MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA BÁSICA I

Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral do Ceará – EEMTI

COLEÇÃO COMPONENTES ELETIVOS FUNDANTES 2

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Elaboração e Acompanhamento
Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação:
Jorge Herbert Soares de Lira
Antonio Caminha Muniz Neto
Bruno Holanda
Emiliano Augusto Chagas
Fabrício Siqueira Benevides
Samuel Barbosa Feitosa
Ulisses Parente
Revisão: Romildo José da Silva
Colaboradores: Equipe Cientista-Chefe

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M963m Muniz Neto, Antônio Caminha
Matemática básica I [recurso eletrônico] / Antônio Caminha Muniz Neto, Bruno Holanda, Ulisses Parente. - Fortaleza: SEDUC, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-89549-76-5 (E-book)

1. Aritmética. 2. Números. 3. Frações. I. Muniz Neto, Antônio Caminha. II. Holanda, Bruno. III. Parente, Ulisses. IV. Título.

CDD: 510.07

APRESENTAÇÃO INSTITUCIONAL

A Secretaria da Educação do Estado do Ceará, por meio da Coordenadoria de Educação em Tempo Integral e Educação Complementar (COETI), apresenta às Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral - EEMTI essa coleção de fascículos que abordam componentes eletivos componentes da parte flexível do currículo. A disponibilização desse material para as EEMTI tem como objetivos: I. Oferecer apoio pedagógico e didático aos professores que lecionam esses componentes eletivos. II. Oportunizar aos estudantes subsídios para o desenvolvimento de competências e habilidades nos itinerários escolhidos, a partir de seus projetos de vida, favorecendo a aquisição de novos conhecimentos, a ampliação da aprendizagem e o seu crescimento cognitivo e socioemocional.

A elaboração desses fascículos está vinculada às ementas do Catálogo dos Componentes Eletivos de 2022. Nessa primeira tiragem, foram selecionados alguns componentes eletivos fundantes, ou seja, que apresentam assuntos essenciais e contextualizados, capazes de gerar interesses de aprofundamento nos jovens, a partir das temáticas abordadas. Esses componentes estão relacionados às quatro áreas de conhecimento da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e a uma unidade curricular de Formação Profissional.

Volume 1: Linguagens e suas tecnologias
Volume 2: Matemática e suas tecnologias
Volume 3: Ciências da Natureza e suas tecnologias
Volume 4: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
Volume 5: Formação Profissional

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), dez competências gerais devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo do Ensino Médio. Na área de Matemática e suas Tecnologias, espera-se que todos possam conhecer e utilizar a linguagem matemática, bem como fazer uso dos seus códigos, símbolos, nomenclaturas e dos processos de desenvolvimento de pesquisas científicas e tecnológicas. A Eletiva de MATEMÁTICA BÁSICA I tem como objetivo enfatizar a importância do conceito de número racional em suas representações como frações e números decimais. Dedicamos especial atenção ao conceito de equivalência de frações, combinando interpretações e modelos aritméticos e geométricos, esses últimos com base na reta numérica. A compreensão da equivalência de frações é basilar para tudo que segue, na aritmética de números racionais, especialmente no que diz respeito aos algoritmos de adição, multiplicação e divisão de frações. Além disso, é um conceito central para entendermos a representação decimal dos números racionais. A este respeito, trabalhamos, além da equivalência de representações dos números racionais, a ideia de extensão do sistema posicional decimal e da "continuação" do algoritmo euclidiano da divisão. Veremos como a expansão decimal de um número racional surge naturalmente dessa continuação do processo de divisão, gerando representações decimais finitas ou infinitas e periódicas, as chamadas dízimas periódicas. Números decimais e frações representam conceitos iniciais da Matemática, essenciais para o uso no dia a dia, também no uso de modelos matemáticos, na representação e, também, na análise de relações quantitativas de grandezas.

O fascículo está organizado da seguinte maneira: após uma breve revisão (seção 1.1) dos números naturais e inteiros (inclusive das "regras de sinais"), passamos ao estudo das representações fracionárias dos números racionais (seção 1.2) em termos de equivalência de frações, explicando e utilizando critérios para essa equivalência (seção 1.3). Na seção 1.4, apresentamos a extensão do sistema posicional decimal e a representação decimal dos números racionais. O fascículo encerra com quatro sequências de exercícios: cada sequência é ordenada com exercícios em nível crescente de dificuldade. Sempre que um novo conceito ou técnica é introduzido ou aprofundado em um exercício, apresentamos uma solução detalhada: recomendamos que o estudante tente intensamente resolver os exercícios antes de consultar a solução. De uma sequência para outra, há um aumento de complexidade, sendo a sequência 1 mais voltada à revisão, às sequências 2 e 3, para aprofundamento, e a sequência 4, com exercícios que mobilizam todos os conhecimentos adquiridos, para o pleno desenvolvimento das competências previstas na BNCC. Neste fascículo, trabalharemos, por conseguinte, as habilidades nos saberes 3 e 4 da **Matriz dos Saberes**.

Esperamos, pois, que este fascículo contribua para enriquecer a sua prática pedagógica, auxiliando-o no planejamento das suas aulas e fortalecendo os processos de ensino e de aprendizagem.

Sucesso e boas aulas!

MENSAGEM AO ESTUDANTE

Parabéns por ter escolhido esta eletiva para o seu currículo, pois o conhecimento dos números racionais fez diferença para a Humanidade e pode fazer diferença em sua vida ajudando, entre outras coisas, a ampliar o domínio dos números decimais, das frações, porcentagens, proporções e a resolver problemas do cotidiano que utilizem esses conteúdos.

Prepare-se para a viagem do conhecimento que, por meio da Matemática, fará você aprender a aplicar métodos e a desenvolver procedimentos científicos e práticos, para além da teoria. Algumas das experiências que você vai realizar aqui foram desenvolvidas por grandes escritores, cientistas, matemáticos e suas descobertas podem abrir muitas portas para sua formação profissional.

Cada unidade que você vai estudar traz elementos para que, ao final da Eletiva, seja desenvolvida uma atividade prática que você, o professor e a turma irão produzir e apresentar em uma culminância que irá acontecer no final desta eletiva.

O objetivo é que este material o/a auxilie a exercer o protagonismo de modo que você identifique seus potenciais, interesses e paixões e estabeleça estratégias e metas para alcançar seus próprios objetivos em todas as dimensões. Logo, o presente material deve servir de apoio para se atingir esse objetivo.

Sucesso e bom estudo!

SUMÁRIO

Habilidades Desenvolvidas

BNCC

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

ENEM

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

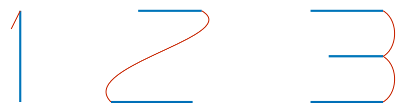
SAEB

D14 - Identificar a localização de números reais na reta numérica.
D15 - Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

1 Aritmética de Números Racionais

Nosso primeiro contato com números se dá através dos *inteiros não negativos*, aqui chamados de números *naturais*[1] (conjunto com símbolo $\mathbb{N}$).

Na língua portuguesa (assim como na maioria das línguas latinas), utilizamos os algarismos hindu-arábicos em um sistema posicional para representar quantidades. Os traçados dos três primeiros algarismos não nulos, 1, 2 e 3, trazem em si lembretes dos valores que eles representam.



Os números naturais são usados para expressar a *cardinalidade* ou *quantidade* de elementos em um conjunto, em muitos contextos. Por exemplo, números naturais podem expressar quantos alunos há em sua turma ou quantos quilômetros separam as cidades de Crato e Arneiroz.

Rapidamente, surge a necessidade de realizar *operações* com os números naturais, como a adição, multiplicação e divisão, por exemplo. Quando somamos ou multiplicamos dois números naturais, o resultado, isto é, a soma ou o produto, são sempre números naturais, também. Entretanto, ao realizar subtrações, mesmo partindo de números naturais, o resultado pode ser um número negativo, como em

$$3 - 5 = -2.$$

Da mesma forma, o resultado da divisão entre dois números naturais (com divisor não-nulo) pode ser um número não inteiro, como no seguinte exemplo:

$$3 : 5 = 0{,}6.$$

1.1 – Números inteiros

Portanto, a operação de subtração fica bem definida no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, que amplia o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. De fato, $\mathbb{Z}$ inclui os números naturais não-nulos

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

o zero e os números inteiros negativos

$$\ldots, -4, -3, -2, -1.$$

Os números inteiros podem ser representados geometricamente na *reta numérica*: o número 0 marca um ponto de referência na reta, chamado de *origem*: os números inteiros positivos são *representados* por pontos marcados à direita da origem; os números inteiros negativos são representados por pontos marcados à esquerda da origem. A distância entre pontos representando dois números *consecutivos* (por exemplo, 3 e 4; ou -4 e -3) é sempre igual a 1. Veja que os pontos estão espaçados por intervalos de mesmo comprimento na seguinte figura:

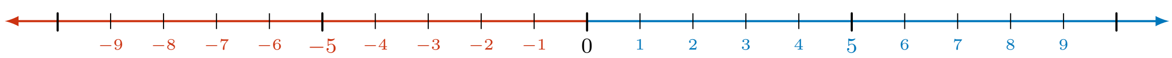


Figura 1.1: inteiros sobre a reta.

Dizemos que os pares de números -1 e 1, -2 e 2, etc., são *opostos* ou *simétricos*. O simétrico de 0 é o próprio 0. O *valor absoluto* ou *módulo* de um número inteiro n, denotado $|n|$, é definido da seguinte forma

[1] Alguns autores não consideram o número zero como um natural. Isso é uma mera convenção, mas é importante que autores, alunos e professores deixem suas escolhas claras para não causar confusão na comunicação das ideias.

- $|n|$ é o *oposto* de n, se n é um número inteiro negativo. Por exemplo, $|-3| = 3$.
- $|n|$ é o *próprio número* n, se é um número inteiro positivo. Por exemplo, $|3| = 3$.

