Material Estruturado

MATEMÁTICA

Módulo de Transição

Aritmética de Números Reais Volume 1

Racionais e irracionais
A reta real
Aproximações e arredondamentos

Autores:
Fabrício Siqueira Benevides

Revisor:
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B461m Benevides, Fabricio Siqueira
Módulo de transição: aritmética de números reais – volume 1 [recurso eletrônico] / Fabricio Siqueira Benevides, Antonio Caminha Muniz Neto. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43568-9(E-book)

1. Racionais. 2. Irracionais. 3. Reais. 4. Reta real. I. Benevides, Fabricio Siqueira . II. Muniz Neto, Antonio Caminha. III. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). IV. Título.

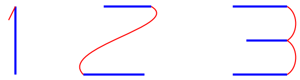
CDD: 510.07

3 Aritmética de Números Reais (A)

3.1 – Contando ou medindo

Nosso primeiro contato com números se dá através dos inteiros não negativos, aqui chamados de números naturais[1] (conjunto com símbolo $\mathbb{N}$).

Na língua portuguesa (assim como na maioria das línguas latinas), utilizamos os algarismos hindu-arábicos em um sistema posicional para representar quantidades. Os traçados dos três primeiros algarismos não nulos, 1, 2 e 3, trazem em si lembretes dos valores que eles representam.



Os números naturais respondem à pergunta "Quantos?". Por exemplo, quantos alunos há em sua turma? Quantas bananas você comeu hoje? (A resposta pode ser zero). Rapidamente surge a necessidade de realizar operações com os números naturais: somar, multiplicar, subtrair, dividir entre outras. Para as duas primeiras não há problema. Entretanto, ao realizar subtrações e divisões, mesmo partindo de inteiros positivos, o resultado pode ser um número negativo ou um número não inteiro, respectivamente. Isso dá origem ao conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, (que inclui os inteiros negativos, os positivos e o zero) e ao conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, que é formado por todas as frações de inteiros com denominador não nulo.

Denominador é o número escrito na parte de baixo de uma fração.

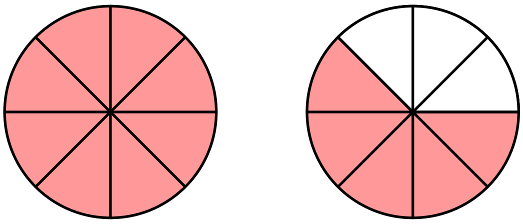
$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} && \text{(Naturais)}\\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{(Inteiros)}\\
&\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\} && \text{(Racionais)}
\end{aligned}$$

Os números racionais dão a oportunidade de contar partes (pedaços) de um todo, o que é a porta de entrada para o universo de medir. Contudo, o ato de medir é bem mais delicado e menos primitivo que o ato de contar. Medir responde à pergunta "o quanto" ou "o quão grande (ou pequeno)" é algo. Qual o comprimento do seu pé? Qual a massa de seu corpo? Quanto mede o comprimento de um círculo em comparação ao seu diâmetro? Qual a área da folha de seu caderno? E a do estado do Ceará? Quantas folhas de caderno são necessárias para cobrir todo o Ceará?

Exercício 3.1 Maria comprou duas pizzas de 8 pedaços para dividir com os amigos. Ao todo, foram comidos 13 pedaços. Qual a fração de uma pizza corresponde aos pedaços que sobraram?

[1] Alguns autores não consideram o número zero como um natural. Isso é uma mera convenção, mas é importante que autores, alunos e professores deixem suas escolhas claras para não causar confusão na comunicação das ideias.

Solução. A figura abaixo representa as duas pizzas divididas em 8 pedaços cada, onde os pedaços que foram comidos estão sombreados em vermelho. No total temos 16 pedaços dos quais 13 foram comidos. Assim, sobraram $16 - 13 = 3$ pedaços. Esses 3 pedaços correspondem a uma fração de $3/8$ de uma das pizzas.



■

Aprendemos com os antigos gregos que medir significa comparar com um padrão. No exercício acima consideramos como uma unidade a medida da área de uma pizza, e a fração calculada representa a proporção da área não comida de uma pizza. A base para a geometria quantitativa está na medição de comprimentos de segmentos de retas, chamados de intervalos, pois a partir destes são definidas outras grandezas, como áreas e volumes.

É preciso começar escolhendo uma unidade (seja um metro, um centímetro, um pé, um ano-luz, ou qualquer outra): um segmento padrão com o qual os demais serão comparados. A definição da unidade é essencial tanto para a medição em si quanto para a comunicação do resultado. É uma escolha importante do ponto de vista prático mas é arbitrária e, na verdade, não traz complicações teóricas (que irão surgir posteriormente, independentemente da unidade escolhida).

■ Exemplo 3.1 Se você já jogou futebol na rua sabe do que estamos falando. Ao montar o gol, medimos a distância entre as traves pela quantidade de pés (literalmente) que cabem nela. Pouco importa saber a medida do gol em metros, mas é claramente importante que “o mesmo pé” seja utilizado para medir ambos os gols. Você não quer que um dos gol tenha o comprimento de 10 pés de um jogador adulto e o outro tenha 10 pés de um menino de três anos de idade. Se você possuir uma régua ou uma fita métrica (trena), a medição torna-se mais precisa, diminuindo a margem de erro. A vantagem é que o comprimento de um metro em qualquer trena de boa qualidade é (praticamente) o mesmo, e ela também garante que a medida seja feita em linha reta. Para jogar futebol só precisamos da bola, sendo a trena dispensável. Mas para construir uma casa, por exemplo, a precisão de um instrumento de medição torna-se crucial.

Exercício 3.2 Se você e um de seus colegas possuírem mais de uma régua, tentem comparar os comprimentos de um centímetro entre elas. Você consegue notar alguma diferença? Use uma das réguas para medir a largura da folha de seu caderno. Peça para seu colega fazer o mesmo e compare os resultados. Vocês utilizaram o mesmo número de casas decimais? É possível calcular a medida com uma margem de erro menor que um milímetro?

Tendo escolhido a unidade, para efetuar uma medição devemos calcular a razão entre o que se quer medir e a unidade. Essa razão generaliza a noção de “quantas vezes” a unidade cabe dentro do intervalo a ser medido. Porém, essa quantidade claramente não precisa ser um número inteiro, daí a necessidade do uso dos números racionais.

Os racionais resolvem o problema do ponto vista prático, pois com eles já podemos medir qualquer segmento com uma precisão tão grande quanto se queira. Mas, surpreendentemente, o conjunto dos números racionais também não é suficiente para medir de forma exata todo seguimento! Daí, a "necessidade" do uso dos números reais.

Leitura complementar: a escolha do metro

Ao longo da história, diversas unidades de medida de comprimento (e de outras grandezas) foram utilizadas. Era muito comum usar as medidas do pé, da mão, do polegar ou do antebraço de um rei como padrão de medição. Contudo, a internacionalização do comércio tornou esse costume cada vez mais impraticável, já que diferentes nações adotavam diferentes unidades.

A ideia de criar um sistema de medidas coerente e de uso universal para as diversas grandezas é bastante antiga, de meados de 1585, mas só começou a ser colocada em prática durante o período da Revolução Francesa, mais precisamente em 1799. Nos Arquivos da República em Paris, foram depositados dois protótipos de platina-iridiada, que representam o metro e o quilograma, ainda hoje conservados no Escritório Internacional de Pesos e Medidas ("Bureau International des Poids et Mesures") na França.

Em 20 de maio de 1875, um tratado internacional conhecido como Convenção do Metro ("Convention du Mètre"), foi assinado por 17 Estados (nações). Este tratado estabeleceu organizações para conduzir as atividades internacionais para a criação um sistema uniforme de medidas, que viria a ser o Sistema Internacional de Unidades (SI). Hoje, apenas 3 das 203 nações mundiais não adotam oficialmente o SI: Mianmar, Libéria e Estados Unidos[2].

