MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

2022

4

Semelhanças, Razões e Proporções

Proporcionalidade e Semelhança
Razões e Proporções

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica
UFC/FUNCAP/SEDUC

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P644s Pimentel, Fernando Antônio Amaral
Semelhanças, razões e proporções [recurso eletrônico] / Fernando Antônio Amaral Pimentel, Romildo José da Silva. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43578-8 (E-book)

1. Relação de semelhança. 2. Perímetros. Relação de congruência.3. Escalas de mapas. 4. Critérios de semelhança de triângulos. I. Pimentel, Fernando Antônio Amara. II. Silva, Romildo José da. III. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). IV. Título.

CDD: 510.07

Sumário

1 A relação de Semelhança

Duas figuras são *semelhantes* quando têm a mesma *forma*, ou seja, uma das figuras é a redução, ampliação, ou reprodução da outra, como vemos abaixo[1], em que só as figuras de mesma cor são semelhantes.

Em uma redução, ampliação ou reprodução todas as distâncias são multiplicadas por um fator $r > 0$. Há redução quando $0 < r < 1$ e ampliação quando $r > 1$. Quando $r = 1$, uma figura é a reprodução da outra e elas são *congruentes*. Por si só, a multiplicação das distâncias por um mesmo fator r garante que a figura e sua redução, ampliação ou reprodução têm a mesma forma. De fato,

> Duas figuras são semelhantes quando existe um número positivo $r > 0$ (a *razão de semelhança*) e uma correspondência entre elas que leva cada ponto de uma figura em um ponto da outra figura tal que, se um par de pontos na primeira figura corresponde a um par de pontos na segunda figura, então
>
> $$\frac{\text{“Distância entre o par de pontos na segunda figura”}}{\text{“Distância entre o par de pontos na primeira figura”}} = r$$

As figuras abaixo, uma foto e sua ampliação, são exemplos de figuras semelhantes pela definição acima. Observe que a razão de semelhança entre a figura da direita e a figura da esquerda é dois.

Jan Kronies, Montanhas Rochosas no Verão, unsplash.com.

Para aprender mais

Para aprofundar o conhecimento sobre as propriedades da relação de semelhança, sugerimos a videoaula do site do PROFMAT que pode ser acessada pelo QrCode abaixo.

Relação de Semelhança

[1]Figura de Ylebru com licença *Creative Commons* disponível em //commons.wikimedia.org/wiki/File:Similar-geometric-shapes.png

1.1 – Exemplo: escalas de mapas

Pela definição de relação de semelhança, o mapa de uma região, como o da Região Metropolitana do Cariri (RMC), e a região que ele representa, são semelhantes. Neste caso, a razão de semelhança é a *escala* do mapa. Assim, quando a distância entre dois pontos em um mapa na escala de 1:50.000 é 2 cm, a distância real entre os locais representados no mapa é 50.000 vezes maior, pois é igual a 50.000×2 centímetros, que equivale a 1 km.

Por causa disso, as distâncias entre os pontos A, B e C, que representam, respectivamente, as cidades de Juazeiro do Norte, Farias Brito e Santana de Cariri no mapa abaixo, não são iguais às distâncias reais entre as cidades, mas estão com essas distâncias na proporção indicada pela escala do mapa.

Assim, para determinar a distância entre as cidades A, B e C usando o mapa da RMC, devemos inicialmente determinar a escala do mapa, representada graficamente por três retângulos nas cores alternadas preta, branca e preta de novo, na parte de baixo do mapa.

O comprimento de cada um desses retângulos, digamos, 1 centímetro, corresponde então a uma distância de 10 quilômetros, ou seja, quando a distância de dois pontos no mapa mede 1 centímetro, as localidades que estes pontos representam estão a uma distância de 10 quilômetros. A escala então é o fator de comparação entre as distâncias no mapa e as distâncias reais. Neste exemplo, a escala é dada por

$$r = \frac{1 \text{ centímetro}}{10 \text{ quilômetros}}$$

Observação 1.1 A descrição da escala no mapa está errada pois indica que cada retângulo corresponde a 25 quilômetros ao invés de 10 quilômetros, como deveria ser.

A seguir, verificamos com uma régua que a distância de A a B no mapa, é aproximadamente igual a 4,2 vezes o comprimento fixado na escala. Da mesma forma, a distância, no mapa, do ponto B ao ponto C é quase igual a 3,3 vezes o comprimento da escala. Finalmente, os pontos A a C, no mapa, estão distantes cerca de 4,7 vezes o comprimento da escala. Portanto, as distâncias *reais* de Juazeiro do Norte a Farias Brito, de Farias Brito a Santana do Cariri e de Santana do Cariri a Juazeiro do Norte são aproximadamente iguais a 42 quilômetros, 33 quilômetros e 47 quilômetros, respectivamente.

Outro exemplo: no mapa a seguir, na mesma escala do mapa anterior, o ponto P corresponde à cidade de Jardim, que fica a cerca de 46 quilômetros de Juazeiro do Norte. Observe que as distâncias percorridas ao longo das estradas que ligam estas cidades são maiores. Isso ocorre porque essas estradas não são retas, pois têm curvas.

Logo, no mapa que segue, a distância entre os pontos que representam essas localidades é de $y = \dfrac{1}{10} \times 46 = 4{,}6$ centímetros.

Observação 1.2 Uma vez que

$$
\begin{aligned}
10 \text{ quilômetros} &= 10.000 \text{ metros} = 10.000\times 100 \text{ centímetros}\\
&= 1.000.000 \text{ centímetros},
\end{aligned}
$$

a escala pode ser escrita comparando distâncias em centímetros, no mapa e na realidade:

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{1.000.000 \text{ centímetros}},$$

ou seja,

$$a = \frac{1}{1.000.000} = 1 : 1.000.000.$$

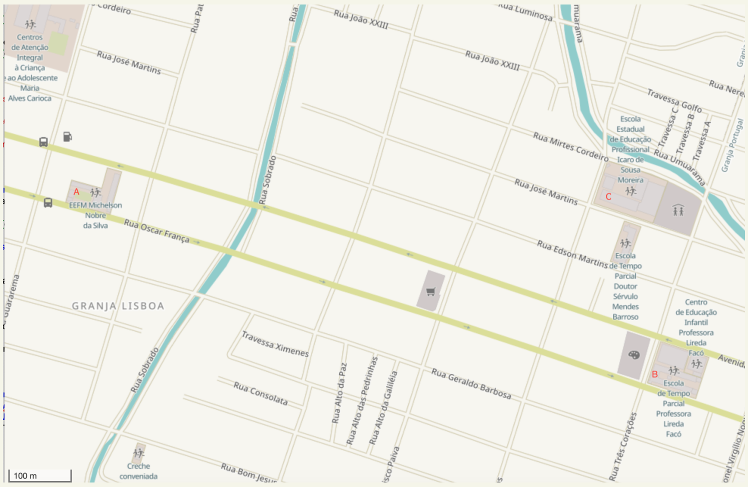
Esta última notação $1 : 1.000.000$ é bastante usada em Cartografia (Geografia) e apenas indica uma *razão*, isto é, uma comparação entre dois números: 1 centímetro no mapa equivale a 1.000.000 de centímetros na realidade. Observe que esta razão nada mais é do que a fração

$$\frac{1}{1.000.000},$$

também igual ao número decimal 0,000001 (um milionésimo). Ou seja, a distância no mapa é um milionésimo da distância real.

Exercício 1.1 [a] O mapa abaixo representa uma região da Granja Lisboa, na cidade de Fortaleza. Note que a escala indicada no mapa é de um centímetro para 100 metros, ou seja $1 : 10.000$. Sendo assim, estime

(a) a distância entre as escolas EEFM Michelson Nobre da Silva, indicada pelo ponto A, e a Escola Professora Lireda Facó, indicada pelo ponto B;
(b) a distância entre essas escolas e a EEEP Ícaro de Sousa Moreira, indicada pelo ponto C;
(c) as dimensões aproximadas dos quarteirões nesta parte do bairro;
(d) a área dos quarteirões nesta parte do bairro.
(e) a área ocupada pela escola Escola Professora Lireda Facó.



© OpenStreetMap contributors

[a]Neste exercício, para obter resultados mais precisos, você pode utilizar o Google Maps com o seguinte *link*: https://goo.gl/maps/kLi3VLpUVRgz6mnB9

Solução. 1. Podemos usar uma régua para verificar que os pontos A e B, no mapa, estão a uma distância aproximadamente igual a 10 comprimentos da escala. Como cada um destes comprimentos corresponde a uma distância *real* de 100 metros, concluímos que a distância *real* entre as escolas, representadas por A e B, é igual a

$$10\times100 \text{ metros} = 1.000 \text{ metros} = 1 \text{ quilômetro.}$$

2. Também usando uma régua, podemos constatar que a distância, no mapa, entre os pontos A e C é igual a cerca de 8,5 comprimentos da escala e a distância entre os pontos B e C é aproximadamente igual a 3 comprimentos da escala. Portanto, as distâncias reais são, respectivamente, iguais a

$$8{,}5\times100 \text{ metros} = 850 \text{ metros} = 0{,}85 \text{ quilômetro,}$$

da Escola Michelson Nobre da Silva à Escola Ícaro de Sousa Moreira e

$$3\times100 \text{ metros} = 300 \text{ metros} = 0{,}30 \text{ quilômetro,}$$

da Escola Professora Lireda Facó à Escola Ícaro de Sousa Moreira.

3. Podemos também medir, com a ajuda de uma régua, as dimensões de um quarteirão representado na mapa: são iguais, aproximadamente, a 1,5 comprimentos da escala e 0,75 do comprimento da escala. Portanto, suas dimensões reais são aproximadamente iguais a

$$1{,}5\times100 \text{ metros} = 150 \text{ metros} = 0{,}15 \text{ quilômetro,}$$

a maior dimensão, e

$$0{,}75\times100 \text{ metros} = 75 \text{ metros} = 0{,}075 \text{ quilômetro,}$$

a menor dimensão.

4. Com estas estimativas para as dimensões médias de um quarteirão representado no mapa, podemos aproximar a área de um deles apenas multiplicando as dimensões estimadas:

$$150 \text{ metros}\times75 \text{ metros} = 11.250 \text{ metros quadrados.}$$

Você observou alguma diferença entre os cálculos para estimar a área e os cálculos para estimar as distâncias? Observe que, para estimar a área do quarteirão, poderíamos multiplicar as dimensões no mapa, isto é,

$$1,5\times0{,}75 = 1{,}125$$

e, em seguida, multiplicar este resultado pelo quadrado de 100, isto é, pelo quadrado do comprimento que a escala representa:

$$100 \text{ metros } \times 100 \text{ metros} = 10.000 \text{ metros quadrados.}$$

Teríamos, como antes, que

$$1{,}125\times 10.000 = 11.250 \text{ metros quadrados.}$$

5. A Escola de Tempo Parcial Professora Lireda Facó ocupa, aproximadamente, metade do quarteirão. Portanto, estimamos sua área em

$$\frac{1}{2}\times 11.250 = 5.625 \text{ metros quadrados,}$$

ou seja, cerca de 5.600 metros quadrados de área.

Uma milha — unidade de medida de comprimento usada em países como Estados Unidos e Reino Unido — vale aproximadamente 1,61 kilômetros. Assim, ao medir uma distância em milhas e quilômetros, k milhas correspondem a cerca de $1{,}61\times k$ kilômetros, ou seja,

$$\frac{\text{“distância em milhas”}}{\text{“distância em quilômetros”}} = \frac{k}{1{,}61\times k} = \frac{1}{1{,}61}.$$

Com essa fórmula, podemos redefinir as escalas de todos os mapas acima para milhas por centímetro.

Exercício 1.2 Resolva novamente o Exercício 1.1 expressando as distâncias em milhas e as áreas em milhas quadradas.

Solução. Vamos apresentar as soluções dos itens (a) e (d) do Exercício 1.1. Vê-se na solução do item (a), daquele exercício, que a distância entre os pontos A e B é de 1 km, que vale

$$\text{“distância em milhas”} = \frac{\text{“distância em kilômetros”}}{1{,}6} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625.$$

Assim, a distância entre as escolas Michelson Nobre da Silva e Lireda Facó é de 0,625 milhas.

Para calcular em milhas quadradas a resposta do item (d) do Exercício 1.1, temos duas alternativas. Uma é obtida diretamente da resposta desse exercício enquanto a outra equivale a resolver o exercício novamente.

- Resolvemos novamente o item (a) do Exercício 1.1 expressando em milhas as distâncias que são dadas em quilômetros: as dimensões de um quarteirão são 0,15 km de comprimento por 0,075 km de largura. Assim, cada quarteirão mede 0,09375 milhas por 0,046875 milhas. Sua área então é igual a $0{,}09375\times 0{,}046875 \approx 0{,}0044$ milhas quadradas.
- Obtemos a resposta do problema da resposta do item (a) do Exercício 1.1: inicialmente observe que um quilômetro vale 1.000 metros. Logo, um quilômetro quadrado vale $1.000\times 1.000\text{m}^2$, ou seja, um milhão de metros quadrados. Portanto,

$$\text{“área em quilômetros quadrados”} = \frac{\text{“área em metros quadrados”}}{1.000.000}.$$

Por sua vez, se 1 milha vale 1,6 kilômetros, então 1 milha quadrada vale $1{,}6\times 1{,}6 = 2{,}56$ kilômetros quadrados, o que nos dá a fórmula:

$$\text{“área em milhas quadradas”} = \frac{\text{“área em quilômetros quadrados”}}{2{,}56}.$$

Substituindo a expressão da área em quilômetros quadrados na expressão da área em milhas quadradas, obtemos que

$$\text{“área em milhas quadradas”} = \frac{\text{“área em metros quadrados”}}{2{,}56\times 1.000.000}.$$

Como o quarteirão mede 11.250 metros quadrados, sua área em milhas quadradas é de $11.250/(2{,}56\times 1.000.000)$, ou seja, aproximadamente 0,0044 milhas quadradas.

Observação 1.3 O objetivo do problema acima é exercitar transformação de unidades. Obviamente, ninguém mede área de quarteirão em milhas quadradas!

Exercício 1.3 (ENEM-2021) O Sistema Métrico Decimal é o mais utilizado atualmente para medir comprimentos e distâncias. Em algumas atividades, porém, é possível observar a utilização de diferentes unidades de medida. Um exemplo disso pode ser observado no quadro.

UNIDADE	EQUIVALÊNCIA
Polegada	2,54 centímetros
Jarda	3 pés
Jarda	0,9144 metro

Assim, um pé, em polegada, equivale a

(a) 0,1200;
(b) 0,3048;
(c) 1,0800;
(d) 12,0000;
(e) 36,0000.

Solução. 3 pés equivalem a 1 jarda, logo 3 pés valem 0,9144 metro. Um metro equivale a 100 centímetros, logo 0,9144 metro é igual a 91,44 centímetros. Assim, 3 pés valem 91,44 centímetros, ou seja, 1 pé equivale a 30,48 centímetros. Observando que uma polegada equivale a 2,54 centímetros, temos que 1 pé está para 1 polegada assim como 30,48 centímetros estão para 2,54 centímetros. Portanto,

$$\frac{1 \text{ pé}}{1 \text{ polegada}} = \frac{30{,}48}{2{,}54} = 12.$$

Dessa forma, um pé equivale a 12 polegadas.

Para aprender mais

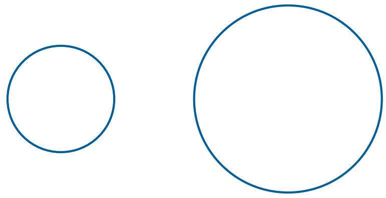
Os QR Codes abaixo trazem links para vídeos sobre a cartografia, que é a ciência dos mapas.

História da Cartografia | *Cartografia no ENEM*

O vídeo à esquerda, produzido pela Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP), traz uma entrevista com o Professor Paulo Miceli sobre a rica História da Cartografia. O outro vídeo, por sua vez, é a apresentação de uma videoaula do Brasil Escola sobre as questões que exploram a Cartografia no ENEM.

1.2 – Critérios de Semelhança entre Figuras Planas

Decidir, diretamente da definição, se duas figuras são semelhantes pode ser muito complicado, pois envolve calcular as proporções entre as distâncias de todos os pares de pontos correspondentes nas duas figuras. Felizmente existem critérios que abreviam esses cálculos.



