CD = d$, concluímos que a medida da área de $DEFC$ é igual a $d{\times}h$.

Por outro lado, os triângulos ADE e BCF são *congruentes*, isto é, são "essencialmente iguais", dizendo isso que podemos deslocar um deles no plano até superpô-lo ao outro, sem que haja "sobras ou faltas". Assim, podemos "transportar" a área de ADE para a área de BCF, de forma que a medida da área do paralelogramo $ABCD$ é igual à medida da área do retângulo $DEFC$. Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Obs De agora em diante, utilizaremos colchetes para denotar a área de figuras planas. Por exemplo, $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ e $[PQRS]$ denota a área do quadrilátero $PQRS$.

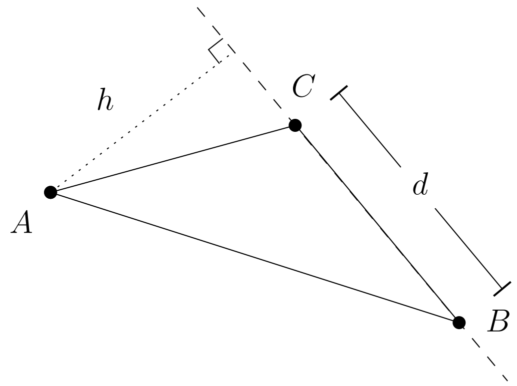
Agora, obteremos a fórmula para a área de um triângulo ABC, por meio de um raciocínio construtivo baseado na figura a seguir. Para isso, considere a reta r, paralela ao lado AB e passando por C, e a reta s, paralela ao lado BC e passando por A. Seja D o ponto de encontro dessas duas retas. Note que $ABCD$ é um paralelogramo, pois, por construção, possui lados opostos paralelos. Além disso, os triângulos ABC e CDA são congruentes (porque?), logo, possuem áreas iguais.



Portanto, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$; assim sendo, é igual à metade do produto do lado $BC = d$ — que funciona como base do paralelogramo — pela altura h, que é a distância do vértice A até a reta BC. Em resumo,

$$[ABC] = \frac{d{\times}h}{2}.$$

Obs Qualquer lado do triângulo pode ser considerado como base. A base sempre é relativa a uma altura, que, por sua vez, corresponde ao segmento que liga um vértice à projeção ortogonal deste vértice sobre a reta que contém o lado oposto. A altura pode, inclusive, estar fora do triângulo, conforme mostrado na figura a seguir:



Na figura anterior, temos um triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, a qual é exterior ao triângulo. Além disso, observe que a base BC não está "na horizontal", quando dispomos a folha de papel na posição natural de leitura.

Problema 9 No triângulo ABC, a medida do lado BC é $60\,\text{cm}$ e a medida do lado AC é $50\,\text{cm}$. Além disso, a altura relativa do lado BC mede $25\,\text{cm}$. Calcule a medida da altura relativa ao lado AC.

Solução. Considerando BC como base, temos que

$$[ABC] = \frac{60 \cdot 25}{2} = 750\,\text{cm}^2.$$

Por outro lado, considerando AC como base e chamando de h a altura correspondente, temos que

$$[ABC] = \frac{h \times 50}{2} = 750\,\text{cm}^2.$$

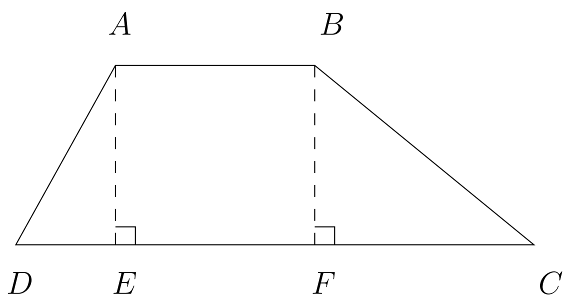
Assim, $h = 30\,\text{cm}$. ■

Obs Observe que, em todo triângulo retângulo, os **catetos** — os dois menores lados — podem funcionar tanto como base quanto como altura. Mais ainda, se considerarmos um cateto como base, então o outro será a altura correspondente, e vice-versa.

Agora, vejamos como calcular as áreas de *trapézios*.

Definição 1.2.2 Um **trapézio** é um quadrilátero que tem um par de lados opostos paralelos. Estes lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio, e a distância entre eles é chamada de **altura** do trapézio.

Para calcularmos a área do trapézio, multiplicamos sua altura pela média aritmética das medidas das bases. Podemos verificar essa fórmula através da sua decomposição ilustrada pela figura a seguir.



Seja $ABCD$ um trapézio onde AB é a sua base menor e CD é a sua base maior. Sejam E e F as projeções ortogonais de A e B sobre a reta CD, respectivamente. Veja que

$$[ABCD] = [ADE] + [ABFE] + [BFC].$$

Sejam $\overline{AE} = \overline{BF} = h$, $\overline{DE} = x$, $\overline{FC} = y$, $\overline{AB} = \overline{EF} = b$ e $\overline{CD} = a = x + b + y$. Temos que

$$[ABCD] = \frac{xh}{2} + bh + \frac{hy}{2}.$$

Colocando o fator $\frac{h}{2}$ em evidência, obtemos

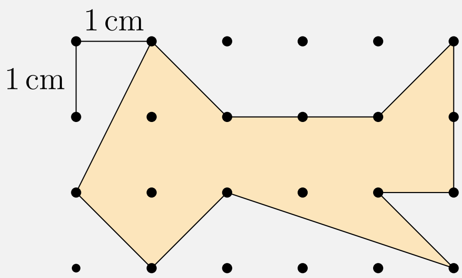
$$[ABCD] = \frac{h}{2}(x + 2b + y) = \frac{h}{2}(a + b).$$

Obs A dedução que fizemos acima, para a fórmula da área de um trapézio, não está completa, pois ela não funciona se $A\widehat{D}C > 90°$ ou $B\widehat{C}D > 90°$. Contudo, tal dedução pode ser facilmente adaptada a esse caso, e lhe convidamos a fazer essa adaptação a título de exercício.

Obs Um trapézio $ABCD$ de bases AB e DC é **isósceles** quando $AD = BC$. O trapézio será chamado de **retângulo** quando um dos lados AD ou BC for perpendicular às bases.