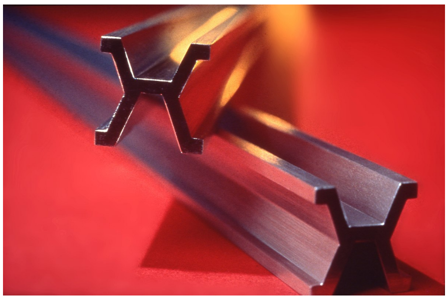


Figura 3.1: imagem da barra de um metro gerada por um computador. Fonte Wikimedia Commons, domínio público: link[3].

Em 1889, na primeira Conferência Internacional dos Pesos e Medidas, o comprimento exato (oficial) de um metro foi definido como o tamanho de uma barra específica, composta de 90% de platinum e 10% de iridium. A medida deveria ser tomada entre duas finas marcações no centro da barra, quando a mesma estivesse exposta à temperatura de congelamento da água (0 graus Celsius), visto que um objeto muda de comprimento ao ser exposto a diferentes temperaturas. O formato em X da seção da barra foi escolhido para melhorar a relação entre a rigidez e o peso da barra, melhorando sua acomodação térmica, e para que a medição fosse realizada no dorso central onde a mudança no

[2]Os Estados Unidos são o único país industrializado do mundo que rejeitam o uso do SI como o sistema predominante de medidas.

[3]https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platinum-Iridium_meter_bar.jpg

comprimento e a flexão da barra são minimizadas. Vinte e nove cópias idênticas da barra foram feitas ao mesmo tempo, calibradas e distribuídas a diferentes nações para servirem como padrões nacionais.

Essa medida, apesar de extremamente precisa, ainda poderia apresentar distorções, pois não há como garantir que o comprimento do objeto permaneça o mesmo ao longo de muitos anos. Por isso, entre 1960 e 1983, o SI passou a adotar uma nova definição: o metro era calculado em função do comprimento de onda da luz emitida por um átomo de Criptônio-86. Em 1983 foi estabelecida uma nova convenção, usada até hoje, em que o metro passa a ser igual à distância percorrida pela luz no vácuo, num período de 1/299.792.458 segundos.

Mais detalhes em https://en.wikipedia.org/wiki/Metre (em inglês) e https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades.

3.2 – A reta real

Após definir a unidade de comprimento, assume-se que todo e qualquer segmento possui uma medida.

> O conjunto de todos os números que representam a medida de um seguimento é o que chamamos de conjunto dos reais positivos.

A partir disso, é possível fazer uma correspondência entre os números reais (agora incluindo positivos e negativos) e os pontos de uma reta em que cada número corresponde a um único ponto e vice-versa, como segue. Em uma reta desenhada horizontalmente, escolha dois pontos distintos O e P, com P à direita de O (ver Figura 3.2). Identifique o ponto O com o número 0 e o ponto P como número 1 e defina o segmento OP como a unidade de comprimento. Isso estabelece uma orientação e uma escala para a reta. Vamos chamar essa reta de reta real. O ponto O é chamado de origem e divide a reta em duas metades (chamadas semirretas). A cada ponto X à direita de O (ou seja, do mesmo lado que P) fazemos corresponder o número real positivo x que representa o comprimento do segmento OX. Da mesma forma, a cada ponto Y à esquerda de O, fazemos corresponder o número $-y$ tal que y representa o comprimento de YO.

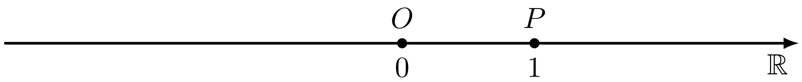


Figura 3.2: a reta real.

Para entender bem como se mede comprimentos, começamos com o caso mais fácil onde os comprimentos são números inteiros para depois tratar de comprimentos racionais não inteiros e, em seguida, discutir a existência dos números irracionais.

Seja ℓ o segmento que queremos medir e u um segmento unitário (ou seja, congruente[4] ao segmento OP da reta real). Conte quantas vezes u cabe em ℓ e obtenha um número inteiro não negativo (que pode ser zero), digamos m. Com muita sorte, as m cópias de u cobrirão ℓ de forma exata. Se isso acontecer,

[4] Dois segmentos são congruentes quando um pode ser colocado de forma exata sobre o outro por translação e rotação – ou seja, não sendo permitido esticar os segmentos.

dizemos que ℓ mede m unidades de comprimento, ou seja, $\ell = m\,u$, e que a razão entre ℓ e u é igual a m. Na Figura 3.3 temos um exemplo em que $m = 4$, ou seja, $\ell = 4u$.

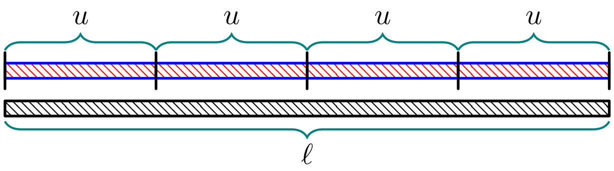


Figura 3.3: uma barra ℓ que mede 4 unidades de comprimento, já que sobre ℓ cabem exatamente 4 cópias de u.

Partindo da origem da reta real, já podemos marcar os pontos que correspondem a números inteiros, simplesmente dando saltos de comprimento 1 para a direita ou esquerda, conforme mostrado na figura a seguir:

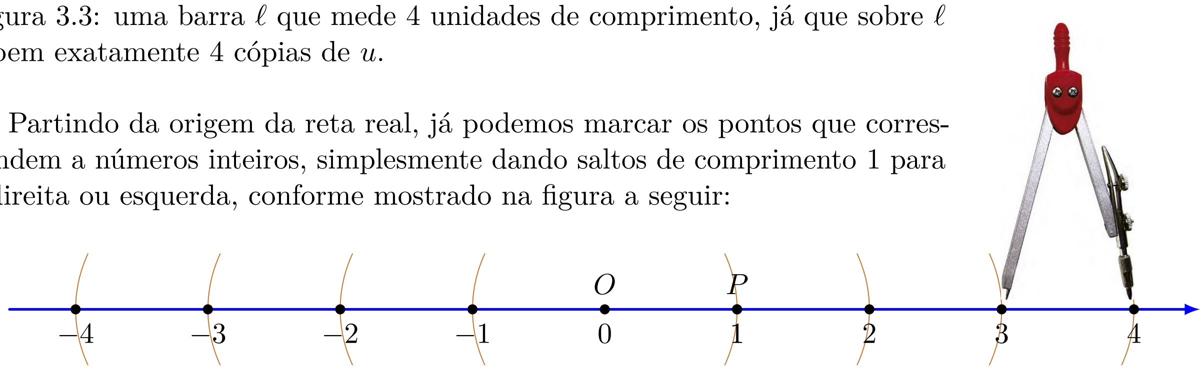
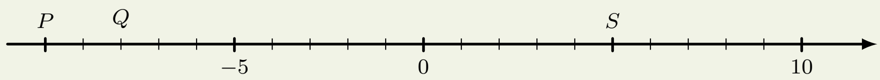


Figura 3.4: uma maneira prática e precisa de marcar números inteiros na reta real é utilizar um compasso. Fixe a abertura do compasso tomando por base o segmento OP; em seguida, use o compasso para marcar os pontos um a um, partindo de O em ambos os sentidos.

Exercício 3.3 — SPAECE–2015. Observe a reta numérica da figura abaixo, a qual está dividida em segmentos de mesmas medidas. Os números representados pelos pontos P, Q e S são, respectivamente:

(a) -11, -3 e 6.
(b) -11, -5 e 6.
(c) -10, -3 e 5.
(d) -10, -8 e 5.



Solução. O número -5 está na quinta marca à esquerda do 0 e o número 10 na décima marca à direita do 0. Assim cada segmento entre duas marcas consecutivas tem medida 1. Como P e Q estão situados na décima e oitava marcas à esquerda de 0 e S está na quinta marca à direita, os números que os representam são -10, -8 e 5, respectivamente. Portanto, a resposta é (d). ■

Exercício 3.4 — Prova Brasil - adaptado. Uma professora da 4ª série pediu a uma aluna que marcasse numa linha do tempo o ano de 1940. Admitindo que o segmento dado na Figura 3.5 está dividido em partes iguais e que cada segmento representa um mesmo intervalo de tempo, assinale a alternativa que corresponde ao ponto que a aluna deve marcar para acertar a tarefa pedida.