Dois círculos são sempre semelhantes, pois um é a ampliação, reduçao ou reprodução do outro. Por sua vez, dois polígonos são semelhantes apenas quando têm ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais. Assim, os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes pela correspondência natural – a que faz corresponder A a A', B a B', C a C' e D a D' – se e somente se as condições abaixo são satisfeitas.

$$i.\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}';$$

$$ii.\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

Existem critérios menos restritivos de semelhança que só valem para triângulos, os *casos de semelhança de triângulos*. Por esse critério, dois triângulos são semelhantes quando

(a) têm dois ângulos correspondentes iguais: caso ângulo-ângulo ou AA;
(b) têm dois pares de lados correspondentes proporcionais, sendo iguais entre si os ângulos formados pelos pares de lados em cada triângulo: caso lado-ângulo-lado ou LAL;
(c) têm todos os pares de lados correspondentes proporcionais: caso lado-lado-lado ou LLL.

Vamos agora aplicar os critérios de semelhança acima para resolver os problemas propostos nos exercícios a seguir.

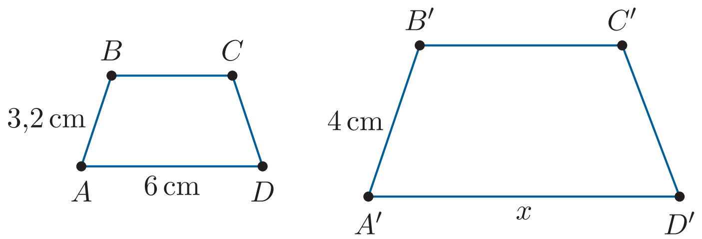


Figura 1.1: Trapézios semelhantes.

Exercício 1.4 A figura acima traz dois trapézios semelhantes. Qual é o valor de x?

Solução. A razão de semelhança entre os trapézios é

$$r = \frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{3{,}2}.$$

Consequentemente,

$$A'D' = r\times AD = 6\times\frac{4}{3{,}2} = \frac{6\times 4}{3{,}2} = 7{,}5\,\text{cm}.$$

O próximo exercício aplica as relações de semelhança em um problema envolvendo triângulos retângulos.

Exercício 1.5 A figura 1.2 traz um triângulo retângulo com ângulo reto $\angle BAC$, isto é, igual a $90°$ no vértice A. O ponto D é o pé da perpendicular baixada de A ao segmento AB, ou seja, o segmento AD faz um ângulo de $90°$ com o segmento BC. Calcule o comprimento do segmento AD.

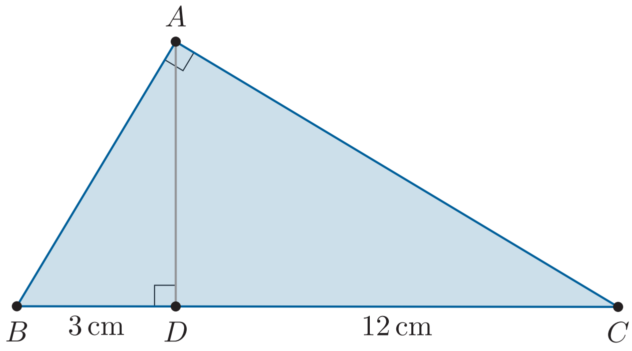


Figura 1.2

Nas condições anteriores, mostraremos no Exercício Resolvido 1.18 que, pelo caso de semelhança AA, os triângulos retângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes entre si, com as correspondências naturais de vértices $A \leftrightarrow D \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow B \leftrightarrow A$ e $C \leftrightarrow A \leftrightarrow C$. Admitindo esse resultado, vamos calcular o valor do comprimento do segmento AD a partir da relação de semelhança entre os triângulos ABD e CAD. Por essa relação, temos que

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}.$$

Assim, $AD^2 = BD \times CD$. Pela Figura 1.2, $BD = 3\,\text{cm}$ e $CD = 12\,\text{cm}$. Consequentemente, $AD = 6\,\text{cm}$. Sobre esse assunto, confira também a videoaula do Profmat indicada pelo QR Code abaixo.

Triangulo Retângulo

Obs No exercício acima, usamos o fato de que os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes. A partir desse resultado, calcularemos, no Exercício Resolvido 1.19, o comprimento de todos os lados dos triângulos da Figura 1.2.

O objetivo do próximo exercício é verificar o Teorema da Bissetriz interna.

Exercício 1.6 Na Figura 1.3, o segmento AD é a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. São conhecidos os comprimentos dos lados AB e AC e do segmento BD, como indicado na figura. Qual é o valor do comprimento x do segmento CD?

Nas notações estabelecidas na Figura 1.3, traçamos o círculo de centro C e raio x e, em seguida, prolongamos a segmento AD até ele encontrar esse círculo novamente, no ponto E. No Exercício Resolvido 1.21, mostraremos que os triângulos ABD e ACE são semelhantes (com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow E$). Assim,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

ou, como $CE = CD$,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}. \tag{1.1}$$

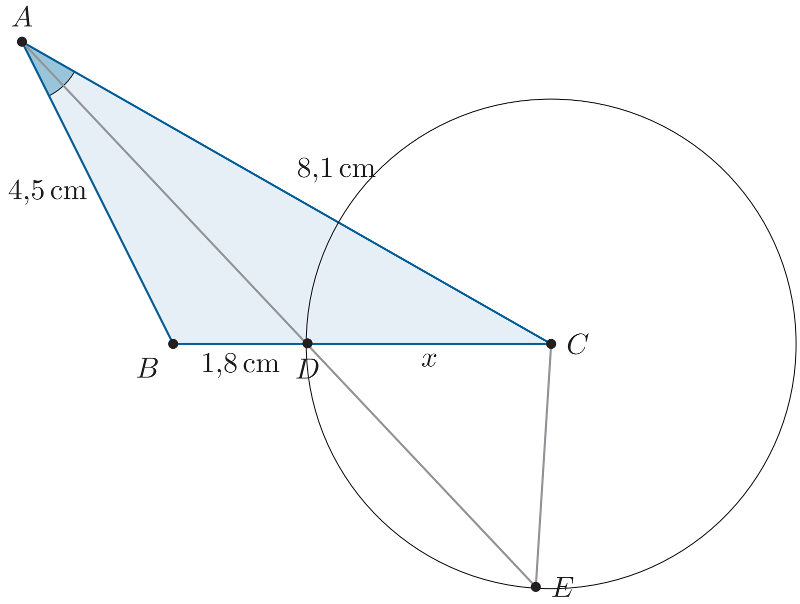


Figura 1.3: Triângulo dividido por uma bissetriz interna.

Sendo $CD = x$, obtemos, em centímetros,

$$x = \frac{AC \times BD}{AB} = \frac{8{,}1 \times 1{,}8}{4{,}5} = 3{,}24.$$

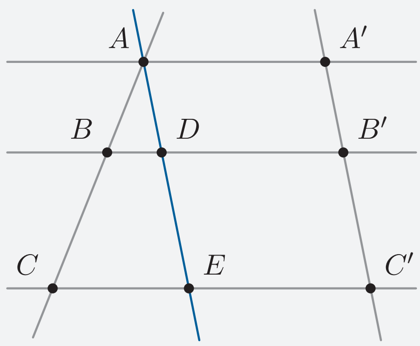
Obs A solução anterior deixa claro que a proporção (1.1) – entre as medidas de dois lados de um triângulo e as medidas dos segmentos em que o terceiro lado é dividido pela bissetriz interna do seu ângulo oposto – é válida para todo triângulo ABC. Esse resultado de Geometria, que pode ser guardado por você e utilizado livremente daqui em diante, é conhecido como o *Teorema da Bissetriz Interna*.

Tales de Mileto, que viveu entre 624 e 546 a.C., é tido como o primeiro filósofo do Ocidente. Ele também foi pioneiro na aplicação do raciocínio dedutivo para obter e provar resultados de Geometria na Grécia Antiga. O teorema enunciado a seguir recebe seu nome.

(Teorema de Tales) A figura abaixo mostra um par de retas, retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$, cortadas por três retas paralelas, retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. Então, são válidas as igualdades

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'},$$

envolvendo relações de proporcionalidade entre os segmentos determinados pelos pontos em que as retas paralelas intersectam as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$.



Exercício 1.7 Verifique as igualdades da equação (1.2) usando os casos de semelhança de triângulos.

Solução. Trace pelo ponto A, a *reta auxiliar* paralela à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ – a reta em azul na Figura 1.3, que determina nas retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ os pontos D e E, respectivamente, como indicados na Figura 1.3.

Um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos é chamado de *paralelogramo*. Assim, os quadriláteros $ADB'A'$, $AEC'A'$ e $DEC'B'$ são paralelogramos, porque têm lados opostos contidos em retas paralelas. É um fato conhecido que os lados opostos de um paralelogramo têm comprimentos iguais. Logo os segmentos AD e $A'B'$ têm a mesma medida, porque são lados opostos do paralelogramo $ADB'A'$. Observe, agora, que os triângulos ABD e ACE são semelhantes pelo caso AA de semelhança de triângulos. De fato, $\angle BAD$ e $\angle CAE$ são notações diferentes de um mesmo ângulo. Além disso, os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACE$ são iguais, por serem ângulos correspondentes formados por uma mesma reta transversal a duas retas paralelas.

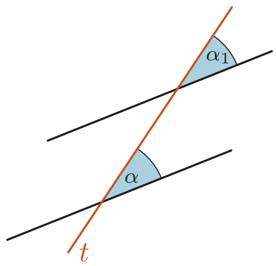


Figura 1.4: Uma transversal t a duas retas paralelas forma, com essas retas, ângulos correspondentes α e α_1 de mesma medida.

Em consequência dessas afirmações, temos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{A'B'}{A'C'}, \tag{1.2}$$

em que a primeira igualdade decorre da relação de semelhança entre os triângulos ABD e ACE, enquanto a segunda igualdade vem de serem iguais os lados opostos dos paralelogramos $ADB'A'$ e $AEC'A'$.

Aplicando, nas igualdades da equação (1.2), as propriedades de frações estudadas no módulo 3, levamos o numerador da última fração para o denominador da primeira fração, e o denominador da primeira fração para o numerador da última, concluindo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Para mostrar que $BC/B'C' = AC/A'C'$, podemos adaptar o argumento acima traçando, pelo ponto C, uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{A'C'}$. Outra maneira de verificar essa igualdade consiste em aplicar os resultados de manipulação de frações estudados no módulo 3. Assim, visto que $(AB/A'B') = (AC/A'C')$, temos

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC - AB}{A'C' - A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

1.3 – Para aprender mais

Tales de Mileto

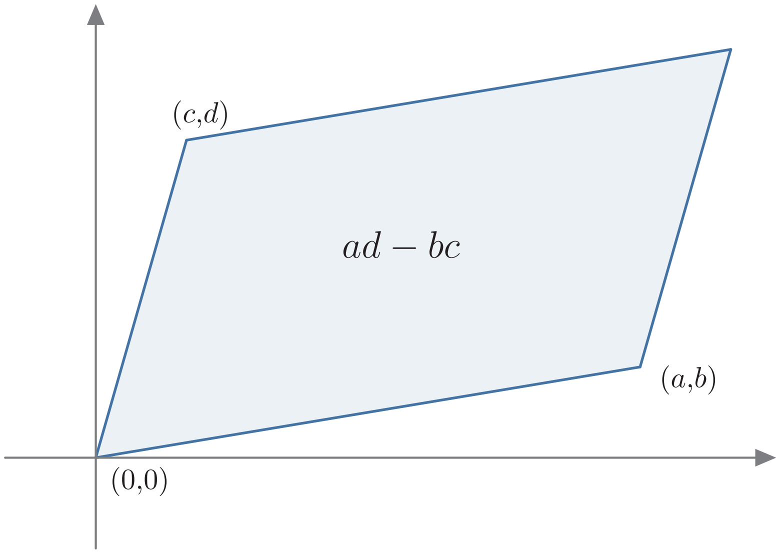
O Teorema de Tales

O primeiro QR Code acima aponta para uma videoaula do Brasil Escola contando a história de Tales de Mileto, um dos sete Sábios da Grécia Antiga. Esse vídeo destaca tanto as contribuições de Tales de Mileto para a Geometria e as Ciências da Natureza como também destaca a importância de Tales de Mileto na História do Conhecimento. De fato, nessa videoaula é mostrado o pioneirismo de Tales de Mileto no questionamento da origem e causa das coisas ao buscar explicar sistematicamente os diversos fenômenos.

Por sua vez, o segundo QR Code leva a uma videoaula do PROFMAT com uma apresentação minuciosa sobre o Teorema de Tales.

1.4 – Área de Paralelogramos

A seguir, aplicaremos os resultados obtidos acima e no Caderno 3 para calcular a área de um paralelogramo conhecidas as coordenadas dos seus vértices.



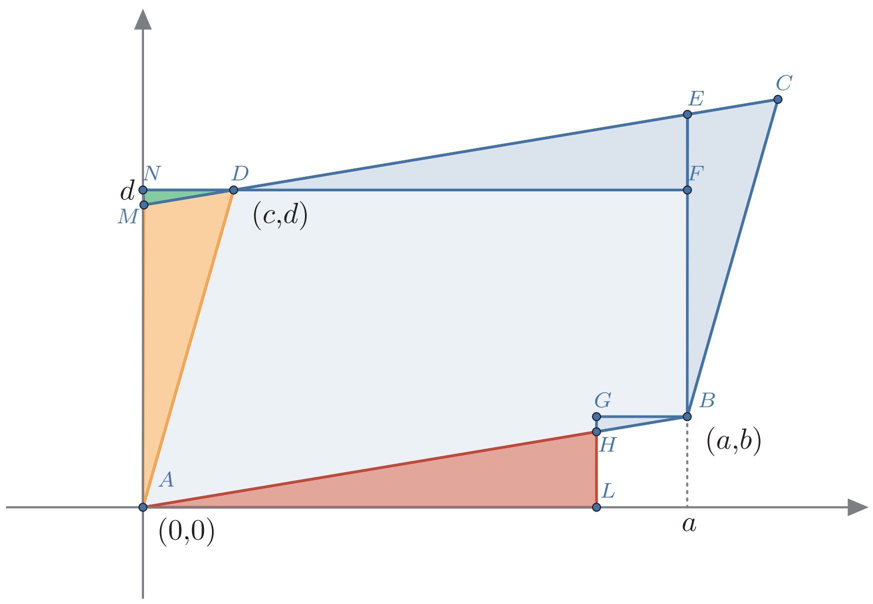
Indicamos acima as coordenadas $(0,0)$, (a,b) e (c,d) de 3 vértices de um paralelogramo — um quadrilátero de lados opostos paralelos. Nosso objetivo é provar que a área desse paralelogramo é igual a $ad - bc$.

Para calcular a área do paralelogramo vamos utilizar o método de decomposição e composição de figuras, que é descrito no Caderno 3. Iniciamos a aplicação desse método destacando no paralelogramo os triângulos BGH, CEB e EDF, como vemos na figura a seguir. Esses triângulos são traçados tomando $DE = AH$ com os lados DF e BG paralelos ao eixo das abscissas (eixo-x) e os lados BE e GH paralelos ao eixo das ordenadas (eixo-y). Também mostramos na próxima figura os triângulos DNM, DMA e HAL, coloridos em verde, laranja e vermelho, respectivamente.

Assim, os triângulos DNM, DMA e HAL são congruentes, respectivamente, aos triângulos BGH, CEB e EDF. De fato,

(a) os ângulos $\angle ECB$ e $\angle CEB$ são congruentes aos ângulos $\angle MDA$ e $\angle DMA$, respectivamente. Assim, os triângulos DMA e CEB são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo discutido no Caderno 4. Também temos que os lados correspondentes AD e BC dos triângulos DMA e CEB têm o mesmo comprimento. Consequentemente, a razão de semelhança entre esses triângulos é um e eles são congruentes.

