GUIA DA(O) PROFESSORA(OR)

MATEMÁTICA

CONEXÃO EDUCAÇÃO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED

CEARÁ EDUCA

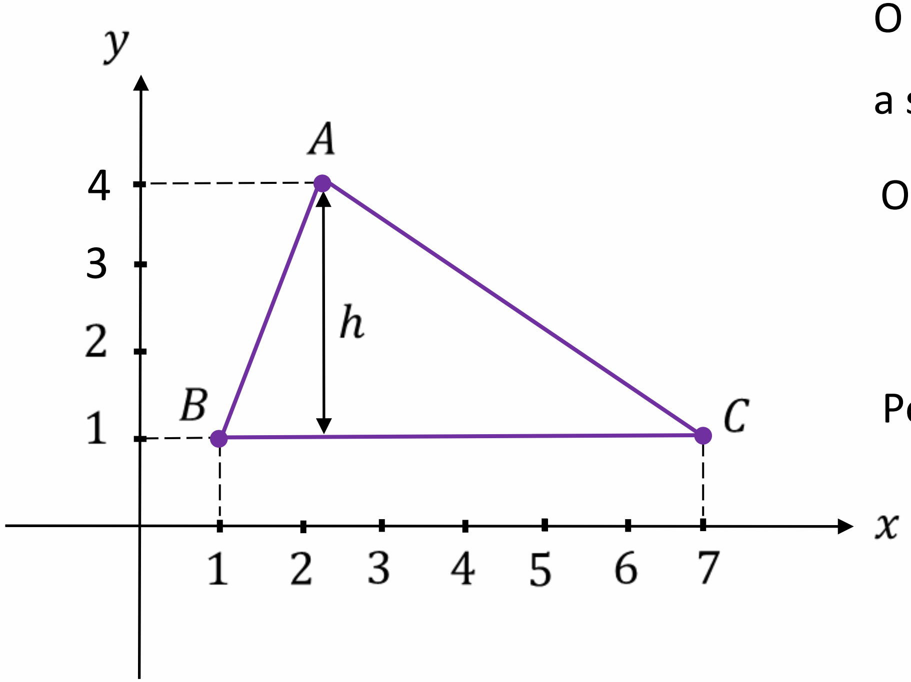
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

O DETERMINANTE E O CÁLCULO DE ÁREAS

Profa. Tábita Cavalcante

ÁREA DE TRIÂNGULO

Inicialmente vamos estudar o cálculo da área de um triângulo onde um dos lados é paralelo a um dos eixos coordenados.



O triângulo ABC possui o lado BC paralelo ao eixo das abscissa e a altura relativa a sua base é paralela ao eixo das ordenadas.

Ou seja,

$$\overline{BC} = 7 - 1 = 6 \text{ e } \mathrm{h} = 4 - 1 = 3$$

Portanto, a área do triângulo ABC é dada por

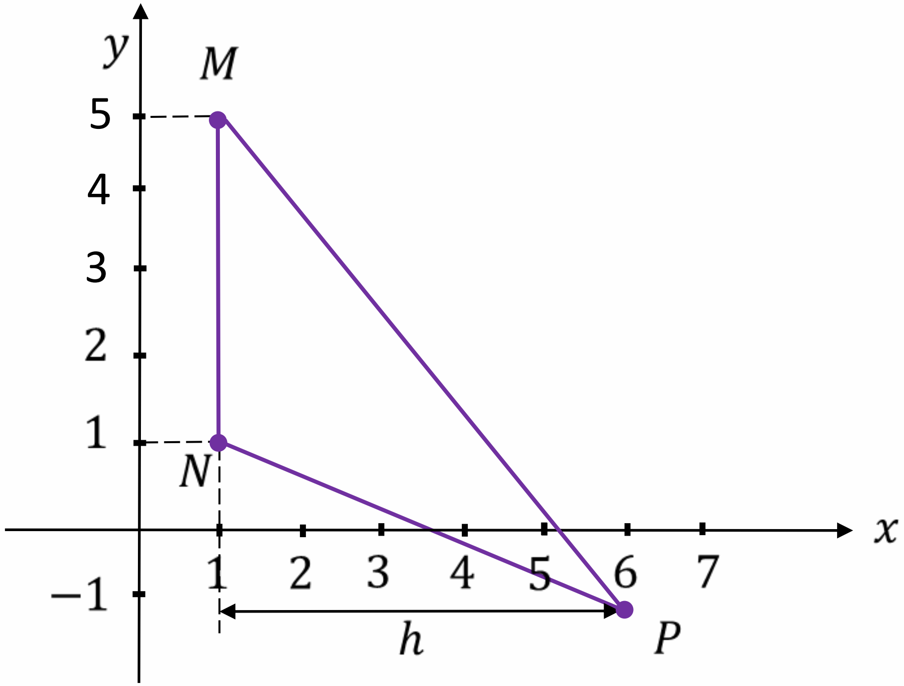
$$A_{ABC} = \frac{6 \cdot 3}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{18}{2}$$