(a) A.
(b) B.
(c) C.
(d) D.

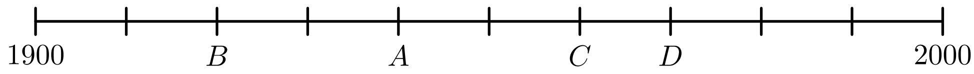


Figura 3.5: linha do tempo ao longo do século XX.

Solução. Admitamos que o segmento dado na Figura 3.5 está dividido em partes iguais (o que não foi dito explicitamente na questão) e que cada segmento representa um mesmo intervalo de tempo (o que também não foi dito no enunciado). Contando o número de partes, vemos que os 100 anos correspondentes ao intervalo entre 1900 e 2000 foram divididos em 10 partes iguais, ou seja, 10 décadas. Dessa forma, o ponto que corresponde ao ano de 1940 deve estar na quarta marca depois de 1900, isto é, deve ser o ponto A. ■

3.2.1 – Marcando pontos racionais na reta real

Quase sempre, porém, ao tentar medir um segmento ℓ, a última cópia da unidade u não caberá perfeitamente dentro de ℓ, como ocorre no caso mostrado na Figura 3.6. Quando isso ocorrer, dividimos a unidade em pedaços menores (subunidades) de mesmo comprimento e contamos quantos destes cabem na última seção.

No sistema decimal, a unidade é dividida em 10 subunidades. Contudo, para a representação fracionária, podemos dividir a unidade em tantos pedaços quanto acharmos conveniente.

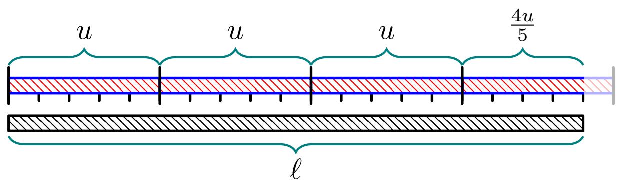


Figura 3.6: uma barra ℓ que mede 19/5 unidades de comprimento.

No exemplo da Figura 3.6, conseguimos encaixar três barras unitárias completas na barra ℓ. Porém, ao adicionarmos a quarta barra unitária, o comprimento total ultrapassa o de ℓ. Para cobrir a última seção, conseguimos dividir a barra unitária em cinco partes iguais e encaixar exatamente quatro dessas partes. Logo a medida de ℓ corresponde a $3 + \frac{4}{5}$ unidades, ou seja, $\frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$ (também podemos contar, diretamente na figura, que há 19 pedaços de comprimento $\frac{1}{5}$). Pensando de outra forma, conseguimos encontrar um segmento p que cabe exatamente 5 vezes dentro do segmento unitário e 19 vezes dentro da barra ℓ. Logo, $u = 5p$ e $\ell = 19p$, o que também implica $\ell = \frac{19}{5}u$.

Com esse entendimento, podemos marcar sobre a reta real qualquer ponto que corresponde a um número racional. Por exemplo, para marcar o ponto $\frac{9}{4}$ devemos dividir o segmento unitário em 4 partes iguais e depois contar 9 dessas partes, movendo-se para a direita (pois $\frac{9}{4}$ é positivo).

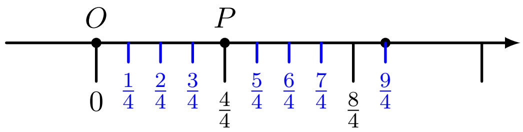
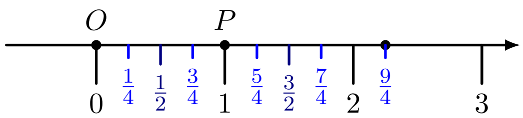


Figura 3.7: o ponto 9/4 sobre a reta real.

Também é permitido simplificar as frações, para tonar a leitura mais fácil. Por exemplo, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{8}{4} = 2$ e $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Partindo de O, para chegar no ponto $\frac{9}{4}$ andamos 2 unidades para a direita seguidas de $\frac{1}{4}$. Isso nos mostra geometricamente que $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$.



Exercício 3.5 Marque sobre a reta real todos os números da forma $\frac{m}{2}$ onde m é um inteiro que satisfaz $-6 \leq m \leq 6$.

Solução. Devemos dividir o segmento unitário em duas partes iguais (ou seja, ao meio), a fim de marcar o número $\frac{1}{2}$ sobre a reta. Em seguida, marcamos os múltiplos positivos e negativos desta subunidade para a direita e para a esquerda da origem, respectivamente, como na Figura 3.8. Como $-6 \leq m \leq 6$ temos 6 múltiplos de $1/2$ para cada lado. Em tal figura, quando o resultado da divisão $m/2$ é um inteiro, resolvemos por anotar apenas o resultado dessa divisão (por exemplo, escrevemos 1 no lugar de $\frac{2}{2}$, escrevemos 2 no lugar de $\frac{4}{2}$, etc), e usamos "marcas" maiores para os números inteiros (isso não é obrigatório, mas facilita bastante a leitura e interpretação da figura). ■

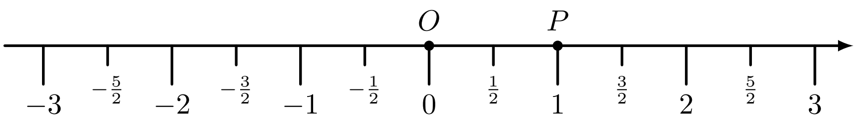
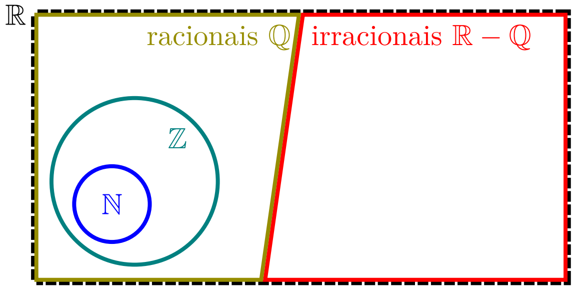


Figura 3.8: a reta real com números da forma $\frac{m}{2}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, marcados.

3.3 – A existência dos irracionais

Surpreendentemente, se marcarmos sobre a reta real todos os pontos correspondentes ao racionais ainda sobraram infinitos pontos não marcados. Estes pontos formam o conjunto dos números irracionais, ou seja, aqueles que não podem ser escritos como uma fração de inteiros.



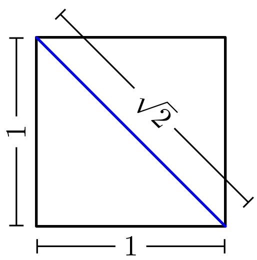
Lembre-se: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

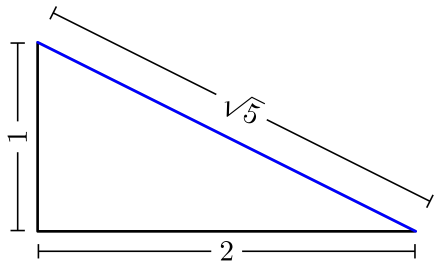
São números reais: todos os números racionais (incluindo os inteiros) e os irracionais. Eles podem ser positivos, negativos ou zero.
Não são números reais: números que não "cabem" na reta real, tais como os números complexos (por exemplo, raiz quadrada de -1); e o infinito (que não é considerado um número).

Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π são exemplos de irracionais. Esses números são reais positivos, pois existem segmentos com esses comprimentos. Por exemplo, $\sqrt{2}$ significa um número cujo quadrado é igual a 2. Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$. De fato, se d é tal comprimento, aplicado Pitágoras ao triângulo retângulo formado por dois lados e uma diagonal deste quadrado, temos (a soma dos quadrados dos catetos é o quadrado da hipotenusa):

$$1^2 + 1^2 = d^2 \implies 2 = d^2 \implies d = \sqrt{2} \;\; (\text{pois } d > 0).$$

Da mesma forma, $\sqrt{5}$ significa um número cujo quadrado é igual a 5 e é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos iguais a 1 e 2.