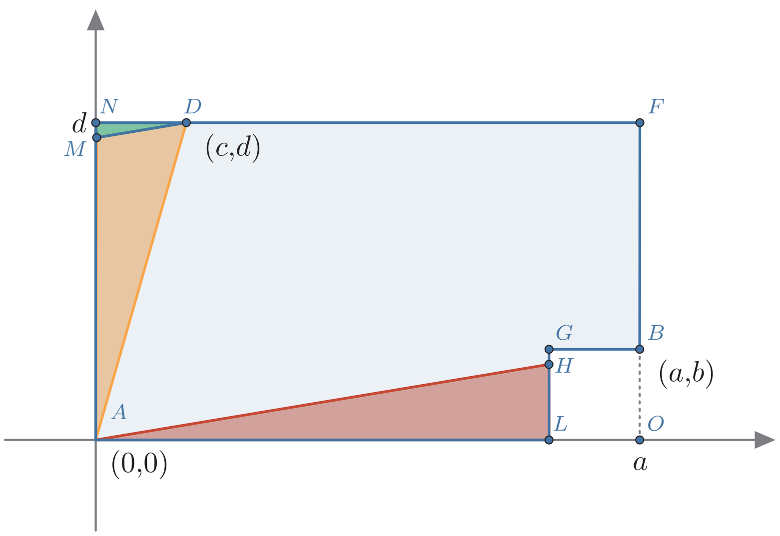
(b) Analogamente, observe que os pares de ângulos $\angle EDF$ e $\angle HAL$, $\angle HLA$ e $\angle EFD$ têm a mesma medida, e lembre que $DE = AH$. Assim, os triângulos EDF e HAL são congruentes também, pelo argumento utilizado no item precedente.



(c) Observe que $CD = BA$, pois $ABCD$ é um paralelogramo e os lados opostos de um paralelogramo são iguais. Também temos que $DE = AH$, por hipótese. Assim,

$$CE = CD - DE = BA - AH = BH.$$

Por sua vez, $CE = DM$ pois os triângulos CEB e DMA são congruentes como visto no item (a). Consequentemente, aplicando o argumento empregado nos itens acima mostramos que os triângulos BGH e DNM são congruentes pois têm ângulos correspondentes iguais (por que?) e os lados correspondentes BH e DM têm a mesma medida.



A seguir, retiramos os triângulos BGH, CEB e EDF da segunda figura para obter o polígono $ALGBFN$ da figura acima. Observe que esse polígono e o paralelogramo $ABCD$ têm a mesma área. De fato, se $[ALGBFN]$, $[DNM]$, etc., são as áreas dos polígonos entre os colchetes, então

$$\begin{aligned}[ALGBFN] &= [DNM] + [DMA] + [HAL] + [AHGBFD] \\ &= [BGH] + [CEB] + [EDF] + [AHGBFD] \\ &= [ABCD].\end{aligned}$$

Outra maneira de obter o quadrilátero $ALGBFN$ é retirar o retângulo $LOBG$ do retângulo $AOFN$. Observando as coordenadas dos pontos $O(a,0)$ e $N(0,d)$ obtemos que $[AOFN] = ad$. Também temos que $BG = DN = c$ e que $OB = a$, pois B tem coordenadas (a,b). Assim, $[LOBG] = bc$, de onde se segue que

$$[ABCD] = [ALGBFN] = [AOFN] - [LOBG] = ad - bc,$$

como queríamos mostrar.

Observação 1.4 O caso que estudamos acima corresponde à situação em que o paralelogramo $ABCD$ tem vértices no primeiro quadrante, com o ponto D acima e à esquerda do ponto B, e o ponto A na origem $(0,0)$.

A fim de obter um procedimento para calcular a área de um paralelogramo qualquer a partir das coordenadas do seus vértices, deve-se, inicialmente, verificar que as afirmações abaixo são verdadeiras.

- A área de um paralelogramo $ABCD$ de vértices $A(0,0)$, $B(a,b)$, $C(a+c,b+d)$ e $D(c,d)$, com a, b, c e d tomando valores arbitrários, é igual a $|ad - bc|$.
- Além disso, a área do paralelogramo descrito acima será igual a $ad - bc$ se e somente se o trajeto $A \to B \to C \to D \to A$ percorrer o paralelogramo no sentido *anti-horário*.

Admitidos esses resultados, vamos estendê-los nos parágrafos abaixo a fim de obter um procedimento para calcular a área de um paralelogramo sem vértices na origem $(0,0)$.

Áreas de Paralelogramos e Determinantes (Opcional)

Quem estudou matrizes e determinantes deve ter notado que o valor da área do paralelogramo $ABCD$ de vértices $A(0,0)$, $B(a,b)$, $C(a+c,b+d)$ e $D(c,d)$ é igual ao módulo do determinante da matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Esse fato facilita o cálculo da área dos paralelogramos e triângulos, como veremos mais abaixo, mas sua aplicação exige que um dos vértices do paralelogramo esteja localizado na origem do sistema de coordenadas. Aplicando as propriedades do determinante de matrizes quadradas, generalizamos essa expressão da área do paralelogramo com um vértice na origem para paralelogramos em posições arbitrárias no plano.

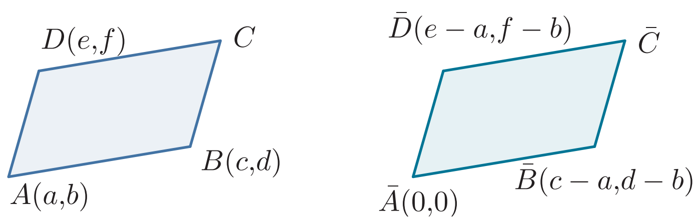


Figura 1.5

Vamos então calcular a área do paralelogramo à esquerda, paralelogramo em azul na Figura 1.5, identificado pelos vértices (a,b), (c,d) e (e,f), com o vértice (a,b) entre os outros dois vértices. Para tal, efetuamos nesse paralelogramo a translação que leva o vértice A ao ponto $(0,0)$.

Lembre que ao fazermos a translação de uma figura, seus pontos são deslocados numa mesma direção e sentido por uma dada distância. É como se todos os pontos da figura "marchassem juntos em ordem unida". Assim, *translações* mantêm a distância entre os pontos, logo são *movimentos rígidos* ou *isometrias*. Consequentemente, quando uma figura é obtida de outra por translação, tais figuras são congruentes.

Observe que, para efetuar uma translação, basta somar o mesmo par ordenado (u,v) a todos os pontos da figura. Vemos um exemplo disso na Figura 1.5, em que o paralelogramo da direita na cor verde é obtido do paralelogramo da esquerda somando $(-a, -b)$ às coordenadas de todos os pontos desse último paralelogramo. O paralelogramo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ assim construído tem vértice na origem. Logo, como vimos acima, sua área é o módulo do determinante da matriz

$$M_2 = \begin{pmatrix} c-a & d-b \\ e-a & f-b \end{pmatrix}.$$

Por cálculo direto, podemos verificar que a matriz M_2 e a matriz

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}$$

têm o mesmo determinante. Em consequência desse resultado e das afirmações da Observação 1.4, temos a seguinte conclusão.

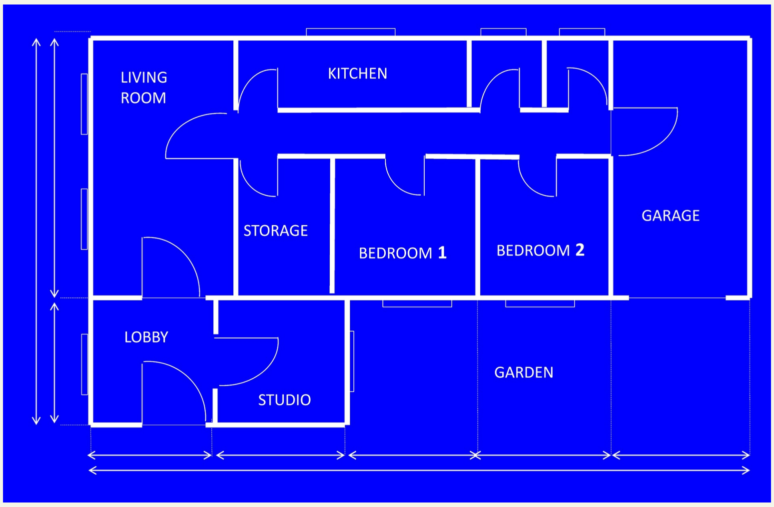
Se o trajeto que percorre os vértices do paralelogramo $ABCD$, no sentido anti-horário, passar por esses vértices no sentido $A \to B \to C \to D$, então

$$[ABCD] = \det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix},$$

onde $[ABCD]$ é a área do paralelogramo $ABCD$, e (a,b), (c,d), e (e,f) são as coordenadas dos vértices A, B e D, como no paralelogramo em azul da Figura 1.5.

1.5 – Exercícios Resolvidos

Exercício 1.8 A planta baixa de uma casa está representada na figura abaixo.



© by Tumisi from Pixabay

A área que representa a cozinha ("kitchen") é cerca da metade da área que representa a sala de estar ("living room") na planta. Sabendo que a cozinha tem 25 metros quadrados de área, qual a área da sala de estar?

Solução. Segundo o enunciado, a razão entre a área da sala de estar e a área da cozinha é igual a

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Como a área da cozinha é igual a 25 metros quadrados, então a área da sala de estar mede o dobro desta, ou seja, 50 metros quadrados.

Solução alternativa. Representando a área da sala de estar por x, temos a seguinte proporção (igualdade ou equivalência de frações).

$$\frac{x}{25} = \frac{2}{1}.$$

Multiplicando os dois lados desta igualdade por 25, obtemos

$$x = 25{\times}2.$$

Portanto, $x = 50$ metros quadrados.

Exercício 1.9 Ainda com relação à planta no exercício anterior, suponhamos que a escala usada nesta planta é 1 : 200, ou seja, 1 centímetro na planta corresponde a 200 centímetros, ou seja, 2 metros na realidade. Sendo assim, obtenha as seguintes estimativas.

(a) As dimensões do jardim ("garden"), sabendo que, na planta, as dimensões são 7 centímetros e 2 centímetros.
(b) As dimensões da garagem ("garage"), sabendo que, na planta, as dimensões são 2,5 centímetros e 4,5 centímetros.
(c) As dimensões da casa, sabendo que, na planta, as dimensões são 11 centímetros e 6,5 centímetros.
(d) As áreas do jardim e da garagem.

Solução. 1. A escala da planta é de 1 centímetro para cada 200 centímetros, ou seja, 2 metros na construção real. Assim, 2 centímetros na planta correspondem a

$$2{\times}200 \text{ centímetros} = 400 \text{ centímetros} = 4 \text{ metros}$$

na casa real, ao passo que 7 centímetros na planta correspondem a

$$7\times200 \text{ centímetros} = 1.400 \text{ centímetros} = 14 \text{ metros}$$

na realidade. Portanto, as dimensões do jardim são 4 metros e 14 metros.
2. De modo similar, vemos que as dimensões reais da garagem são

$$2{,}5\times200 \text{ centímetros} = 500 \text{ centímetros} = 5 \text{ metros} \quad \text{e}$$
$$4{,}5\times200 \text{ centímetros} = 900 \text{ centímetros} = 9 \text{ metros.}$$

3. Com respeito às dimensões reais da casa, temos

$$11\times200 \text{ centímetros} = 2.200 \text{ centímetros} = 22 \text{ metros} \quad \text{e}$$
$$6{,}5\times200 \text{ centímetros} = 1.300 \text{ centímetros} = 13 \text{ metros.}$$

Em geral, se x representa um comprimento (em centímetros) no mapa e y representa o comprimento real (em centímetros), temos

$$y = 200x,$$

ou seja,

$$\frac{y}{x} = 200,$$

sempre que $x \neq 0$.

4. A área do jardim é calculada *multiplicando* suas dimensões reais, isto é,

$$4\times14 = 56 \text{ metros quadrados.}$$

Observe que o produto das dimensões na escala é

$$2\times7 = 14 \text{ centímetros quadrados.}$$

A razão entre a área real e a área do jardim na planta é igual a

$$\frac{56 \text{ “metros quadrados”}}{14 \text{ “centímetros quadrados”}} = \frac{56\times100\times100 \text{ “centímetros quadrados”}}{14 \text{ “centímetros quadrados”}}$$
$$= \frac{56\times10.000}{14} = \frac{4\times10.000}{1} = 40.000.$$

Note que esta razão é o *quadrado* da razão entre os comprimentos, isto é, o quadrado de 200.
Já a área do garagem é dada também multiplicando suas dimensões reais:

$$5\times9 = 45 \text{ metros quadrados.}$$

A área total da casa, por fim, é dada por

$$22\times13 = 286 \text{ metros quadrados.}$$

Exercício 1.10 Para atrair compradores, as construtoras exibem maquetes, isto é, modelos em miniaturas de edifícios de apartamentos residenciais. Sabendo que a escala, isto é, a razão entre as dimensões da maquete e do que ela representa, é igual a $\frac{1}{50}$,

Image by Anna Pan'šina from Pixabay

qual é a altura real do edifício se a maquete tem 90 centímetros de altura?

Solução. A razão

$$\frac{1}{50}$$

indica que 1 centímetro na maquete corresponde a 50 centímetros no edifício real. Portanto, 90 centímetros na maquete correspondem a

$$90{\times}50 \text{ centímetros} = 4.500 \text{ centímetros} = 45 \text{ metros}$$

no edifício real. Logo, a altura real é dada por 45 metros.

Exercício 1.11 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, com a razão entre suas áreas sendo igual a $\frac{3}{4}$. Qual a área do maior apartamento, sabendo que o menor tem 120 metros quadrados de área?

Solução. Representemos a área do maior apartamento, que não conhecemos, por x. Como as áreas da maquete devem ser *proporcionais* às áreas dos apartamentos reais, temos a mesma *razão* entre as áreas na maquete, ou seja, $\frac{4}{3}$, e as áreas reais, isto é, $\frac{x}{120}$. Logo,

$$\frac{x}{120} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 120, temos

$$x = 120{\times}\frac{4}{3} = 40{\times}4 = 160 \text{ metros quadrados},$$

o que nos fornece a área do maior apartamento.

Uma variação interessante deste exercício é a seguinte.

Exercício 1.12 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do menor apartamento, sabendo que a soma das áreas dos dois apartamentos, um de cada tipo, é igual a 210 metros quadrados?

Solução. Este é um exemplo de uma divisão em partes proporcionais. Observe que a área do menor apartamento é $\frac{3}{4}$ da área do maior. Assim, se dividíssemos a área total dos dois, que é igual a 210 metros quadrados, em sete partes iguais de 30 metros quadrados, o apartamento menor corresponderia a 3 destas partes, isto é, a

$$3{\times}30 = 90 \text{ metros quadrados},$$

enquanto que o apartamento maior corresponderia a 4 destas partes, isto é, a

$$4{\times}30 = 120 \text{ metros quadrados}.$$

A solução alternativa que propomos agora é mais algébrica e, portanto, também importante para o estudo das *equações lineares*, que faremos mais adiante.

Solução alternativa. Seja x a área do menor apartamento. Então, a área do maior é dada por $210 - x$, já que a área total dos dois é 210 metros quadrados. Logo, a razão entre a área do maior apartamento e a área do menor apartamento é

$$\frac{210 - x}{x} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando, agora, os dois lados por x, temos

$$210 - x = \frac{4}{3}x$$

Assim, somando x aos dois lados da equação, obtemos

$$210 = x + \frac{4}{3}x$$

Portanto,

$$210 = \frac{7}{3}x.$$

Dividindo os dois lados da equação por 7, obtemos

$$30 = \frac{1}{3}x.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 3, concluímos que

$$x = 90 \text{ metros quadrados},$$

a área do apartamento menor.

Exercício 1.13 O custo para revestir o piso de um apartamento de 90 metros quadrados, com porcelanato, é igual a R$ 4.500,00. Nestas mesmas condições, qual é o custo para revestir o piso do apartamento de 120 metros quadrados?

Solução. Como o custo para revestir 90 metros quadrados de piso é igual a R$ 4.500,00, cada metro quadrado de porcelanato custa

$$\frac{4.500}{90} = 50 \text{ reais.}$$

Portanto, o revestimento de 120 metros quadrados com o mesmo material custa

$$120{\times}50 = 6.000 \text{ reais.}$$

Solução alternativa. Podemos resolver este problema do seguinte modo. Se x simboliza o custo do revestimento do apartamento de 120 metros quadrados, temos a proporção

$$\frac{x}{4.500} = \frac{120}{90},$$

o que significa que o custo varia na mesma proporção que a área a ser revestida. Ou seja, o custo x está para R$ 4.500 assim como a área 120 metros quadrados está para 90 metros quadrados.