Resumindo, números opostos têm o mesmo módulo, que pode ser interpretado como a distância *não orientada* da origem aos pontos que os representam: ou seja, os pontos que representam os números 3 e -3 estão à mesma distância da origem. Podemos representar o número oposto a um dado número n como sua *reflexão* em torno do 0, isto é, em torno da origem da reta numérica, como na figura a seguir:

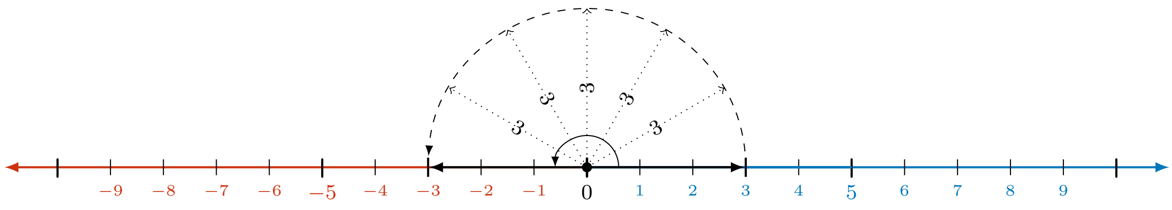


Figura 1.2: números opostos obtidos por reflexão

A adição de números inteiros pode ser visualizada por meio de translações à esquerda e à direita na reta numérica: por exemplo, a soma dos números inteiros positivos 2 e 3 pode ser representada do seguinte modo:

- partimos do ponto 2 e transladamos 3 unidades **para a direita**, ou
- partimos do ponto 3 e transladamos 2 unidades também **para a direita**.

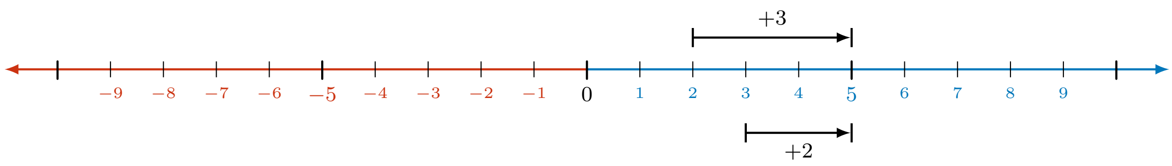


Figura 1.3: interpretação geométrica de $3 + 2 = 2 + 3 = 5$. Ambas as setas terminam no ponto 5.

Agora, a soma do número inteiro positivo 3 e do número inteiro negativo -2 pode ser representada geometricamente das seguintes formas:

- partimos do ponto 3 e transladamos 2 unidades **para a esquerda**,
- partimos do ponto -2 e transladamos 3 unidades **para a direita**.

Deste modo, justificamos geometricamente o seguinte resultado

$$3 + (-2) = (-2) + 3 = 1.$$

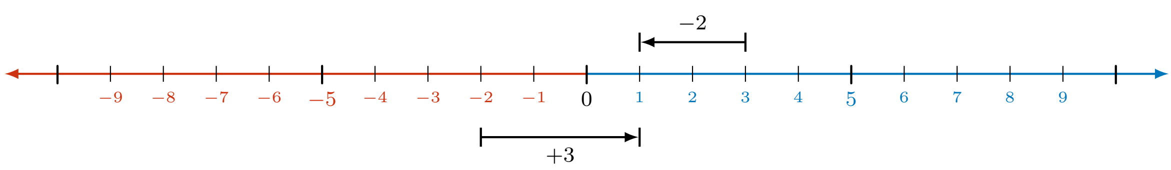
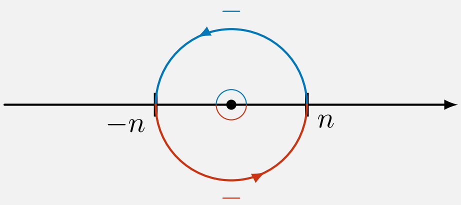


Figura 1.4: interpretação geométrica de $3 + (-2) = (-2) + 3 = 1$.

Observe, geometricamente, que o oposto do oposto de um número inteiro é o próprio número, isto é,

$$-(-n) = n,$$



o que justifica a "regra" de "*menos* com *menos* dá mais", como vemos na escola.

De modo similar, podemos justificar e interpretar, usando translações, a soma

$$2 + (-3) = (-3) + 2 = -1.$$

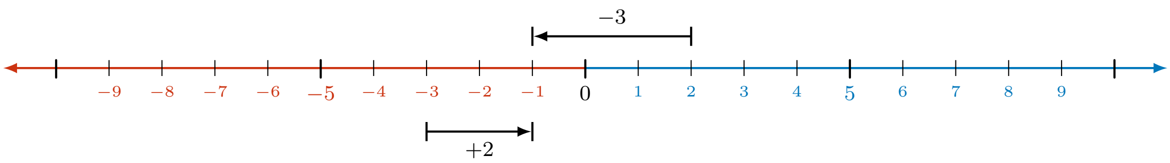


Figura 1.5: interpretação geométrica de $2 + (-3) = (-3) + 2 = -1$.

Desta vez, para calcular a soma dos dois números inteiros negativos -3 e -2, podemos realizar um dos seguintes procedimentos:

- partimos do ponto -3 e transladamos 2 unidades **para a esquerda**,
- partimos do ponto -2 e transladamos 3 unidades **para a esquerda**,

o que justifica, a partir da figura, o seguinte resultado

$$-3 + (-2) = -2 + (-3) = -5$$

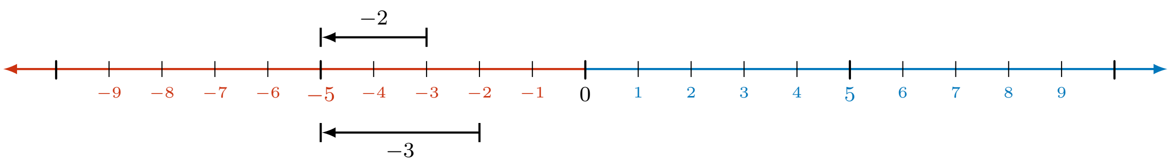


Figura 1.6: interpretação geométrica de $(-3) + (-2) = (-2) + (-3) = -5$.

Os números inteiros negativos como -2 e -3 são colocados entre parênteses nessas expressões para não confundirmos o sinal $+$, que representa a **operação** de adição, e o sinal $-$, que faz parte do próprio número! A dúvida que você deve ter, naturalmente, é: qual a relação do sinal "$-$" em "-2" com o sinal de subtração que vimos anteriormente? Vamos esclarecer este ponto logo adiante.

Para tornar mais *aceitáveis* essas **regras de sinais** da adição de números inteiros, podemos usar um exemplo com valores monetários: receitas (ganhos, lucros, poupanças) são representadas por números inteiros positivos; despesas (gastos, prejuízos ou dívidas) são representadas por números inteiros negativos. Assim sendo, observemos que

(i) quem *tem* 30 reais e **ganha** 20 reais, passa a ter $30 + 20 = 50$ reais;
(ii) quem *tem* 30 reais e **gasta** 20 reais, passa a ter $30 + (-20) = 10$ reais, ou
(iii) quem *deve* 20 reais e **ganha** 30 reais, pode pagar sua dívida e ficar com $(-20) + 30 = 10$ reais;
(iv) quem *tem* 20 reais e **gasta** 30 reais, contrai uma dívida: $20 + (-30) = -10$, ou seja, 10 reais de *dívida*, por isso, 10 reais "negativos"; ou

(v) quem *deve* 30 reais e **ganha** 20 reais, pode diminuir sua dívida de 30 para 10 reais: $(-30) + 20 = -10$;

(vi) quem *deve* 30 reais e **gasta** mais 20 reais, aumenta sua dívida para $(-30) + (-20) = -50$ reais "negativos", isto é, 50 reais de dívidas.

Nos exemplos acima, percebemos que quando somamos um número inteiro negativo a um número inteiro positivo, estamos, de fato, efetuando uma subtração. Por exemplo

$$30 + (-20)$$

é, de fato, igual a

$$30 - 20 = 10.$$

Da mesma forma,

$$(-20) + 30 = 30 - 20 = 10.$$

Na escola, normalmente, isto é ensinado como uma "regra" em que "*mais* com *menos* dá menos". Podemos resumir esta observação **definindo** a subtração de dois números inteiros:

A diferença de dois números inteiros m e n, nesta ordem, é definida como a soma de m com o oposto de n, isto é,

$$m - n = m + (-n).$$

Como exemplos, temos

- $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$ (partindo de 4, transladamos 3 unidades para a **esquerda**. Ou: tenho 4 reais e gasto 3, ficando com 1 real);
- $3 - 4 = 3 + (-4) = -1$ (partindo de 3, transladamos 4 unidades para a **esquerda**. Ou: tenho 3 reais e gasto 4, ficando com 1 real de dívida).
- $3 - (-4) = 3 + (-(-4)) = 3 + 4 = 7$ (lembre que o oposto do oposto de 4 é o próprio 4, ou seja $-(-4) = 4$).

1.2 – Números racionais

Agora, discutimos mais uma "ampliação" do nosso conjunto de números, necessária para que possamos definir a divisão de um número inteiro qualquer por outro número inteiro não-nulo dado. Como vimos, a divisão *exata*

$$8 : 4 \quad \text{ou} \quad \frac{8}{4}$$

gera um número inteiro (de fato, um número natural), a saber, o número 2, uma vez que

$$8 = 4 \times 2.$$

No entanto, ao dividirmos

$$9 : 4 \quad \text{ou} \quad \frac{9}{4}$$

não obtemos um número inteiro. De fato,

$$9 = 4 \times 2 + 1,$$

ou seja, temos um *resto*, igual a 1, nesta divisão. Escrevendo o quociente e o resto em termos de *frações*, temos:

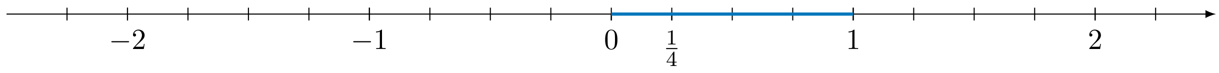
$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

Ou seja, ao dividirmos o resto 1 por quatro, geramos uma fração, $1/4$, da unidade. Números desta forma não são inteiros. Para dar sentido a estas divisões não-exatas, cujos resultados não são números em $\mathbb{Z}$, definimos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Na sequência, vamos discutir, resumidamente, os números racionais por meio de exemplos. Iniciamos observando que as **frações**

$$\dots,-\frac{5}{4},-\frac{4}{4},-\frac{3}{4},-\frac{2}{4},-\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{4},\dots$$

