Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:

Fernando Pimentel
Fabrício Siqueira Benevides
Italândia F. de Azevedo
Tadeu Celedônio

Revisor:

Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:

Equipe Cientista Chefe

Área de Figuras Planas

Conceito de Área
Área de polígonos
Aplicações

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

A678 Área de figuras planas [recurso eletrônico] / Fernando Antônio Amaral Pimentel...[et.al.].- Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43571-9 (E-book)

1. Área. 2. Figuras planas. 3. Princípio de Cavalieri. I. Pimentel, Fernando Antônio Amaral. II. Benevides, Fabricio Siqueira. III. Azevedo, Italândia Ferreira de. IV. Celedônio, Francisco Tadeu Valente. V. Muniz Neto, Antonio Caminha. VI. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). VII. Título.

CDD: 516

9 Área de Figuras Planas

9.1 – Contextualizando

A palavra portuguesa área vem do latim *area*, "nome vinculado ao verbo latino *arere* (estar seco). Na sua origem, designava um pedaço de terreno seco onde os cereais colhidos eram secados e debulhados. Depois no próprio latim passou a se chamar de *area* o terraço diante de um templo e a quase qualquer espaço desprovido de vegetação e construção" (conforme `etimologias.dechile.net/?a.rea`, traduzido do espanhol). Por isso ainda hoje chamamos de área um espaço vazio de uma casa ou terreno. Entretanto, pela primeira definição apresentada nos dicionários, área é a medida da extensão (isto é, do "tamanho") de uma figura plana ou superfície. Para entender como a palavra área adquiriu esse sentido, lembremos alguns fatos do Egito Antigo, o berço da Geometria.

Figura 9.1: Imagem de satélite do Egito mostrando o rio Nilo e seu delta.

Segundo Heródoto, o geógrafo e historiador grego que ficou conhecido como o "pai da história", o Egito é um "presente do Nilo", o grande rio que atravessa aquele país. Essa afirmação se justifica porque o comércio e agricultura egípcios dependiam (e ainda dependem) do Nilo pois as terras cultiváveis do Egito (marcadas em verde na figura acima) se concentram nas margens desse rio e no seu delta (a região triangular da parte superior da imagem em que o Nilo se divide em diversos braços que desaguam no mar).

Outra característica do Nilo, que o torna ainda mais importante para a economia do Egito, é sua regularidade. A cada ano o rio enche e inunda suas margens, depositando nas terras adjacentes o húmus, um fertilizante natural de cor escura. No período da seca, quando o Nilo volta ao seu leito, esses terrenos são devolvidos aos seus proprietários nas condições ideais para o plantio. Cabia então aos agrimensores (aqueles que medem as terras) tanto determinar de novo os limites das "áreas", para que fossem devolvidas aos legítimos donos, como medir sua extensão, para que os impostos devidos fossem recolhidos. O agrimensor então delimitava o terreno seco (a área) e media sua extensão (ou seja, sua área). Logo não é de admirar que hoje a palavra "área" seja usada com esses dois sentidos.

Os funcionários encarregados de executar as medições de terras no Egito tinham de se valer de algum tipo de conhecimento geométrico para executar suas tarefas. Essa geometria tinha assim caráter prático: era o conjunto de receitas e técnicas que tais funcionários dispunham para desempenhar suas funções. Os antigos gregos, que muito aprenderam com os egípcios, partiram então dessas receitas para criar o ramo da matemática que hoje chamamos de Geometria Plana.

9.2 – O que é medir a área de uma figura plana?

Ao contrário dos egípcios, os gregos deixaram muitos escritos dizendo o que significa medir e mostrando como fazê-lo. Para eles (e para nós também) medir é comparar com um padrão. Assim, medir o comprimento de um segmento l é verificar quantas vezes uma unidade (um segmento previamente fixado) cabe no segmento l. Obviamente, essa "definição" de medição de segmentos tem seus problemas. Pode ser que a unidade seja maior que o segmento l e, geralmente, o segmento não vai ser um múltiplo inteiro da unidade. Para encurtar a história, foi a partir dessas questões que surgiu a necessidade de se trabalhar com frações e de admitir a existência de números irracionais (tudo isso é muito interessante mas, infelizmente, foge do escopo desse módulo).

Vamos supor que se saiba medir o comprimento de qualquer segmento. A partir disso, como determinar a área de uma figura plana? Os gregos respondiam essa pergunta usando a mais simples das figuras, o quadrado de lado 1, como padrão. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Área dos quadrados de lados medindo números inteiros

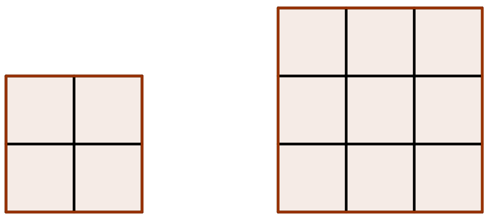


Figura 9.2: Quadrados de lados 2 (esquerda) e 3 (direita) divididos em quadrados de lado 1.

É fácil usar o quadrado de lado 1 para medir a área de quadrados com lados de comprimentos inteiros (positivos), como vemos na Figura 9.2, em que se mostra como obter quadrados de lados 2 e 3 a partir de quadrados de lado 1. Contando a quantidade de quadrados de lado 1 contidos nos quadrados de lados 2 e 3, concluímos que a área desses quadrados é, respectivamente, 4 e 9 vezes a área do quadrado de lado 1. Procedendo dessa maneira, com quadrados de lados 4, 5, 6, etc., obtemos que esses quadrados têm área igual a $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, respectivamente, e assim por diante. Em geral, um quadrado de lado n, onde n é um número natural, pode ser dividido n fileiras horizontais cada uma dividida em n quadrados de lado 1. Logo, o total de quadrados de lado 1 utilizados é dado pela multiplicação: $n \times n$, ou seja, n^2. Logo sua área é n^2 vezes a área do quadrado de lado 1.

9.3 – Unidade de medida de área

É desejável representar por um símbolo a expressão "área do quadrado de lado 1" para não ter de ficar escrevendo isso o tempo todo. Como o *metro* (símbolo m) é a unidade de medida de comprimento, parece ser uma boa ideia chamar de *metro quadrado* a área do quadrado de lado 1 m. Poderíamos, então, usar um símbolo do tipo m$\square$ para representar essa unidade de medida de área. Assim, um quadrado de lado 2 m teria a área de "4 metros quadrados", o que seria expresso em símbolos como 4 m$\square$.

A unidade de medida de área que usamos é mesmo chamada metro quadrado. Porém, no sistema internacional de medidas (SI), o símbolo usado para ela é m^2. Por mais sugestivo que seja um símbolo como m$\square$, seguiremos o SI, porque essa terminologia já está consolidada. Para justificar o símbolo, faremos uso da propriedade das áreas das figuras planas que já aparece no exemplo acima quando verificamos que a área do quadrado de lado n metros é n^2. Essa relação entre a medida do lado do quadrado e sua área vale para qualquer quadrado (mostraremos isso logo abaixo). Assim, a área do quadrado de lado l metros, qualquer que seja o número real positivo l, é $l\,\mathrm{m}$ multiplicado por $l\,\mathrm{m}$, ou seja, $l^2\,\mathrm{m}^2$. Podemos, então, adotar o m^2 como a unidade de área. Procedendo dessa maneira, definimos a unidade de área em termos da unidade de comprimento em vez de criar uma unidade própria para medir áreas.

Obs

Não fazia o menor sentido para os antigos multiplicar comprimentos para obter áreas, como fizemos acima, porque eles encaravam a multiplicação apenas como a operação $p \times q$ de somar p vezes o número q. Eles contornavam essa limitação no alcance da multiplicação através da geometria. Assim, entendiam "elevar a ao quadrado" no sentido literal de construir o quadrado cuja base é o segmento de comprimento a (daí o termo "elevar"). Analogamente, "tirar a raiz quadrada de A" era obter o segmento da base do quadrado de área A.

O ramo do conhecimento que estuda e justifica a multiplicação de grandezas (comprimentos, massas, intervalos de tempo, etc.), como fizemos acima, é chamado *Análise Dimensional* e só foi criado em 1822 com a introdução do conceito de *Dimensão Física* pelo francês Joseph Fourier.

Exemplo 2: área de quadrados com lados medindo p/q

Vamos calcular a área do quadrado de lado p/q metros, em que p e q são inteiros positivos. Ao invés de dividir esse quadrado em quadrados menores, como fizemos no exemplo anterior, vamos usar várias cópias dele para montar um quadrado maior, de lado p. Se formarmos q fileiras, cada uma com q quadrados de lado p/q, o resultado será um quadrado de lado p (veja a Figura 9.3 para um exemplo em que $p = 5$ e $q = 3$), já que $q \cdot \frac{p}{q} = p$. Ao fazer isso, utilizamos ao todo q^2 quadrados de lado p/q. Temos, então, que

$$q^2 \times (\text{área do quadrado de lado } p/q) = (\text{área do quadrado de lado } p).$$

Como p é natural, pelo Exemplo 1, a área do quadrado de lado p é p^2 metros quadrados. E a equação acima implica a área do quadrado de lado p/q é igual a p^2/q^2 metros quadrados.