Por fim, π é a razão entre o perímetro de qualquer círculo e seu diâmetro (veja a Seção 3.7). Tomando um círculo de diâmetro 1 e "esticando" seu perímetro, obtemos um segmento de comprimento π.

■ **Exemplo 3.2** Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional. A demonstração deste fato é um tipo de prova chamada de redução ao absurdo! Em poucas palavras, a estratégia é a seguinte: vamos considerar a possibilidade de $\sqrt{2}$ ser racional, com o objetivo de concluir que isso é impossível. Então, como $\sqrt{2}$ é um número que não é racional, ele deve ser irracional.

Suponhamos, pois, que $\sqrt{2}$ é racional, de sorte que existem naturais a e b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Podemos supor que a/b é uma fração irredutível, ou seja, em que a e b não possuem fatores primos em comum. Em particular, no máximo um dos naturais a e b é par (caso contrário, poderíamos dividir ambos por 2, simplificando a fração). Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2.$$

Como $2b^2$ é múltiplo de 2, ele é um número par. Logo, a^2 é par. Como o quadrado de um número ímpar é ímpar e o quadrado de um par é par, segue daí que a é par. Assim, existe um natural k tal que $a = 2k$. Substituindo na equação anterior, temos:

$$2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2.$$

Agora, como $2k^2$ é par, segue que, b^2 é par. Da mesma forma que acima, temos que b é par. Mas isso é impossível, pois no máximo um dentre a e b poderia ser par.

Nesse ponto (e como já frisamos), sendo impossível que $\sqrt{2}$ seja racional, só resta a outra possibilidade: $\sqrt{2}$ é irracional.

> Exercício 3.6 Use a ideia acima para mostrar que $\sqrt{5}$ é irracional. (Sugestão: supondo, por redução ao absurdo, que $\sqrt{5} = a/b$, com a e b naturais, ao invés de considerar as possibilidades de a ou b serem números pares ou ímpares, considere as possibilidades de a ou b serem ou não múltiplos de 5.)

De modo geral, é possível mostrar que, para qualquer primo p, o número $\sqrt{p}$ é irracional.

Voltando à discussão sobre $\sqrt{2}$, se multiplicarmos $\sqrt{2}$ por qualquer racional não nulo, o resultado continua irracional. De fato, se $r \neq 0$ é um racional e $r\sqrt{2}$ também fosse racional, teríamos que $r = \frac{a}{b}$ e que $r\sqrt{2} = \frac{c}{d}$ onde a, b, c, d são inteiros. Logo,

$$\frac{a}{b}\sqrt{2} = \frac{c}{d} \implies \sqrt{2} = \frac{bc}{ad}.$$

Mas, como bc e ad são inteiros, teríamos que $\sqrt{2}$ seria racional. Ora, sabemos que isso não é verdade! Logo, é impossível que $r\sqrt{2}$ seja racional para r racional não nulo.

A correspondência

$$r \in \mathbb{Q}^* \longmapsto r\sqrt{2}$$

garante que para cada número racional não nulo existe pelo menos outro número, este irracional, de forma que racionais não nulos distintos correspondem a irracionais distintos (realmente, $r\sqrt{2} = s\sqrt{2} \Rightarrow r = s$). Assim, o conjunto dos irracionais é infinito. Evidentemente, todos eles ainda são reais, pois seus módulos representam medidas de segmentos. Em 1881, Georg Cantor demonstrou que o infinito que descreve os irracionais é, na verdade, maior que o infinito dos racionais. Ou seja, surpreendentemente, há infinitos que são maiores do que outros! Mas isso é assunto para algum outro dia.

3.3.1 – Segmentos incomensuráveis (aprofundamento)

A leitura desta seção é opcional. Faremos uma bela demonstração geométrica da existência de segmentos incomensuráveis.

Dois segmentos quaisquer, por exemplo, ℓ e u, são ditos comensuráveis quando existir um segmento p que caiba exatamente uma quantidade inteira de vezes tanto em ℓ como em u (como na Seção 3.2.1). Isso equivale a dizer que a razão entre os dois segmentos é um número racional positivo. Os segmentos são ditos incomensuráveis quando um tal segmento menor, p, não existir. A medida de um segmento incomensurável ao segmento unitário é um número irracional positivo.

A descoberta da existência de pares de segmentos incomensuráveis causou grande transtorno na Grécia antiga. Um dos discípulos de Pitágoras, chamado Hippasus, construiu os primeiros exemplos de pares de segmentos incomensuráveis. Essa descoberta, segundo o autor Hsiang [Hsi95], foi um dos grandes marcos do conhecimento humano. Porém, ameaçava a credibilidade da escola pitagórica, tornando incompletas a maioria das demonstrações de importantes resultados anteriores (pondo inclusive o famoso Teorema de Pitágoras sob suspeita). A escola decidiu por manter a informação (da existência dos incomensuráveis) em segredo, porém, Hippasus não se conteve e divulgou seus resultados. Por conta disso, ele foi condenado à morte. Vejamos o que ele fez.

O pentágono é apenas uma motivação. Você poderia começar com o triângulo ABC isósceles que possui ângulos 108°, 36° e 36°, definido em seguida.

Observe um pentágono regular de lado 1 e trace uma de suas diagonais. Vamos mostrar que a diagonal e o lado são incomensuráveis. A Figura 3.9 mostra o pentágono e uma ampliação do triângulo ABC no qual estamos interessados. Ele tem lados AB e AC de medida 1 e um lado AC de medida x, correspondente à diagonal do pentágono.

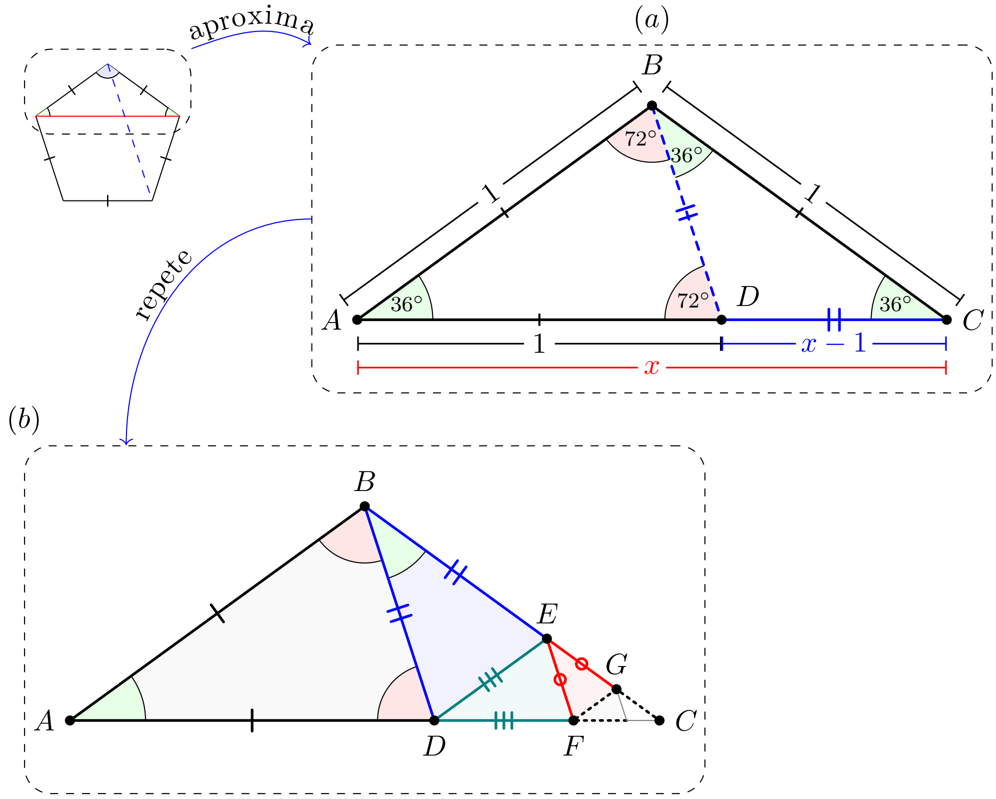


Figura 3.9: (a) um triângulo formado por dois lados consecutivos de um pentágono regular e a diagonal entre seus extremos; (b) repetindo a construção várias vezes.