$$A_{ABC} = 9$$

ÁREA DE TRIÂNGULO

De modo análogo, o triângulo MNP a seguir possui o lado MN paralelo ao eixo das ordenadas e a altura relativa a sua base paralela ao eixo das abscissas. Logo,



$$\overline{MN} = 5 - 1 = 4 \text{ e } h = 6 - 1 = 5$$

Portanto, a área do triângulo MNP é dada por:

$$A_{MNP} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

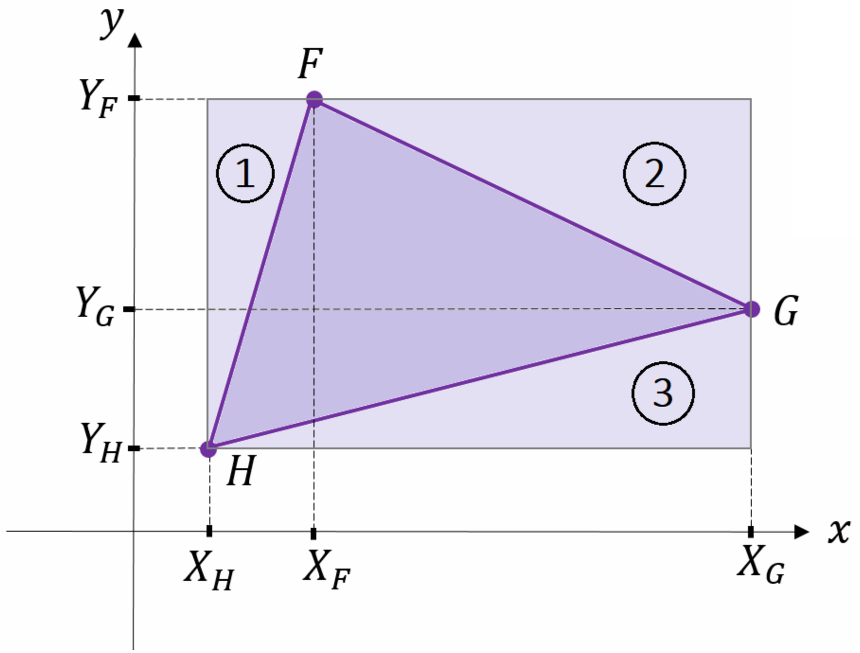
$$A_{ABC} = \frac{20}{2}$$

$$A_{ABC} = 10$$

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

ÁREA DE TRIÂNGULO

Considere, agora um triângulo FGH em que a base e sua altura relativa não sejam paralelos aos eixos coordenados.