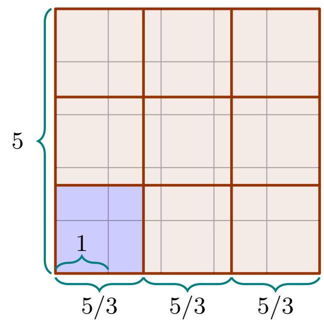


Figura 9.3: 9 quadrados de lado 5/3 cobrindo um quadrado de lado 5.

Na demonstração acima é imprescindível que p e q sejam inteiros positivos, ou seja, que o lado do quadrado seja um número racional, pois q representa a quantidade de fileiras e p precisa ser inteiro para que possamos usar o Exemplo 1. Mas, na seção seguinte, veremos como estender o resultado para quadrados com lado de medida irracional.

9.4 – Leitura: Área de um Quadrado de Lado Arbitrário

É fato que a área de um quadrado de lado (real positivo) l metros é igual a l^2 metros quadrados, seja l racional ou irracional. Nos exemplos 1 e 2 justificamos porque isso vale no caso em que l é racional. A justificativa desse resultado quando l é irracional é feita a partir de um argumento que envolve a aproximação de um quadrado de lado irracional por quadrados cujos lados têm medida racional. A formalização rigorosa desse procedimento é um pouco mais sofisticada por empregar propriedades que definem os números reais e que não vamos discutir nesse módulo. Por isso, nosso objetivo aqui é apensas apresentar a ideia principal da demonstração. O importante nesse estágio do aprendizado não é atingir o "mais perfeito rigor" mas proporcionar ao estudante o melhor entendimento possível da matéria estudada e abrir caminho para um aprofundamento no futuro.

Assim precavidos, vamos justificar porque a área de um quadrado Q_l de lado l é l^2, quando l é irracional. Observe, então, o conjunto de todos os quadrados Q_R de lado R, em que R é um racional maior que l. Como o quadrado Q_l está contido em cada um dos quadrados Q_R então a área de Q_l é necessariamente menor que a área de cada um desses quadrados Q_R. Pelo Exemplo 2, a área de Q_R é R^2. Logo, a área de Q_l é menor que R^2 para qualquer seja o racional R maior que l. Analogamente mostra-se que a área de Q_l é maior que r^2 para qualquer seja o racional r menor que l. Dessa forma, o valor da área de Q_l está sendo espremido entre r^2 e R^2. Fazendo r e R se aproximarem cada vez mais de l, vemos que a única opção plausível é que área do quadrado Q_l seja igual a l^2.

Obs Nesse argumento que verifica a fórmula do quadrado de lado irracional, temos uma aplicação do chamado método da exaustão para o cálculo de áreas, no qual se empregam polígonos de área conhecida que contêm ou estão contidos numa figura plana. Se as áreas das sequências de polígonos que contêm e as daqueles que estão contidos na figura se aproximam de um mesmo número, esse número tem de ser o valor da área da figura. Outro exemplo de aplicação do método da exaustão para áreas é o cálculo da área do círculo (e do valor de π) por Arquimedes empregando sequencias de polígonos regulares com uma quantidade arbitrariamente grande de lados que estão inscritos e circunscritos em um círculo de raio unitário. A Figura 9.4 sugere que a diferença entre as áreas dos polígonos inscrito e circunscrito se aproxima de zero quando aumentamos o número de lados desses polígonos.

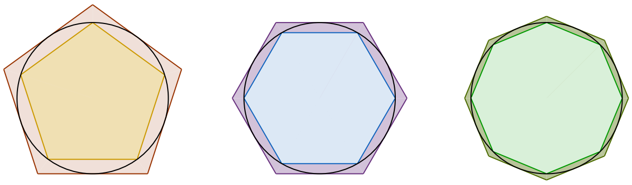


Figura 9.4: Arquimedes estimou a área do círculo pelo método da exaustão empregando polígonos regulares inscritos e circunscritos com uma quantidade arbitrariamente grande de lados. As figuras acima são "meramente ilustrativas" já que Arquimedes não partiu de pentágonos nem fez uso de octógonos. Ele começou com hexágonos regulares e prosseguiu dobrando a quantidade de lados dos polígonos que ia obtendo.

Exemplo 3: Área de retângulos

Área de um retângulo

A *área* de um retângulo com largura a e comprimento b (ver Figura 9.5) é igual a ab.

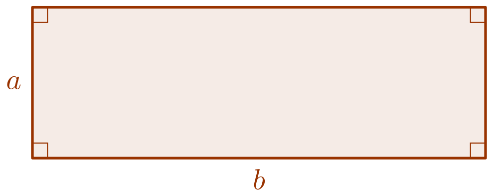


Figura 9.5: um retângulo.

Para surpresa de ninguém, a verificação da afirmação do quadro acima é feita com pequenas adaptações dos argumentos empregados na verificação da fórmula para área do quadrado, considerando os casos em que a e b sejam inteiros, racionais ou reais (positivos). Por exemplo, quando a e b são inteiros positivos, podemos dividir o retângulo em a fileiras com b quadrados lado 1, obtendo área total ab. Encorajamos que o leitor reflita sobre os demais passos.

Exemplo 4: Área de triângulos retângulos

Não se pode obter a fórmula da área dos triângulos aplicando os mesmos passos dos exemplos anteriores porque não há como preencher um triângulo com uma quantidade finita de quadrados (nem mesmo se o triângulo for dos mais bem comportados, como um triângulo retângulo ou um equilátero). Mas, inversamente, podemos combinar dois triângulos retângulos idênticos para formar um retângulo (ver na Figura 9.6). Equivalentemente, ao traçar a diagonal de um retângulo, obtemos dois triângulos de mesma área, representados na Figura 9.6 pelo triângulos ABC e CDA. Assim, a área de cada um deles é metade da área do retângulo $ABCD$.

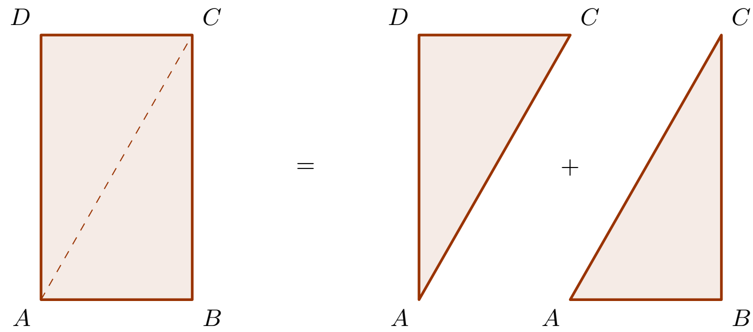


Figura 9.6: um retângulo contém dois triângulos retângulos de áreas iguais.

Logo, a área de um triângulo retângulo é a metade do produto de sua base por sua altura. No próximo exemplo, mostraremos que isso não é qualidade apenas dos triângulos retângulos, mas de todos os triângulos.

O que temos aqui são exemplos de como obter áreas por *composição e recomposição de figuras*. Outra aplicação deste método, além do exemplo seguinte, está na obtenção das fórmulas das áreas de paralelogramos e trapézios nas soluções dos exercícios resolvidos 9.3 e 9.4. Ressaltamos que essas são aplicações de extrema importância (incluídas na maioria dos livros didáticos), mas as deixamos como exercícios para que os alunos tenham oportunidade de tentar deduzir essas fórmulas antes de ver a solução.

Obs O aluno e o professor podem exercitar esse método recortando as formas geométricas de uma folha de papel e remontando os pedaços a fim de obter uma figura mais simples (para a qual já se conhece uma fórmula para calcular área).

Exemplo 5: área de triângulos quaisquer

Um triângulo pode ter no máximo um ângulo maior ou igual a $90°$, pois se tivesse dois ou mais, a soma de seus três ângulos internos seria estritamente maior que $180°$ (mas essa soma em todo triângulo é $180°$). Para os dois ângulos que tocam um lado específico, digamos BC, de um triângulo ABC há dois casos: ou ambos são agudos (menores que $90°$), como o triângulo ABC da esquerda Figura 9.7, ou apenas um deles é agudo, como o triângulo da direita ABC Figura 9.7. Em cada caso, traçamos a altura AD relativa ao lado BC do triângulo.

Obs O professor deve revisar, caso necessário, a definição de *altura relativa à base* de um triângulo. Lembre-se de que qualquer lado pode ser tomado como base, desde que se considere a altura de forma adequada.