(lêem-se "menos dois quartos", "menos um quarto", "um quarto", "dois quartos", e assim por diante) representam pontos que dividem a reta numérica em segmentos de comprimentos iguais. Na seguinte reta numérica



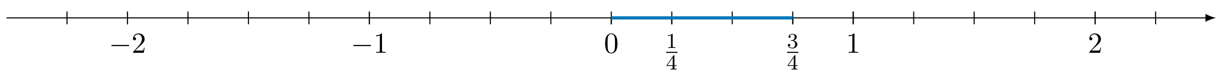
a distância entre os pontos 0 e 1, igual a 1 **unidade de medida**, é 4 *vezes maior* do que a distância do ponto 0 ao ponto $\frac{1}{4}$, que corresponde à **fração**

$$\frac{1}{4}$$

da unidade de medida. Assim,

$$4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Da mesma forma, de acordo com a figura,



a distância entre os pontos 0 e $\frac{3}{4}$ é dada pela fração $\frac{3}{4}$ da unidade de medida e é 3 vezes maior do que a distância entre os pontos 0 e $\frac{1}{4}$, ou seja,

$$3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot$$

De modo geral, dado um número natural m, a **fração**

$$\frac{m}{4}$$

representa um ponto cuja distância a 0 é m **vezes maior** do que a distância de 0 a $\frac{1}{4}$, ou seja,

$$\frac{m}{4}=m\times\frac{1}{4}=\underbrace{\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4}}_{m\text{ vezes}}\cdot$$

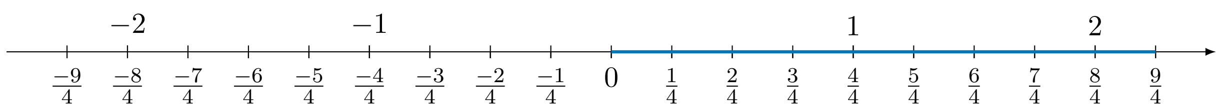
Por exemplo, veja na figura que a distância do ponto 0 ao ponto 2 é 8 *vezes maior* do que a distância do ponto 0 ao ponto $\frac{1}{4}$, sendo dada por

$$\frac{8}{4}=8\times\frac{1}{4}\cdot$$

Observe também que essa distância é 2 vezes maior que a distância do ponto 0 ao ponto 1, ou seja,

$$\frac{8}{4}=2,$$

o que explica, geometricamente, que a fração $\frac{8}{4}$ expressa a divisão $8:4$. Marcamos, na seguinte figura, algumas das frações da forma $\frac{m}{4}$:



Observe, na figura acima, que a distância de 0 a $\frac{9}{4}$ é dada pela distância de 0 a $\frac{8}{4}$ mais a distância de $\frac{8}{4}$ a $\frac{9}{4}$, isto é,

$$\frac{9}{4}=\frac{8}{4}+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}\cdot$$

Esta é, como vimos antes, uma forma de expressar a *divisão* com resto

$$9 = 4{\times}2 + 1.$$

Observe, também, que a distância de 0 a $\frac{2}{4}$ é **metade** da distância de 0 a 1, isto é,

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Geometricamente, o ponto $\frac{2}{4}$ é o *ponto médio* entre 0 e $1 = \frac{4}{4}$, ou seja, o ponto $\frac{2}{4}$ divide o segmento de reta de 0 a 1 ao **meio**. A igualdade

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

é exemplo de uma **equivalência** de frações.

De modo geral, dado um número natural n, diferente de zero, a **fração**

$$\frac{1}{n}$$

representa um ponto na reta numérica, entre os pontos 0 e 1, tal que a distância de 0 a 1 é n **vezes maior** que a distância de 0 a $\frac{1}{n}$. Dito de outro modo, as frações

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$$

dividem o segmento de 0 a 1 em n segmentos de comprimentos iguais. Dado outro número natural m, a **fração**

$$\frac{m}{n}$$

representa um ponto cuja distância a 0 é igual a m vezes a distância de 0 ao ponto $\frac{1}{n}$, ou seja,

$$\frac{m}{n} = m{\times}\frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ vezes}}$$

O número m é chamado de **numerador** e o número n de **denominador**. Finalmente, a fração

$$-\frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{-m}{n}$$

corresponde ao ponto na reta numérica **simétrico** a $\frac{m}{n}$ com respeito a 0.

1.3 – Equivalência de frações e números racionais

Temos, então, os **números racionais** como pontos na reta numérica associadas aos números inteiros

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

e às frações

$$\ldots, -\frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \; 0, \; \frac{1}{2}, \; \frac{2}{2}, \; \frac{3}{2}, \; \frac{4}{2}, \; \frac{5}{2}, \ldots$$

$$\ldots, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; \frac{2}{3}, \; \frac{3}{3}, \; \frac{4}{3}, \; \frac{5}{3}, \ldots$$

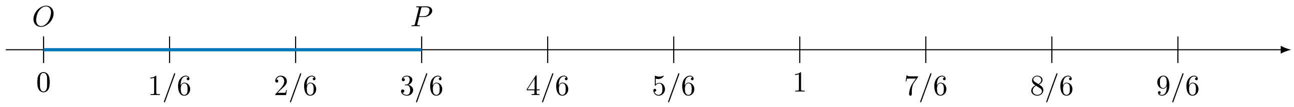
$$\ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \; 0, \; \frac{1}{4}, \; \frac{2}{4}, \; \frac{3}{4}, \; \frac{4}{4}, \; \frac{5}{4}, \ldots$$

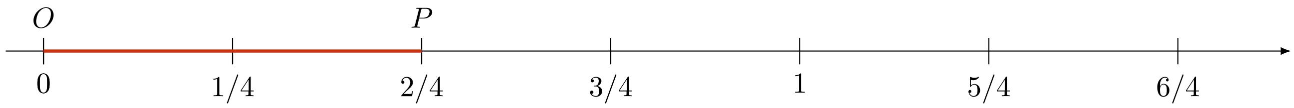
e assim por diante.

Diferentes frações podem representar um mesmo número racional. De fato, **frações equivalentes** estão associadas a um mesmo ponto na reta numérica e correspondem a uma dada distância do ponto 0, expressa em diferentes unidades de medida. Por exemplo, as frações

$$\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6}$$

são **equivalentes** por representarem o mesmo ponto na reta numérica. De fato, temos:





Na primeira reta, dividimos o segmento de 0 a 1 em 6 partes iguais: a unidade de medida passa a ser 1/6 da unidade inicial. Nesta nova unidade, a distância do ponto O, associado a 0, e o ponto P é igual a 3/6. Na segunda reta, dividimos o segmento de 0 a 1 em 4 partes iguais: a unidade de medida passa a ser 1/4 da unidade inicial. Nesta outra unidade, a distância do ponto O, associado a 0, e o ponto P é igual a 2/4. Logo, geometricamente, comprovamos que

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

correspondem ao mesmo ponto na reta, isto é, ao mesmo **número racional**.

Note que, se multiplicarmos cada um dos lados dessa igualdade por 12, que é um *múltiplo comum* de 4 e 6, a igualdade se mantém:

$$12 \times \frac{2}{4} = 12 \times \frac{3}{6}.$$

Esta segunda igualdade é verdadeira, pois, do lado esquerdo, temos

$$12 \times \frac{2}{4} = 12 \times 2 \times \frac{1}{4} = 2 \times 12 \times \frac{1}{4} = 2 \times 3 = 6,$$

enquanto o lado direito é dado por

$$12 \times \frac{3}{6} = 12 \times 3 \times \frac{1}{6} = 3 \times 12 \times \frac{1}{6} = 3 \times 2 = 6.$$

Como a segunda igualdade é verdadeira, a primeira também o é. Logo, "comprovamos" que as frações são equivalentes.

De modo geral, as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são **equivalentes**, isto é, a igualdade

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

é verdadeira *se, e somente se,*

$$q \times m = p \times n.$$

Nestas expressões, m, n, p e q são números naturais, com n e q diferentes de 0.

De fato, basta multiplicarmos cada um dos lados da igualdade pelo produto $q \times n$, obtendo

$$q \times n \times \frac{m}{n} = q \times n \times \frac{p}{q},$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$q \times m \times n \times \frac{1}{n} = n \times p \times q \times \frac{1}{q},$$

donde concluímos que

$$q \times m = n \times p.$$

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar algumas **regras práticas** para verificar se duas frações são equivalentes.

Observação 1.1 Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** a natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. De fato,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \times a}{n \times a},$$

visto que

$$m \times n \times a = n \times m \times a.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}.$$

Neste caso, a deve ser um *divisor ou fator comum* de m e n com $m : a = p$ e $n : a = q$. Assim, temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{p \times a}{q \times a} = \frac{p}{q} = \frac{m : a}{n : a},$$

como queríamos demonstrar.

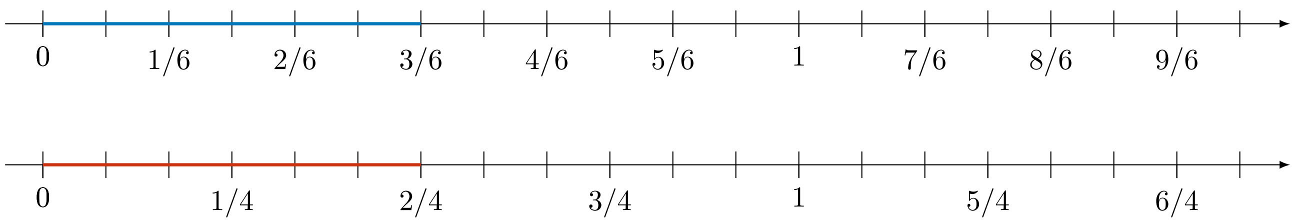
Por exemplo, no caso das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, multiplicando *tanto* o numerador *quanto* o denominador por 3 e por 2, respectivamente, obtemos:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

e

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12},$$

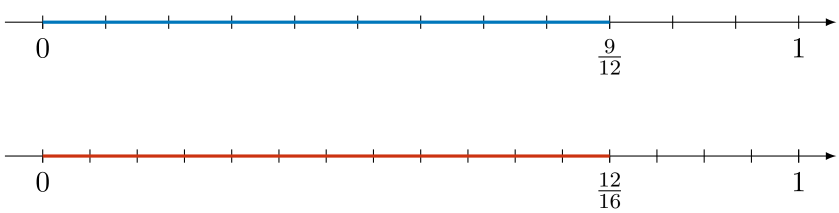
o que corresponde, na reta, a particionarmos cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes e cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ em 2 partes, conforme representado nas seguintes figuras:



Note que os comprimentos realçados nas duas retas numéricas são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações. Observe, também na figura, que

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{6}.$$

Podemos, portanto, particionar um dado segmento (por exemplo, o segmento de 0 a 1) em *mais* segmentos de comprimento *menor*, **multiplicando** numerador e denominador por um mesmo fator. Inversamente, podemos particionar um dado segmento em *menos* segmentos de comprimento *maior*, **dividindo** numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, consideremos as frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$, representadas nas retas numéricas abaixo:



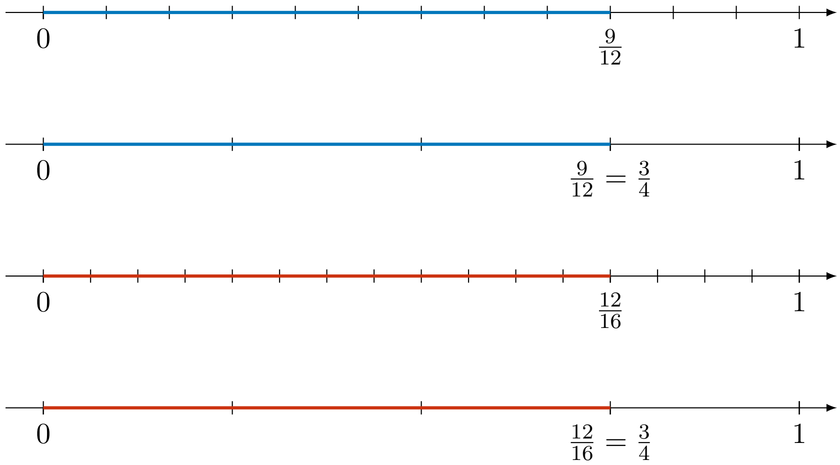
Dividindo tanto os numeradores quanto os denominadores das frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$ por 3 e por 4, respectivamente, obtemos:

$$\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$$

e

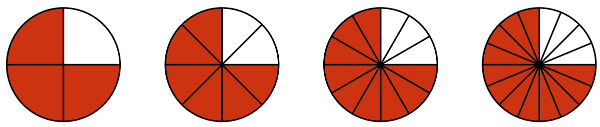
$$\frac{12:4}{16:4}=\frac{3}{4}$$

o que significa, geometricamente, termos segmentos com comprimentos 3 vezes maior na primeira reta e 4 vezes maior na segunda:



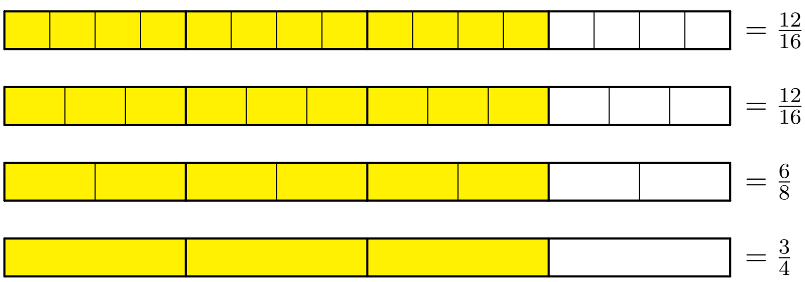
Recapitulando, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, aumentamos a quantidade de partes nas quais um dado segmento é dividido, bem como aumentamos *proporcionalmente* a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural diferente de zero, diminuímos *proporcionalmente* essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial.

A equivalência das frações que vimos acima pode ser representada utilizando-se "pizzas" ou barras como segue. Por exemplo, as fatias destacadas das pizzas



$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{12}{16}$

representam as frações equivalentes indicadas abaixo de cada uma delas. Essas mesmas frações podem ser visualizadas nas barras como as partes destacadas, todas de mesmo comprimento:



Uma infinidade de frações equivalentes a uma dada fração pode ser obtida, portanto, multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, multiplicando-os por 2, 3, 4, e assim por diante, temos

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\ldots$$

Da mesma forma, divisões sucessivas do numerador e denominador (isto é, *simplificações* das frações) produzem uma sequência de frações equivalentes

$$\ldots = \frac{32}{20} = \frac{24}{15} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

em que a última é **irredutível**. Isto significa que 5 e 8 não têm *divisores comuns* além de 1. Portanto, não há mais como dividir, com resto 0, tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número. Lembremos, de nosso estudo anterior, que, neste caso, dizemos que 5 e 8 são *primos entre si*, ou seja, MDC(5,8) = 1.

Todas as frações equivalentes a uma fração dada são equivalentes a uma fração irredutível. Esse conjunto de frações equivalentes, com uma representante que é *irredutível*, define uma mesma quantidade ou mesmo ponto na reta numérica. Mais precisamente, define um **número racional**.

Observação 1.2 Quando dividimos o numerador e o denominador da fração $\frac{m}{n}$ pelo $\mathrm{MDC}(m, n)$, obtemos a forma irredutível da fração. Realmente, após executar essa *simplificação*, não haverá outro fator comum maior que 1 pelo qual possamos dividir o numerador e o denominador, o que torna impossível uma outra *simplificação*.

Por exemplo, uma vez que $\mathrm{MDC}(15, 24) = 3$, ao dividirmos o numerador e denominador da fração $\frac{24}{15}$ por 3, obtemos uma fração irredutível

$$\frac{24}{15} = \frac{24 : 3}{15 : 3} = \frac{8}{5}.$$

Concluímos que cada **número racional positivo** é representado por uma fração da forma

$$\frac{m}{n},$$

onde m e n são números naturais, com $n \neq 0$. Esse mesmo número pode ser representado por *todas* as frações equivalentes a esta. Por exemplo, todas as frações da forma

$$\frac{m \times a}{n \times a},$$

onde a é um número natural, não-nulo, representam um mesmo número racional. Além disso, se b é um divisor comum de m e n, as frações da forma

$$\frac{m : a}{n : a}$$

também representam um mesmo número racional. Por exemplo, temos as equivalências das seguintes frações:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \ldots$$

Observação 1.3 As frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são equivalentes e representam o mesmo número racional se, e somente se,

$$mp = qn.$$

Aqui, m, n, p, q são números naturais, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$. No exemplo acima, temos

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4},$$

pois

$$3 \times 4 = 2 \times 6 = 12.$$

Note também, por exemplo, que

$$\frac{9}{6} = \frac{9 : 3}{6 : 3} = \frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4},$$

donde verificamos, uma vez mais, que $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$. Outra forma de comprovarmos essa equivalência é pela igualdade do "produto dos meios pelos extremos":

$$9\times 4 = 6\times 6.$$

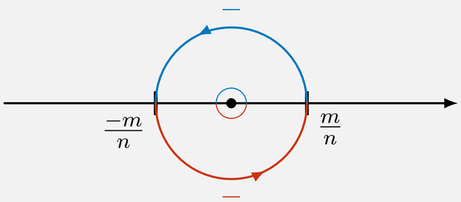
Até este ponto, definimos os **números racionais positivos** como pontos na reta numérica que corresponde a frações equivalentes a uma fração da forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números naturais, com $n \neq 0$. Dado um número racional representado por $\frac{m}{n}$, seu *oposto* ou *simétrico* será um número representado por $\frac{-m}{n}$. Por exemplo, o oposto de $\frac{1}{4}$ será $\frac{-1}{4}$. Em geral, números opostos um ao outro aparecem, na reta, em posições simétricas em relação à origem 0:

Denotamos o oposto de $\frac{m}{n}$ por $-\frac{m}{n}$. Note que

$$\frac{m}{n} + \left(-\frac{m}{n}\right) = 0.$$

Observe, geometricamente, que o oposto do oposto de um número racional é o próprio número, isto é,

$$-\left(\frac{-m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$



o que justifica a "regra" de "*menos* com *menos* dá mais", como vemos na escola.

Com isso, finalizamos nossa apresentação do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, que será formado pelo números racionais positivos, por seus opostos, que formam os números reais negativos, e pelo 0. Temos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

1.4 – Representação decimal dos números racionais

Vamos retomar o exemplo da divisão com restos 9 : 4. O algoritmo euclidiano da divisão dos números naturais assegura que temos *quociente* igual a 2 e *resto* igual a 1. No entanto, podemos "continuar" esse algoritmo usando frações, isto é, usando números racionais (não-inteiros). Executaremos o seguinte procedimento, em que usaremos **equivalência de frações**:

$$\begin{aligned}
9 &= 4\times 2 + 1\\
&= 4\times 2 + \frac{10}{10}\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times(4\times 2 + 2)\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{2}{10}\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{2\times 10}{10\times 10}\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{1}{1\times 100}\times 20\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{1}{100}\times 4\times 5.
\end{aligned}$$

Na primeira igualdade, usamos o algoritmo da divisão para números naturais, obtendo resto igual a 1. Na segunda igualdade, usamos o fato de que

$$\frac{10}{10} = 1.$$

Na terceira igualdade, usamos o algoritmo da divisão para números naturais, dividindo 10 por 4 e obtendo

$$10 = 4\times 2 + 2$$

Para a quinta e sexta igualdades, usamos a equivalência de frações

$$\frac{2}{10} = \frac{2\times 10}{10\times 10} = \frac{20}{100} = \frac{1}{100}\times 20.$$

Por fim, na sétima igualdade, dividimos $20 : 4$ obtendo

$$20 = 4\times 5.$$

Observamos que o divisor 4 é um fator comum a todos esses produtos e escrevemos:

$$9 = 4\times\left(2 + 2\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100}\right) \tag{1.1}$$

Na expressão entre parênteses, temos *frações decimais*, isto é, frações cujos denominadores são **potências de dez** como 10, 100, 1 000, etc. Escrevemos o resultado da divisão, agora completa, como

$$9 = 4\times 2{,}25,$$

ou seja

$$9 : 4 = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Note que o algarismo 2 depois da vírgula é o algarismo que aparece multiplicado por $\frac{1}{10}$ e o algarismo 5, também depois da vírgula, é o algarismo que aparece multiplicado por $\frac{1}{100}$, na **expansão decimal** em (1.1).