Digamos que existisse uma (pequena) subunidade p que coubesse uma quantidade inteira de vezes tanto em AB quanto em AC. Seja D o ponto sobre AC tal que o comprimento de AD é igual ao de AB. Consequentemente p cabe uma quantidade inteira de vezes em AD e em BC, logo ele também deve caber uma quantidade inteira de vezes em DC.

É possível calcular os ângulos indicados na Figura 3.9, bastando lembrar que o ângulo interno de um pentágono regular mede $108°$ e que em todo triângulo isósceles os ângulos da base possuem uma mesma medida. O ponto crucial é que o triângulo BCD é semelhante ao triângulo original, ABC, pois eles possuem os mesmos ângulos. Então, podemos repetir esse processo infinitas vezes, obtendo triângulos cada vez menores, sempre semelhantes ao original. A Figura 3.9-(b), mostra os quatro primeiros passos desse processo, após os quais chegamos ao triângulo CFG, semelhante a ABC. Pela construção, todos os lados de cada um desses triângulos devem ter comprimentos iguais a múltiplos inteiros de p. Isso é impossível, pois, após repetir esse processo muitas vezes, os comprimentos dos lados do triângulo obtido serão menores que p, não importa o valor inicialmente escolhido para p.

Um triângulo isósceles é aquele que possui dois lados congruentes. Nesse caso, a base é o lado que sobra.

A conclusão é que é impossível obter um valor de p que satisfaça a hipótese inicial de comensurabilidade dos segmentos AB e AC. Logo, os segmentos AB e AC são incomensuráveis. Isso terminar o que queríamos provar.

> Exercício 3.7 Partindo de ABC, use um compasso para construir os pontos D, E, F, etc.

Para os curiosos, podemos calcular quando vale a medida x de AC em termos da medida 1 de AB, usando que ABC e BCD são semelhantes:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{CD} \implies \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \implies x^2 - x = 1.$$

Resolvendo a equação de segundo grau $x^2 - x - 1 = 0$ e levando em conta que $x > 0$ (por ser o comprimento de um segmento), obtemos $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esse número é aproximadamente igual a 1,618 e é conhecido como a razão áurea ou proporção áurea. Ele é encontrado inúmeras vezes na Natureza, e de formas surpreendentes. Veja https://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção_áurea.

A consequência fundamental da discussão acima é que o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ não é racional (caso fosse, o segmento AC seria comensurável à unidade). Por sua vez, isso também no dá uma maneira alternativa de mostrar que o próprio número $\sqrt{5}$ é irracional. Caso contrário, se $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros, teríamos

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+(a/b)}{2} = \frac{b+a}{2a},$$

também um racional, o que não é verdade.

3.4 – Números reais e suas representações decimais

Para continuar estudando o conjunto dos reais é importante perceber que:

> Um mesmo número pode ser representado de várias maneiras diferentes.

A representação decimal, que faz uso dos algarismos $0, 1, \dots, 9$, é apenas uma delas. Por exemplo, o número dois pode ser representado pela própria palavra “dois” em Português, pela palavra “two” em Inglês, pelo algarismo 2 no sistema decimal, pelo símbolo II em algarismos romanos, por 二 no Kanji (caracteres de Japonês), etc. Contudo, o conceito que esse número representa é universal.

Exercício 3.8 Pense em outras representações do número 2 que não foram mencionadas no parágrafo acima.

Solução. Outras maneiras são: a fração $\frac{2}{1}$, a imagem de um segmento cujo comprimento é 2 vezes o segmento unitário, uma figura contendo dois pontos. ■

Vimos que um número é racional quando ele é o resultado da divisão de um inteiro por um inteiro não nulo, sendo, portanto, representado por uma fração. E os demais reais são os irracionais.

Nesta seção, vamos classificar os racionais e o irracionais, de acordo com sua representação decimal.

Ao convertermos uma fração para sua representação decimal, é possível demonstrar que há apenas duas possibilidades:
(i) o resultado tem uma quantidade finita de casas decimais não nulas, por exemplo,

$$\frac{79}{10} = 7{,}9 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

(ii) o resultado tem uma quantidade infinita de casas decimais não nulas, mas contém um trecho finito de algarismos que se repete indefinidamente, tais como:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \quad \text{e} \quad \frac{1424}{990} = 1{,}4383838\ldots.$$

(Os cálculos acima podem ser confirmados por meio de uma calculadora).

Os dois últimos exemplos acima são chamados de dízimas periódicas. A parte que se repete é chamada de parte periódica (o “3” e o “38” nos exemplos). A parte que fica à direita da vírgula e não compõe o período, quando existir, é chamada de anteperíodo ou parte não periódica. Se a dízima não possui anteperíodo, dizemos que ela é uma dízima periódica simples (como o $0{,}333\ldots$); caso contrário, isto é, se a dízima possui uma parte decimal não periódica, dizemos que é uma dízima periódica composta (no caso do $1{,}4383838\ldots$, o anteperíodo é o 4).

A parte que vem à esquerda da vírgula é chamada de parte inteira e não costuma ser considerada como parte do período ou anteperíodo.

Como veremos, todos os números indicados acima são racionais. Assim, os números irracionais são aqueles que não se enquadram em nenhum dos casos acima: possuem representação decimal infinita e que não podem ser representados por dízimas periódicas.

Primeiramente, considere o caso em que o número de casas decimais é finito. Por exemplo, o número 34,739. Este número pode ser escrito facilmente como fração, já que

$$34{,}739 = \frac{34739}{1000}.$$

Em geral, para converter um número deste tipo em fração, basta lembrar que na representação decimal, multiplicar por 10 tem o efeito de mover a vírgula uma casa para a direita; multiplicar por 100 move a vírgula 2 casas, por 1000 a move 3 casas e assim pode diante. Como estamos considerando um número que tem uma quantidade finita de casas decimais não nulas, basta tomar uma potência de 10 que tem tantos zeros quantas são as casas decimais do número original. Essa potência é utilizada no denominador enquanto que no numerado colocamos o produto desta potência pelo número original. Logo, todo número com uma quantidade finita de casas decimais não nulas é racional.

3.5 – Convertendo dízimas em frações

Agora, vejamos como representar dízimas periódicas como frações, à partir de alguns exemplos. Observe a dízima $d = 0{,}666\ldots$. Como de costume, escrevemos o período três vezes, seguido das reticências, para indicar que ele se repete indefinidamente. Mas a quantidade de vezes que o algarismo seis realmente aparece é infinita. Assim, também podemos escrever

$$d = 0{,}666\ldots = 0{,}6666\ldots = 0{,}66666\ldots \quad \text{e assim por diante.}$$

Ao multiplicar d por 10 obtemos

$$10d = 6{,}666\ldots.$$

Dessa forma, “ganhamos” um algarismo 6 à esquerda da vírgula, mas não perdemos nenhum algarismo à direita, já que continuam existindo infinitos deles. Agora, quando subtraímos d de $10d$, toda a parte não inteira se anula:

A remoção de um elemento de um conjunto infinito não altera o fato dele ser infinito. Essa é a principal distinção entre conjuntos finitos e infinitos.

$$10d - d = 6{,}666\ldots - 0{,}666\ldots = 6.$$

Dessa maneira, concluímos que

$$9d = 6 \implies d = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Acabamos de mostrar que $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$. Outra maneira de verificar isso é executando o algoritmo da divisão para dividir 2 por 3; o processo continua indefinidamente, pois o quociente em cada passo sempre é igual a 6 e o resto é sempre igual a 2:

$$\begin{array}{r|l}
2 & 3 \\ \cline{2-2}
20 & 0{,}66\ldots \\
-18 & \\ \hline
20 & \\
-18 & \\ \hline
20 & \\
\vdots &
\end{array}$$

A fração $2/3$ é chamada de fração geratriz da dízima $0{,}666\ldots$.

Exercício 3.9 Mostre como converter a dízima periódica de cada item para a forma fracionária.