No primeiro caso, o triângulo ABC pode ser decomposto em dois triângulos retângulos, os triângulos ABD e ACD, de bases m e n, respectivamente, e mesma altura h. Usando o Exemplo 4, as áreas desses triângulos são iguais a $mh/2$ e $nh/2$, respectivamente. A área do triângulo ABC, que é a *soma*

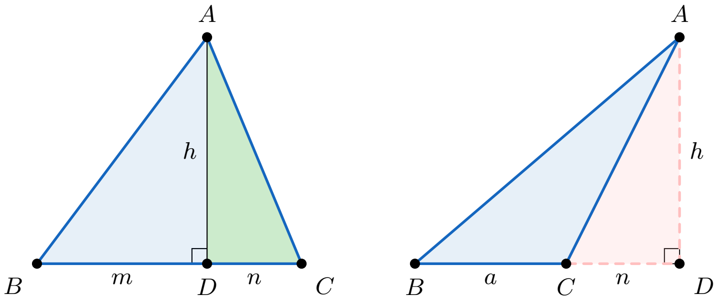


Figura 9.7: dois casos para o triângulo ABC.

dessas duas áreas, então é igual a $\frac{mh}{2} + \frac{nh}{2} = \frac{(m+n)h}{2}$. Mas $m + n$ é a base do triângulo ABC (relativa à altura h), logo essa expressão representa metade do produto da base pela altura de ABC.

No segundo caso, o triângulo ABC tem na base o ângulo obtuso $\angle ACB$. Daí, ao traçar a altura AD ela cai fora da base do triângulo. Temos que ABC está contido no triângulo retângulo ABD. Este último tem base $a+n$, logo sua área é $[(a + n)h/2]$ (por conta do Exemplo 4). Além disso, a área do triângulo retângulo ACD é igual a $(nh)/2$. Assim, a área do triângulo ABC, que é a área do triângulo ABD menos a área do ACD, é igual a:

$$\frac{(a+n)h}{2} - \frac{nh}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Concluímos que, neste caso, a área de ABC também é a metade do produto de sua base, a, pela sua altura h. Logo, para todo triângulo vale o seguinte.

Área de um triângulo (qualquer)

A *área* de um triangulo onde a base mede b e altura mede h é $\dfrac{bh}{2}$.

9.5 – Área de polígonos com n lados

Vamos obter no próximo exemplo a fórmula da área do polígono *regular* de n lados, lembrando que num polígono regular os comprimentos dos lados assim como os ângulos internos formados por lados adjacentes são iguais entre si.

Exemplo 6: Área do polígono regular de n lados

Um polígono regular de $n > 3$ lados pode ser dividido em n triângulos idênticos trançando os segmentos que unem o centro do polígono a seus vértices (veja a Figura 9.8, onde $n = 9$). Veja que cada um desses triângulos é isósceles e possui mesma área. O apótema de um polígono regular é a distância entre o centro do polígono e (o ponto médio de qualquer) um de seus lados. Na Figura 9.8, veja que o apótema é o segmento tracejado e é igual à medida da altura de um dos triângulos mencionados acima. Chamando de a o apótema e ℓ a medida do lado do polígono, temos que a área de cada triângulo é $a\ell/2$. Assim, a área do polígono é $n \times \frac{a\ell}{2} = \frac{an\ell}{2}$. Por fim, perceba que $n\ell$ é o perímetro do polígono, de forma que obtemos o seguinte resultado.

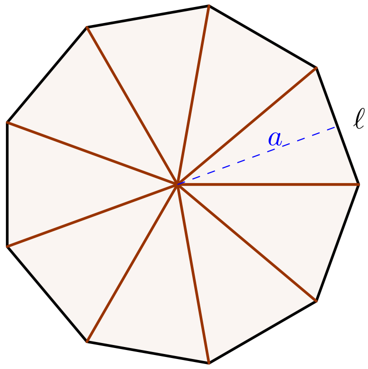


Figura 9.8: um polígono regular com 9 lados dividido em 9 triângulos de mesma área.

Área de um polígono regular

É igual à *metade do produto de seu apótema pelo perímetro.*

Obs É comum chamar a metade do perímetro de *semiperímetro*. Dessa forma, podemos também dizer que a área de um polígono regular é igual ao *produto do apótema pelo semiperímetro.*

Polígonos quaisquer

Não existe fórmula fechada para a área de um polígono arbitrário, mas existe um método que pode ser empregado quando é possível calcular as distâncias entre quaisquer dois vértices da figura: todo polígono pode ser repartido em triângulos disjuntos, trançando alguns dos segmentos que ligam vértices do polígono (chamamos isso de "triangularizar o polígono"). Daí, podemos calcular a área do polígono somando as áreas desses triângulos (que, por sua vez, podem ser calculadas de diferentes maneiras, a depender de quais informações temos disponíveis). Esse método é ilustrado na Figura 9.9.

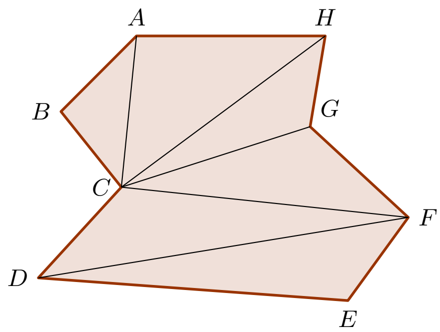


Figura 9.9: Triangularização de um polígono.

O polígono $ABCDEFGH$ é a união dos triângulos ABC, ACH, CGH, CFG, CDF e DEF e a área do polígono é a soma das áreas desses triângulos. A triangularização de um polígono não é única. Por exemplo, poderíamos substituir o segmento DF por CE e obter outra triangularização.

Na antiguidade, os agrimensores provavelmente utilizavam o método da triangularização do polígono para determinar a área das propriedades rurais. Inicialmente aproximavam os terrenos por polígonos irregulares, que decompunham em triângulos (eles conheciam técnicas para medir os lados desses triângulos). Calculavam as suas áreas, possivelmente pela chamada *fórmula de Herão*, conhecida já na antiguidade. Essa fórmula fornece uma maneira alternativa de calcular áreas de triângulos tendo conhecimento apenas das medidas de seus três lados, evitando a necessidade de calcular a medida de uma altura. Se os lados possuem medidas a, b e c, primeiro calcula-se o semiperímetro, que é $p = (a + b + c)/2$ e, então, a área do triângulo é dada por:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(Fórmula de Herão).}$$

A área do terreno, então, é a soma das áreas desses triângulos.

Obs Você consegue imaginar por que os gregos antigos chamavam os geômetras egípcios do seu tempo de "esticadores de corda"? Pense em como os egípcios delimitavam os terrenos e os dividiam em triângulos com os recursos limitados que dispunham na época.

No mundo moderno, é possível aproximar a área de um terreno usando um GPS para marcar as coordenadas cartesianas dos vértices de um polígono que delimita (ainda que de forma aproximada) o contorno do terreno. De posse dessas coordenadas é possível calcular as distâncias entre os pontos (pelo teorema de Pitágoras, como explicado no Módulo 11) e de posse dos comprimentos dos lados dos triângulos é possível aplicar a fórmula de Herão para obter suas áreas. Mas, de posse das coordenadas dos vértices, há outras maneiras ainda mais eficientes de calcular a área do polígono que fogem do escopo deste módulo (por exemplo, usando matrizes). Em geral, esses cálculos são efetuados por aplicativos cujo funcionamento interno é ignorado pelo usuário final.

9.6 – Área de círculos

No que segue, vamos usar o método da exaustão, apresentado na Seção 9.4, para deduzir a fórmula exata da área do círculo de raio r, para qualquer real positivo r. Basta inscrever neste círculo polígonos regulares com uma quantidade arbitrariamente grande de lados. Como observamos anteriormente, as áreas desses polígonos se aproximam da área do círculo. Por outro lado, os apótemas dos polígonos se aproximam do raio r do círculo e os perímetros dos polígonos se aproximam da circunferência (ou seja do perímetro) do círculo. Vamos chamar a circunferência de C. Assim, a área do polígono regular, que é igual ao produto do apótema pela metade de perímetro (como visto na seção anterior), se aproxima de $rC/2$. Pelo Método da Exaustão, a área do círculo é $rC/2$. Lembre-se de que $C = 2\pi r$. Substituindo isso na expressão anterior, concluímos o seguinte.

Área de um círculo

A área de um círculo de raio r é igual a πr^2.

9.7 – Leitura: área de círculos no Egito Antigo

Figura 9.10: Papiro Rhind

Entre os 87 problemas do papiro Rhind, exposto no Museu Britânico, o de número 50 fornece uma excelente aproximação para o valor de π:
Problema 50: *É dado um círculo de diâmetro 9. Qual é a área?*
Solução do escriba que escreveu o papiro: Remova 1/9 do diamêtro. O que resta é 8. Multiplique 8 por 8. Dá 64. Portanto a área do círculo é 64.
Cuidado: a área de tal círculo *não é exatamente* 64. O resultado obtido pelo escriba é apenas aproximado.