Multiplicando os dois lados da equação por 4.500, obtemos

$$x = 4.500{\times}\frac{120}{90},$$

donde concluímos que

$$x = 50{\times}120 = 6.000 \text{ reais.}$$

Podemos representar esta solução com o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
\text{90 metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ 4.500} \\
\downarrow & :90 & \downarrow \\
\text{1 metro quadrado} & \text{———} & \text{R\$ 50} \\
\downarrow & \times 120 & \downarrow \\
\text{120 metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ 6.000}
\end{array}$$

Exercício 1.14 Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R$ 1.500,00 por metro quadrado, sendo, aproximadamente, 40% do custo total com material e 60% com mão-de-obra. As demais despesas, administrativas e com equipamentos, não são relevantes. A partir destas informações, calcule

(a) o custo médio, por metro quadrado, com material;
(b) o custo médio, por metro quadrado, com mão-de-obra;
(c) a razão, em média, entre o custo com material e o custo com mão-de-obra.

Observação 1.5 Lembramos que porcentagens são frações com denominador igual a 100. Por exemplo, 40% é apenas uma *maneira de escrever* a fração $\frac{40}{100}$, que tem numerador 40 e denominador 100. Da mesma forma, 60% é, de fato, uma maneira alternativa de representar a fração $\frac{60}{100}$. Observe que, quando escrevemos "40% de 120", queremos dizer

$$\frac{40}{100}\times 120 = \frac{40\times 120}{100} = \frac{4800}{100} = 48.$$

Da mesma forma, "60% de 120' significa, apenas, a fração

$$\frac{60}{100}\times 120 = \frac{60\times 120}{100} = 72.$$

Solução. 1 e 2. O custo com material, por metro quadrado, representa 40% do total, ou seja,

$$\frac{40}{100}\times 1.500 = 40\times 15 = 600 \text{ reais},$$

ao passo que o custo com mão-de-obra, por metro quadrado, representa 60% do total, isto é,

$$\frac{60}{100}\times 1.500 = 60\times 15 = 900 \text{ reais}.$$

3. Logo, a razão entre o custo com material e o custo com mão-de-obra é igual a

$$\frac{600}{900} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Exercício 1.15 Estima-se que, em 2019, o custo médio para construção civil foi de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A previsão é que este custo aumente 5% em 2020. Com base nestas informações, responda:

(a) qual a previsão de custo médio por metro quadrado em 2020?
(b) Quanto passará a custar a construção de uma casa com 300 metros quadrados?
(c) Qual o aumento previsto, de 2019 para 2020, do custo de construção de uma casa de 300 metros quadrados?

Solução. 1. A expressão "aumento de 5%" significa que devemos adicionar 5% de R$ 1.500,00 ao custo médio anterior, ou seja, a R$ 1.500. Portanto, calculemos, inicialmente 5% de R$ 1.500. Temos

$$5\% = \frac{5}{100}$$

e, portanto,

$$5\% \text{ de R\$}\,1.500 = \frac{5}{100}\times 1.500 = 5\times 15 = 75 \text{ reais}.$$

Logo, o novo custo médio é de

$$1.500 + 5\% \text{ de } 1.500 = 1.500 + 75 = 1.575,$$

ou seja, R$ 1.575,00.

2. Com o custo médio por metro quadrado ajustado para R$ 1.575,00, o custo da construção de uma casa de 300 metros quadrados passa a ser de

$$300\times 1.575 = 472.500 \text{ reais}.$$

3. Note que o custo para construção dos mesmos 300 metros quadrados seria, antes do aumento de 5%, igual a

$$300\times 1.500 = 450.000 \text{ reais}.$$

Portanto, o acréscimo no custo total para construção da casa é de

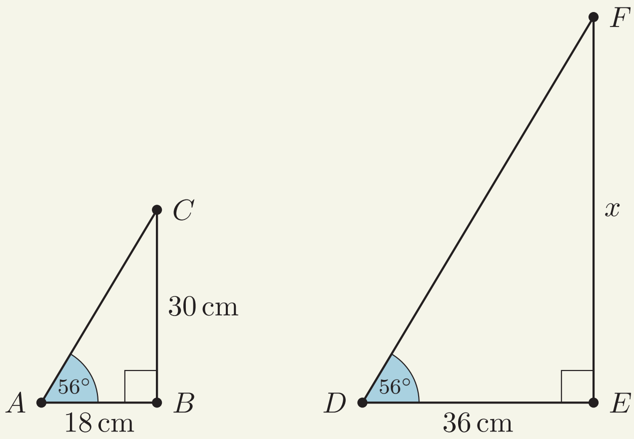
$$300\times 1.575 - 300\times 1.500 = 300\times 75 = 22.500 \text{ reais}.$$

Este aumento corresponde à fração

$$\frac{22.500}{450.000} = \frac{22.500 : 45}{450.000 : 45} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%,$$

do custo total, calculado antes do aumento, como seria de suspeitar.

Exercício 1.16 Qual o valor de x no triângulo DEF?



(a) 36 cm.
(b) 48 cm.
(c) 50 cm.
(d) 70 cm.
(e) 72 cm.

Solução. Os triângulos ABC e DEF da Figura são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, porque têm dois ângulos ordenadamente congruentes. De fato, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem ambos 56° e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos. Agora, observe que a razão de semelhança entre os triângulos DEF e ABC é 2, pois o comprimento do lado DE no triângulo DEF, que é igual a 36 cm, é o dobro da medida do lado correspondente AB, no outro triângulo, que é igual a 18 cm. Assim, $\overline{FE}/\overline{BC} = 2$. Substituindo, nessa última igualdade, os valores das medidas dos segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{BC}$, obtemos $x = 60$ cm. ■

Exercício 1.17 O triângulo ABC é cortado por uma reta $\overleftrightarrow{MN}$, paralela ao lado BC. Sabendo que M e N são pontos em AB e AC, respectivamente, que $(\overline{AM}/\overline{MB}) = 3/2$ e $\overline{AN} = 27$, calcule o valor de $\overline{NC}$.

Solução. Pelo Teorema de Tales, discutido no Exemplo 6,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}.$$

Assim,

$$\frac{27}{\overline{NC}} = \frac{3}{2},$$

e, portanto, $\overline{NC} = 18$.

Exercício 1.18 Justifique a afirmação: os triângulos ABC, DBA e DAC da, Figura 1.2, são semelhantes entre si.

Solução. Iniciamos destacando o fato que cada um desses triângulos tem um ângulo reto, pois os ângulos $\angle BAC$, $\angle BDA$ e $\angle ADC$ medem todos 90°. Agora, afirmamos que os ângulos $\angle ABC$, $\angle DBA$ e $\angle DAC$, nos triângulos ABC, DBA e DAC, respectivamente, são congruentes, ou seja, têm uma mesma medida. Para mostrar isso, começamos observando que $\angle ABC$ e $\angle DBA$ são notações diferentes para um mesmo ângulo. Em seguida, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, temos

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°;$$
$$\measuredangle ADC + \measuredangle DAC + \measuredangle DCA = 180°.$$

Veja que a primeira equação acima afirma que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a 180°, enquanto a segunda equação diz o mesmo sobre os ângulos internos do triângulo

DAC. Como vimos acima, $\measuredangle BAC = \measuredangle ADC = 90°$. Além disso, $\angle ACB$ e $\angle DCA$ são notações diferentes de um mesmo ângulo. Portanto,

$$\measuredangle ABC = 180° - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ADC - \measuredangle DCA = \measuredangle DAC.$$

Logo, os ângulos $\angle ABC$, $\angle DBA$ e $\angle DAC$ têm uma mesma medida. Consequentemente, quaisquer dois dos triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes com mesmas medidas.

Exercício 1.19 Calcule as medidas dos lados de todos os triângulos da Figura 1.2.

Solução. No Exemplo 4 calculamos o valor de $\overline{AD} = 6\,\text{cm}$. Usando as relações obtidas a partir da semelhança entre os triângulos ABC e DBA, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Assim, $\overline{AB}^2 = \overline{BD}\times\overline{BC} = 3\times 15 = 45$, de sorte que $\overline{AB} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Da mesma maneira, mostramos que $\overline{AC}^2 = \overline{CD}\times\overline{BC} = 12\times 15$, logo, $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$.

Solução alternativa. Como o valor de $\overline{AD}$ é conhecido e os triângulos da Figura 1.2 são todos retângulos (ou seja, um dos ângulos internos de cada um deles mede 90°), uma solução alternativa desse problema emprega duas vezes o *Teorema de Pitágoras*, o qual afirma que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa, que é o lado oposto ao ângulo reto, é igual à soma dos quadrados de seus catetos, que são os outros dois lados. Assim,

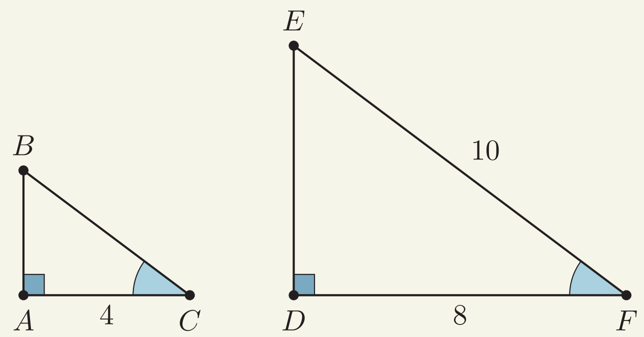
$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 36 + 9 = 45 \text{ e} \tag{1.3}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 36 + 144 = 180. \tag{1.4}$$

Daí, $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ e $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$.

Obs No Exercício 1.19 pode-se entrever a relação do Teorema de Pitágoras com as aplicações dos casos de semelhança de triângulos ao estudo do triângulo retângulo. De fato, o Teorema de Pitágoras é consequência desses casos de semelhança, como veremos oportunamente, e problemas envolvendo semelhança de triângulos muitas vezes fazem uso do Teorema de Pitágoras em sua solução, como é o caso do próximo exercício.

Exercício 1.20 Qual é a medida do segmento AB no triângulo menor da figura a seguir, dado que os triângulos são semelhantes?



(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.

Solução. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo da direita, obtemos que $\overline{DE}^2 + 64 = 100$, ou seja, $\overline{DE}^2 = 100 - 64 = 36$. Assim, $\overline{DE} = 6$.

Note, agora, que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes iguais: os ângulos retos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ e os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$, como vemos na figura anterior. Então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\overline{AB} = \overline{DE}/2 = 3$. ■

Exercício 1.21 Os triângulos ACE e ABD na Figura 1.3 são semelhantes? Justifique sua resposta.

Solução. Os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ têm medida igual à metade da medida do ângulo $\angle BAC$, logo, são iguais.

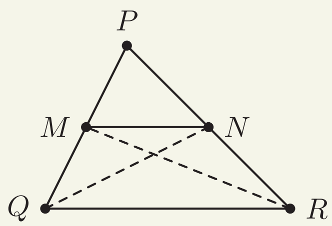
Também temos que o triângulo DCE é isósceles, ou seja, tem dois lados iguais. Observe que o triângulo DCE é congruente, pelo caso LAL, ao mesmo triângulo ECD – tomando os vértices em outra ordem, pois os lados CD e CE têm o mesmo comprimento e, obviamente, DCE e $\angle ECD$ são o mesmo ângulo. Assim, $\measuredangle CDE = \measuredangle CED$, pois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais.

Ainda na Figura 1.3, vemos que $\measuredangle CDE = \measuredangle ADB$, pois são as medidas de ângulos opostos pelo vértice. Consequentemente, $\measuredangle CED = \measuredangle ADB$.

A discussão acima concluiu que os triângulos ACE e ABD têm dois pares de ângulos correspondentes iguais: os pares de ângulos $(\angle BAD, \angle CAD)$ e $(\angle ADB, \angle AEC)$. Portanto, tais triângulos são semelhantes. ■

Obs Um triângulo é dito isósceles quando possui dois lados iguais, sendo a sua base o lado distinto dos dois sabidamente iguais. O segundo parágrafo da solução do exercício anterior mostra um fato importante, que deve ser incorporado aos resultados de Geometria que você conhece: em um triângulo isósceles, os ângulos entre a base e os lados iguais têm medidas iguais. Esse fato pode ser utilizado livremente, daqui em diante.

Exercício 1.22 Na figura abaixo, M e N são pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. Sabendo que QR mede 18 cm, calcule a medida do segmento MN.



Solução. Primeiramente, uma vez que M e N são pontos médios dos lados PQ e PR, respectivamente, temos

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{PN}}{\overline{PR}} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{PR}}.$$

Agora, note que $\angle MPN$ e $\angle QPR$ são duas notações para um mesmo ângulo. Portanto, os triângulos MPN e QPR são semelhantes, com a correspondência natural de vértices, pelo caso LAL, com razão de semelhança $1/2$. Segue que

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}$$

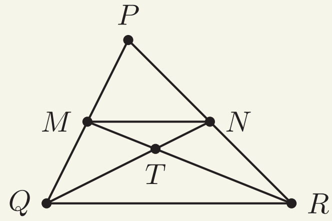
e, como $\overline{QR} = 18\,\text{cm}$, temos $\overline{MN} = 9\,\text{cm}$. ■

Obs A solução do exercício anterior mostrou que o segmento, que une os pontos médios de dois lados de um triângulo, tem medida igual à metade da medida do terceiro lado do triângulo. De fato, esse segmento também é paralelo ao terceiro lado; nas notações da figura acima, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{QR}$. Isso porque a semelhança entre os triângulos PMN e PQR garante que $\measuredangle PMN = \measuredangle PQR$. Então, as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, sendo cortadas pela reta $\overleftrightarrow{PQ}$ segundo ângulos correspondentes iguais, devem ser paralelas.

O fato de que, em todo triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados tem medida igual à metade do terceiro lado, sendo a ele paralelo, é mais um resultado de Geometria que deve ser incorporado a seu repertório de teoremas. Ele é conhecido como o *Teorema da Base Média*.

Exercício 1.23 (UFF) Na figura abaixo, M e N são pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. Sabendo que QR mede 18,0 cm e que a altura do triângulo PQR, relativa a este lado, mede 12,0 cm, a altura do triângulo MNT, relativa ao lado MN, mede

(a) 4,0 cm.
(b) 3,5 cm.
(c) 3,0 cm.
(d) 2,0 cm.
(e) 1,5 cm.



Solução. Na solução do exercício anterior, vimos que os triângulos PMN e PQR são semelhantes, com razão de semelhança $1/2$. Também, na observação anterior vimos que as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ são paralelas.

Agora, note que os ângulos $\angle MTN$ e $\angle RTQ$ são opostos pelo vértice, logo, têm uma mesma medida. Por outro lado, os ângulos $\angle NMR$ e $\angle MRT$ são iguais, pois são ângulos *alternos internos* formados pelas retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, com a transversal $\overleftrightarrow{MR}$, conforme a Figura 1.6.

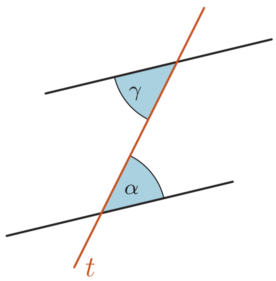


Figura 1.6: Uma reta transversal t corta duas retas paralelas determinando os ângulos α e γ. Esses ângulos são *alternos* porque estão em diferentes lados da reta transversal e são *internos* porque estão entre as retas paralelas. Sabe-se que ângulos alternos internos (assim como os alternos externos) são congruente.

Assim, os triângulos MTN e RTQ também são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes iguais. A razão de semelhança entre eles é

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}.$$

Agora, é fato que, em dois triângulos semelhantes, *a razão entre os comprimentos das alturas baixadas a partir de vértices correspondentes é igual à razão de semelhança.* Essa afirmação requer uma justificativa, mas pode ser compreendida por meio das seguintes considerações. Inicialmente, lembramos que quando duas figuras são semelhantes, a distância entre pontos correspondentes nas figuras são proporcionais à razão de semelhança. Depois, observamos que expansões ou contrações, que transformam um triângulo em um triângulo semelhante, levam a altura do primeiro triângulo na altura do segundo, pois expansões ou contrações são apenas mudanças de escala, conforme o Exemplo 1. Assim, o comprimento H da altura do triângulo PMN, relativa ao lado MN, é a metade da altura do triângulo PQR, relativa ao lado QR. Como essa segunda altura mede 12,0cm, temos que $H = 6$cm.

A distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ então é igual a 6cm também. Contudo, veja que essa distância entre as paralelas é igual à soma das alturas dos triângulos MTN e RTQ, baixadas a partir do vértice comum T. Por outro lado, se h é a altura do triângulo MTN, então a altura do triângulo RTQ é igual a $2h$. Aqui, estamos utilizando novamente a discussão do parágrafo anterior: a razão de semelhança entre essas duas alturas é igual à razão de semelhança entre os triângulos, que é $1/2$, como vimos anteriormente. Logo, $h + 2h = 6$, ou seja, $h = 2$cm. A alternativa correta é a da letra (d).

Exercício 1.24 Um professor enuncia o seguinte teorema: "qualquer triângulo pode ser dividido em p triângulos semelhantes, com $p > 1$, de tal modo que triângulos adjacentes têm exatamente um lado comum ou um vértice comum". Qual é o menor valor de p, maior que 1, para o qual o teorema do professor é verdadeiro?

(a) 2.
(b) 3.
(c) 4.
(d) 6.
(e) 8.

Solução. Na Figura 1.7, sejam D, E e F os pontos médios de AB, AC e BC respectivamente. Observe que os triângulos ADE, FEA, EFC e DBF são quatro triângulos congruentes, logo semelhantes, que dividem ABC satisfazendo as condições da questão.

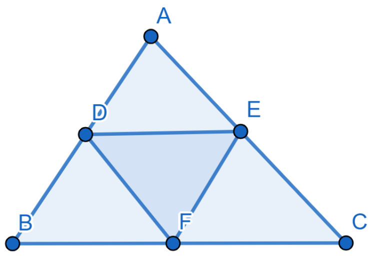


Figura 1.7: quatro triângulos congruentes.

Suponha que podemos dividir ABC em dois triângulos conforme o enunciado da questão. Nesse caso, necessariamente temos a situação esboçada na Figura 1.8.

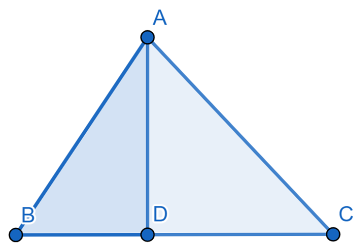


Figura 1.8

Considere o caso em que o triângulo ABC seja acutângulo – os seus ângulos são agudos – e escaleno – os seus lados são, dois a dois, distintos. Se $\angle ADB > \angle ADC$ então $\angle ADB$ é obtuso e $\angle ADC$ é agudo pois a soma desses ângulos é igual a 180 graus. Assim, o triângulo ADB é obtusângulo e o triângulo ADC é acutângulo, logo não podem ser semelhantes. Então, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Assim, para que os triângulos ADB e ADC sejam semelhantes, temos que ou $\angle BAD = \angle CAD$ ou $\angle BAD = \angle ACD$. No primeiro caso, o triângulo ABC é isósceles, contradizendo a hipótese de ele ser escaleno. No segundo caso, $\angle BAD + \angle DAC = 90°$, logo BAC é um triângulo retângulo, o que é um absurdo. Assim, não podemos dividir ABC em dois triângulos conforme o enunciado da questão.

Suponha, agora, que podemos dividir ABC em três triângulos conforme o enunciado da questão. Então, uma das situações dentre as esboçadas nas figuras 1.9, 1.10 e 1.11 deve ocorrer.

Considere o caso em que o triângulo ABC, na Figura 1.9, seja acutângulo. Observe, então, que um dos triângulos ABD, ADE e AEC é obtusângulo, enquanto um dos outros dois não é. Logo, esse triângulo que é obtusângulo e o que não é, formam um par de triângulos não semelhantes.

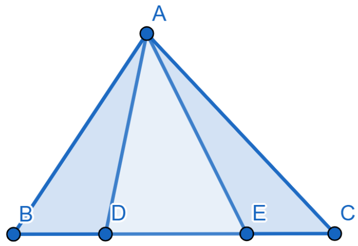


Figura 1.9

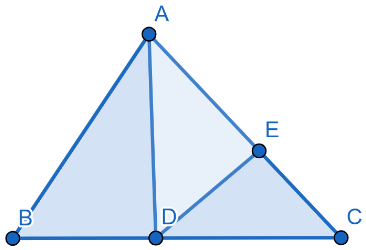


Figura 1.10

Na Figura 1.10, o triângulo ABC é dividido nos triângulos ABD, DEA e DEC. Se o triângulo ADB é obtusângulo, então o triângulo ADC é acutângulo. Conforme vimos na análise da Figura 1.8, isso implica que ambos os triângulos DEA e DEC são retângulos, logo não podem ser semelhantes ao triângulo ADB. Se o triângulo ADB é acutângulo, ele não pode ser semelhante a ambos os triângulos DEA ou DEC pois pelo menos um desses triângulos têm ângulo reto ou obtuso no vértice E. Assim, ADB é retângulo com ângulo reto no vértice B.

Nessa situação, para que os triângulos ADE e DEC sejam semelhantes, é preciso que os ângulos $\angle DEC$ e $\angle DEA$ sejam ambos retos, conforme vimos na análise da Figura 1.8.

Por hipótese, ABC não é isósceles, logo $\angle ABD \neq \angle ACD$. Por conseguinte, a hipótese da semelhança entre os triângulos ADB, AED e DEC implica que

$$\angle ABD = \angle EDC = \angle EAD.$$

Assim, $\angle DAE + \angle BAD = \angle ABD + \angle BAD = 90$, ou seja, ABC é retângulo em A. Logo o triângulo ABC não pode ser escaleno acutângulo.

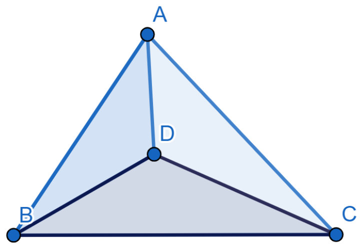


Figura 1.11

Como nos outros casos analisados, suponha ABC escaleno acutângulo na Figura 5. Como um dos três triângulos ADB, ADC e BDA é obtusângulo no vértice D, os três triângulos são obtusos nesse vértice. Seja AD o menor dentre AD, DB e DA. Assim, a hipótese dos triângulos ADB, ADC e BDA serem semelhantes implica que $AD/AB = AD/BC$, ou seja, que $AB = AC$, pois essas razões são o quociente do menor lado que compõe o ângulo obtuso pelo lado oposto ao ângulo obtuso nos triângulos ADB e ADC. Então o triângulo ABC é isósceles, uma contradição.

1.6 – Exercícios Propostos

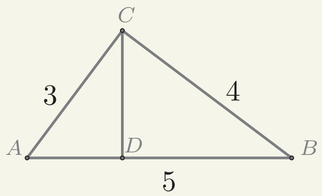
Nível 1

Exercício 1.25 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

(a) ( ) Dois triângulos equiláteros são necessariamente semelhantes.
(b) ( ) Dois triângulos isósceles são necessariamente semelhantes.
(c) ( ) Dois triângulos retângulos são necessariamente semelhantes.
(d) ( ) Dois triângulos retângulos isósceles são necessariamente semelhantes.
(e) ( ) Dois losangos são necessariamente semelhantes.

Exercício 1.26 O triângulo ABC é retângulo com ângulo reto no vértice C. Sabendo que o segmento CD é perpendicular ao lado AB, determine o comprimento de CD. São dados $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = 3$.

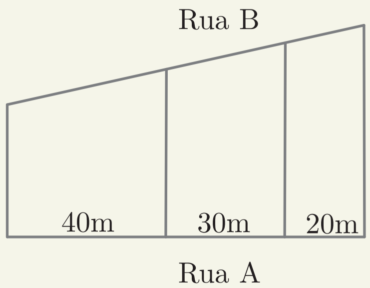
(a) 1,0.
(b) 1,2.
(c) 2,4.
(d) 2,8.
(e) 3,2.



Exercício 1.27 Calcule o comprimento dos segmentos AD e DB, traçados no triângulo descrito no exercício 1.26.

Exercício 1.28 (FUVEST-SP, adaptada) Três terrenos têm frentes para a Rua A e para a Rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua A. Qual é a medida de frente para a Rua B, em metros, do lote do meio, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 metros?

(a) 40.
(b) 50.
(c) 60.
(d) 70.
(e) 80.



Exercício 1.29 Dois retângulos são semelhantes. O primeiro deles mede 10 centímetros de largura por 8 centímetros de comprimento e o segundo mede 20 centímetros de largura por 16 centímetros de comprimento. Qual é a razão de semelhança entre a área do retângulo maior e a área do retângulo menor?

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.

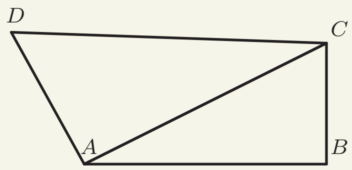
(e) 5.

Exercício 1.30 (CPAEAM - 2019) Os lados de um triângulo medem 30, 70 e 80 centímetros. Ao traçarmos a altura desse triângulo em relação ao maior lado, dividiremos esse lado em dois segmentos. Qual é o valor do menor segmento em centímetros?

(a) 15.
(b) 14.
(c) 13.
(d) 12.
(e) 11.

Exercício 1.31 (FUVEST-SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 metros. Nesse mesmo instante, a sombra, de um bastão vertical de 1 metro de altura mede 0,6 metro. Qual é a altura do poste?

Exercício 1.32 Os triângulos ABC e CAD na figura abaixo são semelhantes.

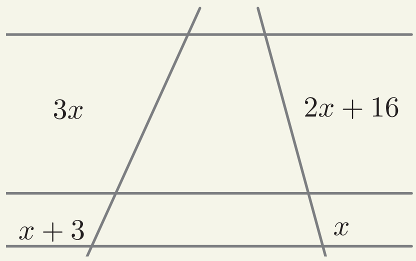


Sabe-se que o ângulo $\hat{B}$ mede 90°, que $AC = 5$ e $AB = 4$. Qual é a medida de CD?

(a) 5,25.
(b) 5,5.
(c) 5,75.
(d) 6,25.
(e) 6,5.

Exercício 1.33 Determine o valor de x na figura abaixo, que traz três retas paralelas e duas retas transversais.

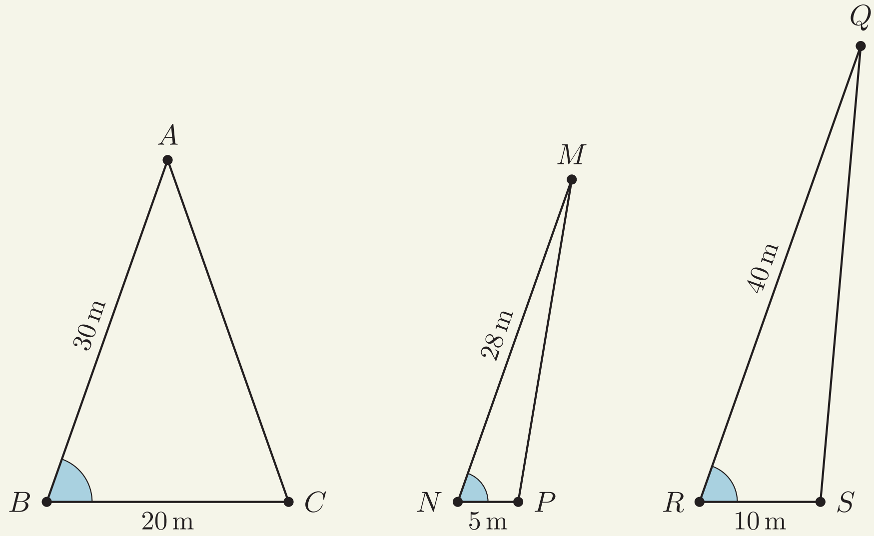
(a) 10.
(b) 18.
(c) 24.
(d) 30.
(e) 36.



Exercício 1.34 (Cesgranrio) Certa noite, uma moça de 1,50 m de altura estava a dois metros de distância de um poste de luz de 4 m de altura. O comprimento da sombra da moça no chão era de

(a) 0,75 m.
(b) 1,20 m.
(c) 1,80 m.
(d) 2,40 m.
(e) 3,20 m.

Exercício 1.35 Nos triângulos da figura, os ângulos marcados têm medidas iguais. Assinale a alternativa correta.



(a) Os triângulos ABC e MNP são semelhantes.
(b) Os triângulos ABC e QRS são semelhantes.
(c) Os triângulos MNP e QRS são semelhantes.
(d) Os triângulos ABC, MNP e QRS são semelhantes.
(e) Nenhum triângulo é semelhante a qualquer outro.

Exercício 1.36 Com o objetivo de descobrir a altura de uma construção, João mediu a sombra do edifício e, logo após, mediu sua própria sombra. A sombra da construção tinha 8 metros e a de João, que tem 1,7 metros de altura, media 0,2 metros. Qual é a altura da construção?

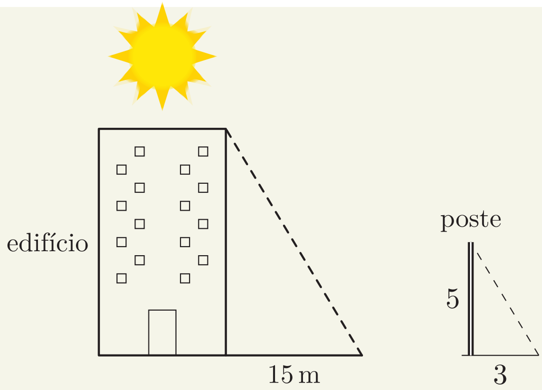
(a) 56 m.
(b) 68 m.
(c) 144 m.
(d) 40 m.
(e) 30 m.

Exercício 1.37 (Escola de Aprendizes de Marinheiro - 2017) Um prédio projeta no solo uma sombra de 30 m de extensão no mesmo instante em que uma pessoa de 1,80 m projeta uma sombra de 2,0 m. Pode-se afirmar que a altura do prédio vale

(a) 27 m.
(b) 30 m.
(c) 33 m.
(d) 36 m.
(e) 40 m.

Exercício 1.38 (Unesp) A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. A altura do prédio, em metros, é

(a) 25 m.
(b) 29 m.
(c) 30 m.
(d) 45 m.
(e) 75 m.



Nível 2

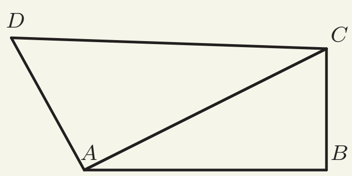
Exercício 1.39 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

(a) ( ) Se F_1, F_2 e F_3 são figuras planas tais que F_1 é semelhante a F_2 e F_2 é semelhante a F_3, então F_1 é semelhante a F_3.
(b) ( ) Se F e F' são duas figuras semelhantes pela correspondência que leva, respectivamente, A, $B \in F$ a A', $B' \in F'$ e $AB = A'B'$, então as figuras F e F' são congruentes.
(c) ( ) Se um segmento divide um triângulo T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2, então os triângulos são congruentes.
(d) ( ) Se um segmento divide um triângulo retângulo T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2, então os triângulos são congruentes.
(e) ( ) Se um segmento divide um triângulo isósceles T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2, então os triângulos são congruentes.

Exercício 1.40 Um segmento divide um triângulo T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2. Assinale a opção com o valor máximo que o ângulo interno de T_1 e T_2 pode ter.

(a) $45°$.
(b) $60°$.
(c) $90°$.
(d) $120°$.
(e) $135°$.

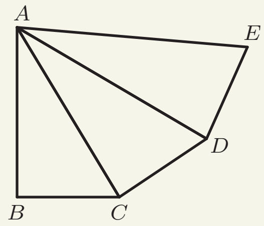
Exercício 1.41 Os triângulos ABC e CAD na figura abaixo são semelhantes.



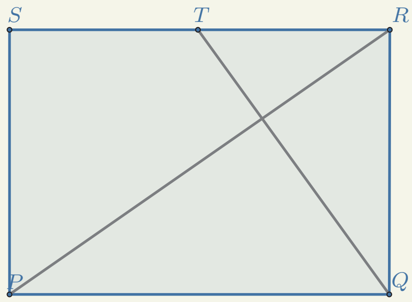
Sabe-se que as áreas dos triângulos ABC e CAB medem $24\,\text{cm}^2$ e $37{,}5\,\text{cm}^2$, respectivamente, e que $AC = 5\,\text{cm}$. Qual é a medida de CD em centímetro?