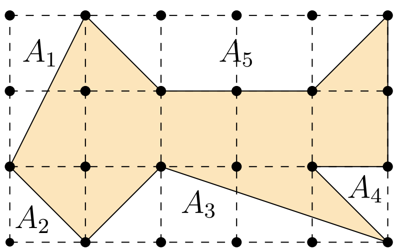
Agora vamos avançar um pouco e encontrar a área de polígonos cujos os vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado. Aqui não exigiremos que os lados do polígono estejam sobre as retas do reticulado.

Problema 10 — OBM. No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância.



Qual é a área da região sombreada?

(a) $7\,\text{cm}^2$.
(b) $8\,\text{cm}^2$.
(c) $8{,}5\,\text{cm}^2$.
(d) $9\,\text{cm}^2$.
(e) $9{,}5\,\text{cm}^2$.



Solução. Vamos completar o retângulo que dá forma ao reticulado, calcular a área desse retângulo e calcular as áreas dos polígonos cuja soma representa a diferença entre a área sombreada e a área do retângulo. Depois disso, para calcular a área da região sombreada que foi pedida no problema, basta subtrair a soma das áreas dos polígonos da área do retângulo. A área do retângulo é igual a

$$3 \cdot 5 = 15\,\text{cm}^2.$$

Já a soma das áreas A_1, A_2, A_3, A_4, e A_5 é igual a

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &= 1 + 0{,}5 + 2 + 0{,}5 + 3 \\ &= 7\,\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Assim, a área sombreada é igual a

$$15 - 7 = 8\,\text{cm}^2.$$

■

Você pode assistir a resolução do Problema 10 no canal do Portal do Saber da OBMEP.

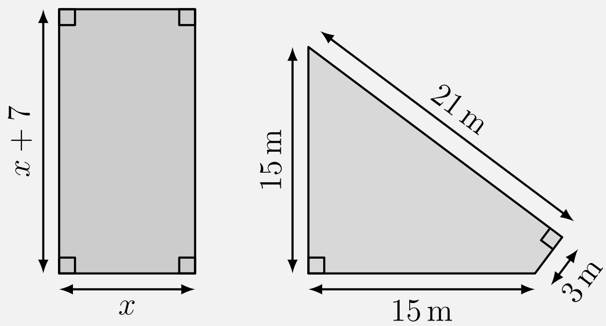
Saiba mais

Finalizaremos essa sequência de exercícios com um problema do ENEM sobre áreas, que pode ser resolvido pela decomposição (partição, subdivisão) de uma figura em outras mais simples.

Problema 11 — Enem 2016. Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional, como se observa na Figura B, agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno de formato retangular, como mostrado na Figura A, cujo comprimento seja 7 m maior que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular tal que as medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

(a) 7,5 e 14,5.
(b) 9,0 e 16,0.
(c) 9,3 e 16,3.
(d) 10,0 e 17,0.
(e) 13,5 e 20,5.



Solução. Divida o quadrilátero da figura B em dois triângulos retângulos, da maneira óbvia. Somando as áreas desses dois triângulos, chegamos à área do quadrilátero:

$$\frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} = \frac{288}{2} = 144\,\text{m}^2.$$

A fim de calcular as medidas do terreno adequado ao filho mais novo, temos de encontrar o valor de x tal que

$$x(x+7) = 144.$$

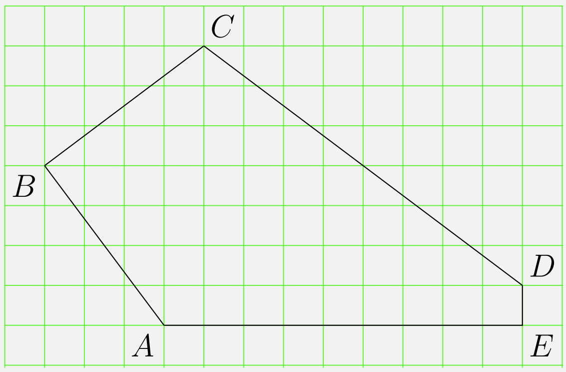
Analisando os valores dos itens, concluímos que a solução é $x = 9$ e $x + 7 = 16$. ■

Obs De maneira geral, em situações como essa, o procedimento-padrão seria resolver a equação quadrática $x(x+7) = 144$ para encontrar o valor de x. Porém, em um exame, pode-se utilizar a técnica da tentativa para ganhar tempo.

1.3 – Teorema de Pitágoras

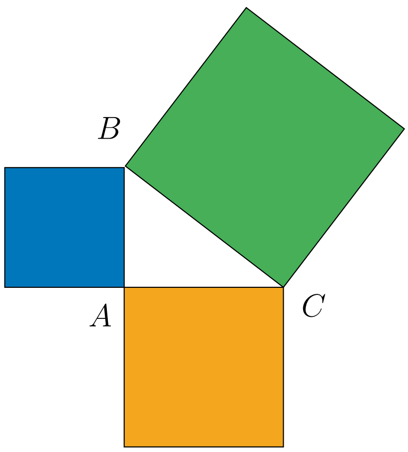
No Problema 10, nos deparamos com uma situação na qual calculamos a área de polígono cujos vértices estavam sobre uma malha quadriculada. Desse modo, é natural se questionar se *é possível calcular o perímetro de um polígono cujos vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado, mas que o lados não necessariamente estejam sobre as retas do reticulado?* Um exemplo de tal situação é apresentada no problema a seguir.

Problema 12 O pentágono $ABCDE$ a seguir possui seus vértices sobre uma reticulado formado por quadrados de lado 1 cm. Qual é o perímetro desse pentágono?



Para encontrar o perímetro de polígonos como esse, precisamos de um resultado muito importante na Matemática: O Teorema de Pitágoras.

Teorema 1.1 — Pitágoras. Se ABC é um triângulo retângulo, com o ângulo reto situado no vértice A, então a área do quadrado cujo lado é BC é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os dois outros lados do triângulo.



Observação 1.2 Dizemos que um triângulo é **retângulo** se um dos seus ângulos internos é **reto**, isto é, mede 90°. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, ou seja, 180°, a soma das medidas dos dois outros ângulos internos de um triângulo retângulo é $180° - 90° = 90°$. Quando a soma de dois ângulos é igual a um ângulo reto, dizemos que esses ângulos são **complementares**.