Observe que o escriba não substitui os dados do problema em uma fórmula algébrica para obter a sua resposta, pois a notação algébrica, que faz uso de letras para denotar quantidades variáveis, só foi criada muito tempo depois. Por não poder recorrer à álgebra, o escriba escrevia suas receitas para calcular áreas, volumes, etc., sob forma de problemas. No caso do problema acima, ficava subentendido para o leitor do papiro que para encontrar a área de um círculo qualquer ele deveria substituir o valor 9 do enunciado pelo diâmetro do círculo desejado. Assim, o 9 do enunciado "funciona" como a variável D, que representa o diâmetro. Removendo 1/9 de D sobram $8D/9$. Assim, o escriba sugere que a área do círculo seria $(8D/9)^2 = (64/81)D^2$. No exercício que segue comparamos essa fórmula com a fórmula correta que foi apresentada na seção passada.

Observe que o 1/9 da solução do escriba é uma constante, o que pode confundir o leitor: vê-se aqui (mais) um exemplo da importância da terminologia e das notações na melhoria da comunicação.

Exercício 9.1 Qual é o valor aproximado de π que o escriba emprega na solução do problema 50 do papiro Rhind?

Solução. Como vimos, o escriba sugere a fórmula: $(64/81)D^2$. Lembre-se de que $D = 2r$, onde r é o raio do círculo. Logo, a fórmula corresponde a

$$\frac{64}{81}D^2 = \frac{64}{81}(2r)^2 = \frac{64 \cdot 4}{81}r^2 = \frac{256}{81}r^2 = 3{,}1605 \cdot r^2.$$

Como vimos na seção passada, a fórmula correta para a área é πr^2. Logo, é como se o escriba estivesse adotando o valor de 3,16 para π. Isso não é nada mal para um cálculo realizado mais de 3660 anos atrás, pois hoje sabemos que o valor de π é aproximadamente 3,14. Assim, a fórmula do escriba resulta em uma área um pouco maior do que a verdadeira. ■

Exercício 9.2 Qual é o erro (medido como percentual da área) que o escriba comete na solução do problema 50?

Solução. A área de um círculo de diâmetro 9, ou seja, raio 9/2, é igual $\pi r^2 = \pi \cdot (9/2)^2 = 81\pi/4$. Com auxílio de uma calculadora, obtemos que tal área é aproximadamente 63,617, enquanto que o valor obtido pelo escriba foi 64. Temos, então, um erro de menos de 0,39 sobre 64, ou seja, de cerca de 0,6 %. ■

Dentre as hipóteses ventiladas (isso mesmo, hipóteses são ventiladas) para explicar como egípcios obtiveram a estimativa de π do problema 50 do papiro de Rhind, uma é especialmente interessante por implicar que os escribas do Egito Antigo faziam uso de uma forma rudimentar do Método da Exaustão antes mesmo de sua formalização pelos matemáticos gregos.

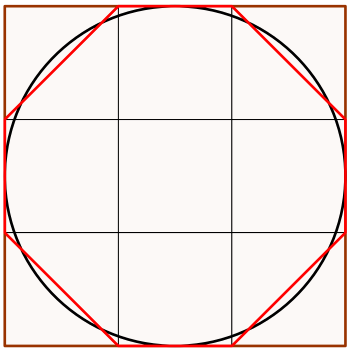


Figura 9.11: ladrilho egípcio.

Sabe-se que os egípcios usavam malhas quadriculadas (como os nossos azulejos e ladrilhos) para decorar as paredes de suas construções. Como nós, eles pintavam ou desenhavam partes de figuras em quadrados e, assim, a figura completa só era vista quando os quadrados eram colocados em seus lugares. Círculos eram frequentemente representados na arte egípcia. A Figura 9.11 mostra uma possível representação de tal círculo em um ladrilho, usando 9 quadradinhos para compor a figura. Um escriba curioso poderia ter desenhado o octógono da figura acima traçando diagonais nos quadrados dos cantos. Temos que tomar cuidado, pois este octógono não é regular (os lados possuem duas medidas diferentes).

Observe ("no olho") que a parte do octógono em excesso, ou seja, a região que está fora do círculo mas dentro do octógono é apenas um pouco menor do que a área que "falta" (ou seja, que está fora do octógono mas dentro do círculo). Concluímos que a área do octógono é apenas *um pouco* menor que a do círculo.

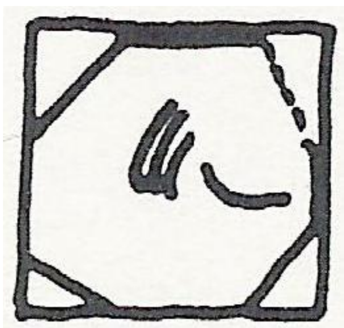


Figura 9.12: Ilustração do papiro Rhind.

Admitindo o fato acima, o próximo passo é encontrar a área do octógono.

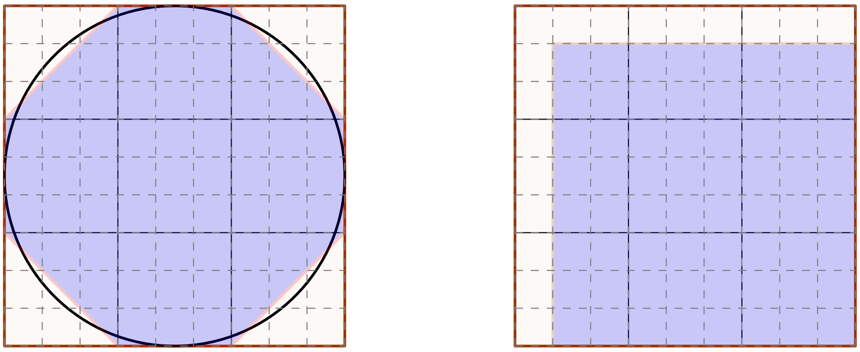


Figura 9.13: aproximando a área do círculo da Figura 9.11.

Na Figura 9.13, refinamos a malha 3×3 dos ladrilhos da Figura 9.11, em uma malha 9×9, com um total de 81 quadradinhos de mesma área. Marcamos de azul os quadradinhos que estão dentro do octógono e de amarelo os que estão fora. Veja que alguns lados do octógono dividem alguns dos quadradinhos em triângulos pequenos.

Agora, verifique que a área dos quadradinhos amarelos na figura da esquerda equivale a 18 quadradinhos (aqui, contamos cada triângulo pequeno como meio quadradinho). Sobram, então, $81 - 18 = 63$ quadradinhos azuis dentro do octógono. Considerando apenas números inteiros, o quadrado perfeito mais próximo de 63 é $64 = 8^2$. Lembrando que a área do círculo é um pouco maior do que a do octógono, 64 quadradinhos é uma boa aproximação para a área do círculo. A figura da direita ilustra, dentro do quadrado original, o quadrado (azul) formado por esses 64 quadradinhos; sua área corresponde a $64/81$ da área do quadrado maior. Por sua vez, o quadrado maior possui lado de comprimento igual ao diâmetro D do círculo, logo, sua área é D^2. Assim, a área do círculo é aproximadamente $64D^2/81$, ou seja, $(8D/9)^2$, como indicado pelo escriba.

9.8 – Leitura: o Princípio de Cavalieri

O *Princípio de Cavalieri* pode ser aplicado para obter a área de diversas figuras planas, mesmo que irregulares, *a partir de simetrizações* dessas figuras.[1]

Vamos usá-lo para dar uma justificativa alternativa para a fórmula da área de um triângulo qualquer, transformando o em um triângulo isósceles (ou seja, que possui dois lados de mesma medida).

Figura 9.14: pilhas de moedas com o mesmo volume.

[1]Existe também um enunciado equivalente para sólidos no espaço, mas o cálculo de volumes é assunto para aulas futuras.

A Figura 9.14 mostra duas pilhas de moedas iguais com a mesma altura. Logo, o volume das duas pilhas é igual (podemos até imaginar que se trata da mesma pilha de moedas, antes e depois de ser mexida pelo fotógrafo).

Considere agora um triângulo qualquer ABC, desenhado com o lado BC na horizontal. Podemos imaginar esse triângulo como a união de infinitos segmentos paralelos a BC.

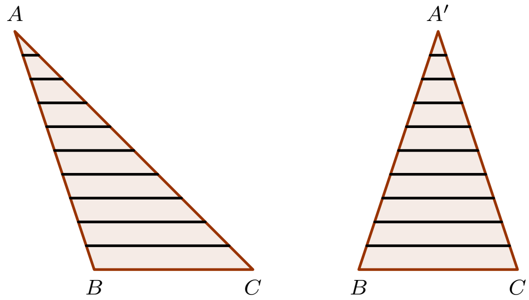


Figura 9.15: triângulos de mesma base e altura.