Concluímos, com este exemplo, que a fração $\frac{9}{4}$ (que expressa a divisão $9 : 4$) é representada pelo **número na forma decimal** 2,25. Vejamos mais um exemplo dessa representação de frações por números decimais. Considere a divisão $9 : 8$. Repetindo o procedimento acima, temos:

$$\begin{aligned}
9 &= 8\times 1 + 1\\
&= 8\times 1 + \frac{10}{10}\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times(8\times 1 + 2)\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{2}{10}\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{2\times 10}{10\times 10}\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{1}{1\times 100}\times 20\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{1}{100}\times(8\times 2 + 4)\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{1}{100}\times 8\times 2 + \frac{4}{100}\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{1}{100}\times 8\times 2 + \frac{4\times 10}{100\times 10}\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{1}{100}\times 8\times 2 + \frac{1}{100\times 10}\times 40\\
&= 8\times 1 + \frac{1}{10}\times 8\times 1 + \frac{1}{100}\times 8\times 2 + \frac{1}{1\,000}\times 8\times 5.
\end{aligned}$$

Concluímos, colocando o *fator comum* 8 *em evidência*, que

$$9 = 8\times\left(1 + 1\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 5\times\frac{1}{1\,000}\right)$$

Logo, a **expansão decimal** completa de $9:8$, ou seja, da fração $\frac{9}{8}$ é

$$\frac{9}{8} = 1 + 1\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 5\times\frac{1}{1\,000} = 1{,}125. \tag{1.2}$$

Outra forma, mais direta, de realizar essas contas de expansão decimal é encontrarmos *frações equivalentes* às frações dadas, com denominadores dados por *potências de dez* como 10, 100, 1 000, dentre outras. Por exemplo, temos, multiplicando numerador e denominador de $\frac{9}{4}$ por 25, a seguinte equivalência de frações:

$$\frac{9}{4} = \frac{9\times 25}{4\times 25} = \frac{225}{100}.$$

Esta fração da direita se escreve como 2,25, pois

$$\frac{225}{100} = \frac{200}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = 2 + 2\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100},$$

como havíamos escrito na expansão, entre parênteses, em (1.1).

Da mesma forma, temos

$$\frac{9}{8} = \frac{9\times 125}{8\times 125} = \frac{1\,125}{1\,000}.$$

Esta fração da direita se escreve como 2,25, pois

$$\frac{1\,225}{1\,000} = \frac{1\,000}{1\,000} + \frac{200}{1\,000} + \frac{20}{1\,000} + \frac{5}{1\,000} = 1 + 2\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + \frac{5}{1\,000} = 1{,}125,$$

como havíamos escrito na expansão, no lado direito de (1.2).

Finalizando essa sequência de exemplos, vejamos o caso da divisão $9:7$ ou da fração $\frac{9}{7}$. Neste caso, deduziremos que não é possível encontrar uma fração equivalente cujo denominador seja uma potência de dez. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{7} &= \frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7} + \frac{20}{70} = 1 + \frac{1}{10}\times\frac{1}{7}\times(7\times 2 + 6) = 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{10}\times\frac{1}{7}\times 6\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times\frac{1}{7}\times 60 = 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times\frac{1}{7}\times(7\times 8 + 4)\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times\frac{1}{7}\times 40 = 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times\frac{1}{7}\times(7\times 5 + 5)\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times\frac{1}{7}\times 50 = 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times\frac{1}{7}\times(7\times 7 + 1)\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times 7 + \frac{1}{100000}\times\frac{1}{7}\times 10\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times 7 + \frac{1}{100000}\times\frac{1}{7}\times(7\times 1 + 3)\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times 7 + \frac{1}{100000}\times 1 + \frac{1}{1000000}\times\frac{1}{7}\times 30\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times 7 + \frac{1}{100000}\times 1 + \frac{1}{1000000}\times\frac{1}{7}\times(7\times 4 + 2)\\
&= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times 7 + \frac{1}{100000}\times 1 + \frac{1}{1000000}\times 4 + \frac{1}{1000000}\times\frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Note que, após vários passos no algoritmo da divisão, voltamos à fração $\frac{2}{7}$, mas multiplicada por $\frac{1}{1\,000\,000}$. Portanto, teríamos que recomeçar, seguindo os mesmos passos, *periodicamente*. Logo, a expansão decimal, nesse caso, é **infinita** e **periódica**. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{7} &= 1 + \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1}{100}\times 8 + \frac{1}{1000}\times 5 + \frac{1}{10000}\times 7 + \frac{1}{100000}\times 1 + \frac{1}{1000000}\times 4 + \frac{1}{1000000}\times\frac{2}{7}\\
&= 1{,}285714 + 0{,}000000285714 + \ldots\\
&= 1{,}285714285714\ldots
\end{aligned}$$

Todo número racional tem uma **expansão decimal**, finita ou infinita, com potências de dez, tanto positivas quanto negativas. Portanto, um número racional pode ser representado tanto na forma de fração quanto na forma de um número decimal.

1.5 – Exercícios resolvidos e propostos

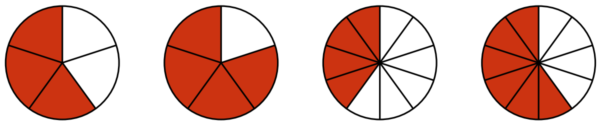
Sequência 1

Exercício 1.1 Representе geometricamente as seguintes frações, usando setores circulares ("pizzas") ou barras.

(a) $\frac{3}{5}$. (b) $\frac{4}{5}$. (c) $\frac{4}{10}$. (d) $\frac{6}{10}$.

Em seguida, coloque as frações em ordem crescente.

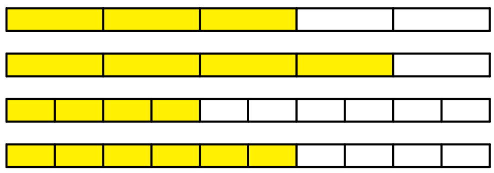
Solução. A figura seguinte traz as representações geométricas das frações usando "pizzas".



$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$

Observe, a partir dessas figuras, que $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, o que é natural, visto que a primeira fração corresponde a 3 partes dentre 5 enquanto a segunda equivale a 4 partes dentre 5. Portanto, a segunda fração corresponde a *mais partes*. De modo similar, deduzimos que $\frac{4}{10} < \frac{6}{10}$. Também com base nas figuras observe que $\frac{4}{10} < \frac{4}{5}$. De fato, a primeira fração corresponde a 4 unidades divididas em 10 partes enquanto a segunda equivale a 4 unidades, mas divididas em 5 partes e, portanto, em *partes maiores*. Finalmente, note que $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ representam a mesma fração da pizza. Portanto, essas frações são equivalentes: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Utilizando barras, as frações poderiam ser representadas do seguinte modo:



$= \frac{3}{5}$

$= \frac{4}{5}$

$= \frac{4}{10}$

$= \frac{6}{10}$

As barras deixam ainda mais claro que

$$\frac{4}{10} < \frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{4}{5}.$$

■

Exercício 1.2 Calcule o resultado das seguintes divisões usando frações:

(a) $\frac{11}{5}$. (b) $\frac{12}{5}$. (c) $\frac{13}{5}$. (d) $\frac{14}{5}$.

Em seguida, represente as frações utilizando segmentos da reta numérica. De quais números naturais essas frações estão *mais próximas*?

Solução. Dividindo 11 por 5, obtemos quociente 2 e resto 1, visto que

$$11 = 10 + 1 = 5 \times 2 + 1.$$

Logo

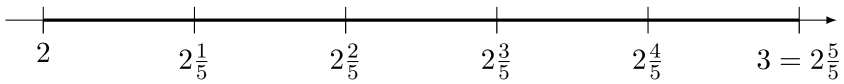
$$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}.$$

Da mesma forma, concluímos que

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \qquad \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \qquad \frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

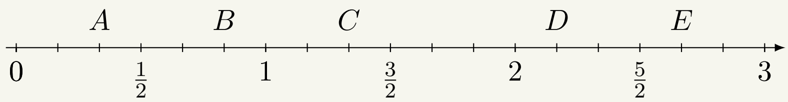
Logo, essas frações estão *localizadas* na reta numérica entre os pontos correspondentes a 2 e 3, uma vez que

$$2 < 2 + \frac{1}{5} < 2 + \frac{2}{5} < 2 + \frac{3}{5} < 2 + \frac{4}{5} < 2 + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3.$$



Concluímos que as frações $2\frac{1}{5}$ e $2\frac{2}{5}$ estão mais próximas do número natural 2 e as frações $2\frac{3}{5}$ e $2\frac{4}{5}$ estão mais próximas do número natural 3. ■

Exercício 1.3 Associe cada um dos pontos A, B, C, D e E a uma das frações nas alternativas seguintes:



(a) $\frac{13}{6}$ (b) $\frac{16}{12}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{10}{12}$ (e) $\frac{2}{6}$

Exercício 1.4 Calcule as seguintes frações:

(a) $\frac{1}{5}$ de 75. (b) $\frac{2}{5}$ de 75. (c) $\frac{3}{5}$ de 75. (d) $\frac{4}{5}$ de 75.

Em seguida, represente-as utilizando barras.

Solução. Observamos que dividindo 75 em 5 partes iguais, cada uma dessas partes corresponde a $\frac{1}{5}$ de 75, ou seja, é igual a

$$\frac{1}{5} \times 75 = \frac{75}{5} = 15.$$

Somando essas 5 partes, temos $5 \times 15 = 75$. Somando 2 dessas partes, obtemos

$$\frac{2}{5} \times 75 = 2 \times \frac{75}{5} = 2 \times 15 = 30.$$

Da mesma forma, calculamos

$$\frac{3}{5} \times 75 = 3 \times 15 = 45$$

e

$$\frac{4}{4} \times 75 = 4 \times 15 = 60.$$

Representando essas **frações de** 75, utilizando barras, temos as seguintes ilustrações.

■

Exercício 1.5 Em um conjunto de 75 alunos, 30 são torcedores do Ceará e 45 são torcedores do Fortaleza. a) Quais frações do total de alunos representam os *subconjuntos* de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza? b) Qual a *razão* entre as quantidades de torcedores do Ceará e de torcedores de Fortaleza?