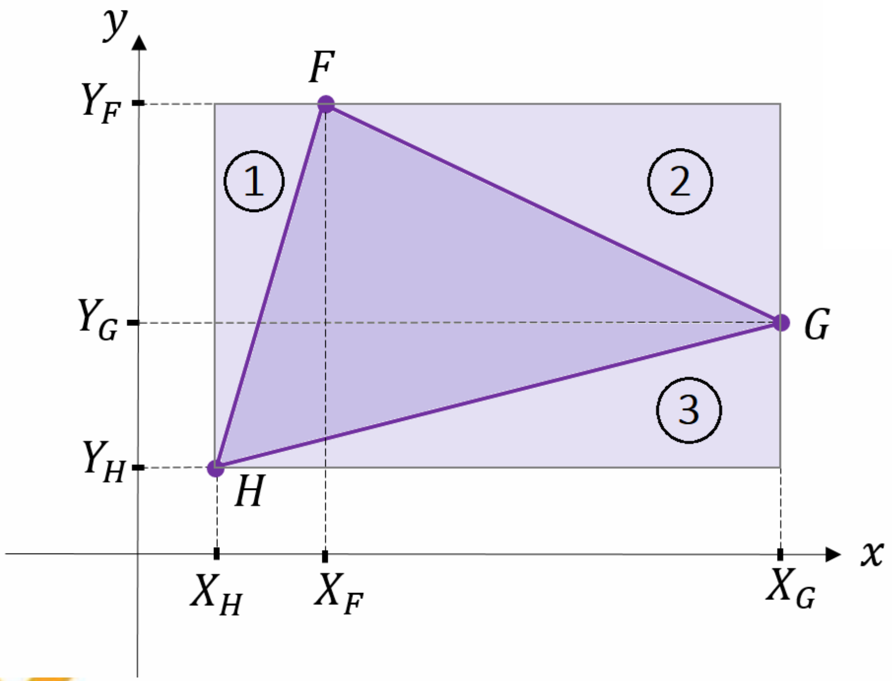


Podemos calcular a área desse triângulo construindo um retângulo cujos lados sejam paralelos aos eixos coordenados e cujos vértices pertençam aos lados desse triângulo.

Ou seja, a área do triângulo FGH é igual a área desse retângulo menos as áreas dos triângulos 1, 2 e 3.

ÁREA DE TRIÂNGULO

$$A_{FGH} = (X_G - X_H)\cdot(Y_F - Y_H) - \frac{(X_F - X_H)\cdot(Y_F - Y_H)}{2} - \frac{(X_G - X_F)\cdot(Y_F - Y_G)}{2} - \frac{(X_G - X_H)\cdot(Y_G - Y_H)}{2}$$



$$A_{FGH} = \frac{X_F Y_G}{2} + \frac{X_H Y_F}{2} + \frac{X_G Y_H}{2} - \frac{X_H Y_G}{2} - \frac{X_G Y_F}{2} - \frac{X_F Y_H}{2}$$

Essa expressão é obtida no cálculo do determinante:

$$\mathrm{A} = \frac{|D|}{2}, em\ que\ D\ é\ o\ determinante \begin{vmatrix} X_F & Y_F & 1 \\ X_G & Y_G & 1 \\ X_H & Y_H & 1 \end{vmatrix}$$

Exercício 1

1. Calcule a área do triângulo ABC.

Para determinar a área do triângulo em que $A = (2, -2), B = (-3,$
$C = (1, 3)$ inicialmente calculamos o determinante.

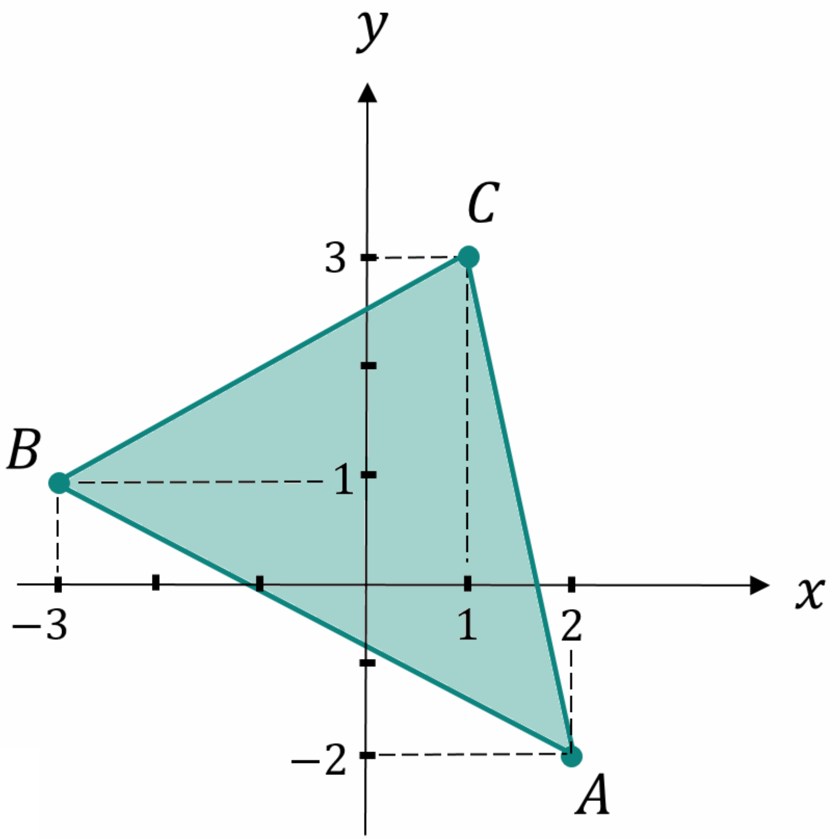
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$1 \quad 6 \quad 6 \qquad\qquad 2 \quad -2 \quad -9$