(a) $t = 0{,}616161\ldots$.
(b) $s = 2{,}473333\ldots$

Solução. (a) Temos uma dízima simples cujo período, 61, possui dois algarismos. Vamos multiplicar t por 100 para que a vírgula seja movida para logo após o primeiro período.

$$\begin{aligned} 100t &= 61{,}6161\ldots \\ t &= 0{,}616161\ldots. \end{aligned}$$

Logo, $100t - t = 61 \implies 99t = 61 \implies t = \frac{61}{99}$.

(b) Esta dizima possui parte inteira 2, anteperíodo 47 e período 3. O truque é fazer duas multiplicações, uma para colocar a vírgula logo antes do período e outra para colocá-la logo depois. Temos que:

$$\begin{aligned} 100s &= \ \ 247{,}3333\ldots \\ 1000s &= 2473{,}333\ldots \end{aligned}$$

Neste exemplo, já que o número 3 se repete infinitas vezes, mesmo deslocando uma das cópias do "3" da direita para a esquerda da vírgula, a expressão à direita da vírgula nos dois últimos números permanece a mesma. Agora, basta subtrair o primeiro número do segundo para que as partes não inteiras se anulem:

$$\begin{aligned} 1000s - 100s &= 2473{,}333\ldots - 247{,}3333\ldots \implies \\ (1000-100)s &= 2473 - 247 \implies \\ 900s &= 2226. \end{aligned}$$

Logo,

$$s = \frac{2226}{900}.$$

■

O número $0{,}999\ldots$

A dízima $0{,}999\ldots$ é muito importante. Se chamarmos esse número de n e seguirmos os passos da subseção anterior, teremos que:

$$\begin{aligned} 10n &= 9{,}999\ldots \\ n &= 0{,}999\ldots. \end{aligned}$$

Logo,

$$10n - n = 9{,}999\ldots - 0{,}999\ldots = 9 \implies 9n = 9 \implies n = 1.$$

Isso mesmo, $0{,}999\ldots = 1$. Pelo fato de termos usado infinitos algarismos iguais a 9 o resultado é exatamente igual a 1. Se interrompêssemos os algarismos em qualquer instante, por exemplo, 0,99 ou 0,999 ou 0,999999, o resultado obtido seria aproximadamente 1, mas diferente de 1. Porém, quando usamos infinitos 9s, não apenas chegamos perto de 1, mas obtemos um número que é exatamente igual a 1. O infinito é realmente muito interessante. Pelo mesmo motivo, $0{,}1999\ldots = 0{,}2$.

O argumento aqui é o mesmo utilizado na seção do grilo binário: não é possível que $0{,}999\ldots$ seja igual a qualquer outra coisa diferente de 1.

Ao trabalhar com dízimas é sempre mais conveniente convertê-las a frações. Às vezes, isso pode ser evitado. Por exemplo, é bastante claro que $2 \cdot 0{,}444\ldots = 0{,}888\ldots$. Porém, não é muito óbvio como calcular $2 \cdot 0{,}666\ldots$. Não é claro o que deve ser feito com o "vai um" ao realizar uma soma infinita. Esse problema pode ser evitado convertendo a dízima para frações. Por exemplo,

$$2 \cdot 0{,}666\ldots = 2 \cdot \frac{6}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1{,}333\ldots.$$

Exercício 3.10 Calcule o resultado da divisão a seguir:

$$\frac{6{,}444\ldots}{1{,}222\ldots}.$$

Solução. Inicialmente, temos

$$6{,}444\ldots = 6 + 0{,}444\ldots = 6 + \frac{4}{9} = \frac{58}{9}$$

e

$$1{,}222\ldots = 1 + 0{,}222\ldots = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}.$$

Logo,

$$\frac{6{,}444\ldots}{1{,}222\ldots} = \frac{58/9}{11/9} = \frac{58}{11} = \frac{522}{99} = 5{,}272727\ldots.$$

■

Fórmula geral para obter a fração geratriz

Apesar do título acima, lhe encorajamos a não decorar uma fórmula para o cálculo de frações geratrizes. Uma atitude muito melhor é, sempre que houver necessidade de calcular uma geratriz, aplicar o método discutido nos exemplos acima, que é prático, rápido e evita erros. Antes de prosseguir com a leitura, também lhe encorajamos a transformar outras dízimas em frações geratrizes e, ao fazê-lo, tentar descobrir por si só um padrão nos resultados Uma dica: o numerador será uma "combinação" do anteperíodo com o período e o denominador será uma sequência de 9's e 0's. Se você conseguir descobrir sozinho um padrão válido para todas as transformações de dízimas e geratrizes, confira seu resultado com o restante dessa seção.

A propósito, fazer matemática é, em grande medida, tentar descobrir padrões e, posteriormente, justificá-los.

A fração geratriz de uma dízima periótica cuja parte inteira é igual a zero é da forma:

$$\frac{(\text{Anteperíodo com período}) - (\text{anteperíodo})}{9\ldots 9 0\ldots 0},$$

onde a quantidade de 9's é igual à quantidade de algarismos do período e a quantidade de 0's é igual à quantidade de algarismos do anteperíodo.

Por exemplo, observe a dízima $0{,}213424242\ldots$. Seu anteperíodo é 213, que possui três algarismos, e seu período é 42, com dois algarismos. Logo, sua fração geratriz é:

$$\frac{21342 - 213}{99000} = \frac{21129}{99000}.$$

Por fim, caso a dízima tenha uma parte inteira, basta somar essa parte inteira à fração geratriz da parte não inteira. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 7{,}3444\ldots = 7 + 0{,}3444\ldots &= \\ &= 7 + \frac{34-3}{90} = 7 + \frac{31}{90} \\ &= \frac{90 \cdot 7 + 31}{90} = \frac{661}{90}. \end{aligned}$$

Cuidado com dízimas negativas! Por exemplo,

$$-1{,}333\ldots = -1 - 0{,}333\ldots = -1 - \frac{3}{9} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}.$$

Um erro comum seria escrever $-1 + 0{,}333...$, que não é igual a $-1{,}333\ldots$. De fato, $-1 + 0{,}333\ldots = -0{,}666\ldots$.

3.6 – Aproximações de números irracionais

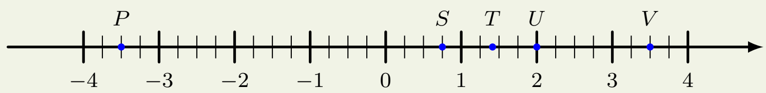
Nas seções anteriores, aprendemos que existem números irracionais e que a representação decimal desses números é obrigatoriamente infinita e não apresenta um período que se repete. Dessa forma, se utilizarmos apenas as representações decimais, é impossível descrever de forma exata um número irracional.

Mas às vezes é conveniente utilizar a representação decimal de um irracional. Por exemplo, para trabalhar com calculadoras (ou computadores em geral) ou para ter uma melhor noção do quão grande é o número. Neste caso, precisamos utilizar uma aproximação do número desejado.

Por exemplo, utilizando cinco casas decimais corretas, podemos aproximar os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π por: $\sqrt{2} \cong 1{,}41421$, $\sqrt{5} \cong 2{,}23606$ e $\pi \cong 3{,}14159$. (O símbolo $\cong$ deve ser lido como "é aproximadamente"). De início, isso pode ser obtido com o auxílio de uma calculadora.

Exercício 3.11 Observe a reta numérica da figura abaixo, a qual se encontra dividida em segmentos de mesmas medidas. Responda cada um dos itens a seguir:

(a) Qual ponto marcado na reta corresponde ao número real $3/4$?
(b) Qual ponto marcado na reta mais se aproxima do número $\sqrt{2}$?



Solução. (a) Veja que $3/4$ é o mesmo que a fração $\frac{3}{4}$ número racional obtido dividindo-se o segmento unitário em 4 pedaços e tomando-se 3 deles. Logo, está entre 0 e 1 (veja o curso Interagindo com Números). O único ponto marcado na figura que está entre 0 e 1 é o ponto S. Assim, essa deve ser a resposta correta. Mas vejamos em detalhes.