Observação 1.3 O lado maior de um triângulo retângulo é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados de **catetos**. O Teorema de Pitágoras afirma que, se o triângulo é retângulo, então a *soma das áreas dos quadrados dos catetos – quadrados construídos sobre os catetos – é igual à área do quadrado da hipotenusa – quadrado construído sobre a hipotenusa.* Se $A\widehat{B}C = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então as áreas desses quadrados valem a^2, b^2 e c^2, sendo a^2 a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Assim, o resultado geométrico do Teorema de Pitágoras pode ser escrito algebricamente da seguinte forma:

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{1.1}$$

É importante notar também que **a recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida**, ou seja, a identidade (1.1) entre as medidas dos lados de um triângulo implica que ele é retângulo (no ângulo oposto ao lado de medida a).

Existem diversas demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras. Por enquanto, iremos apenas aplicar o resultado na solução de alguns problemas, a começar pelo Problema 12.

Solução. Em primeiro lugar, veja que é fácil determinar o comprimento dos lados AE e DE, pois eles estão sobre as grades da malha. Temos que $\overline{AE} = 9\,\text{cm}$ e que $\overline{DE} = 1\,\text{cm}$. Para determinar os comprimentos dos lados AB, BC e CD construa três triângulos retângulos, todos eles com catetos sobre a grade e cada um deles tendo como hipotenusa um dos lados AB, BC ou CD. Para tanto, considere os pontos P, Q e R da figura.

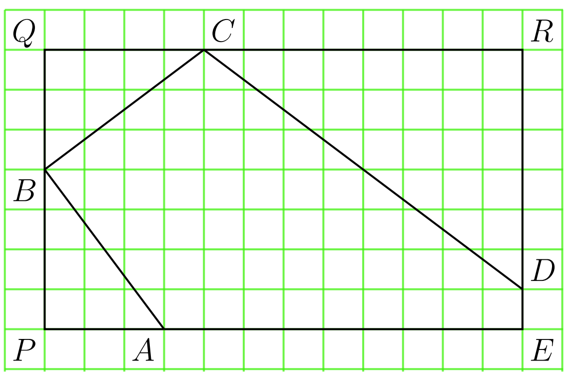
Agora, pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos PAB, QBC e RDC, temos que

$$\overline{AB}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PA}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ e}$$

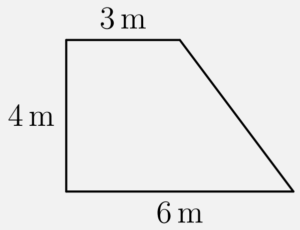
$$\overline{CD}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RD}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100.$$

Portanto, $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ e $\overline{CD} = 10$. Consequentemente, o perímetro do pentágono é $5 + 5 + 10 + 1 + 9 = 30\,\text{cm}$. ∎



Note ainda que, a aplicação do Teorema de Pitágoras, também pode ser feita em situações nas quais não há a presença de uma malha quadriculada. Nesses casos, podemos construir triângulos retângulos com o auxílio de retas perpendiculares entre si.

Problema 13 Calcule o perímetro do seguinte terreno em formato de trapézio retângulo.



Solução. Em primeiro lugar, vamos denotar os vértices da figura por J, K, L e I. Para calcular o perímetro do terreno, em formato de trapézio retângulo, é preciso calcular a medida do segmento KL que aparece destacado na Figura 1.4. Fazemos isso traçando o segmento MK, perpendicular à base do trapézio, o qual divide o trapézio no retângulo $IJKM$ e no triângulo retângulo KLM, conforme a Figura 1.4.

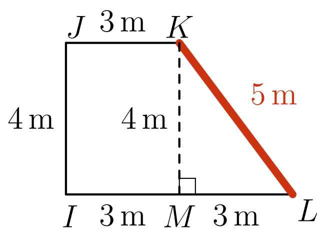


Figura 1.4: cálculo dos comprimento do lado oblíquo do trapézio retângulo.

Utilizando novamente o fato de que os lados opostos de um retângulo têm medidas iguais, obtemos $\overline{MK} = \overline{IJ} = 4\,\text{m}$ e $\overline{MI} = \overline{JK} = 3\,\text{m}$. Logo, $\overline{ML} = \overline{IL} - \overline{MI} = 6\,\text{m} - 3\,\text{m} = 3\,\text{m}$. Por fim, uma vez que o triângulo KLM é retângulo em M, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa KL:

$$\overline{KL}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{LM}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

isto é, $\overline{KL} = 5\,\text{m}$. Portanto, o perímetro do terreno em forma de trapézio retângulo é igual a

$$4 + 3 + 5 + 6 = 18 \text{ metros}.$$

■

Duas consequências importantes do Teorema de Pitágoras são enunciadas nos problemas a seguir.

Problema 14 Mostre que a diagonal de um quadrado de lado ℓ tem medida $\ell\sqrt{2}$.

Prova. Considere o lado esquerdo da Figura 1.3. Se $ABCD$ é um quadrado de lado ℓ, então o triângulo ABC é retângulo em B e possui catetos de medida ℓ. Assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2, \text{ ou seja, } AC = \ell\sqrt{2}.$$

■

Problema 15 Mostre que as alturas de um triângulo equilátero de lado ℓ têm medidas iguais a $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

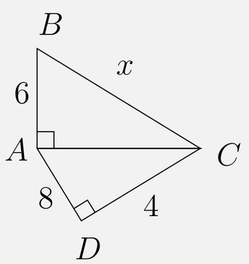
Prova. Considere o lado direito da Figura 1.3. Seja ABC um triângulo equilátero de lado ℓ. Sendo M o ponto médio do lado BC, já sabemos que AM também é altura de ABC. Portanto, o triângulo ABM é retângulo em M, possui um cateto de medida $\frac{\ell}{2}$ e uma hipotenusa de medida ℓ. Sendo $AM = h$, segue do Teorema de Pitágoras que

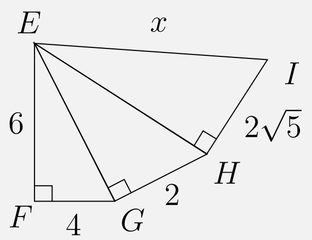
$$\ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2. \text{ Daí, } h^2 = \frac{3\ell^2}{4}, \text{ ou seja, } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

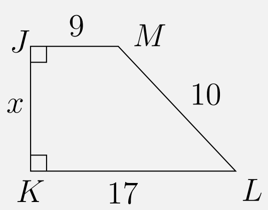
■

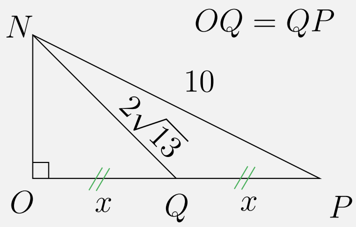
A seguir, mais situações que exploram o Teorema de Pitágoras fora da malha quadriculada.