Desloque cada um desses segmentos para a direita, paralelamente à base BC, supondo que tal deslocamento seja proporcional à distância do segmento até a base do triângulo ABC. Ao fim desse processo, vamos obter um triângulo $A'BC$ de mesma base e altura que o triângulo ABC, como podemos ver na Figura 9.15, mas agora isósceles. Como vemos um triângulo como um conjunto de segmentos paralelos à sua base, enxergamos os triângulos ABC e $A'BC$ como o mesmo conjunto de segmentos em disposições distintas. Em analogia com as pilhas de moedas, esses dois triângulos deverão ter a mesma área (nesse caso, a área indica um tipo de soma ponderada pelo comprimento dos segmentos de cada triângulo, da mesma forma que o volume da pilha nos dá a quantidade de moedas). Agora, a área de um triângulo isósceles pode ser facilmente calculada pelo método de composição e recomposição: a altura relativa à base o divide em dois triângulos de mesma área que podem ser remontados em um retângulo (tente desenhar e fazer o recorte), com altura igual à do triângulo e com base igual à metade da base do triângulo. Isso, mostra que a área do triângulo é igual a metade do produto da base pela altura. **Pergunta sincera:** Que tal esse argumento? Ele lhe convenceu?

Certamente não provamos rigorosamente que os dois triângulos acima têm a mesma área. (Demonstrações matemáticas formais deste fato, mas requerem o uso do cálculo diferencial, estudado no Ensino Superior). O que fizemos foi apresentar evidências de que tal acontece, recorrendo a uma analogia. Por hora, o mais importante é que na figura enxergamos dois triângulos com a mesma área, se tivemos antes a visão preparada pelas pilhas de moedas. Esse tipo de abordagem facilita a compreensão dos resultados. A fórmula de área, que antes era deduzida de outros resultados, passa a também ser intuída, ou seja, assimilada como um fato, a partir da comparação das Figuras 9.14 e 9.15.

Princípio de Cavalieri para figuras planas

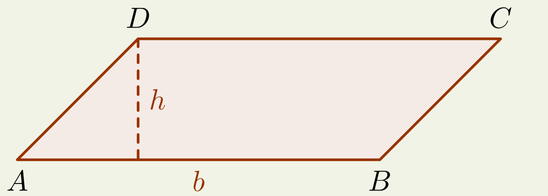
Sejam F_1 e F_2 duas figuras planas contidas na região entre duas retas paralelas r_1 e r_2. Se toda reta paralela a r_1 e r_2 e que intersecta uma das figuras planas, F_1 ou F_2, intersectar as duas figuras planas F_1 e F_2 em segmentos de mesmo comprimento, então as áreas de F_1 e F_2 são iguais.

Obs Trata-se de um *princípio* porque foi tido, à sua época, como suficientemente evidente para ser admitido sem demonstração. Ele é atribuído ao religioso italiano Bonaventura Cavalieri, discípulo de Galileu Galilei, que no seu tratado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* apresentava o princípio que levou seu nome como parte de um assim chamado *método de indivisíveis* para calcular áreas e volumes.

O Princípio de Cavalieri já era conhecido muito antes do nascimento do matemático que lhe deu nome. Arquimedes, por exemplo, dele fez uso para calcular o volume de uma esfera a partir dos volumes de um cone e de um cilindro. Supostos o Princípio de Cavalieri e os resultados de semelhança de triângulos (que implicam que retas paralelas às bases dos triângulos ABC e $A'BC$ da Figura 9.15 cortam esses triângulos em segmentos de mesmo comprimento), pode-se provar rigorosamente que os triângulos ABC e $A'BC$ têm a mesma área como uma aplicação imediata do Princípio de Cavalieri.

9.9 – Exercícios Resolvidos

Exercício 9.3 Determine o valor da área do paralelogramo de base b e altura h.



Solução. Há três soluções naturais. (i) Podemos transformar o paralelogramo em um retângulo com a mesma base e altura recortando e remontando o paralelogramo. (ii) Podemos triangularizar o paralelogramo, cortando-o por sua diagonal em dois triângulos congruentes. (iii) Podemos usar o Princípio de Cavalieri para obter um retângulo de mesma base e altura que o paralelogramo.

Seguindo a segunda sugestão, traçamos a diagonal do paralelogramo que está entre os vértices A e C (veja Figura 9.16)

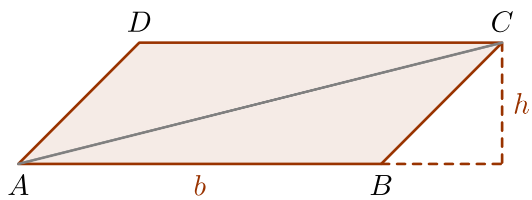


Figura 9.16: um paralelogramo de base b e altura h.

Observe que os triângulos ABC e ADC são congruentes, logo têm a mesma área. A área do triângulo ABC (a metade do produto de sua base por sua altura) é dada por $bh/2$. Logo a área do paralelogramo, que é a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD, é o produto bh. ∎

Exercício 9.4 Qual é a fórmula da área do trapézio. Justifique sua resposta.

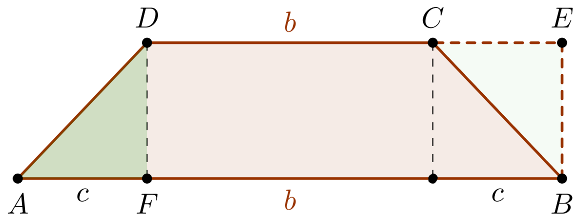


Figura 9.17: um trapézio isósceles de base menor b e base maior $b + 2c$.

Solução. Uma solução diferente das convencionais é obter de início apenas a fórmula da área do trapézio isósceles, desmontando-o e remontando-o em um retângulo de mesma altura e cuja base é igual à média dos comprimentos dos lados paralelos do trapézio. Na Figura 9.17, partindo do trapézio $ABCD$, o retângulo obtido é $BEDF$. Veja que ele possui a mesma altura (DF), e temos que $\overline{DE} = b + c = (\overline{AB} + \overline{CD})/2$. Logo, sua área é

$$\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DF} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}.$$

Se o trapézio não for isósceles, aplica-se o Princípio de Cavalieri com um trapézio isósceles com as mesmas bases menor e maior e altura, concluindo-se que a mesma fórmula vale.

Outra solução, mais clássica, também envolve composição e decomposição de figuras mas aplicada diretamente a qualquer trapézio, como na Figura 9.18.

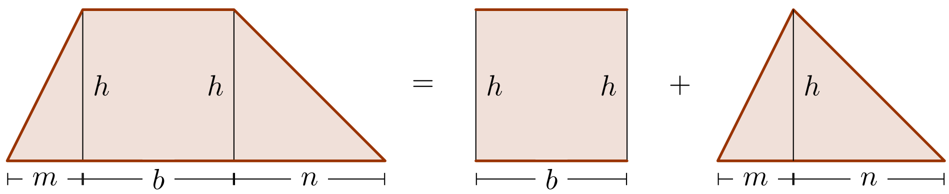


Figura 9.18: Decomposição do trapézio em um retângulo e um triângulo

O trapézio é cortado nas duas linhas verticais e remontado em um retângulo e um triângulo, conforme a figura. A área do trapézio à esquerda, então, é a soma das áreas do retângulo e do triângulo. A área do retângulo é bh e a do triângulo é $(m + n)h/2$. Logo,

$$(\text{área do trapézio}) = bh + \frac{(m+n)h}{2} = \frac{(2b + m + n)h}{2}.$$

Como a soma das medidas das bases do trapézio é igual a $(m + b + n) + b$, ou seja, $2b + m + n$, obtivemos a mesma fórmula da solução anterior. ■

Exercício 9.5 Um hexágono regular tem 8 cm de lado. Determine a área desse hexágono.

Solução. Uma solução seria utilizar a fórmula apresentada no Exemplo 6: apótema vezes o semiperímetro. O semiperímetro de um polígono regular é o a metade da medida do lado multiplicada pelo número de lados. Já o apótema, em qualquer polígono regular, pode ser calculado à partir do lado aplicando-se resultados de trigonometria, pois basta calcular a altura de triângulo isósceles do qual se conhece a base e os ângulos (que podem ser obtidos facilmente). No caso do hexágono, isso é mais simples, pois os triângulos em questão são equiláteros (como veremos abaixo). E a altura de um triângulo equilátero pode ser calculada apenas com o teorema de Pitágoras, de modo que o leitor não precisa saber trigonometria. Sugerimos que o leitor tente resolver o problema dessa forma.

Apresentamos aqui, uma solução alternativa, que faz uso da direto da fórmula de Herão. Os segmentos que ligam o centro do hexágono aos seus vértices o dividem em 6 triângulos, como podemos ver na Figura 9.19. Afirmamos que esses triângulos são equiláteros.