Solução. A **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Ceará é igual a

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Ceará”}}{\text{“total de alunos”}} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$$

e a **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Fortaleza é dada por:

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Fortaleza”}}{\text{“total de alunos”}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}.$$

Note que $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$. A **razão** entre a quantidade de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza é dada por:

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Fortaleza”}}{\text{“total de alunos torcedores do Ceará”}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}.$$

■

Exercício 1.6 Quais das frações abaixo são equivalentes a $\frac{16}{10}$?

(a) $\frac{16+2}{10+2}$ (b) $\frac{16:2}{10:2}$ (c) $\frac{8\times4}{5\times4}$ (d) $\frac{64:4}{40:4}$ (e) $\frac{16-2}{10-2}$

Justifique sua resposta com cálculos e com representações geométricas das frações.

Exercício 1.7 Em uma turma da primeira série, há 6 alunas para cada 5 alunos. Essa *proporção* será a mesma, caso ingressem exatamente mais 2 alunos e 2 alunas nesta turma? E caso dobrássemos o número de alunos e o número de alunas? Justifique suas respostas com cálculos, barras, pizzas ou segmentos da reta numérica, conforme preferir.

Exercício 1.8 Localize as seguintes frações na reta numérica.

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{12}{9}$ (d) $\frac{12}{3}$ (e) $\frac{3}{12}$

Exercício 1.9 Compare e ordene as seguintes frações.

(a) $\frac{52}{25}$ (b) $\frac{52}{24}$ (c) $\frac{55}{25}$ (d) $\frac{52}{55}$ (e) $\frac{55}{52}$

Exercício 1.10 Calcule as seguintes frações.

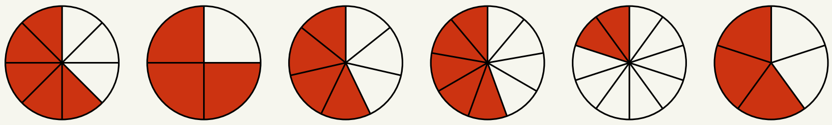
(a) $\frac{3}{4}$ de 180 (b) $\frac{4}{3}$ de 180 (c) $\frac{12}{3}$ de 180 (d) $\frac{3}{12}$ de 180

Exercício 1.11 Simplifique as seguintes frações, obtendo suas formas *irredutíveis*.

(a) $\frac{27}{125}$ (b) $\frac{144}{81}$ (c) $\frac{60}{128}$ (d) $\frac{145}{250}$ (e) $\frac{62}{58}$

Exercício 1.12 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas barras na seguinte figura?

Exercício 1.13 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas "pizzas" na seguinte figura?



Exercício 1.14 — KangoTreino 4 - 2020. Qual é o valor da expressão

$$\frac{2020+2020+2020+2020+2020}{2019+2019+2019+2019+2019}?$$

(a) $\frac{1}{2020}$
(b) $\frac{2021}{2019}$
(c) $1+\frac{1}{2019}$
(d) $\frac{20}{19}$
(e) 5

Sequência 2

Exercício 1.15 Uma coleção tem 300 selos.

(a) 100 selos correspondem a que fração da coleção?
(b) 200 selos correspondem a que fração da coleção?
(c) 60 selos correspondem a que fração da coleção?
(d) 180 selos correspondem a que fração da coleção?

Exercício 1.16 — SAT - adaptado. A tabela seguinte classifica 103 elementos químicos como metais, metalóides ou não-metais, e como sólidos, líquidos e gasosos em temperatura e pressão normais.

	Sólidos	Líquidos	Gasosos	Total
Metais	77	1	0	78
Metalóides	7	0	0	7
Não-metais	6	1	11	18
Total	90	2	11	103

Que fração de sólidos e de líquidos na tabela são metalóides?

Exercício 1.17 Em cada alternativa, ponha as frações em ordem crescente.

(a) $\frac{9}{7}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{9}{20}$ e $\frac{9}{13}$.

(b) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{13}$.

(c) $\frac{8}{20}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{15}$ e $\frac{20}{25}$.

(d) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$.

Em seguida, localize essas frações na reta numérica.

Exercício 1.18 Numa prova de Matemática havia 15 exercícios.

(a) José errou 5 exercícios dessa prova. Escreva a fração que representa o número de erros cometidos por José em relação ao total de questões da prova.
(b) Obtenha também a fração que representa o número de acertos de José.
(c) Henrique errou $\frac{1}{5}$ dos exercícios dessa prova. Quantos exercícios ele acertou?

Solução. A fração que representa a *razão* entre o número de erros cometidos por José e o número total de questões da prova é

$$\frac{\text{“número de erros”}}{\text{“número total de questões”}} = \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3}.$$

Logo, podemos dizer que José errou $\frac{1}{3}$ das questões da prova. De fato, dividindo o número total de 15 questões em 3 partes iguais, temos partes com 5 questões, exatamente o número de questões em que José cometeu erros. Também concluímos que ele acertou 10 questões, ou seja, os outros $\frac{2}{3}$ da prova.

Agora, dividindo o número total de questões em 5 partes iguais, obtemos partes com 3 questões cada. Ou seja, $\frac{1}{5}$ do número de questões equivale a 3 questões. Essa foi a quantidade de acertos de Henrique. ■

Exercício 1.19 Para encher $\frac{3}{4}$ de uma piscina, são necessários 30.000 litros de água. Qual é a capacidade da piscina?

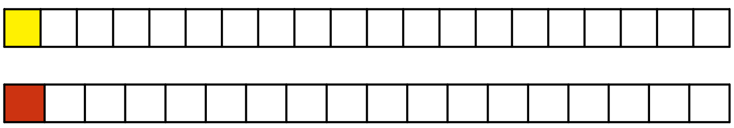
Solução. Se $\frac{3}{4}$ da capacidade da piscina correspondem a 30.000 litros, $\frac{1}{4}$ corresponde a $30.000 \div 3 = 10.000$ litros. Portanto, a capacidade total da piscina, ou seja, os $\frac{4}{4}$ de sua capacidade, corresponde a $4 \times 10.000 = 40.000$ litros.

■

Exercício 1.20 Vinte amigos resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. O valor do aluguel deveria ser dividido igualmente entre todos eles. No entanto, no dia do passeio, dois dos vinte amigos desistiram, de forma que o valor do aluguel teve de ser dividido igualmente apenas entre aquelas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada um dos amigos que compareceu é

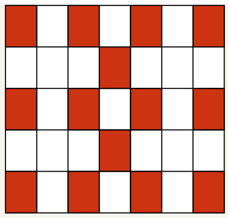
(a) $\frac{1}{20}$. (b) $\frac{18}{20}$. (c) $\frac{1}{10}$. (d) $\frac{1}{18}$. (e) $\frac{2}{18}$.

Solução. As barras abaixo representam a divisão do aluguel entre 20 pessoas e entre $20 - 2 = 18$ pessoas:



Com menos pessoas para dividir o aluguel, a fração que cada um deve pagar aumentou de $\frac{1}{20}$ para $\frac{1}{18}$. ■

Exercício 1.21 Qual a forma irredutível da fração correspondente à região pintada de vermelho na bandeira representada abaixo?



Exercício 1.22 Mateus e Guilherme trabalham na mesma empresa e recebem o mesmo salário. Mateus economiza $\frac{1}{6}$ do seu salário, enquanto Guilherme economiza $\frac{2}{11}$. Qual dos dois consegue economizar mais?

Solução. Basta observarmos que $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Como

$$\frac{2}{12} < \frac{2}{11},$$

concluímos que Mateus economiza *menos* que Guilherme. ■

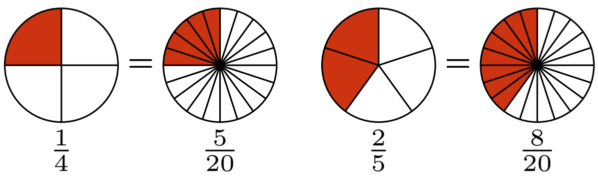
Exercício 1.23 César gastou $\frac{1}{4}$ da mesada na compra de um livro e $\frac{2}{5}$ na compra de duas revistas.

(a) Qual das compras foi a mais cara?
(b) Se César tinha 120 reais, com quantos reais ele ficou?

Solução. Observe que o mínimo múltiplo comum aos denominadores 4 e 5 é 20, o produto dos dois denominadores. Vimos antes que isso ocorre porque 3 e 5 não têm fatores comuns, isto é, são primos entre si. Portanto, temos as seguintes equivalências de frações

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times5}{4\times5} = \frac{5}{20} \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{8}{20},$$

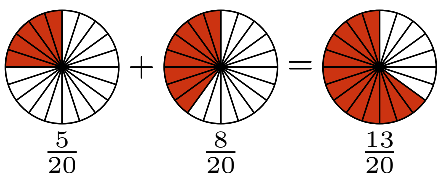
representada nas seguintes "pizzas":



Concluímos que as duas revistas, juntas, são mais caras que o livro. Além disso, *somando* as frações da mesada, representadas pelas duas compras, deduzimos que César gastou

$$\frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$$

de sua mesada. Representando essa soma com "pizzas", temos



Como a mesada é de 120 reais, $\frac{1}{20}$ da mesada é igual a $120 \div 20 = 6$ reais. Logo, $\frac{13}{20}$ da mesada equivalem a $13\times6 = 78$ reais. Portanto, após as compras, César ficou com $120 - 78 = 120 - 80 + 2 = 42$ reais. Note que esses 42 reais restantes correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} \text{ da mesada.}$$

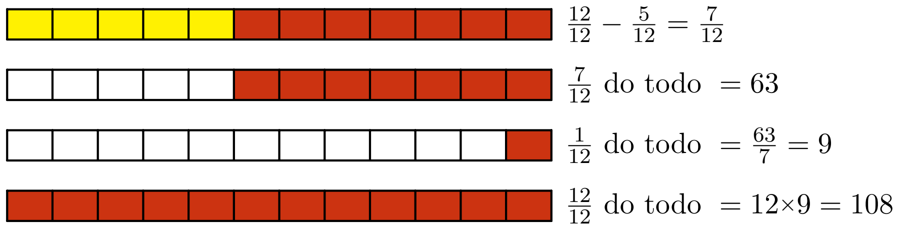
De fato, como $\frac{1}{20}$ da mesada são 6 reais, $\frac{7}{20}$ dela são $7\times6 = 42$ reais. ■

Exercício 1.24 Fernando juntou $\frac{5}{12}$ das figurinhas de um álbum de jogadores de futebol. Ainda faltam 63 figurinhas para completar o álbum. Quantas figurinhas tem o álbum completo?