(a) 10,5.
(b) 11.
(c) 11,5.
(d) 12,5.
(e) 13.

Exercício 1.42 Na figura abaixo os triângulos ABC, ACD e ADE são semelhantes. Se $AC/AB = 5/4$, qual é o valor de AE/AC?



Exercício 1.43 Diga quantos triângulos semelhantes ocorrem na figura abaixo, sabendo que $PQRS$ é um retângulo e $RS = 2RT$.



Exercício 1.44 (CPACN-2019) O perímetro do triângulo ABC mede x unidades. O triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e sua área é 36 vezes a área do Triângulo ABC. Nessas condições, é correto afirmar que a área do triângulo DEF é

(A) $2x$.
(B) $3x$.
(C) $6x$.
(D) $9x$.
(E) $10x$.

Exercício 1.45 A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, 2,2 metros de altura. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

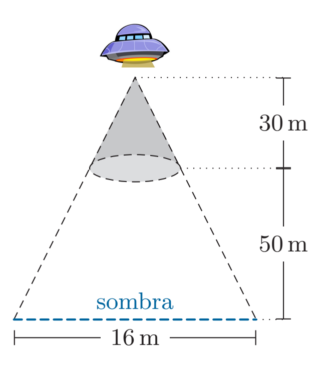
(a) 1,16 metros.
(b) 3,00 metros.
(c) 5,40 metros.
(d) 5,60 metros.
(e) 7,04 metros.

Exercício 1.46 Tales de Mileto, ao ser desafiado a medir a altura da Grande Pirâmide de Quéops, poderia recorrer ao seguinte método: na tarde de um certo dia, ele marcaria no chão dois pontos P_1 e P_2 correspondentes à sombra do topo da pirâmide em horários diferentes. Ao mesmo tempo, marcaria os pontos p_1 e p_2 em que a extremidade de um bastão vertical, de um metro, faz sombra no chão. No tempo de Tales, a grande pirâmide tinha cerca de 146 metros de altura. Qual seria a distância de P_1 a P_2, medida por Tales, se a distância de p_1 a p_2 fosse 15 centímetros?

(a) Cerca de 1,46 metros.
(b) Cerca de 14,6 metros.

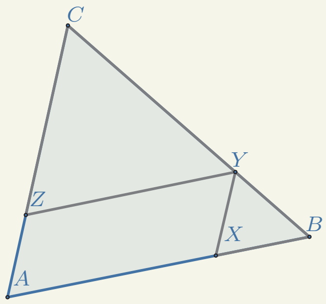
(c) Cerca de 2,19 metros.
(d) Cerca de 22 metros.
(e) Cerca de 3 metros.

Exercício 1.47 (UNIRIO-adaptada) Numa cidade do interior, surgiu à noite um objeto voador não identificado, em forma de disco plano, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um disco voador, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura abaixo. Pode-se afirmar que o raio do disco plano mede, em metros, aproximadamente



(a) 3,0.
(b) 3,5.
(c) 4,0.
(d) 4,5.
(e) 5,0.

Exercício 1.48 (CPAEAM, 2018, Prova Amarela, Questão 26) Analise a figura a seguir.

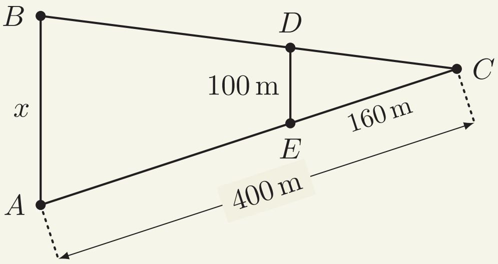


Na figura acima, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$. Se o ângulo A mede 40°, então o ângulo XYZ mede

(a) 40°.
(b) 50°.
(c) 60°.
(d) 70°.
(e) 90°.

Exercício 1.49 Na figura abaixo, os segmentos BA e DE são paralelos. Se $\overline{AC} = 400\,\text{m}$ e $\overline{CE} = 160\,\text{m}$, qual é o valor de x?

(a) 144 m.
(b) 250 m.
(c) 225 m.
(d) 275 m.
(e) 370 m.



Exercício 1.50 Qual é a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes, cujas áreas medem $36\,\text{cm}^2$ e $25\,\text{cm}^2$, respectivamente?

(a) 1,0.
(b) 1,1.
(c) 1,2.
(d) 1,3.
(e) 1,4.

Exercício 1.51 Dados dois polígonos semelhantes, assinale a opção que traz a área do menor, sabendo que a área do maior é igual a $64\,\text{cm}^2$ e que a razão de semelhança entre eles é de 0,5.

(a) $32\,\text{cm}^2$.
(b) $16\,\text{cm}^2$.
(c) $8\,\text{cm}^2$.
(d) $4\,\text{cm}^2$.
(e) $2\,\text{cm}^2$.

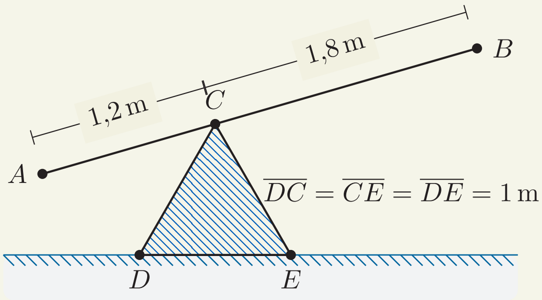
Nível 3

Exercício 1.52 (ENA-Profmat-2019, Questão 8) A hipotenusa de um triangulo retângulo isósceles T_1, cujos catetos medem l, é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_2. A hipotenusa de T_2 é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_3, cuja hipotenusa é o cateto do triangulo retângulo isósceles T_4 e assim por diante. O valor de l, que torna a medida da hipotenusa de T_{100} igual a 2^{50}, é

(a) $\sqrt{2}$.
(b) 1.
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(d) 2.
(e) $2\sqrt{2}$.

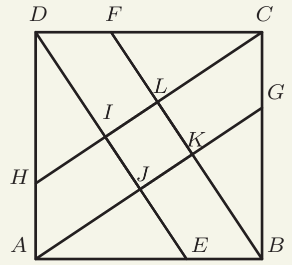
Exercício 1.53 (Unesp) Uma gangorra é formada por uma haste rígida AB, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto C, como mostrado na figura. Quando a extremidade B da haste toca o chão, a altura da extremidade A em relação ao chão é de

(a) $\sqrt{3}\,\text{m}$.
(b) $\frac{3}{\sqrt{3}}\,\text{m}$.
(c) $\frac{6\sqrt{3}}{5}\,\text{m}$.
(d) $\frac{5\sqrt{3}}{6}\,\text{m}$.
(e) $2\sqrt{2}\,\text{m}$.

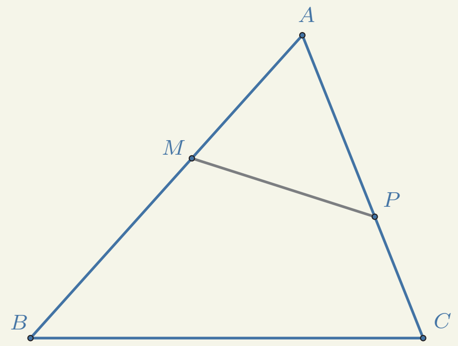


Exercício 1.54 (ENA, PROFMAT, 2019, Questão 15) Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Além disso, AG é paralelo a CH, BF é paralelo a DE, $FC = 2DF$ e $DH = 2AH$. A área do quadrilátero $IJKL$, que possui como vertices os pontos de interseção dos segmentos AG, CH, BF e DE, representa que fração da área do quadrado $ABCD$?

(a) 144 m.
(b) 250 m.
(c) 225 m.
(d) 275 m.
(e) 370 m.



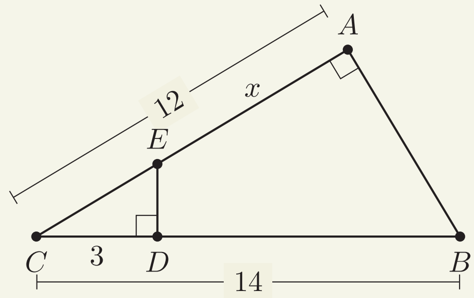
Exercício 1.55 Os triangulos ABC e AMP, da figura abaixo, são semelhantes e os lados MP e BC não são paralelos.



É sempre correto afirmar que

(a) os triângulos ABC e BPC são semelhantes.
(b) os triângulos BPC e BMP são semelhantes.
(c) os ângulos AMP e ABP são suplementares.
(d) os ângulos ABC e MPC são suplementares.
(e) os ângulos MPB e MBP são congruentes.

Exercício 1.56 Em relação à figura a seguir, assinale a opção que traz o valor de x.



(a) 5,0.
(b) 8,5.
(c) 10,0.
(d) 12,0.
(e) 15,0.

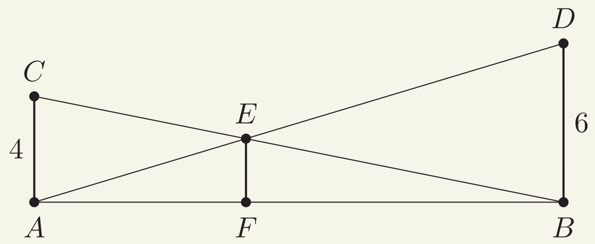
Exercício 1.57 (Colégio Militar - RJ - 2015) Em um triângulo ABC, os pontos D e E pertencem, respectivamente, aos lados AB e AC e são tais que os segmentos DE e BC são paralelos. Se F é um ponto de AB tal que EF é paralelo a CD e as medidas de AF e FD são, respectivamente, 4 e 6, a medida do segmento DB é

(a) 15.
(b) 10.
(c) 20.
(d) 16.
(e) 36.

Exercício 1.58 (Unicamp) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 metros sobre a rampa, está a 1,5 metros de altura em relação ao solo.

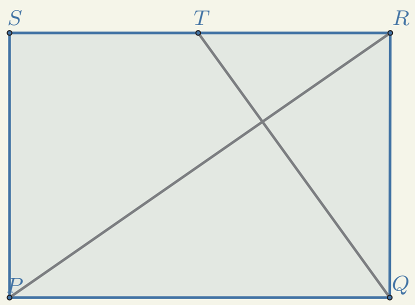
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

Exercício 1.59 (Enem - 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes, de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real, na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados. Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?



(a) 1,0 m.
(b) 2,0 m.
(c) 2,4 m.
(d) 3,0 m.
(e) 3,3 m.

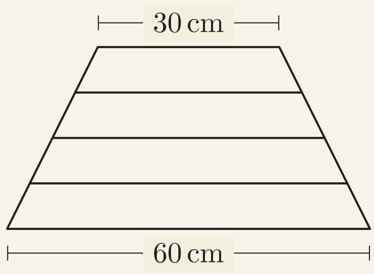
Exercício 1.60 (Canguru 2014 - Nível S - Questão 22) Na figura, T é o ponto médio do lado RS do retângulo PQRS. O segmento QT é perpendicular à diagonal PR. Qual é a razão $PQ : QR$?



(a) $2 : 1$.
(b) $\sqrt{3} : 1$.
(c) $3 : 2$.
(d) $5 : 4$.
(e) $\sqrt{2} : 1$.

Exercício 1.61 (ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme mostrado na figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em centímetros, deve ser

(a) 144.
(b) 180.
(c) 210.
(d) 225.
(e) 240.



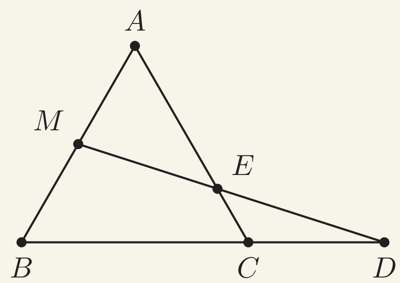
Exercício 1.62 (ENA-PROFMAT-2016-Questão 36) O ponto P é marcado sobre o lado BC de um triângulo ABC, e, a partir dele, são traçados os segmentos PM e PN, paralelos aos lados AC e AB respectivamente, com $M \in AB$ e $N \in AC$. Sabendo que $BC = 4$ e que a área do paralelogramo $AMPN$ é igual a $3/8$ da área do triângulo ABC, o maior valor possível para a medida de BP é igual a

(A) 1.
(B) $\sqrt{2}$.
(C) 2.
(D) $\sqrt{6}$.
(E) 3.

Nível 4

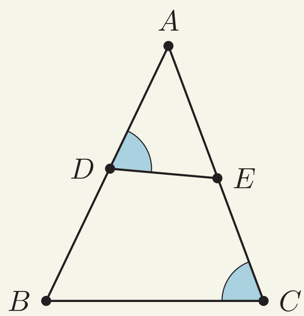
Exercício 1.63 (MACK-SP) O triangulo ABC da figura é equilátero. Se $AM = MB = 5$ e $CD = 6$, o valor de AE vale

(a) $76/11$.
(b) $77/11$.
(c) $78/11$.
(d) $79/11$.
(e) $80/11$.



Exercício 1.64 (Puccamp) Os triângulos ABC e AED, representados na figura abaixo, são semelhantes, sendo o ângulo ADE congruente ao ângulo ACB. Se $BC = 16\,\text{cm}$, $AC = 20\,\text{cm}$, $AD = 10\,\text{cm}$ e $AE = 10{,}4\,\text{cm}$, o perímetro do quadrilátero $BCED$, em centímetros, é igual a

(a) 32,6.
(b) 36,4.
(c) 40,8.
(d) 42,6.
(e) 44,4.



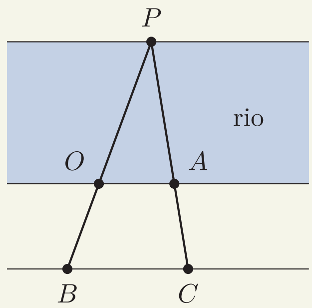
Exercício 1.65 (ENA-PROFMAT-2016-Questão 26) ABC é um triângulo tal que $AB = 6$ e $BC = 9$.

Seja P um ponto sobre o lado BC com $BP = 4$. Sabendo que $P\hat{A}B = x$ e $P\hat{A}C = y$, a medida do ângulo $B\hat{P}A$ é igual a

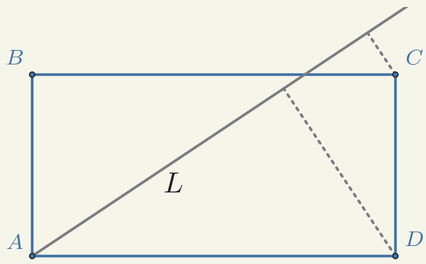
(A) $x + y$.
(B) $x - y$.
(C) $2x - y$.
(D) $2x + y$.
(E) $x + 2y$.

Exercício 1.66 (Unesp) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa calcular sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso ele marca, com estacas, outros pontos A, B e C do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, $OA = 25\,\text{m}$, $BC = 40\,\text{m}$ e $OB = 30\,\text{m}$, conforme mostrado na figura abaixo. A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é

(a) 30.
(b) 35.
(c) 40.
(d) 45.
(e) 50.



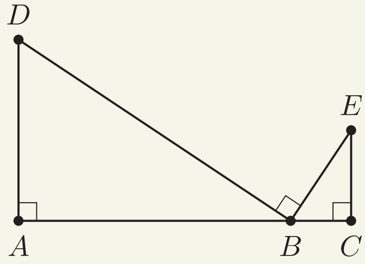
Exercício 1.67 (Canguru 2014, Nível S, Questão 19) Uma reta L passa pelo vértice A de um retângulo $ABCD$. A distância do ponto C à reta L é igual a 2 e a distância do ponto D à reta L é igual à 6. Se $AD = 2AB$, qual é o valor de AD.



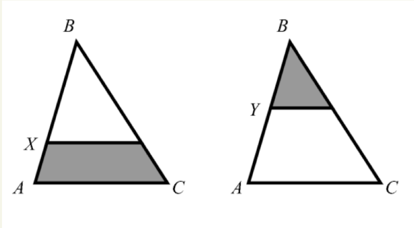
(A) 10.
(B) 12.
(C) 14.
(D) 16.
(E) $4\sqrt{3}$.