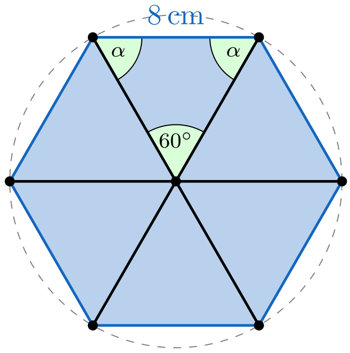


Figura 9.19

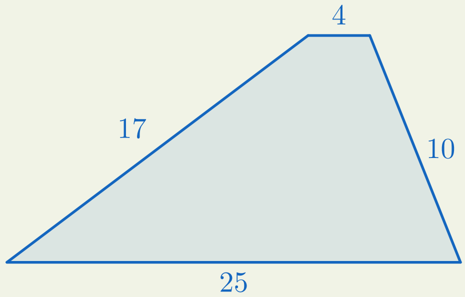
De fato, em cada triângulo, o ângulo central, que é oposto a um dos lados do hexágono, mede $360°/6 = 60°$. Os dois outros ângulos possuem medidas iguais, digamos α (como na figura), pois são opostos a raios do circulo circunscrito (que contém o hexágono). A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, logo $2\alpha + 60° = 180°$, logo $\alpha = 60°$. Assim, os três ângulos são iguais a $60°$ e o triângulo é equilátero. Logo, cada um de seus lados mede 8 cm (o mesmo que o lado do hexágono).

Por sua vez, o semi-perímetro de cada triângulo é $p = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12\,\text{cm}$ (não confundir com o semi-perímetro do hexágono). Aplicando a fórmula de Herão para calcular a área de um desses triângulos e multiplicando o resultado por 6 (que é a quantidade de triângulos), temos que a área do hexágono é:

$$6\sqrt{p(p-8)(p-8)(p-8)} = 96\sqrt{3}\,\text{cm}^2. \qquad \blacksquare$$

Exercício 9.6 (UFPE) A área do trapézio (figura abaixo) é igual a:

(a) 86.
(b) 96.
(c) 106.
(d) 116.
(e) 126.



Solução. Alternativa correta: letra d.

Para resolver esse problema efetuamos uma construção auxiliar traçando pelo vértice esquerdo da base superior do trapézio uma paralela ao lado direito desse quadrilátero, como indicado na Figura 9.20. Ela divide o trapézio em um triângulo de lados $a = 21$, $b = 17$ e $c = 10$ um paralelogramo de lados medindo 4 e 10.

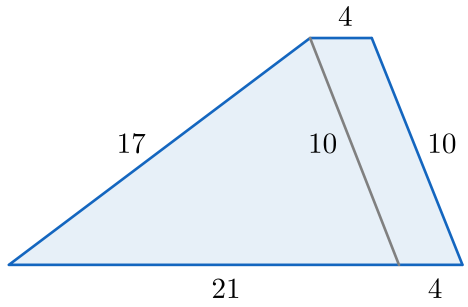


Figura 9.20

O perímetro do triângulo é $21 + 10 + 17 = 48$. Logo, seu semiperímetro é $p = 24$. Calculamos a área A_t do triângulo aplicando a fórmula de Herão pela qual $A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Assim,

$$A_t = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 7^2} = 2^2 \times 3 \times 7,$$

ou seja, $A_t = 84$. Conhecida sua área A_t, calculamos a altura h do triângulo, com uma aplicação da fórmula usual da área do triângulo. Assim, uma vez que $A_t = 21h/2$ (metade do produto da base do triângulo pela sua altura), então $h = 2A_t/21$. Substituindo o valor de A_t nessa última expressão, encontramos $h = 8$.

Observe que h é também a altura do paralelogramo que, com o triângulo, forma o trapézio da Figura 9.20. A área A_p do paralelogramo é o produto de sua base (4) pela sua altura (8). Assim, $A_p = 32$.

A área do trapézio é a soma das áreas do triângulo e do paralelogramo calculadas acima, portanto é igual a $84 + 32 = 116$. ■

9.10 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 9.7 Calcule a área de um paralelogramo que tem 2,4 cm de base e 1,3 cm de altura.

Exercício 9.8 Um trapézio tem a base menor medindo 4 cm, a base maior medindo 6 cm e a altura medindo 20 cm. Qual é a área deste trapézio?

Exercício 9.9 Qual é a área de um triângulo que tem base igual a 12 cm e altura igual a 8,5 cm?

Exercício 9.10 Em um trapézio de bases 14 cm e 20 cm, a altura mede 6 cm. Qual é a área do trapézio?

Exercício 9.11 Calcule a área de um losango, sabendo que suas diagonais medem 32 cm e 24 cm.

Exercício 9.12 Calcule a área de uma circunferência de diâmetro igual a 50 cm.

Exercício 9.13 Maurício fez um cartaz retangular com área total 1920 cm^2. Sabendo-se que um dos lados do quadrado mede 32 cm, qual a medida, em cm, do outro lado?

Exercício 9.14 Sr. Carlos decidiu fazer uma reforma em sua sala de reuniões. Para isto resolveu cobrir de carpete uma área retangular de dimensões 4,5 m por 5,5 m. Sabendo-se que o metro quadrado de carpete custa R$ 17,00, quanto Sr. Carlos gastará com essa reforma?

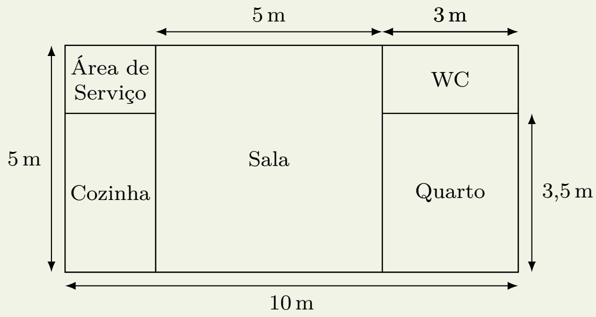
Exercício 9.15 (PUC RIO – 2008) Um festival foi realizado num campo de 240 por 45 metros. Sabendo que em cada 2 m^2 havia, em média, 7 pessoas, quantas pessoas havia no festival?

(a) 42.007.
(b) 41.932.
(c) 37.800.
(d) 24.045.
(e) 10.000.

Exercício 9.16 (IFSP – 2016) Uma praça pública em forma de circunferência tem raio de 18 metros. Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta sua área em metros quadrados. Tome $\pi = 3{,}14$.

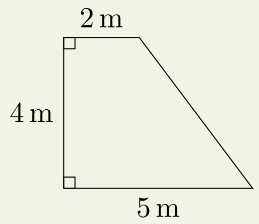
(a) 1.017,36.
(b) 1.254,98.
(c) 1.589,77.
(d) 1.698,44.
(e) 1.710,34.

Exercício 9.17 Observe na figura a planta do apartamento de Jonas. Qual é a área do quarto desse apartamento? E a da área de serviço?

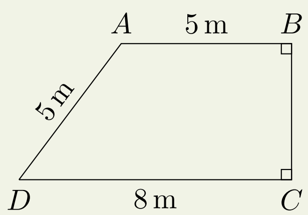


Exercício 9.18 (SAERJ) A figura abaixo representa um pátio em forma de trapézio. Para pavimentar esse pátio, quantos metros quadrados de cerâmica são necessários?

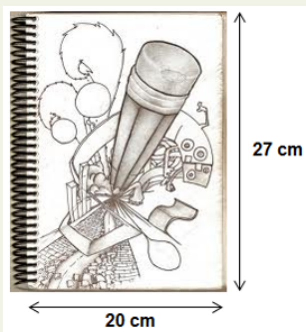
(a) 11.
(b) 14.
(c) 16.
(d) 20.
(e) 22.



Exercício 9.19 (MACK-SP) Uma escola de Educação Artística tem seus canteiros em forma geométrica. Um deles é em formato do trapézio retângulo, com as medidas indicadas na figura abaixo. Calcule a área desse canteiro.



Exercício 9.20 Andreia pretende cobrir a capa de seu caderno, reproduzido na figura, com uma folha de papel colorida. Qual é a área do papel colorido necessário para cobrir exatamente a capa do caderno?



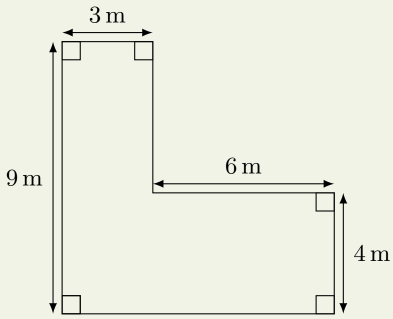
Nível 2

Exercício 9.21 (PUC-RJ) A área de um triângulo retângulo é $30\,\text{cm}^2$. Sabendo que um dos catetos desse triângulo mede $5\,\text{cm}$, qual é a medida de sua hipotenusa?

(a) 5 cm.
(b) 8 cm.
(c) 12 cm.
(d) 13 cm.
(e) 25 cm.

Exercício 9.22 (Avalie Bahia 2013) O desenho na figura representa a planta do salão de festas de um prédio. A medida da área, em metros quadrados, desse salão de festas é igual a

(a) 22.
(b) 27.
(c) 31.
(d) 51.
(e) 81.

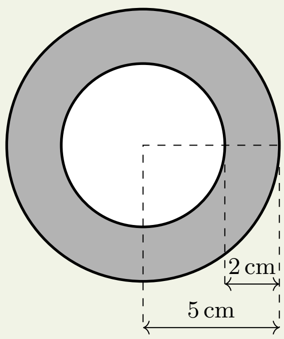


Exercício 9.23 (SARESP-2011) Um pedreiro usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir $45\,\text{m}^2$ de parede. Qual é a medida, em cm, do lado de cada azulejo?