Solução. As 63 figurinhas que *faltam* correspondem a

$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

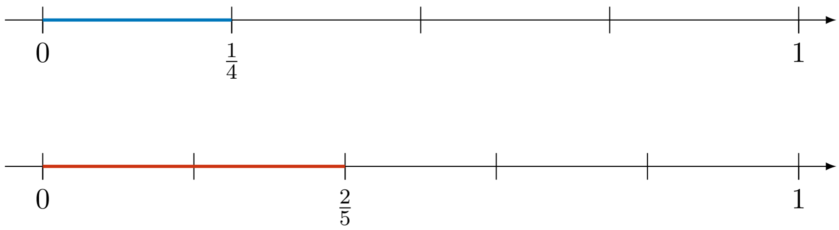
do total de figurinhas do álbum completo. Logo, $\frac{1}{12}$ do total de figurinhas equivale a $63 : 7 = 9$ figurinhas. Portanto, o álbum completo tem $12 \times 9 = 108$ figurinhas. Representemos essa solução com o uso de barras.



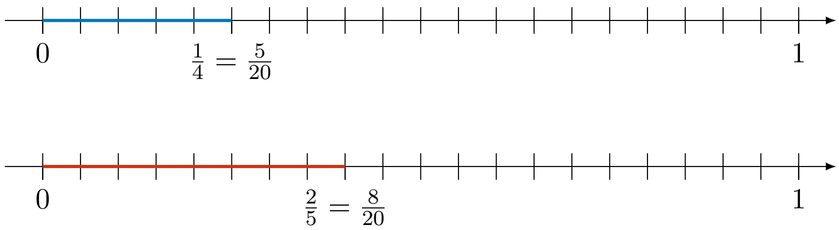
■

Exercício 1.25 Na última eleição para a prefeitura da cidade de Numeropólis, os candidatos Arquimedes e Euclides obtiveram, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ do total de votos válidos. Sabendo que o restante do total de votos válidos, ou seja, 6.300 votos, foi dado ao candidato Tales, pergunta-se: quantos votos cada um dos candidatos recebeu? Qual dos três candidatos foi eleito?

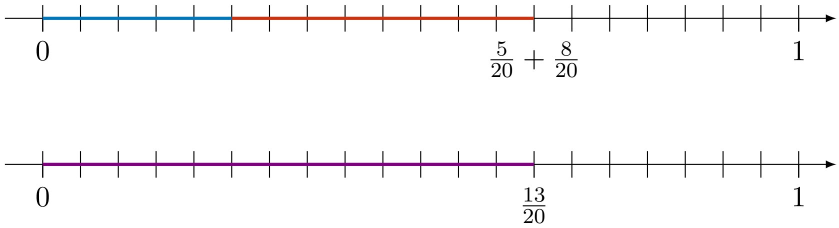
Solução. Representemos as frações de votos válidos dos candidatos Arquimedes e Euclides por pontos na reta numérica como segue



Particionando cada um dos 4 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na primeira reta em 5 partes iguais e cada um dos 5 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na segunda reta em 4 partes iguais, obtemos



Somando essas duas frações, obtemos



Esses $\frac{13}{20}$ dos votos válidos correspondem ao total de votos dos candidatos Arquimedes e Euclides. Logo, os votos válidos restantes, do candidato Tales, correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

dos votos. Assim, $\frac{7}{20}$ dos votos equivalem a 6.300 votos. Portanto, $\frac{1}{20}$ dos votos é igual a $6.300 \div 7 = 900$. Assim, o total de votos é igual a $12 \times 900 = 10.800$ votos. Concluímos que a distribuição de votos válidos foi a seguinte:

(a) votos recebidos por Arquimedes: $\frac{5}{20}$ dos votos válidos, ou $5 \times 900 = 4.500$ votos;
(b) votos recebidos por Euclides: $\frac{8}{20}$ dos votos válidos, ou $8 \times 900 = 7.200$ votos;
(c) votos recebidos por Tales: $\frac{7}{20}$ dos votos válidos, ou $7 \times 900 = 6.300$ votos,

o que comprova que Euclides foi o candidato vencedor. ■

Sequência 3

Exercício 1.26 — Revista Canguru 2020. Qual das frações a seguir tem o maior valor?

(a) $\frac{8+5}{3}$ (b) $\frac{8}{3+5}$ (c) $\frac{3+5}{8}$ (d) $\frac{8+3}{5}$ (e) $\frac{3}{8+5}$

Solução. Note que as frações em (b) e (c) são ambas iguais a 1, uma vez que

$$\frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{8}{3+5} = \frac{8}{8} = 1.$$

Além disso, a fração em (e) é menor que 1, pois

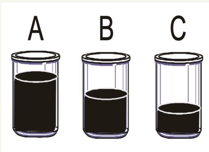
$$\frac{3}{8+5} = \frac{3}{13} < 1.$$

Finalmente, comparemos as frações em (a) e (d), ambas *maiores* que 1. Temos

$$\frac{8+5}{3} = \frac{13}{3} = \frac{65}{15} \qquad \text{e} \qquad \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5} = \frac{33}{15}.$$

Concluímos que a fração na alternativa (a) é maior que a fração na alternativa (d) e, portanto, é a maior das cinco. ■

Exercício 1.27 — Banco OBMEP 2006.
Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração a seguir. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume de líquido contido nos frascos A, B e C, nesta ordem?



(a) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}$.

(b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

(c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{2}{4}$.

(d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}$.

(e) $\frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$.

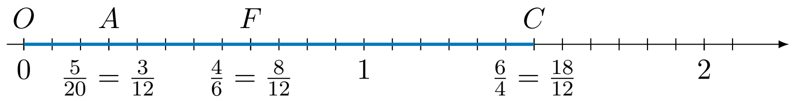
Exercício 1.28 — ENEM 2014. André, Carlos e Fábio estudam em uma mesma escola e desejam saber quem mora mais perto da escola. André mora a cinco vinte avos de um quilômetro da escola. Carlos mora a seis quartos de um quilômetro da escola. Já Fábio mora a quatro sextos de um quilômetro da escola.

A ordenação dos estudantes de acordo com a ordem decrescente das distâncias de suas respectivas casas à escola é

(a) André, Carlos e Fábio.

(b) André, Fábio e Carlos.
(c) Carlos, André e Fábio.
(d) Carlos, Fábio e André.
(e) Fábio, Carlos e André.

Solução. Representemos na seguinte reta numéricas as distâncias das casas de André, o ponto A, Carlos, ponto C, e Fábio, o ponto F, à escola , o ponto O (origem), que são, respectivamente, dadas pelas frações $\frac{5}{20}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{4}{6}$:



Para comparar essas distâncias, observamos, primeiro, que

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} < 1 < \frac{6}{4}$$

Além disso, $\frac{4}{6} < 1 < \frac{6}{4}$ e

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Logo, a ordem crescente deve ser $\frac{5}{20} < \frac{4}{6} < \frac{6}{4}$, o que corresponde à alternativa (b).

Observação 1.4 Para verificar essa ordem de outro modo, podemos usar as seguintes equivalências das frações:

$$\frac{4}{6} = \frac{4\times 2}{6\times 2} = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{6}{4} = \frac{6\times 3}{4\times 3} = \frac{18}{12}.$$

Temos também

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} = \frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{12}.$$

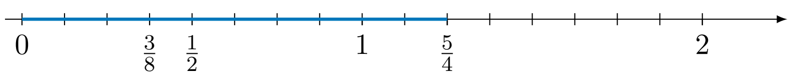
Assim, uma vez que $\frac{3}{12} < \frac{8}{12} < \frac{18}{12}$, como representado na reta, comprovamos a resposta que já tínhamos deduzido.

■

Exercício 1.29 — ENEM 2016. Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de 1/2, 3/8 e 5/4. Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

(a) 1/2, 3/8, 5/4.
(b) 1/2, 5/4, 3/8.
(c) 3/8, 1/2, 5/4.
(d) 3/8, 5/4, 1/2.
(e) 5/4, 1/2, 3/8

Solução. Note que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Portanto, temos a representação das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$, na reta numérica, como segue.

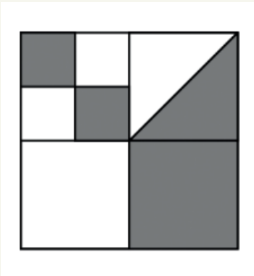


Logo, a ordem correta é a que aparece na alternativa (c).

■

Exercício 1.30 Determine a localização e a distância entre os pontos na reta numérica que representam as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{4}$. Faça o mesmo para as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Exercício 1.31 — Revista Canguru 2020. Num desses quadrados menores também foi desenhada uma diagonal.



Qual fração do quadrado original foi escurecida?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Exercício 1.32 — Banco OBMEP. Qual dos números a seguir está situado entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{6}$. (b) $\frac{4}{3}$. (c) $\frac{5}{2}$. (d) $\frac{4}{7}$. (e) $\frac{1}{4}$.

Solução. Inicialmente, observamos que

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$$

De fato, multiplicando ambos os lados dessa desigualdade pelo *múltiplo comum* 20 — múltiplo comum dos denominadores, temos, do lado esquerdo

$$20 \times \frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

e, do lado direito,

$$20 \times \frac{3}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

De modo similar, demonstra-se que

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$$

bastando, para isso, multiplicar ambos os lados pelo múltiplo comum 20, obtendo $5 < 8$.

Agora, observamos que

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{2}{5}.$$

Além disso, ambas as frações $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ são maiores que 1 e, portanto, maiores que $\frac{3}{4}$. Resta, portanto, verificarmos se $\frac{4}{7}$ *está entre* $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Temos

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{7},$$

uma vez que, multiplicando os dois lados da desigualdade por 35, obteremos $2 \times 7 = 14 < 5 \times 4 = 20$. Do mesmo modo, para verificar que

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{4},$$

multiplicamos ambos os lados da desigualdade por 28, obtendo $16 < 21$. Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). Para finalizar, representemos essas cinco frações na reta numérica de acordo com a figura que segue.