Temos marcados na escala os números inteiros de -4 a 4. Dessa forma, temos que cada segmento entre dois números inteiros consecutivos tem comprimento 1. Veja que cada um desses segmentos de comprimento 1 foi dividido, na figura, em 4 pequenos segmentos de mesmo comprimento. Assim cada um deles possui comprimento $1/4$. Para chegar ao número $3/4$ devemos andar, a partir do número zero e no sentido positivo, três vezes o segmento de comprimento $1/4$, parando sobre o ponto S.

(b) Veja que $1 < 2 < 4$, logo, $1 < \sqrt{2} < 2$. Assim, o ponto que melhor aproxima $\sqrt{2}$ deve estar entre os números 1 e 2 na reta numérica. O único ponto demarcado nesse intervalo na figura do enunciado é o ponto T. Veja que $\sqrt{2}$ é um número irracional, de modo que ele não possui uma representação decimal com um quantidade finita de algarismos. Mas podemos obter aproximações melhores do que a acima. Por exemplo, sabemos que $(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2$, logo, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Isso condiz com a posição do ponto T, que está um pouco à esquerda da marca correspondente ao valor 1,5. Observação: com o auxílio de uma calculadora, podemos checar que $\sqrt{2}$ vale aproximadamente 1,414. ■

Obs Questões semelhantes ao Exercício 3.11 já fizeram parte de exames de avaliação do ensino. Estatísticas mostram que um erro extremamente comum para a resposta do item (a) é que o ponto V representa o número 3/4, por se tratar de um ponto que está entre 3 e 4. Isso mostra uma tendência de "chutar" respostas que parecem estar relacionadas aos números que aparecem no enunciado, sem compreender o significado desses números ou mesmo do enunciado do problema. Para não incorrer nesse erro, certifique-se de que você entendeu o significado do símbolo "/" no número "3/4".

Obs

É preciso tomar cuidado ao trabalhar número reais em calculadoras. O problema é que, por melhor que a calculadora seja, ela não é capaz de armazenar infinitos algarismos. Isso pode gerar erros inesperados, sendo especialmente preocupante quando é preciso fazer cálculos com números irracionais ou com dízimas periódicas.

Alguns sistemas computacionais conseguem entender que $\sqrt{2}$ é realmente a raiz quadrada de 2, de modo que, ao realizar o produto $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, obtemos exatamente 2. Contudo, se o computador salvar apenas uma aproximação decimal de $\sqrt{2}$, o produto dessa aproximação por ela própria pode resultar em um número diferente de 2, embora próximo de 2. Para complicar um pouco mais as coisas, alguns números que possuem representação decimal finita, quando convertidos para o sistema numérico de base 2 (usado em computadores), podem possuir representação infinita.

Em geral, trabalhar com números reais em um computador ao fazer aplicações científicas que requerem alta precisão sempre demanda mais cuidado do que trabalhar com números inteiros. Na maioria dos softwares, números reais são armazenados na memória de um computador codificados em uma representação chamada de "ponto flutuante" (lembra que existem muitas representações para um mesmo número?). Essa representação consegue armazenar desde números muito pequenos a números muitos grandes. Além disso, ela é bastante adequada para realizar somas entre dois números grandes ou entre dois números pequenos com alta precisão. No entanto, se somarmos um número grande com vários números pequenos, o erro de aproximação pode ser acumular e produzir um resultado que não condiz com a realidade. Esse efeito indesejado é algo que cientistas de dados devem aprender a controlar ao realizar simulações e outras experiências de programação em um computador.

3.7 – Coisas que você não sabia sobre π (aprofundamento)

Nesta seção, vamos comentar um pouco mais sobre o número π, supondo que você já ouviu falar nele. Se esse não for o caso, a seção pode ser omitida numa primeira leitura, sem prejuízo algum à continuidade do texto.

O número π é uma constante da Natureza e, apesar de seus algarismos parecerem aleatórios, só existe uma única sequência de algarismos que representa o valor exato de π. Porém, essa sequência é infinita e não possui um período. Uma aproximação de π por suas 22 primeiras casas decimais é:

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626\ldots$$

Existem fórmulas que podem ser usadas para calcular os primeiros algarismos de π. É possível escrever programas de computador que usam essas fórmulas para obter facilmente as 100 primeiras casas decimais de π, ou as 1000 primeiras, ou mesmo as 50.000 primeiras, desde que se tenha um computador rápido o bastante, com memória suficiente e tempo para esperar o programa terminar seus cálculos. As fórmulas podem ser obtidas em https://en.wikipedia.org/wiki/Pi e um exemplo de um programa em Python[5] que calcula π e várias outras constantes famosas pode ser visto em https://docs.python.org/3/library/decimal.html#recipes.

Em março de 2015, um jovem indiano, Rajveer Meena, bateu um recorde memorizando (de cabeça) mais de 70 mil casas decimais de π. Porém, mesmo a memória de um computador é finita, logo, nunca será possível armazenar todos os dígitos de π. O atual recorde foi obtido em março de 2019 por Emma Haruka Iwao, que conseguiu calcular os primeiros 31 trilhões de algarismos decimais de π. Precisaríamos de cerca de 9 bilhões de páginas desse texto para exibir todos eles (mais de uma página para cada habitante do planeta). Emma é funcionária do Google no Japão e utilizou equipamentos da companhia.

Na prática, o fato de não podermos calcular todas os (infinitos) algarismos de π não é um problema, uma vez que não é necessário conhecer muitos deles para trabalhar com π. E isso mesmo em aplicações científicas avançadas, que requerem cálculos muito precisos com números decimais! De acordo com os cosmologistas Jörg Arndt e Christoph Haenel, 39 casas decimais (menos de uma linha neste livro) já são suficientes para a maioria as aplicações, pois essa é a quantidade de casas necessárias para calcular a circunferência do Universo observável com precisão igual ao comprimento de um átomo. A vontade de encontrar mais algarismos vem apenas do desejo de quebrar recordes.

Mas como podemos ter certeza absoluta de que a sequência decimal de π não possui um período? E se ele possuir um período maior do que a quantidade de algarismos já calculados? Os matemáticos conseguem justificar que isso não ocorre utilizando as fórmulas existentes, sem a necessidade de conhecer os algarismos em si. Se você ficou curioso, para entender esse ponto, precisará aprender um pouco de Cálculo Diferencial e Integral, que é um disciplina do Ensino Universitário.

3.8 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 3.12 Marque as alternativas que correspondem a números racionais: (a) 1,5; (b) 7; (c) $\sqrt{5}$; (d) $-0{,}222\ldots$; (e) $80{,}1/129$; (f) 1,4241; (g) π.

Exercício 3.13 Marque cada afirmação como verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Todo número natural é inteiro?
(b) Todo número inteiro é natural?
(c) Todo número inteiro é racional?
(d) Todo número irracional é racional?
(e) Todo número inteiro é real?
(f) Todo número é real?

---

[5] Python é uma linguagem de programação bastante popular. Talvez você nem saiba, mas os programas de computador que fazem os modernos smartphones e seus aplicativos funcionarem são escritos em Python.

Exercício 3.14 — PUCCAMP 2000. Conside os conjuntos: $\mathbb{N}$ dos números naturais, $\mathbb{Q}$ dos números racionais, $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais não negativos e $\mathbb{R}$ dos números reais. O número que expressa:

(a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$, mas não de $\mathbb{N}$.
(b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.
(c) a velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$, mas não de $\mathbb{Q}_+$.
(d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.
(e) a medida do lado de um triangulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

Exercício 3.15 — UTF-PR 2012. Indique qual dos conjuntos abaixo é constituído somente de números racionais.

(a) $\{-1, 2, \sqrt{2}, \pi\}$.
(b) $\{-5, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{9}\}$.
(c) $\{-2, 0, \pi, \frac{2}{3}\}$.
(d) $\{\sqrt{3}, \sqrt{64}, \pi, \sqrt{2}\}$.
(e) $\{-1, 0, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\}$.

Nível 2

Exercício 3.16 Calcule a representação fracionária de cada uma das seguintes dízimas periódicas, admitindo que os padrões sugeridos realmente se mantêm:

(a) $0{,}010101\ldots$.
(b) $0{,}123123123\ldots$.
(c) $0{,}999\ldots$.