(a) 10.
(b) 13.
(c) 15.
(d) 18.
(e) 20.

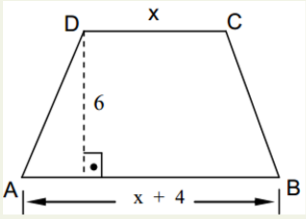
Exercício 9.24 (SAEGO 2017) O desenho na figura é formado por dois círculos concêntricos. Qual é a medida da área da parte colorida de cinza?

(a) $34\pi\text{cm}^2$.
(b) $25\pi\text{cm}^2$.
(c) $21\pi\text{cm}^2$.
(d) $16\pi\text{cm}^2$.
(e) $13\pi\text{cm}^2$.



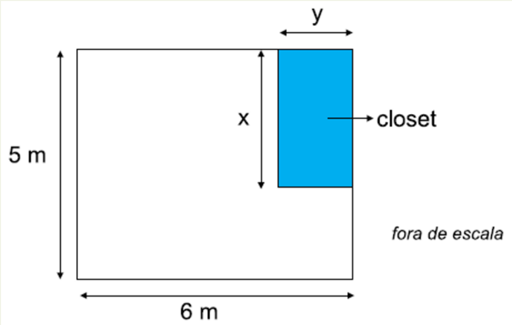
Exercício 9.25 A área do trapézio da figura é $48\,\mathrm{m}^2$. Então sua base AB mede:

(a) 4 m.
(b) 6 m.
(c) 8 m.
(d) 10 m.
(e) 12 m.



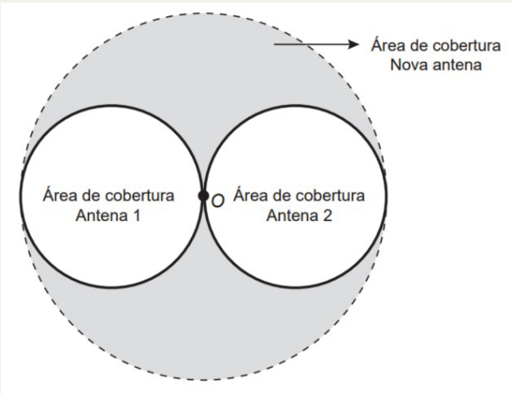
Exercício 9.26 (Fac. Cultura Inglesa SP/2015) Uma pessoa possui um quarto retangular com 5 metros de largura por 6 metros de comprimento e quer utilizar parte da área do quarto para fazer um closet (pequeno cômodo usado como quarto de vestir), também retangular conforme mostra a figura. Sabendo que y corresponde a 1/4 do comprimento do quarto, para que a área do closet seja de $4{,}5\,\mathrm{m}^2$, a largura x, em metros, deverá ser de:

(a) 2,0.
(b) 2,5.
(c) 3,0.
(d) 3,5.
(e) 4,0.



Exercício 9.27 (Enem - 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura a segui. O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

(a) $8\,\pi$.
(b) $12\,\pi$.
(c) $16\,\pi$.
(d) $32\,\pi$.
(e) $64\,\pi$.



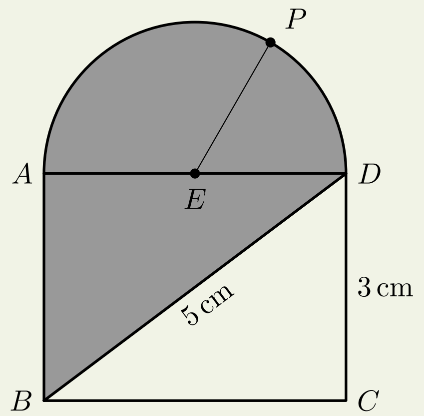
Exercício 9.28 Uma empresa pretende ladrilhar o pátio retangular de sua linha de produção, que possui 16 metros de largura e 22 metros de comprimento. Os ladrilhos utilizados são quadrados com 32 centímetros de lado. Calcule o número aproximado de ladrilhos necessários para pavimentar o pátio.

Exercício 9.29 (UCSal-BA) No centro de uma praça circular, de 90 metros de raio, foi montado um tablado, também circular e com 12 metros de raio, no qual realizou-se um espetáculo musical. Considerando que todas as pessoas que foram ao espetáculo restringiram-se à faixa da praça exterior ao tablado, que teve uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, quantas pessoas estiveram presentes a esse espetáculo? (Use $\pi = 3$.)

(a) 90.576.
(b) 92.462.
(c) 93.128.
(d) 95.472.
(e) 98.576.

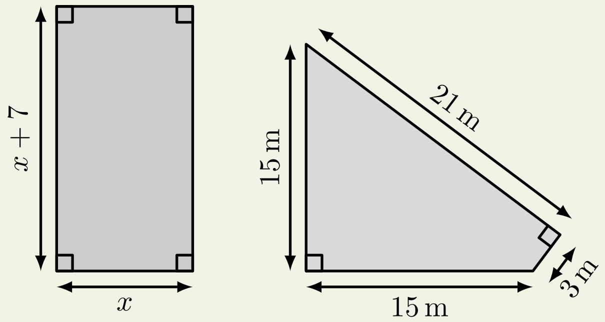
Exercício 9.30 (Aprendiz de Marinheiro – 2016(adaptada)) Na figura, sabendo que EP é o raio da semicircunferência de centro em E. Determine o valor da área mais escura e assinale a opção correta. (Considere $\pi = 3$.)

(a) $10\,\text{cm}^2$.
(b) $12\,\text{cm}^2$.
(c) $18\,\text{cm}^2$.
(d) $20\,\text{cm}^2$.
(e) $24\,\text{cm}^2$.



Exercício 9.31 (Enem – 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura, à direita), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura, à esquerda) cujo comprimento seja 7 metros maior do que a largura. Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais a quanto?

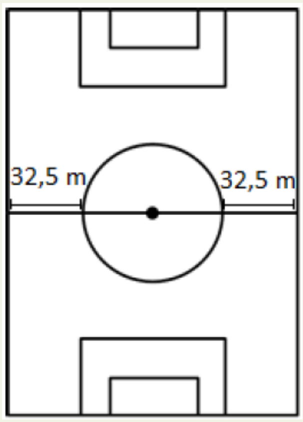
(a) 7,5 e 14,5.
(b) 9,0 e 16,0.
(c) 9,3 e 16,3.
(d) 10,0 e 17,0.
(e) 13,5 e 20,5.



Nível 3

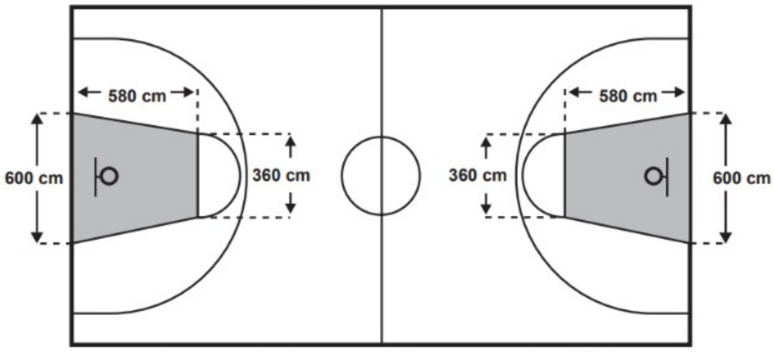
Exercício 9.32 (IFSC/2015) Um campo de futebol tem o formato de um retângulo de comprimento $(2x+20)$ metros e largura $(x+45)$ metros, conforme a figura ao lado. Sabendo que a área desse campo é de 8500 metros quadrados, assinale a alternativa que indica corretamente a medida do raio do círculo central:

(a) 10 m.
(b) 15 m.
(c) 20 m.
(d) 25 m.
(e) 30 m.

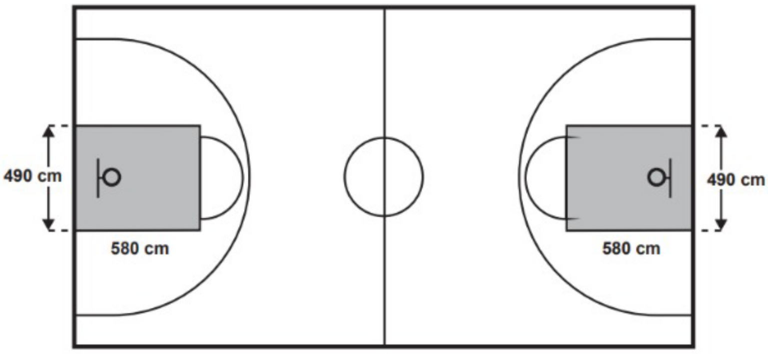


Exercício 9.33 (Enem – 2015) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas. Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (FIBA) em 2010, que unificou as marcações das diferentes ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II. Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a):

(a) aumento de 5800 cm^2.
(b) aumento de 75.400 cm^2.
(c) aumento de 214.600 cm^2.
(d) diminuição de 63.800 cm^2.
(e) diminuição de 272.600 cm^2.