■

Exercício 1.33 Em cada planeta do Sistema Solar, um ano (período orbital) pode ser definido como o número de dias terrestres para que o planeta complete uma volta em torno do Sol. Vejamos, na tabela que segue, a duração aproximada dos anos em alguns planetas.

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte
Dias	88	225	365	686

Um ano em Mercúrio corresponde, aproximadamente, a qual fração de um ano em Marte ?

Solução. Note que 1 (um) ano em Mercúrio corresponde a 88 dias Terrestres:

$$1 \text{ “ano Mercuriano”} = 88 \text{ “dia Terrestre”}.$$

Por outro lado, 88 dias na terra correspondem a 88/686 de um ano em Marte:

$$88 \text{ “dia Terrestre”} = \frac{88}{686} \text{ “ano Marciano”}.$$

Logo, deduzimos que

$$1 \text{ “ano Mercuriano”} = \frac{88}{686} \text{ “ano Marciano”}.$$

Essa fração pode ser simplificada:

$$\frac{88 \div 2}{686 \div 2} = \frac{44}{343}.$$

Com a possibilidade de *aproximar* esta fração por

$$\frac{40}{320} = \frac{1}{8},$$

podemos afirmar que 1 ano em Mercúrio corresponde, aproximadamente, a $\frac{1}{8}$ de ano em Marte ou, equivalentemente, que 1 ano em Marte equivale a 8 anos em Mercúrio!

Observação 1.5 Essa é uma boa aproximação, visto que, dividindo 686 por 88, obtemos

$$\frac{686}{88} = \frac{616+70}{88} = \frac{616}{88} + \frac{70}{88} = 7 + \frac{70}{88},$$

ou seja, temos 7 anos e um **excesso** de 70 dias — dentro de 88 dias — ou

$$\frac{686}{88} = \frac{704-18}{88} = \frac{704}{88} - \frac{18}{88} = 8 - \frac{18}{88},$$

ou seja, temos 8 anos e uma **falta** de apenas 18 dias — dentro de 88 dias.

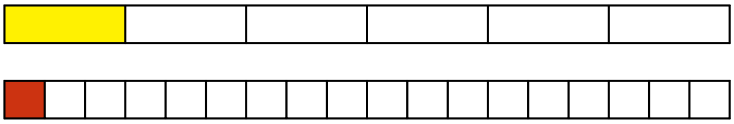
■

Exercício 1.34 — Banco OBMEP 2006. A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, $\frac{1}{3}$ são meninas. Além disso, 4 meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

Solução. De acordo com o enunciado, $\frac{1}{6}$ dos alunos usam óculos. Desses, $\frac{1}{3}$ são meninas e, portanto, $\frac{2}{3}$ são meninos, o que corresponde a 4 alunos. Observe que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ é dado por

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

De fato, dividindo $\frac{1}{6}$ em três partes iguais, temos $\frac{1}{18}$. Veja o modelo desse cálculo usando barras:



Voltando à resolução do problema, concluímos que $\frac{1}{18}$ do total de alunos equivale a 4 alunos. Logo, o número total de alunos é igual a $18 \times 4 = 72$ alunos. ■

Exercício 1.35 — ENEM 2010. Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

(a) O jogador I, porque acertou $3/4$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $2/3$ dos chutes.
(b) O jogador I, porque acertou $4/3$ dos chutes, enquanto que o jogador II acertou $2/3$
(c) O jogador I, porque acertou $3/4$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $3/4$ dos chutes.
(d) O jogador I, porque acertou $12/25$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $2/3$ dos chutes.
(e) O jogador I, porque acertou $9/25$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $2/5$ dos chutes.

Solução. O jogador I acertou 45 dos 60 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{45}{60}$ ou

$$\frac{45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{3}{4},$$

enquanto o jogador II acertou 50 dos 75 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{50}{75}$ ou

$$\frac{50 \div 25}{75 \div 25} = \frac{2}{3}.$$

Uma vez que

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

concluímos que o jogador I deve ser o escolhido por ter acertado $3/4$ dos seus chutes, ao passo que o jogador II acertou $2/3$ dos seus chutes. Portanto, a alternativa (a) é correta.

■

Exercício 1.36 — ENEM 2014. Um clube de futebol abriu inscrições para novos jogadores. Inscreveram-se 48 candidatos. Para realizar uma boa seleção, deverão ser escolhidos os que cumpram algumas exigências: os jogadores deverão ter mais de 14 anos, estatura igual ou superior à mínima exigida e bom preparo físico. Entre os candidatos, $7/8$ têm mais de 14 anos e foram pré-selecionados. Dos pré-selecionados, $1/2$ têm estatura igual ou superior a mínima exigida e, destes, $2/3$ têm bom preparo físico.

A quantidade de candidatos selecionados pelo clube de futebol foi

(a) 12. (b) 14. (c) 16. (d) 32. (e) 42.

Exercício 1.37 — OBMEP 2019. Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche $3/5$ da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche $5/8$ da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

(a) Ela ficará preenchida em $7/8$ de sua capacidade.
(b) Ela ficará preenchida em $8/13$ de sua capacidade.
(c) Ela ficará preenchida em $5/8$ de sua capacidade.

(d) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
(e) Ela vai transbordar.

Solução. Pelo enunciado, a capacidade da caneca pequena equivale a $\frac{3}{5}$ da capacidade da caneca média e esta, por sua vez, equivale a $\frac{5}{8}$ da capacidade da caneca grande. Assim, 1 caneca pequena teria capacidade igual a de

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\times 1 \text{ “caneca média”} &= \frac{3}{5}\times\frac{5}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= \frac{3}{5}\times 5\times\frac{1}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= 3\times\frac{1}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= \frac{3}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}.\end{aligned}$$

Portanto, 1 caneca pequena e 1 caneca média, juntas, têm capacidade equivalente a de

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)\times 1 \text{ “caneca grande”} &= \frac{8}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= 1 \text{ “caneca grande”}.\end{aligned}$$

Portanto, (d) é a alternativa correta.

■

Exercício 1.38 — ENEM 2016. Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão).

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Solução. *Concentração* de fibras significa a fração a quantidade de fibras em gramas **por** quantidade de pão em gramas, isto é, a **fração** ou **razão**

$$\frac{\text{“quantidades de gramas de fibras”}}{\text{“quantidade de gramas de pão”}}.$$

Para as marcas A, B, C, D e E, respectivamente, essas concentrações são iguais a

$$\frac{2}{50} \quad \frac{5}{40} \quad \frac{5}{100} \quad \frac{6}{90} \quad \frac{7}{70}$$

Note que $\frac{5}{100} < \frac{5}{40}$, pois temos mesmos numeradores e denominador menor na maior fração. Logo, a resposta não pode ser a marca C. Observe também que:

$$\frac{6}{90} = \frac{6\div 3}{90\div 3} = \frac{2}{30} > \frac{2}{50}.$$

Portanto, a marca A também não é a de maior concentração de fibras. Agora, as frações das marcas B e E são equivalentes, respectivamente, a

$$\frac{5\div 5}{40\div 5} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{7\div 7}{70\div 7} = \frac{1}{10}.$$

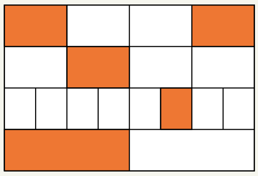
Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$, concluímos que a marca E não é a resposta. Resta, assim, compararmos as concentrações de fibras das marcas B e D, ou seja, as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{30}$, respectivamente. Temos

$$\frac{2}{30} = \frac{1}{15} < \frac{1}{8}.$$

Logo, concluímos que a marca B é a que tem maior concentração de fibras.

■

Exercício 1.39 Uma bandeira está dividida em 4 faixas horizontais de igual largura e cada faixa está dividida em duas, quatro ou oito partes iguais, conforme indicado na figura abaixo. Qual é a fração correspondente à área pintada de amarelo?



Sequência 4

Exercício 1.40 — Canguru 2020 - Prova S. Se C cachorros pesam Q quilogramas e E elefantes pesam o mesmo que M cachorros, quantos quilogramas pesa um elefante?

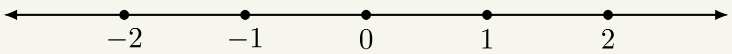
(a) $\frac{E\times M}{C\times Q}$. (b) $\frac{C\times Q}{E\times M}$. (c) $\frac{Q\times E}{C\times M}$. (d) $\frac{Q\times M}{C\times E}$. (e) $\frac{C\times M}{Q\times E}$.

Solução. Se C cachorros pesam Q quilogramas, 1 cachorro pesa $\frac{Q}{C}$ quilogramas e M cachorros pesam $M\times\frac{Q}{C}$ quilogramas. Como este é o peso de E elefantes, um elefante pesa

$$\frac{1}{E}\times M\times\frac{Q}{C} = \frac{Q\times M}{C\times E},$$

o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 1.41 Localize (aproximadamente) os pontos $P = -\frac{7}{3}$, $Q = \frac{5}{4}$, $R = -\frac{6}{5}$ e $S = \frac{5}{2}$ na reta numérica desenhada abaixo.

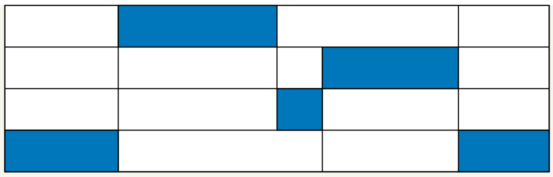


Exercício 1.42 — OCM 1990. Qual das frações é maior $\frac{2753}{2235}$ ou $\frac{2743}{2225}$? Justifique (sem efetuar divisões).

Exercício 1.43 Uma lata cheia de tinta pesa 13 kg. Se retirarmos metade da tinta contida na lata, ela passará a pesar 8 kg. Qual é o peso da lata vazia?

(a) 5 quilogramas.
(b) 10 quilogramas.
(c) 2 quilogramas.
(d) 3 quilogramas.
(e) 21 quilogramas.

Exercício 1.44 — Banco OBMEP - adaptada. A figura mostra um retângulo maior dividido em 18 retângulos menores, com diferentes tamanhos e todos com a mesma largura. Que fração do retângulo maior representa a parte pintada de azul?



Exercício 1.45 — Canguru 2020 - Prova S. Qual é o valor de

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020}$$

(a) 2020 (b) 3030 (c) 4040 (d) 6060 (e) 7070