Problema 16 Determine o valor de x nas seguintes figuras.

(a)


(b)


(c)


(d)


Solução.

(a) Usando Pitágoras no ΔACD, temos $\overline{AC}^2 = 4^2 + 8^2 = 80$. Usando Pitágoras no ΔABC, temos $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 36 + 80 = 116$. Assim, $x = \overline{BC} = \sqrt{116}$.

(b) No ΔEFG, temos $\overline{EG}^2 = 6^2+4^2 = 52$. No ΔEGH, temos $\overline{EH}^2 = \overline{EG}^2+\overline{GH}^2 = 52+4 = 56$. No ΔEHI, temos $\overline{EI}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HI}^2 = 56 + 20 = 76$. Logo, $x = \overline{EI} = \sqrt{76}$.

(c) Seja P o pé da perpendicular de M até KL (faça uma figura para acompanhar). Note que o quadrilátero $KJMP$ tem todos os ângulos retos, logo é um retângulo. Como todo retângulo é paralelogramo, os seus lados opostos são iguais, logo $\overline{KP} = \overline{JM} = 9$. Também, MPL é um triângulo retângulo em P, com $\overline{PL} = \overline{KL} - \overline{KP} = \overline{KL} - \overline{JM} = 17 - 9 = 8$. Usando Pitágoras no ΔMPL, temos $\overline{MP}^2 + \overline{PL}^2 = \overline{ML}^2$, ou seja, $\overline{MP}^2 + 8^2 = 10^2$. Logo, $\overline{MP}^2 = 36$ e, daí, $\overline{MP} = 6$. Por fim, novamente pelo fato de $JMPK$ ser um retângulo, temos $x = \overline{JK} = \overline{MP} = 6$.

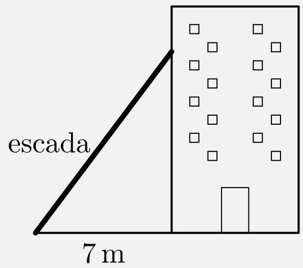
(d) Sejam $\overline{OQ} = \overline{QP} = x$ e $\overline{NO} = y$. Usando Pitágoras nos triângulos NOQ e NOP, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52, \\ y^2 + 4x^2 = 10^2 = 100. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, vem que $3x^2 = 100 - 52 = 48$, logo $x^2 = 48 \div 3 = 16$. Portanto, $x = 4$.

■

Problema 17 — OBMEP 2005. O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como mostrado na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo, ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?



Solução. Em primeiro lugar, vamos calcular a altura do topo da escada antes dela escorregar. Denotando esse valor por x e utilizando o Teorema de Pitágoras, temos

$$25^2 = 7^2 + x^2.$$

Passando o termo 7^2 para o lado esquerdo da equação e utilizando a diferença de quadrados, obtemos

$$x^2 = 25^2 - 7^2 = (25 - 7)(25 + 7) = 18 \cdot 32 = 9 \cdot 64.$$

Portanto, $x = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$. Ao descer quatro metros, a altura do topo da escada passará ser igual a $24 - 4 = 20$ metros. Sendo y a nova distância do pé da escada ao prédio, utilizando mais uma vez Pitágoras, obtemos

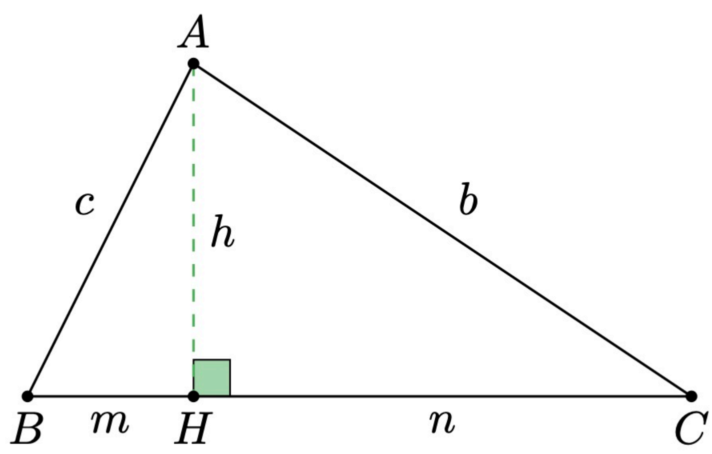
$$25^2 = 20^2 + y^2.$$

Passando o termo 20^2 para o lado esquerdo da equação e utilizando a diferença de quadrados, obtemos

$$y^2 = 25^2 - 20^2 = (25 - 20)(25 + 20) = 5 \cdot 45 = 25 \cdot 9.$$

Portanto, $y = 5 \cdot 3 = 15$. Logo, o deslocamento horizontal foi de $15 - 7 = 8$ metros. ■

Antes de partirmos para o próximo problema, iremos apresentar algumas relações que existem entre a altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Para tanto, consideraremos um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa BC, desenhado na próxima figura. Sendo H o pé da perpendicular baixada de A a BC, nosso objetivo nesta seção é calcular os comprimentos de AH, BH e CH em função das medidas dos lados do ΔABC.



Por simplicidade de notação, sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$. Note que há duas formas de calcularmos a área do ΔABC: a primeira é considerando BC como base e a segunda é considerando AB como base. Comparando as fórmulas geradas por essas duas possibilidades, obtemos

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Simplificando as frações e isolando o termo h, chegamos a

$$h = \frac{b \cdot c}{a}. \tag{1.2}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AHB, temos que $m^2 + h^2 = c^2$. Substituindo o valor de h encontrado na equação (1.2) e isolando o termo m^2, obtemos

$$m^2 = c^2 - h^2 = c^2 - \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = c^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{c^4}{a^2}.$$

Note que, na última igualdade, utilizamos o Teorema de Pitágoras em ΔABC para obter $a^2 - b^2 = c^2$.