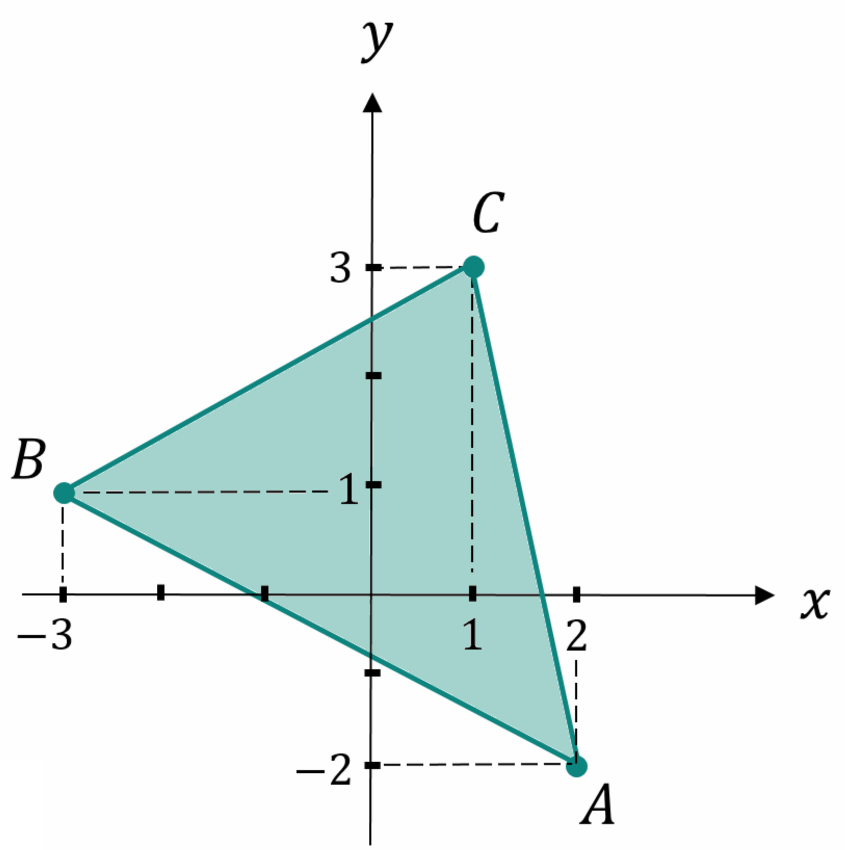
$$D = 2 + (-2) + (-9) - 1 - 6 - 6$$

$$D = -22$$



Exercício 1

1. Calcule a área do triângulo ABC.



Segue que a área é calculada por:

$$A_{ABC} = \frac{|-22|}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{22}{2}$$