Exercício 3.17 — Prova Brasil–2011. Em uma corrida de rua, os corredores tinham que percorrer 3 km, entre uma escola e uma Igreja. Joaquim já percorreu 2,7 km, João percorreu 1,9 km, Marcos percorreu 2,4 km e Mateus percorreu 1,5 km. Qual corredor está representado pela letra L, na Figura 3.10?

(a) Mateus.
(b) Marcos.
(c) João.
(d) Joaquim.

Exercício 3.18 Calcule a representação decimal do número $22/7$. O resultado possui uma quantidade finita de casas decimais ou infinita de casas decimais? Caso ele seja uma dízima, indique seu período. Este número é conhecido com uma boa aproximação para π. Qual o erro na aproximação que se comete caso ele seja utilizado para representar π.

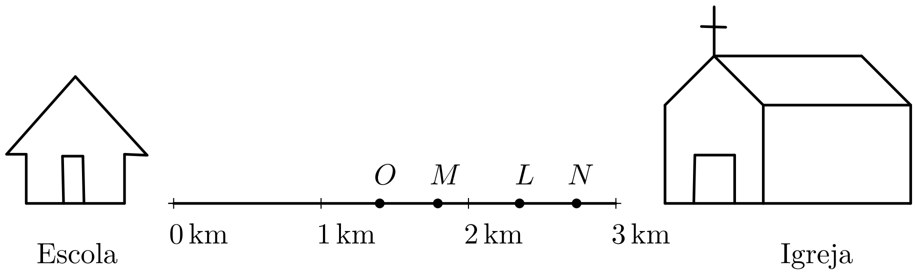


Figura 3.10: corredores ao longo do caminho entre a escola e a igreja.

Exercício 3.19 Explique porque as afimarções a seguir são falsas.

(a) A intersecção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais tem 1 elemento.
(b) A divisão de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

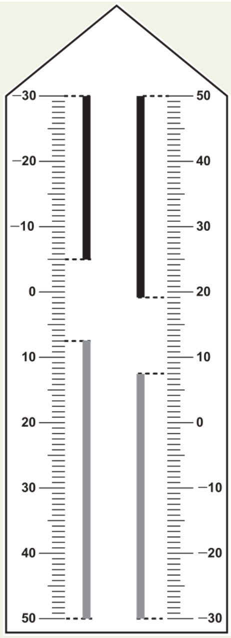
Nível 3

Exercício 3.20 Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 8\}$. Quais números reais estão na interseção dos conjuntos A e B, ou seja, pertencem ao dois conjuntos simultaneamente?

Exercício 3.21 — ENEM 2015. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3,021 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

(a) 2,099.
(b) 2,96.
(c) 3,021.
(d) 3,07.
(e) 3,10.

Exercício 3.22 — ENEM 2017. No modelo de termômetro da figura a seguir, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínima e máxima do dia anterior e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.



Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de $-30\,°\mathrm{C}$ até $50\,°\mathrm{C}$. Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de $-30\,°\mathrm{C}$ até $50\,°\mathrm{C}$.

A leitura é feita da seguinte maneira:

- a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda.
- a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita.
- a temperatura atual é indicada pelo nível superior nos filetes cinzas nas duas colunas.

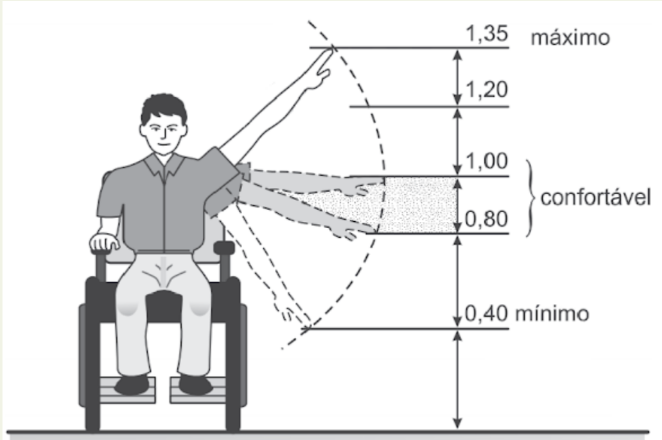
Qual é a temperatura máxima mais aproximada registrada nesse termômetro?

(a) $5\,°\mathrm{C}$.
(b) $7\,°\mathrm{C}$.
(c) $13\,°\mathrm{C}$.
(d) $15\,°\mathrm{C}$.
(e) $19\,°\mathrm{C}$.

Exercício 3.23 — PUC. Para $a = 2{,}01$, $b = 4{,}2$ e $c = 7/3$, temos:

(a) $a < b < c$.
(b) $b < c < a$.
(c) $c < b < a$.
(d) $c < a < b$.
(e) $b < a < c$.

Exercício 3.24 — ENEM 2012. Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas alerta o construtor para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é:

(a) 0,20 m e 1,45 m.
(b) 0,20 m e 1,40 m.
(c) 0,25 m e 1,35 m.
(d) 0,25 m e 1,30 m.
(e) 0,45 m e 1,20 m.

Nível 4

Exercício 3.25 — UEPG 2010 – adaptado. Em cada alternativa, assinale V para verdadeiro ou F para falso:

( ) O número real representado por 0,5222 . . . é um número racional.
( ) O quadrado de qualquer número irracional é um número racional.
( ) Se m e n são números irracionais, então mn pode ser racional.
( ) O número real $\sqrt{3}$ pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$.
( ) Toda raiz de uma equação algébrica de segundo grau é um número real.

Exercício 3.26 — PUC-RJ 2007. Os números m e n são tais que $4 \leq m \leq 8$ e $24 \leq n \leq 32$. O maior valor possível para m/n é:

(a) $1/2$.
(b) $1/3$.
(c) $1/6$.

(d) 1/5.
(e) 1/8.

Exercício 3.27 É verdade que o produto de dois números irracionais é sempre um irracional? Justifique sua resposta!

Exercício 3.28 — UFF 2010. Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), "Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem."

Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

(a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
(b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
(c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.
(d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
(e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

Exercício 3.29 — ENEM 2ª aplicação 2010. Para dificultar o trabalho de falsificadores, foi lançada uma nova família de cédulas do real. Com tamanho variável – quanto maior o valor, maior a nota – o dinheiro novo terá vários elementos de segurança. A estreia será entre abril e maio, quando começam a circular as notas de R$ 50,00 e R$ 100,00. As cédulas atuais têm 14 cm de comprimento e 6,5 cm de largura. A maior cédula será a de R$ 100,00, com 1,6 cm a mais no comprimento e 0,5 cm cm maior na largura. Quais serão as dimensões da nova nota de R$ 100,00?

(a) 15,6 cm de comprimento e 6 cm de largura.
(b) 15,6 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
(c) 15,6 cm de comprimento e 7 cm de largura.
(d) 15,9 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
(e) 15,9 cm de comprimento e 7 cm de largura.

Exercício 3.30 — EsPCEx 2006. Se x é racional e y é irracional, então (qual das afirmativas é a única verdadeira para quaisquer x e y):

(a) $x \cdot y$ é racional.
(b) $y \cdot y$ é irracional.
(c) $x + y$ é racional.
(d) $x - y + \sqrt{2}$ é irracional.
(e) $x + 2y$ é irracional.

Exercício 3.31 Para que valores reais de x a expressão abaixo não é um número real:

$$\frac{4x+1}{2x^2-8}?$$

Exercício 3.32 O número 0,112123123412345 . . . possui um padrão em suas casas decimais. No primeiro passo escrevemos o número 1, no segundo escrevemos os números 1 e 2, no terceiro 1, 2 e 3, e assim sucessivamente, sempre acrescentando os algarismos de todos os primeiros inteiros positivos em sua representação decimal (OBS: no décimo primeiro passo, serão adicionados os algarismos 12 . . . 91011.) Apesar de existir um padrão que descreve os algarismos da parte decimal desse número, ele é irracional! Justifique essa afirmação, explicando porque ele não pode ter um período, no sentido de dízimas.

Bibliografia

[Hsi95] Wu Yi Hsiang, A concise introduction to calculus, vol. 6, World Scientific, 1995. ↑10