Exercício 1.68 (Unesp) Na figura abaixo, B é um ponto do segmento de reta AC e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos. Se $AD = 6\,\text{dm}$, $AC = 11\,\text{dm}$ e $EC = 3\,\text{dm}$, as possíveis medidas de AB, em dm, são

(a) 6,5 e 4,5.
(b) 7,5 e 3,5.
(c) 8,0 e 3,0.
(d) 7,0 e 4,0.
(e) 9,0 e 2,0.



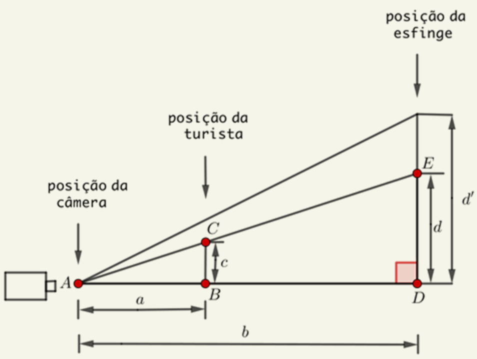
Exercício 1.69 (Canguru 2015, Nível J, Questão 24) No triângulo ABC, podemos traçar as paralelas à base AC, pelos pontos X e Y, tal que as áreas das regiões cinzentas sejam iguais. Se a razão $BX : XA$ é igual a $4:1$, então qual é a razão $BY : YA$?



(a) $1:1$.
(b) $2:1$.
(c) $3:1$.
(d) $3:2$.
(e) $4:3$.

Exercício 1.70 (ENEM) A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura à sua direita mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge. Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a $2/3$ da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por d e d', respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por b e que a distância da turista à mesma lente é representada por a, pergunta-se: qual é a razão entre b e a?


Fotografia obtida da internet.



(a) $b/a = d'/c$.
(b) $b/a = 2d/3c$.
(c) $b/a = 3d'/2c$.
(d) $b/a = 2d'/3c$.
(e) $b/a = 2d'/c$.

Exercício 1.71 (Maio 2000) Seja ABC um triângulo retângulo em A e tal que $AC = 1$. A bissetriz do ângulo $\angle BAC$ corta a hipotenusa em R. A reta perpendicular à reta AR, passando por R, corta AB em seu ponto médio. Qual é a medida do lado AB?

Exercício 1.72 (Maio 1996) Um terreno $ABCD$ tem a forma de trapézio retangular, sendo AB a base menor. O ângulo $\hat{A}$ é reto, AB mede 30 metros, AD mede 20 metros e DC mede 45 metros. Este terreno deve ser dividido em duas partes de mesma área traçando uma paralela ao lado AD. A qual distância de D devemos traçar a paralela?

Exercício 1.73 Uma reta, passando pelo vértice A do quadrado $ABCD$, intersecta o lado CD em E e a semirreta $\overrightarrow{BC}$ em F. Prove que

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

Exercício 1.74 Um ponto E é escolhido no interior do lado AC de um triângulo ABC. São escolhidos pontos D e F sobre AB e BC, respectivamente, de modo que DE é paralelo a BC e EF é paralelo a AB. Prove que

$$[BDEF] = \sqrt{[ADE][EFG]},$$

onde $[BDEF]$, $[ADE]$ e $[EFG]$ denotam as áreas do quadrilátero $BDEF$ e dos triânguloas ADE e EFG, respectivamente.

2 Razões e Proporções

2.1 – Variáveis Diretamente Proporcionais

Acima vimos exemplos de variáveis que dependem proporcionalmente uma da outra, ou seja, de variáveis diretamente proporcionais. Isto significa que a razão entre estas variáveis é sempre a mesma:

$$\frac{y}{x} = \text{constante.}$$

Ou seja, dividindo-se os valores da variável y pelos valores *correspondentes* da variável x, encontramos sempre uma constante, a razão entre estas variáveis. Escrevemos

$$\frac{y}{x} = a$$

ou

$$y = ax.$$

Supomos, sempre, que a razão a é um número diferente de zero.

Em outras palavras, as variáveis x e y são diretamente proporcionais quando, aumentando – respectivamente, diminuindo – o valor da variável x, o valor da variável y aumenta – respectivamente, diminui – *na mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela.

Valores de x	3	4	5	6	10	35
Valores de y	9	12	15	18	30	105

Observemos que, dividindo os valores de y pelos valores correspondentes de x, sempre obtemos o mesmo resultado:

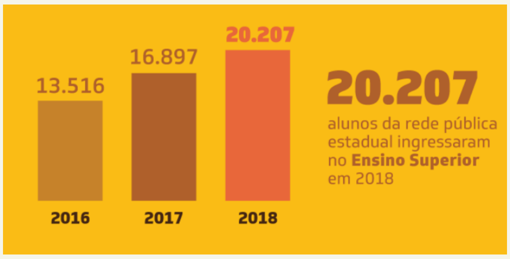
$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{30}{10} = \frac{105}{35} = 3.$$

Portanto, a razão entre as variáveis y e x é constante e igual a 3. Como esta razão é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 40$ é $y = 3 \times 40 = 120$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 135$ é

$$x = \frac{1}{3} \times 135 = 45.$$

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos de problemas envolvendo variáveis que são diretamente proporcionais.

Exercício 2.1 Nas últimos anos, tem crescido o número de alunos da escola pública estadual (vocês!) no ensino superior. Veja o quadro abaixo, com dados dos anos de 2016 a 2018.



Percebemos que o número de alunos aumenta cerca de 3.300 a cada ano. Se esta tendência persistir, quantos alunos da rede pública estadual se espera que entrem no ensino superior em 2021?

Solução. Supondo que a tendência seja mantida, isto é, que a cada ano ingressem *mais* 3.300 alunos da rede pública no ensino superior, o número y, *a mais* de ingressos, dependeria linearmente do número x, de anos desde 2016, da forma

$$y = 3.300x.$$

Dada esta tendência, em 2021, ou seja, quando $x = 2021 - 2016 = 5$, deveremos ter

$$y = 3.300{\times}5 = 16.500$$

alunos *a mais* do que em 2016. Portanto, o número total deve ser, em 2021, cerca de

$$13.516 + 16.500 = 30.016$$

alunos da rede pública estadual nas universidades.

Exercício 2.2 Dois amigos, professores de Matemática, foram almoçar em um restaurante *self-service*. Um deles serviu-se de 360 gramas e pagou R$ 14,40, enquanto o outro pagou R$ 16,80 por 420 gramas de comida. Qual o valor de um quilograma de comida neste restaurante?

Solução. O valor pago depende proporcionalmente, ou linearmente, do peso. A razão entre o valor pago e o peso é dada por

$$\frac{14{,}40}{360} = \frac{16{,}80}{420} = 0{,}04,$$

ou seja, 4 centavos de real por grama de comida. Assim, o preço de uma quilograma de comida é $0{,}04{\times}1.000 = 40$ reais. De modo geral, se x representa o peso da comida em gramas e y o valor a ser pago, temos

$$y = 0{,}04x.$$

2.2 – Variáveis Inversamente Proporcionais

Veremos, agora, situações em que duas variáveis são inversamente proporcionais. Isto significa apenas que o produto, e não a razão, destas variáveis permanece constante. Ou seja, multiplicando o valor de uma dessas variáveis – digamos, a variável x – pelo valor correspondente da outra – digamos, a variável y, obtém-se sempre a mesma constante, isto é,

$$yx = \text{constante}$$

Dito de outra forma, existe um número real não nulo k tal que

$$yx = k$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{\frac{1}{x}} = k.$$

Assim, as variáveis x e y são inversamente proporcionais quando, aumentando – respectivamente, diminuindo – o valor da variável x, o valor de variável y diminui – respectivamente, aumenta – na *mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela.

Valores de x	4	5	6	10	12	24
Valores de y	30	24	20	12	10	5

Observemos que, multiplicando os valores de y pelos valores correspondentes de x, obtemos sempre o mesmo resultado:

$$4{\times}30 = 5{\times}24 = 6{\times}20 = 10{\times}12 = 12{\times}10 = 24{\times}5 = 120.$$

Portanto, o produto das variáveis x e y é constante e igual a 120. Como este produto é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 30$ é $y = 120{\times}\frac{1}{30} = 4$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 6$ é $x = 120{\times}\frac{1}{6} = 20$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos e problemas envolvendo variáveis que são inversamente proporcionais.

Exercício 2.3 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um pai resolve premiar seus dois filhos com R$ 140,00. Este valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais ao número de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2 e 5. Então, a quantia a ser recebida pelo filho com menos faltas é:

A) R$ 7,00.
B) R$ 20,00.
C) R$ 40,00.
D) R$ 100,00.

Solução. Pelo enunciado, essas partes são inversamente proporcionais a 2 e 5. Portanto, são *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{5}$. Logo, a soma destas partes, ou seja, os 140 reais, são *diretamente* proporcionais à soma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}.$$

Logo, a primeira parte está para o todo, isto é, para 140 reais, como $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Portanto, é igual a

$$140\times\frac{\frac{5}{10}}{\frac{7}{10}}=140\times\frac{5}{7}=20\times 5=100 \text{ reais.}$$

Da mesma forma, a segunda parte está para 140 reais como $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Logo, é dada por

$$140\times\frac{\frac{2}{10}}{\frac{7}{10}}=140\times\frac{2}{7}=20\times 2=40 \text{ reais.}$$

Solução alternativa. Sejam a e b as partes dadas pelo pai aos filhos. Sendo assim, temos

$$a+b=140 \tag{2.1}$$

e

$$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}},$$

ou seja

$$2a=5b. \tag{2.2}$$

Note que, multiplicando os dois lados de (2.1) por 2, obtém-se

$$2a+2b=280.$$

Agora, levando em conta a igualdade em (2.2), deduz-se que

$$5b+2b=280.$$

Logo,

$$7b=280, \quad \text{ou seja,} \quad b=40.$$

Assim, a parte menor, que cabe ao filho que faltou mais, é igual a $b=40$ reais. Por conseguinte, a parte maior, que cabe ao filho que faltou menos, é dada por $a=100$ reais. A alternativa correta é a da letra D.

De modo geral, dividir um número, digamos, 140, em partes, a e b, *inversamente* proporcionais a dois números (positivos) m e n, significa dividi-lo em partes *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$:

$$a+b=140 \quad \text{onde} \quad \frac{a}{1/m}=\frac{b}{1/n}.$$

A soma destas partes é, portanto, diretamente proporcional a

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn},$$

ou seja,

$$\frac{a}{1/m} = \frac{b}{1/n} = \frac{a+b}{1/m+1/n}.$$

Portanto, as partes são diretamente proporcionais a

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{mn}{m+n} = \frac{n}{m+n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n}\cdot\frac{mn}{m+n} = \frac{m}{m+n},$$

nesta ordem, isto é,

$$\frac{a}{n/(m+n)} = \frac{b}{m/(m+n)} = a+b.$$

Exercício 2.4 (Canguru 2014, Nível J, Questão 10) O perímetro da roda maior de uma bicicleta é 4,2 metros e o perímetro da menor é 0,9 metro. Num certo momento, as duas válvulas dos pneus estão em seu ponto mais baixo e a bicicleta caminha para a esquerda. Depois de quantos metros as duas válvulas estarão novamente em sua posição mais baixa?

A) 4,2.
B) 6,3.
C) 12,6.
D) 25,2.

Solução. O produto do perímetro (comprimento da circunferência) pelo número de voltas de cada roda é igual à distância percorrida pela bicicleta. Assim, a condição do enunciado impõe que tenhamos

$$4{,}2\times m = 0{,}9\times n,$$

onde m e n são números (inteiros de voltas) das rodas, maior e menor, respectivamente, até que as válvulas estejam em suas posições mais baixas. Logo,

$$42\times m = 9\times n$$

ou, simplificando,

$$14\times m = 3\times n.$$

A igualdade anterior pode ser reescrita como

$$2\times 7\times m = 3\times n.$$

Os menores valores (inteiros positivos) para os quais esta igualdade ocorre são $m = 3$ e $n = 2\times 7 = 14$, de modo que

$$2\times 7\times 3 = 3\times 2\times 7$$

Assim, a distância percorrida, até que as válvulas voltem às posições mais baixas pela primeira vez, é $4{,}2\times 3 = 12{,}6$ metros, o que corresponde à alternativa da letra C).

Exercício 2.5 (UNICAMP) A quantia de R$ 1.280,00 será dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se

a. a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
b. A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

Solução. a) Dizer que as três partes são *diretamente proporcionais* a $8, 5$ e 7 significa que são proporcionais a

$$\frac{8}{8+5+7} = \frac{8}{20}, \qquad \frac{5}{8+5+7} = \frac{5}{20} \quad \text{e} \quad \frac{7}{8+5+7} = \frac{7}{20}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{8}{20}\times 1.280 = 512, \qquad \frac{5}{20}\times 1.280 = 320 \quad \text{e} \quad \frac{7}{20}\times 1.280 = 448$$

reais.

b) Dizer que as três partes são *inversamente proporcionais* a $5, 2$ e 10 significa que são diretamente proporcionais a $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{10}$, respectivamente. Portanto, a soma dessas partes é diretamente proporcional a

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}.$$

Logo, as partes são, respectivamente, diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{2}{8}, \qquad \frac{\frac{5}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{2}{8}\times 1.280 = 320, \qquad \frac{5}{8}\times 1.280 = 800 \quad \text{e} \quad \frac{1}{8}\times 1.280 = 160$$

reais.

Exercício 2.6 Uma corrente elétrica de 20 Ampères percorre um fio condutor que se bifurca em dois, o primeiro ligado a uma resistência de 4 Ohms e o outro a uma resistência 6 Ohms. Que proporções da corrente total passarão por cada um destes dois fios?

Solução. Aqui, trata-se um problema de divisão em partes inversamente proporcionais. De fato, a corrente que passa por um fio condutor é, ao menos para valores pequenos, *inversamente proporcional* à chamada *resistência* do material deste fio. Portanto, as proporções da correntes nos fios com resistências 4 e 6 Ohms, respectivamente, são iguais a

$$20\times\frac{6}{4+6} = 12 \text{ Ampères}$$

e

$$20\times\frac{4}{4+6} = 8 \text{ Ampères}.$$

2.3 – Exercícios Resolvidos

Nessa seção apresentamos a solução de exercícios com aplicações variadas.

Exercício 2.7 As proporções de rapazes e moças, em duas turmas da segunda série de uma escola de tempo parcial, são ambas iguais a $\frac{3}{4}$. Sabendo que o total de alunos nestas turmas é de 84 alunos, calcule quantas moças há nas duas turmas, ao todo.

Solução. Dizer que a proporção de rapazes e moças em uma turma é igual a $3/4$ é o mesmo que afirmar que podemos dividir a turma em grupos de 7 alunos, com 3 rapazes e 4 moças em cada grupo.

Assim, ao juntarmos as duas turmas do enunciado do problema numa turma de 84 alunos, a proporção de rapazes e moças ainda será igual a $3/4$. De fato, os grupos de 7 estudantes, com 3 rapazes e 4 moças em cada uma das turmas, se conservam ao juntarmos as turmas. Existem então $84/7 = 12$ grupos de 3 rapazes e 4 moças na união das 2 turmas. Logo nessa união há $12\times 4 = 48$ alunas, pois esse é o produto da quantidade 12, de grupos de 7 estudantes, pelo quantidade 4, de moças em cada grupo.

Exercício 2.8 Na construção de um condomínio de casas, os engenheiros responsáveis conseguiram modernizar as técnicas de construção, o que permite dispensar 10% da mão-de-obra, mantendo o mesmo cronograma e qualidade da empreita. Com isto, a construção passou a ter 450 empregados. Quantos empregados havia antes da dispensa de mão-de-obra?

Solução. Esses 450 empregados representam, de acordo com o enunciado

$$100\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100}$$

do total de empregados x que havia antes da dispensa de mão-de-obra. Assim, $0{,}9x = 450$, ou seja,

$$x = \frac{450}{0{,}9} = \frac{450}{(9/10)} = 450\times\frac{10}{9} = 500.$$

A fim de entender melhor a solução acima, podemos arranjar os dados do problema no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 90\% \text{ do custo total} & \text{———} & 450 \text{ empregados} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{———} & x \text{ empregados} \end{array}$$

onde x é o número de empregados antes da dispensa de mão-de-obra. Portanto,

$$\frac{x}{450} = \frac{100}{90},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 100,

$$x = \frac{450\times100}{90} = 5\times100 = 500 \text{ empregados}.$$

Exercício 2.9 (EsSA – 1988) Doze pedreiros fizeram 5 barracões em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia. O número de horas por dia que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazer 10 barracões em 20 dias é

A) 8.
B) 9.
C) 10.
D) 12.
E) 15.