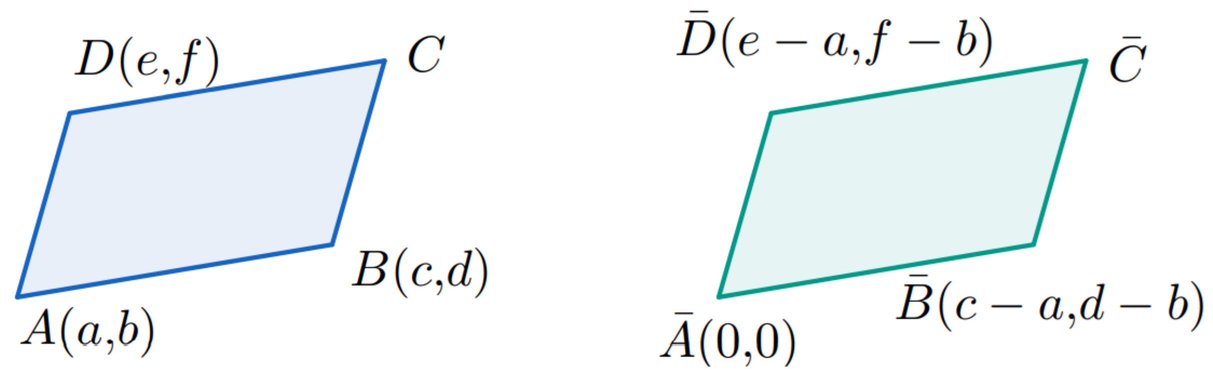
$$A_{ABC} = 11$$

ÁREA DE PARALELOGRAMO

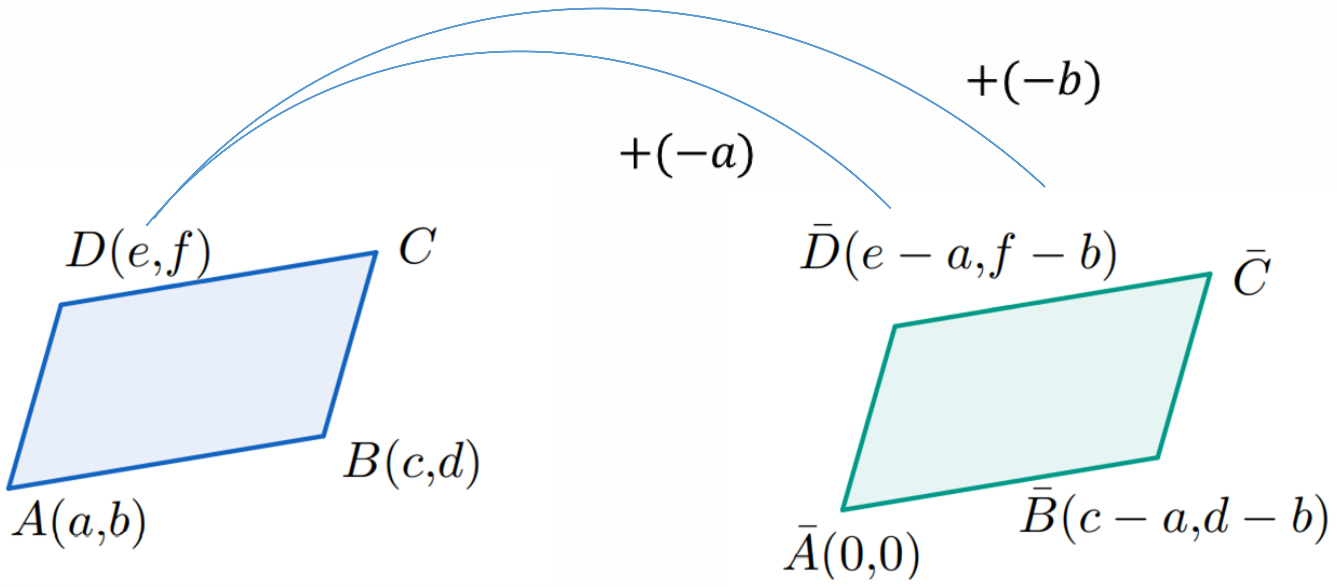
O valor da área do paralelogramo ABCD de vértices $A(0,0), B(a,b), C(a+c, b+d)$ e $D(c,d)$ é igual ao módulo do determinante da matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Aplicando as propriedades do determinante de matrizes quadradas, generalizamos essa expressão da área do paralelogramo com um vértice na origem para paralelogramos em posições arbitrárias no plano.