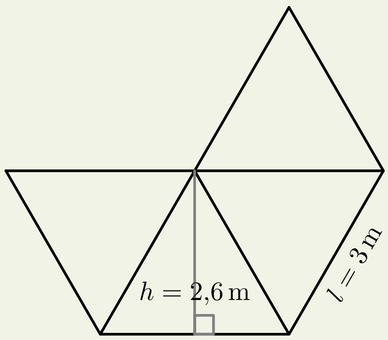
Esquema I: área restritiva antes de 2010



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

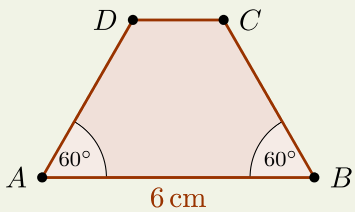
Exercício 9.34 A figura a seguir é composta de triângulos equiláteros de lado 3 unidades. Dentre as opções abaixo, qual aproxima melhor a área total da figura em centímetros quadrados.

(a) 14,4.
(b) 15,6.
(c) 16,5.
(d) 17,2.
(e) 20,0.



Exercício 9.35 (FGV) Na figura, $AD = CB$, $AB = 6\,\text{cm}$, $AD = 4\,\text{cm}$ e os ângulos internos de vértices A e B têm as medidas indicadas. A área do quadrilátero $ABCD$, em centímetros quadrados, é:

(a) $\sqrt{3}$.
(b) $2\sqrt{3}$.
(c) $4\sqrt{3}$.
(d) $6\sqrt{3}$.
(e) $8\sqrt{3}$.

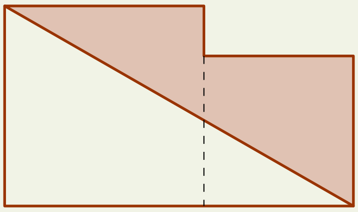


Exercício 9.36 (UFSC – 2011) Um ciclista costuma dar 30 voltas completas por dia no quarteirão quadrado onde mora, cuja área é de 102.400 m^2. Então, a distância que ele pedala por dia é de

(a) 19.200 metros.
(b) 9.600 metros.
(c) 38.400 metros.
(d) 10.240 metros.
(e) 320 metros.

Exercício 9.37 (OBMEP 2014) A figura abaixo é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza em centímetros quadrados?

(a) 44.
(b) 46.
(c) 48.
(d) 50.
(e) 56.



Exercício 9.38 Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π. Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

(a) 16 628.
(b) 22 280.
(c) 28 560.
(d) 41 120.
(e) 66 240.

Exercício 9.39 (Cefet/RJ – 2017) Um quadrado de lado x e um triângulo equilátero de lado y possuem áreas de mesma medida. Assim, pode-se afirmar que a razão x/y é igual a:

(a) $\sqrt{6}/4$.
(b) $3/2$.
(c) $\sqrt{3}/4$.
(d) $\sqrt[4]{3}/2$.

Exercício 9.40 (ENEM 2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 metros, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100\,\mathrm{m}^2$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada. Utilize 3 como aproximação para π. A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

(a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21\,\mathrm{m}^2$.
(b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24\,\mathrm{m}^2$.
(c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48\,\mathrm{m}^2$.
(d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108\,\mathrm{m}^2$
(e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120\,\mathrm{m}^2$.

Exercício 9.41 A área quadrada de um sítio deve ser dividida em quatro partes iguais, também quadradas, e, em uma delas, deverá ser mantida uma reserva de mata nativa (área hachurada), conforme mostra a Figura 9.21. Sabendo-se que B é o ponto médio do segmento AE e C é o ponto médio do segmento EF. Quanto mede área hachurada, em metros quadrados?

(a) 625,0.
(b) 925,5.
(c) 1562,5.
(d) 2500,0.

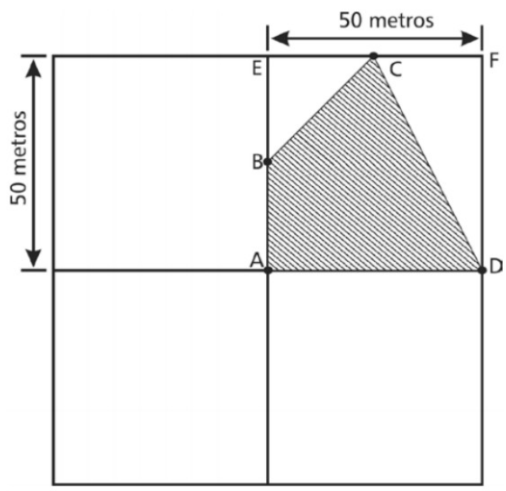
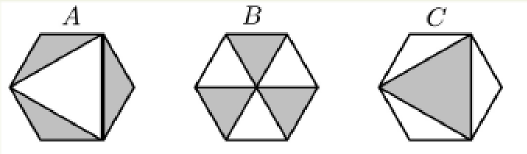


Figura 9.21

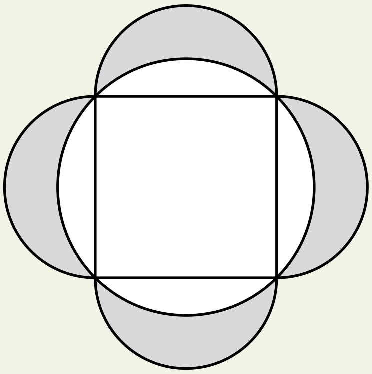
Exercício 9.42 (CANGURU DA MATEMÁTICA – 2018) Chamamos X, Y e Z as áreas em cinza nos hexágonos regulares iguais A, B e C, respectivamente, na figura abaixo. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



(a) $X = Y = Z$.
(b) $X = Y \neq Z$.
(c) $X = Z \neq Y$.
(d) $Y = Z \neq X$.
(e) As três áreas são diferentes.

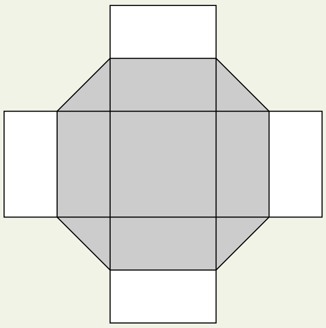
Nível 4

Exercício 9.43 (UFPE 96) Num círculo, inscreve-se um quadrado de lado 7 cm. Sobre cada lado do quadrado, considera-se a semicircunferência exterior ao quadrado com centro no ponto médio do lado e raio 3,5 cm, como na figura a seguir. Calcule a área da região sombreada.

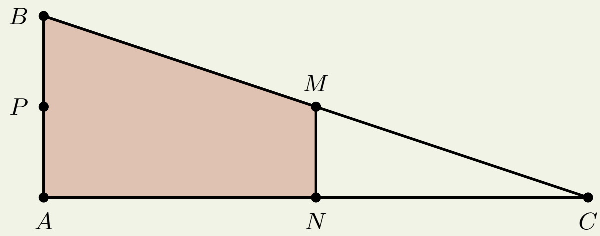


Exercício 9.44 (OBMEP-2006) Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm^2, qual é a área do polígono sombreado em centímetros quadrados?

(a) 2,0.
(b) 2,5.
(c) 3,0.
(d) 3,5.
(e) 4,0.



Exercício 9.45 (ENEM 2010 - adaptada) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros, mostrado na figura, foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Assinale a alternativa correta.

(a) a área a ser calçada corresponde à mesma área do triângulo AMC.
(b) a área a ser calçada corresponde à mesma área do triângulo BNC.
(c) a área a ser calçada corresponde à metade da área formada pelo triângulo ABC.
(d) a área a ser calçada corresponde ao dobro da área do triângulo MNC.
(e) a área a ser calçada corresponde ao triplo da área do triângulo MNC.

Exercício 9.46 (UNESP) Uma casa tem um cômodo retangular de 5 metros de comprimento por 4 metros de largura e 3 metros de altura. O cômodo tem uma porta de 0,9 metro de largura por 2 metros de altura e uma janela de 1,8 metro de largura por 1 metro de altura. Pretende-se pintar suas paredes e o teto. A porta e a janela não serão pintadas. A tinta escolhida pode ser comprada em latas com três quantidades distintas: 1 litro, ao custo de R$ 12,00; 5 litros, ao custo de R$ 50,00 e 15 litros ao custo de R$ 140,00. Sabendo-se que o rendimento da tinta é de 1 litro para cada 6 metros quadrados, o menor custo possível é de

(a) R$ 118,00.
(b) R$ 124,00.
(c) R$ 130,00.
(d) R$ 140,00.
(e) R$ 144,00

Exercício 9.47 (CANGURU DA MATEMÁTICA – 2017) Seis perpendiculares foram desenhadas a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura. Que fração da área do triângulo é a área do hexágono cinzento delimitado por essas perpendiculares?

(a) 1/3.
(b) 2/5.
(c) 4/9.
(d) 1/2.
(e) 2/3.