Extraindo raízes quadradas em ambos os lados da igualdade $m^2 = \frac{c^4}{a^2}$, obtemos

$$m = \frac{c^2}{a}. \tag{1.3}$$

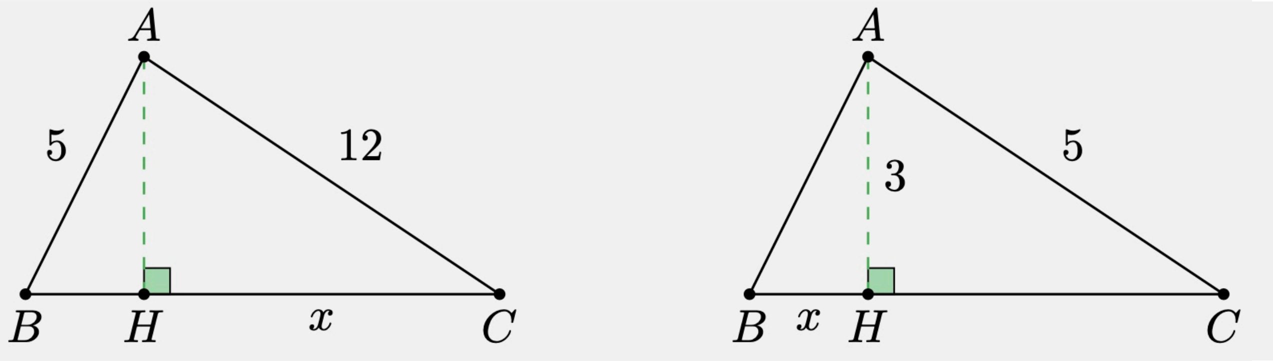
De modo análogo, o Teorema de Pitágoras aplicado ao ΔAHC dá

$$n = \frac{b^2}{a}. \tag{1.4}$$

As fórmulas (1.2), (1.3) e (1.4) são conhecidas como as *relações métricas do triângulo retângulo*. Elas também podem ser deduzidas utilizando semelhança de triângulos. Optamos por aplicar diretamente o conceito de área e o Teorema de Pitágoras para apresentar uma perspectiva diferente da maioria dos livros didáticos.

A seguir, resolveremos um exercício simples em que podemos empregar as relações métricas do triângulo retângulo de maneira quase imediata.

Problema 18 Nas seguintes figuras temos o desenho de um triângulo retângulo e da altura relativa à hipotenusa. Calcule o valor x.



Solução.

(a) Usando Pitágoras no triângulo ABC, temos que $\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Logo, $\overline{BC} = 13$. Agora, usando a relação (1.4), temos $x = \frac{12^2}{13} = \frac{144}{13}$.

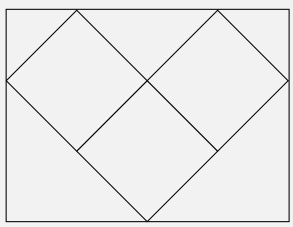
(b) Usando Pitágoras no triângulo AHC, temos $\overline{HC}^2 + 3^3 = 5^2$. Logo, $\overline{HC}^2 = 25 - 9 = 16$. Assim, $\overline{HC} = 4$. Seja $\overline{BC} = a$. Pela relação (1.4), $\overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}$. Assim, $4 = \frac{25}{a}$. Portanto, $a = \frac{25}{4}$. Por fim, $x + \overline{HC} = \overline{BC}$. Assim, $x = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$.

■

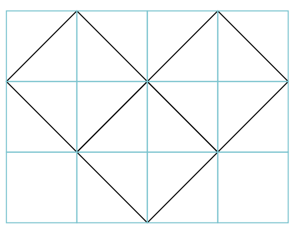
1.4 – Construindo Malhas

Na Sequência de Problemas anterior, percebemos que a utilização de uma grade quadriculada facilita os cálculos dos perímetros e áreas de figuras planas. Porém, nem todos os enunciados dos problemas de Geometria trazem uma figura desenhada sobre uma grade. Entretanto, isso não significa que não podemos construir nossa própria grade como forma de facilitarmos a solução. Veja os seguintes problemas.

Problema 19 — OBM. Na figura abaixo, temos um retângulo circunscrito a três quadrados, cada um com $1\,\text{cm}^2$ de área. Qual é a área do retângulo?



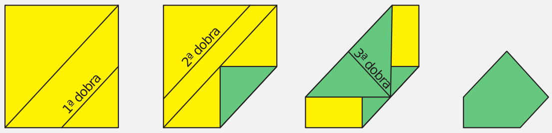
Solução. Divida o retângulo em 12 quadrados menores através de cortes paralelos às diagonais dos três quadrados originais, formando uma grade quadriculada, conforme a seguinte ilustração.

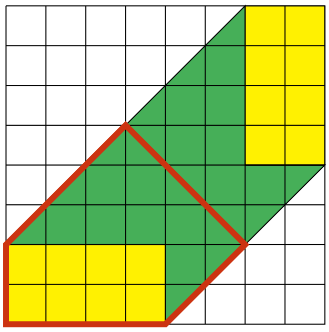


Observe que cada quadrado original é dividido em quatro triângulos menores congruentes. Portanto, cada um destes triângulos tem área $\frac{1}{4}$ cm^2.

Por outro lado, a junção de dois destes triângulos formam um quadrado da grade. Logo, cada quadrado da grade tem área $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ cm^2. Consequentemente, a área do retângulo é igual a $12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ cm^2. ■

Problema 20 — OBMEP 2019. Uma folha quadrada de 8cm de lado foi dobrada três vezes, conforme mostrado nas seguintes figuras. A primeira e a segunda dobras ficaram paralelas a uma diagonal da folha, ao passo que a terceira dobra ficou perpendicular a essa diagonal. Qual é a área da figura final?





Solução. A fim de entendermos melhor as várias dobras, começamos quadriculando a folha, no seu formato original, em $8 \cdot 8 = 64$ quadradinhos iguais, cada um deles de lado 1 cm e, portanto, área 1 cm^2.

A primeira dobra gerou um triângulo com um vértice sobre uma diagonal do quadrado. Como ela resultou paralela a essa diagonal, concluímos, pela próxima figura, que ela dividiu cada lado da folha original ao meio.