ÁREA DE PARALELOGRAMO



O paralelogramo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ assim construído tem vértice na origem logo, como vimos acima, sua área é o módulo do determinante da matriz

$$M_2 = \begin{pmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{pmatrix}.$$

ÁREA DE PARALELOGRAMO

Podemos verificar que a matriz M_2 tem o mesmo determinante da matriz M_3.

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}$$

$$[ABCD] = \det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix},$$

onde $[ABCD]$ é a área do paralelogramo $ABCD$, e (a,b), (c,d), e (e,f) são as coordenadas dos vértices A, B e D, como no paralelogramo em azul da Figura 1.5.

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Exercício 2

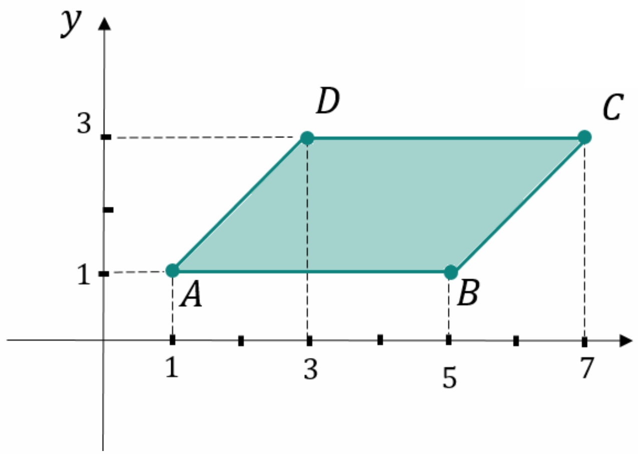
1. Calcule a área do paralelogramo ABCD.

Para determinar a área do paralelogramo em que $A = (1, -1), B = (5, 1), C = (7, 3) e\ D = (3, 3)$ vamos calcular o determinante formado pelos vértices A, B e D.

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

3 3 5 1 3 15



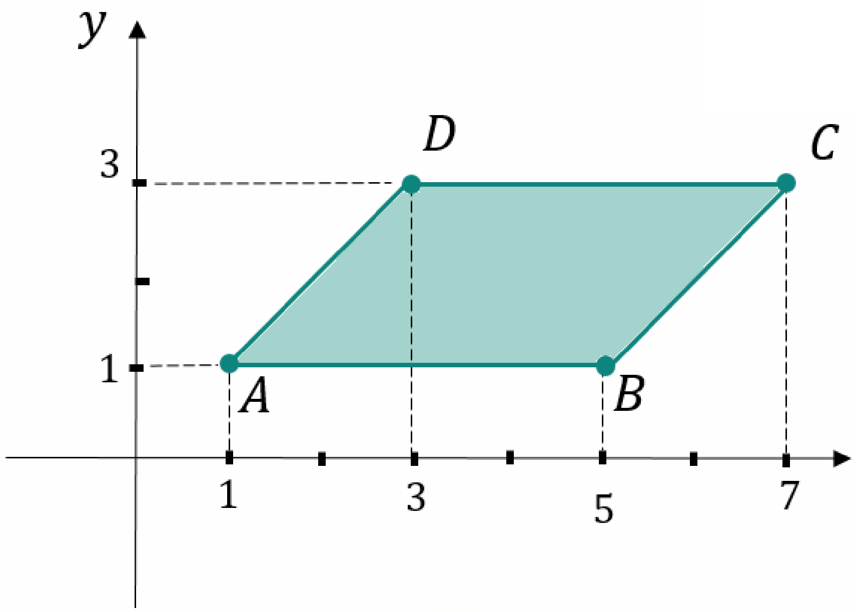
$$\mathrm{D} = 1 + 3 + 15 - 3 - 3 - 5$$

$$D = 8$$

Exercício 2

Como um temos os lados AB e CD do paralelogramo paralelos ao eixo das abscissas é evidente que há um modo mais prático de calcular a área.

$\mathrm{AB} = 5 - 1 = 4$ e a altura relativa à base é dada por $h = 3 - 1 = 2.$



Logo, a área será:

$$\boxed{\mathrm{A} = 4 \cdot 2 = 8}$$

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

www.seduc.ce.gov.br

www.facebook.com/EducacaoCeara
twitter.com/seducceara
instagram.com/seduc_ceara
www.youtube.com/seducceara