A segunda dobra, também feita paralelamente à mesma diagonal do quadrado, fez com que o vértice superior esquerdo, da folha original, coincidisse com o ponto médio da hipotenusa do triângulo mencionado anteriormente. Por sua vez, tendo em vista que os pontos médios das duas dobras estão situados sobre a outra diagonal do quadrado, deduzimos que a situação, da terceira dobra, é a ilustrada na próxima figura, na qual ela foi feita ao longo do segmento destacado com contorno mais grosso situado sobre a outra diagonal da folha original.

Assim, a figura final, cujo contorno está destacado, é formada por 15 quadradinhos e por 8 metades de quadradinhos, sendo, pois, equivalente a

$$15 + \left(8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 19$$

quadradinhos.

Por fim, uma vez que cada um desses quadradinhos tem 1 cm de lado, concluímos que a área da figura final vale

$$19 \cdot 1 = 19\,\text{cm}^2.$$

■

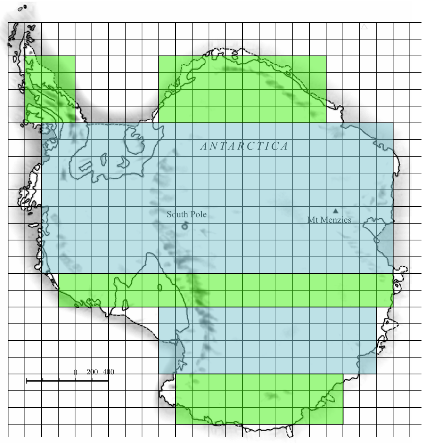


Figura 1.5: Aplicando uma malha quadriculada sobre um mapa para estimarmos a sua área.

Problema 21 — PISA - adaptado. No desenho a seguir, temos um mapa da Antártida, com uma escala em quilômetros. Faça uma estimativa da área do continente.

Solução. Em primeiro lugar, utilizamos a medida da escala para criar uma grade quadriculada, na qual cada quadrado tem lado igual a 200 quilômetros e, portanto, tem área igual a $200 \cdot 200 = 40.000\,\text{km}^2$, conforme a Figura 1.5. Em seguida, construímos retângulos para estimar a área da figura. A quantidade de quadrados que compõem os retângulos destacados é

$$12 + 40 + 189 + 40 + 52 + 30 = 363.$$

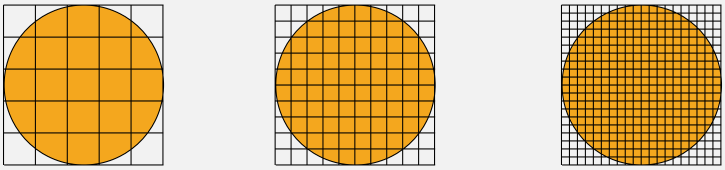
Portanto, podemos estimar o tamanho da Antártida em

$$363 \cdot 40.000 = 14.520.000\,\text{km}^2.$$

■

Observe que a medida da área calculada no problema anterior é apenas uma estimativa. Essa estimativa pode ser melhorada se construirmos uma malha **mais refinada** do que a malha construída para resolver o problema. Utilizaremos esse conceito para estimar a área de um círculo de raio 1 m.

Problema 22 Um círculo é um conjunto de pontos no plano que é equidistante de um ponto chamado de centro. Considere um círculo de raio 1 metro em três situações ilustradas pelas seguintes figuras.



Estime a área do círculo contando os quadrados de cada malha de acordo com um "critério visual" visual de inclusão: se um quadrado tiver mais da metade de sua área sobre o círculo, ele é contado. Caso contrário, não.

Solução. Em todas as situações, o quadrado no qual o círculo está inscrito tem área 4 m.

(a) Na primeira situação, temos $9+4\cdot 3 = 21$ quadradinhos que devem ser contabilizados para aproximar a área do círculo. Neste caso, sua área será aproximadamente igual a $4\cdot\frac{21}{25}\approx 3{,}36$ m^2.
(b) Na segunda situação, temos $4\cdot(4+6)+36 = 76$ quadradinhos que devem ser contabilizados para aproximar a área do círculo. Neste caso, sua área será aproximadamente igual a $4\cdot\frac{76}{100}\approx 3{,}04$ m^2.
(c) Na terceira situação, temos $4\cdot 21 = 84$ quadradinhos que não devem ser contabilizados. Ou seja, temos $400-84 = 316$ quadradinhos para aproximar a área do círculo. Neste caso, sua área será aproximadamente igual a $4\cdot\frac{316}{400}\approx 3{,}16$ m^2.

■

É intuitivo perceber que, à medida que vamos refinando a malha, mais próximo ficaremos o valor real da área do círculo. Essa estratégia não nos permite obter a área exata, uma vez ser impraticável a contagem dos quadradinhos em malhas cada vez mais finas. Porém, a partir da análise das três situações apresentadas no problema anterior, podemos **intuir** que a sequência de aproximações converge para um número que está entre 3 e 4. Este número é representado pela letra grega π.

Podemos definir π de muitas formas. Uma delas, é através da noção de aproximações sucessivas da área do círculo de raio unitário, como fizemos no Problema 22. Outra forma, é através do cálculo do perímetro do círculo por aproximações via polígonos regulares. É possível demonstrar que as duas definições são equivalentes e que elas estão associadas com as fórmulas para o calculo da área e perímetro de um círculo de raio R, dadas por

$$\text{Área} = \pi R^2 \qquad \text{e} \qquad \text{Perímetro} = 2\pi R. \tag{1.5}$$

1.5 – Mais sobre círculos

Nesta breve seção, resolveremos alguns problemas que envolvem a Fórmula 1.5 do perímetro de um círculo.

Problema 23 Joaquim fez uma marca em um dos pneus de sua bicicleta utilizando tinta fresca. Ele pedalou por alguns metros em linha reta e percebeu duas coisas: o contato do pneu com o chão deixou marcas no chão e a distância entre duas marcas consecutivas era sempre a mesma. Joaquim mediu essa distância e encontrou o valor de 1,63 m. Qual das opções abaixo apresenta a medida, em centímetros, que mais se aproxima da medida para o diâmetro da roda da sua bicicleta? (utilize $\pi = 3{,}14$.)

(a) 40. (b) 44. (c) 48. (d) 52. (e) 56.

Solução. Veja que a distância entre duas marcas consecutivas é igual à circunferência C das rodas da bicicleta de Joaquim. Desse modo, uma vez que $C = \pi d$, obtemos

$$d = \frac{C}{\pi} \cong \frac{1{,}63}{3{,}14} \cong 0{,}519\,\text{m} = 51{,}9\text{ cm}.$$

Portanto, a opção que traz a melhor aproximação para a circunferência da roda é **(d)** 52 cm. ■

Problema 24 Para realizar o teste físico em determinado concurso militar, os candidatos devem correr ao redor de uma praça circular cujo diâmetro mede 110 m. Quantos metros percorre, aproximadamente, um candidato que dá 15 voltas ao redor dessa praça?

Solução. Uma vez que a praça tem formato circular com diâmetro igual a 110 m, depois de uma volta, esse candidato terá percorrido aproximadamente

$$3{,}14 \cdot 110 = 345{,}4\,\text{m}.$$

Portanto, depois de 15 voltas, o candidato terá percorrido um total de

$$15 \cdot 345{,}4 = 5181\,\text{m}.$$

■

Problema 25 Uma empresa quer encomendar uma mesa circular para realizar as reuniões mensais de seu conselho de administração. Sabendo que a empresa possui 12 conselheiros, contando com o presidente, e estimando que o espaço ocupado por cada pessoa sentada à mesa seja de 60 cm, qual das medidas abaixo mais se aproxima da menor medida possível do diâmetro da mesa que a empresa deve encomendar? (Utilize $\pi \cong 3{,}14$.)

(a) 2,1 m.
(b) 2,2 m.
(c) 2,3 m.
(d) 2,4 m.
(e) 2,5 m.

Solução. Inicialmente, perceba que a circunferência do círculo que forma o bordo da mesa deve ser maior do que ou igual a $12 \cdot 60 = 720$ cm, pois são 12 lugares e cada um ocupa um espaço de 60 cm. Desse modo, o diâmetro da mesa deve ser maior do que ou igual a

$$\frac{720}{3{,}14} \cong 229{,}3\,\text{cm}.$$

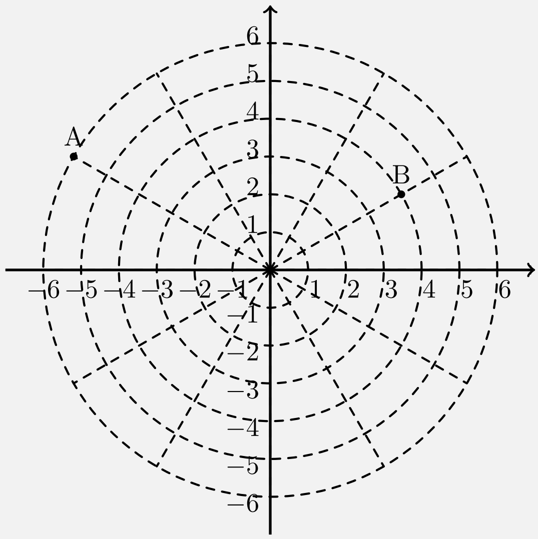
Como 229,3 cm é o mesmo que 2,293 m, concluímos que o item **(c)** é o que melhor aproxima a menor medida possível do diâmetro da mesa que a empresa deve encomendar. ■

Observação 1.4 O número π é irracional. Isso significa que não pode ser escrito como fração de dois números inteiros com denominador não-nulo. Assim, sua representação decimal não é periódica. As primeiras casas decimais de π são dadas pela aproximação

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

Não é necessário saber muitas casas de π para termos boas aproximações práticas. Por exemplo, para calcular o perímetro de um círculo, com 46 bilhões de anos-luz de raio em volta do universo observável, é suficiente uma aproximação de π com apenas 40 casas decimais para garantir precisão de 1 átomo de hidrogênio.

Problema 26 — Enem 2018. Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por círculos de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de 30°, conforme mostrado na figura.



Suponha que um ponto material se desloque apenas pelas semirretas e pelos círculos da malha, não podendo passar pela origem (0,0). Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto A até o ponto B, um ponto material deve percorrer uma distância igual a:

(a) $\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8$.

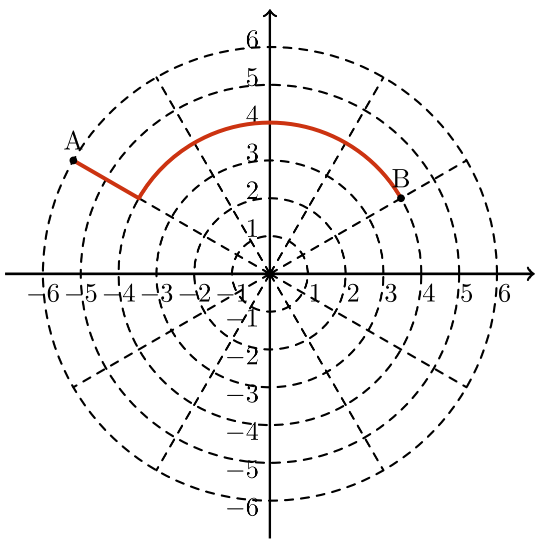
(b) $\frac{2\cdot\pi\cdot 2}{3}+6$.

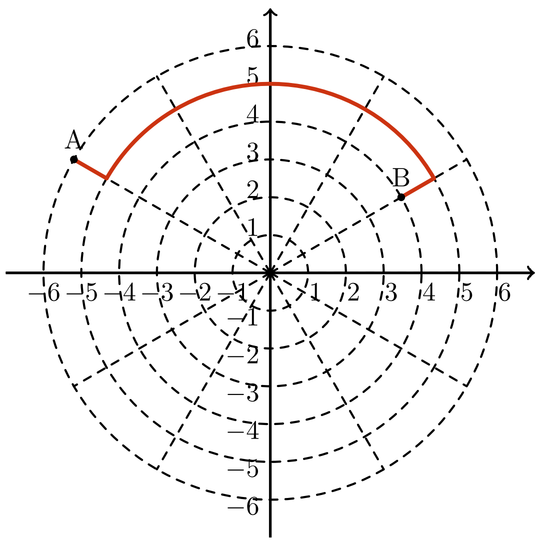
(c) $\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4$.

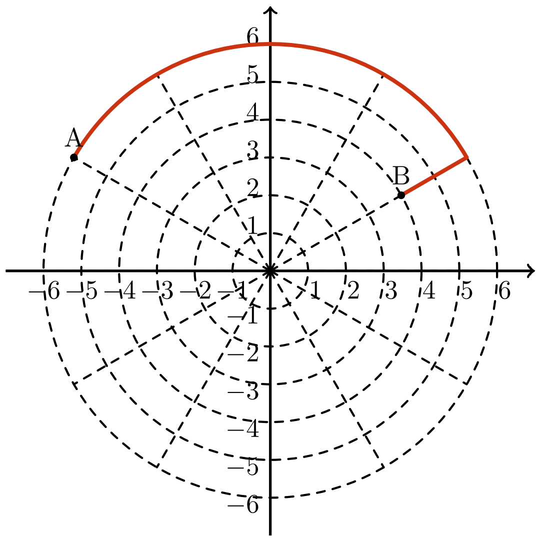
(d) $\frac{2\cdot\pi\cdot 4}{3}+2$.

(e) $\frac{2\cdot\pi\cdot 5}{3}+2$.

Solução. Observe os três percursos destacados nas figuras abaixo.





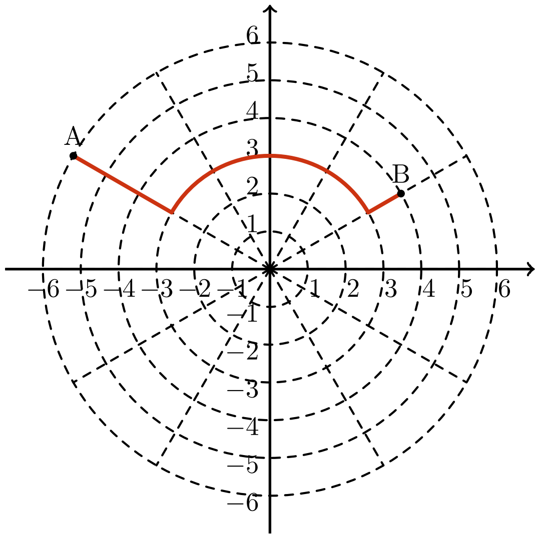


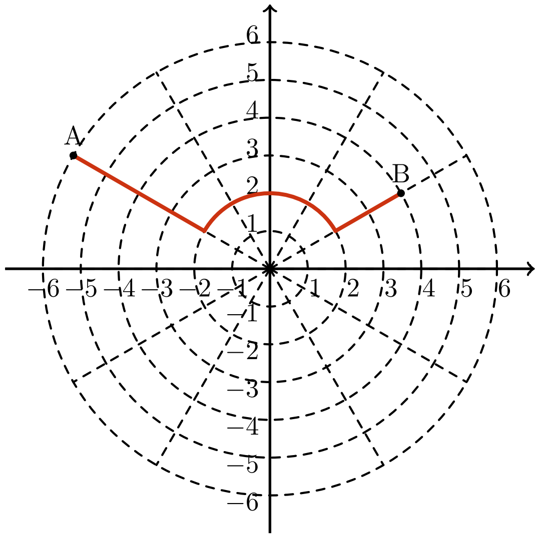
Em cada semirreta, os segmentos determinados por círculos consecutivos têm medidas iguais a 1. Comparemos esses três percursos para um ponto material se deslocar de A até B: No primeiro percurso, o ponto material tem de descer do círculo de raio 6 para o de raio 4, percorrendo dois segmentos unitários, além de percorrer um arco desse segundo círculo correspondente a um ângulo central de 120°. Como o comprimento do círculo aumenta, ou diminui, na mesma proporção do raio, pois $\frac{C}{r} = 2\pi$, temos que o arco de menor comprimento, dentre os que têm raios 4, 5 e 6, é o que tem raio 4. Assim, os percursos destacados nas duas últimas figuras certamente têm comprimento maior do que o percurso destacado na primeira. Este último, por sua vez, tem comprimento é igual a

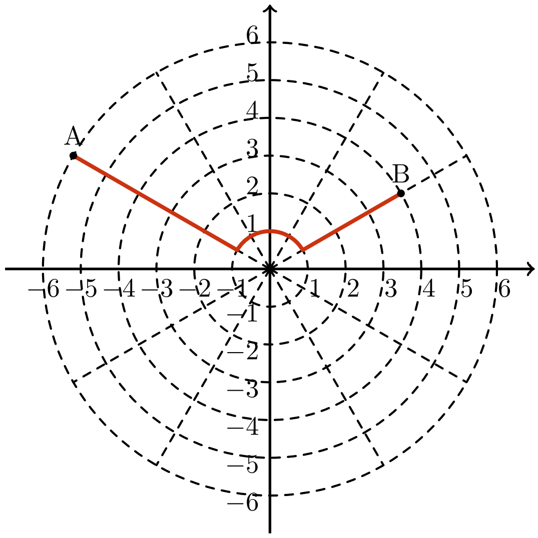
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2,$$

pois o arco, correspondente ao seu ângulo central de 120°, tem comprimento igual a $\frac{1}{3}$ do comprimento total do círculo, uma vez que $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, também existe a possibilidade do ponto material descer para um círculo de raio menor do que 4, percorrer um arco sobre esse círculo e, em seguida, subir até o círculo de raio 4. Veja as figuras seguintes.







Esses percursos têm comprimentos respectivamente iguais a

$$\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4,\quad \frac{2\cdot\pi\cdot 2}{3}+6\quad \text{e}\quad \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8.$$

Uma vez que $\pi > 3$ e que são verdadeiras as equivalências

$$\frac{2\cdot\pi}{3}+8<\frac{6\cdot\pi}{3}+4 \Leftrightarrow \frac{4\cdot\pi}{3}>4 \Leftrightarrow \pi > 3 \text{ e}$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{3} + 8 < \frac{4 \cdot \pi}{3} + 6 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \pi}{3} > 2 \Leftrightarrow \pi > 3,$$

temos $\frac{2 \cdot \pi}{3} + 8$ como o menor dos três comprimentos acima. Além disso, por causa da terceira equivalência

$$\frac{2 \cdot \pi}{3} + 8 < \frac{8 \cdot \pi}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{6 \cdot \pi}{3} > 6 \Leftrightarrow \pi > 3,$$

$\frac{2 \cdot \pi}{3} + 8$ é menor do que o comprimento da possibilidade obtida anteriormente.

Logo, o menor percurso tem comprimento $\frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8$ e a opção correta é a letra **(a)**.

■