Solução. Observamos, inicialmente, que os doze pedreiros trabalham

$$30\times6 = 180 \text{ horas},$$

ou seja, 6 horas por dia, durante 30 dias, para construir 5 barracões. Portanto, para construir um barracão apenas, os mesmos doze pedreiros trabalhariam cinco vezes menos, ou seja,

$$\frac{180}{5} = 36 \text{ horas}$$

apenas. Logo, um pedreiro sozinho teria que trabalhar doze vezes mais, isto é,

$$12\times36 = 432 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Obviamente, dezoito pedreiros gastariam um tempo 18 vezes menor que um pedreiro, ou seja,

$$\frac{1}{18}\times432 = \frac{12\times36}{18} = \frac{2}{3}\times36 = 24 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Logo, os dezoito pedreiros utilizariam

$$10\times 24 = 240 \text{ horas}$$

para construir 10 barracões. Este é o total de horas trabalhadas pelos 18 pedreiros em 20 dias. Portanto, esta equipe de 18 pedreiros trabalharia

$$\frac{240}{20} = 12 \text{ horas}$$

por dia, trabalhando durante 20 dias.

Observação 2.1 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos

$$\frac{30\times 6\times 12\times 10}{5\times 18\times 20},$$

fração igual a

$$\frac{10\times 12\times 10}{5\times 20} = 12 \text{ horas.}$$

Esta solução pode ser representada no seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} 12 \text{ pedreiros} & \text{———} & 5 \text{ barracões} & \text{———} & 30 \text{ dias} & \text{———} & 6 \text{ horas} \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 18 \text{ pedreiros} & \text{———} & 10 \text{ barracões} & \text{———} & 20 \text{ dias} & \text{———} & x \text{ horas} \end{array}$$

onde

$$\frac{x}{6} = \frac{30\times 10\times 12}{20\times 5\times 18}.$$

Logo,

$$x = 12 \text{ horas,}$$

como já havíamos calculado. Deste modo, obtemos a resposta da questão, a alternativa da letra D).

Exercício 2.10 (Colégio Militar de Brasília – 2008 (adaptada)) Uma montadora recebeu uma encomenda de 40 carros. Para entregá-los, a montadora trabalhou 5 dias, utilizando 6 robôs, de mesmo rendimento, que trabalham 8 horas por dia cada um. Uma outra encomenda foi feita, dessa vez para montar 60 carros. Contudo, um dos robôs apresentou um defeito e não pôde ser usado no trabalho. Para atender o cliente, a montadora precisou, então, trabalhar 12 horas por dia, por alguns dias. O número de dias que a fábrica trabalhou para entregar os dois pedidos foi igual a

A) 5.
B) 6.
C) 11.
D) 12.
E) 13.

Solução. De acordo com o enunciado, são usados 6 robôs para montar 40 carros em um total de

$$5\times 8 = 40 \text{ horas.}$$

Portanto, os seis rôbos montam

$$\frac{40}{40} = 1 \text{ carro por hora.}$$

Assim, gastariam

$$60\times 1 = 60 \text{ horas}$$

para montar 60 carros. Sendo assim, um robô, apenas, consumiria seis vezes mais tempo para montar os 60 carros, isto é, consumiria

$$6\times 60 = 360 \text{ horas}$$

para montar os 60 carros. Logo, cinco robôs levariam cinco vezes menos tempo para montar esses 60 carros, quer dizer,

$$\frac{360}{5} = 72 \text{ horas.}$$

Utilizando os robôs 12 horas por dia, seriam necessários

$$\frac{72}{12} = 6 \text{ dias.}$$

Concluímos, que seriam necessários 6 dias para que 5 robôs, funcionando 12 horas por dia, montassem 60 carros.

Observação 2.2 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos

$$\frac{5\times 8\times 60\times 6}{40\times 5\times 12},$$

fração igual a

$$\frac{60\times 6}{5\times 12} = 6 \text{ dias.}$$

Montamos o seguinte diagrama a partir dos dados no enunciado,

$$\begin{array}{ccccccc}
6 \text{ robôs} & \text{———} & 40 \text{ carros} & \text{———} & 8 \text{ horas} & \text{———} & 5 \text{ dias} \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
5 \text{ robôs} & \text{———} & 60 \text{ carros} & \text{———} & 12 \text{ horas} & \text{———} & x \text{ dias}
\end{array}$$

onde

$$\frac{x}{5} = \frac{8\times 60\times 6}{12\times 40\times 5}.$$

Portanto,

$$x = \frac{5\times 8\times 60\times 6}{12\times 40\times 5} = \frac{60\times 6}{12\times 5} = 6.$$

Assim, concluímos que

$$x = 6 \text{ dias},$$

como já havíamos calculado. Somados aos 5 dias anteriores, temos 11 dias. Assim, obtém-se a resposta da questão, a saber, a alternativa da letra C).

Solução alternativa. Neste problema, a quantidade de carros montada, que indicaremos pela letra Q, depende de três *variáveis:* o número n de robôs em funcionamento, a quantidade de dias d em que estes robôs operam e o total t de horas por dia em que funcionam.

Portanto, Q aumenta *na mesma proporção* em que aumentam n, d ou t. Por exemplo, se tivermos mais robôs operando, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável n, aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (d e t) forem mantidas constantes.

Da mesma forma, se tivermos mais dias de funcionamento dos robôs, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável d, aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (n e t) forem mantidas constantes.

Podemos escrever tudo isto de forma mais abreviada, dizendo que existe um número a fixo tal que

$$Q = a\times n\times d\times t,$$

ou seja, de modo que a razão

$$\frac{Q}{n\times d\times t} = a$$

é sempre constante e igual ao número a.

Voltando à resolução do problema, observamos que, na primeira encomenda, tivemos

$$Q = 40 \text{ carros}$$

com os valores das variáveis n, d e t dados por

$$\begin{aligned} n &= 6 \text{ robôs}, \\ d &= 5 \text{ dias e} \\ t &= 8 \text{ horas}. \end{aligned}$$

Assim, na primeira encomenda, tivemos

$$\frac{Q}{n\times d\times t} = \frac{40}{6\times 5\times 8}.$$

Sobre a segunda encomenda, sabemos que

$$Q = 60 \text{ carros}$$

e que

$$\begin{aligned} n &= 5 \text{ robôs e} \\ t &= 12 \text{ horas}. \end{aligned}$$

No entanto, devemos calcular o valor correspondente da variável d, o número de dias, o qual não foi informado desta vez. Para isso, usamos o fato de que a razão nas duas encomendas foi a mesma, ou seja, que a razão, ou fração,

$$\frac{Q}{n\times d\times t}$$

não muda, embora os valores das variáveis mudem! Assim, igualando estas razões nas duas encomendas, temos

$$\frac{40}{6\times 5\times 8} = \frac{60}{5\times d\times 12}.$$

Logo, simplificando o lado direito da igualdade, temos

$$\frac{40}{6\times 5\times 8} = \frac{1}{d},$$

ou seja,

$$d = \frac{6\times 5\times 8}{40} = 6 \text{ dias}.$$

Exercício 2.11 Com a tecnologia atual, 15 profissionais executam 810 metros quadrados de construção em seis dias, em uma jornada diária de 9 horas de trabalho. Nestas mesmas condições, calcule

(a) quantos profissionais seriam necessários para construir 3.240 metros quadrados em seis jornadas diárias de 9 horas;
(b) quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em duas jornadas diárias de 9 horas;
(c) quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em seis jornadas diárias de 3 horas;
(d) quantos profissionais seriam necessários para construir 3.600 metros quadrados em quatro jornadas diárias de 6 horas;
(e) quantos metros quadrados podem ser construídos com o trabalho de 50 profissionais em quatro jornadas diárias de 6 horas.

Solução. Segundo o enunciado, 15 trabalhadores constroem 810 metros quadrados em seis dias, trabalhando 9 horas por dia. É natural *supor* que a quantidade Q de metros construídos dependa *proporcionalmente* das variáveis

$$\begin{aligned} n &= \text{“número de profissionais”}, \\ d &= \text{“número de dias de trabalho” e}, \\ t &= \text{“número de horas por dia” ou jornada}. \end{aligned}$$

Isto significa que, fixadas duas destas variáveis, a quantidade Q aumenta – respectivamente, diminui – à mesma proporção em que a variável restante aumenta – respectivamente, diminui. Em termos matemáticos, existe um número fixo a, a razão entre essas variáveis, tal que

$$\frac{Q}{n\times d\times t} = a.$$

Com os dados do enunciado, sabemos que

$$Q = 810 \text{ metros quadrados}$$

se

$$\begin{aligned} n &= 15 \text{ profissionais,} \\ d &= 6 \text{ dias de trabalho e,} \\ t &= 9 \text{ horas por dia.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = \frac{810}{15\times 6\times 9} = 1.$$

Calculada esta razão, podemos determinar os valores das variáveis em cada uma das situações nos itens do problema.

1. Nesta primeira situação, são informados os valores das seguintes variáveis

$$Q = 3.240 \text{ metros quadrados,}$$

se

$$\begin{aligned} d &= 6 \text{ dias de trabalho e,} \\ t &= 9 \text{ horas por dia.} \end{aligned}$$

O problema é determinar n, o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos o total d de dias e o número t de horas por dia, serão necessários 4 vezes mais profissionais, já que a quantidade Q de metros quadrados é também 4 vezes maior, isto é,

$$Q = 3.240 = 4\times 810.$$

Portanto, serão necessários

$$n = 4\times 15 = 60 \text{ profissionais}$$

para esta nova quantidade de metros quadrados.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{3.240}{n\times 6\times 9} = \frac{810}{15\times 6\times 9}$$

Note que os valores $d = 9$ e $t = 6$ foram mantidos. Multiplicando os dois lados da igualdade por estes valores comuns, temos

$$\frac{3.240}{n} = \frac{810}{15}.$$

Portanto, multiplicando os dois lados por n e por 15 e dividindo o resultado por 810, obtemos

$$n = \frac{3.240}{810}\times 15 = 4\times 15 = 60.$$

2. Nesta segunda situação, são mantidos os valores

$$\begin{aligned} Q &= 810 \text{ metros quadrados e} \\ t &= 9 \text{ horas por dia.} \end{aligned}$$

No entanto, passamos a ter

$$d = 2 \text{ dias de trabalho.}$$

O problema é, uma vez mais, determinar n, o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos os valores Q e t e o novo número de dias corresponde a $\frac{1}{3}$ do anterior, isto é,

$$2 \text{ jornadas diárias} = \frac{1}{3}\times 6 \text{ jornadas diárias},$$

serão necessários 3 vezes mais profissionais, ou seja,

$$3\times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para esta nova (e menor) quantidade de jornadas diárias.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{810}{n\times 2\times 9} = \frac{810}{15\times 6\times 9}.$$

Note que os valores $Q = 810$ e $t = 9$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n\times 2} = \frac{1}{15\times 6}.$$

Concluímos que

$$2n = 15\times 6,$$

ou seja,

$$n = 15\times 3 = 45 \text{ profissionais},$$

como já havíamos calculado.

3. Desta vez, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e}$$
$$d = 6 \text{ jornadas diárias.}$$

No entanto, passamos a ter

$$t = 3 \text{ dias de trabalho},$$

ou seja, $\frac{1}{3}$ ou 3 vezes menos horas por jornada. Como os valores das demais variáveis foram mantidos, podemos deduzir que serão necessários 3 vezes mais profissionais, ou seja

$$3\times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para esta nova (e menor) quantidade de horas por jornada diária.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{810}{n\times 6\times 3} = \frac{810}{15\times 6\times 9}.$$

Note que os valores $Q = 810$ e $d = 6$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n\times 3} = \frac{1}{15\times 9}.$$

Concluímos que

$$3n = 15\times 9,$$

ou seja,

$$n = 15\times 3 = 45 \text{ profissionais},$$

como já havíamos calculado.

4. Nesta situação, são alterados os valores das variáveis Q, d e t. Temos a seguinte tabela.

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	3.600	n	4	6

Assim, igualando as razões

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

nas duas situações, obtemos

$$\frac{3.600}{n \times 4 \times 6} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Deste modo, deduzimos que

$$\frac{1}{n} = 1 \times \frac{4 \times 6}{3.600}$$

ou

$$n = \frac{3.600}{4 \times 6} = \frac{900}{6} = 150 \text{ profissionais.}$$

5. Por fim, neste último caso, são alterados os valores das variáveis n, d e t. Temos a seguinte tabela.

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	Q	50	4	6

Já vimos que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = 1$$

em *qualquer* cenário. Logo,

$$Q = 6 \times n \times d \times t.$$

Portanto, na nova situação exposta no enunciado, calculamos

$$Q = 6 \times 50 \times 4 \times 6 = 6 \times 6 \times 2 \times 100 = 7.200 \text{ metros quadrados.}$$

Os problemas nesta seção mostram como razões e proporções aparecem nas mais variadas aplicações, tanto na vida cotidiana quanto nas Ciências que estudamos no Ensino Médio ou na universidade.

Exercício 2.12 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um estacionamento cobrava R$ 18,00 por três horas de utilização e agora passou a cobrar R$ 18,00 por duas horas. O percentual de aumento do preço cobrado pelo estacionamento, em relação ao preço inicial, foi de

- 0%.
- 1%.
- 3%.
- 18%.
- 50%.

Solução. Houve um aumento do preço por hora do estacionamento: antes, o preço por hora era igual a

$$\frac{18 \text{ reais}}{3 \text{ horas}} = 6 \text{ reais por hora,}$$

ao passo que, agora, o preço por hora foi ajustado para

$$\frac{18 \text{ reais}}{2 \text{ horas}} = 9 \text{ reais por hora}$$

Portanto, o aumento absoluto do preço por hora foi igual a

$$9 - 6 = 3 \text{ reais por hora.}$$

Logo, o aumento relativo ao preço que era cobrado é igual a

$$\frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o aumento relativo em termos de porcentagem é dado por

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%.$$

Exercício 2.13 Em 2019, a inflação acumulada de preços para famílias de baixa renda, isto é, as que têm renda de até R$ 1.643,78 por mês, foi de 4,43%. Para estas famílias, 70% da inflação se deve às altas dos preços de alimentos e habitação. Uma família que gastava R$ 840,00 com esses dois itens, no início de 2019, teve que gastar quanto a mais no fim do ano, para continuar atendendo suas necessidades no mesmo nível de antes?
Fontes: IPEA, IBGE e Agência Brasil

Solução. Inflação, neste caso, significa alta de preços ao consumidor. Para calculá-la, comparamos os preços de vários itens no fim e no começo de um certo período – um ano, neste caso – e calculamos a *variação percentual*:

$$\frac{\text{preços finais} - \text{preços iniciais}}{\text{preços iniciais}}.$$

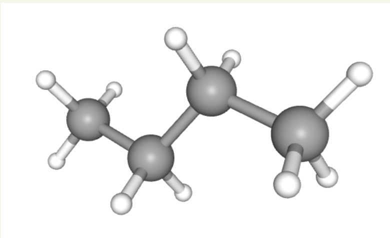
A inflação específica com alimentos e habitação foi, no ano de 2019, segundo os dados, igual a

$$70\% \text{ de } 4{,}43\% = \frac{70}{100}\times 4,43\% = 3{,}101\% \cong 3{,}1\%$$

Portanto, despesas com alimentos e habitação, que totalizavam R$ 840,00 no início do ano, passaram a ser, corrigidas por esta inflação, iguais a

$$840 + \frac{3{,}1}{100}\times 840 \cong 840 + 26{,}05 = 866{,}05 \text{ reais.}$$

Exercício 2.14 O gás butano é o composto orgânico usado como gás de cozinha. Sua fórmula química é C_4H_{10}, o que significa que uma molécula deste gás é composta por 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio.



Disponível em https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/Butane

Uma das mais belas leis da Química afirma que a massa, em gramas, de um mol de átomos de um elemento químico é *numericamente* igual à massa atômica desse elemento, isto é, ao número de prótons e nêutrons deste átomo, aproximadamente. Sabendo que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio, determine a massa, em gramas, do carbono presente em 1.740 gramas de gás butano.

Lembrete: *um mol de uma substância química é igual a, aproximadamente,* 6×10^{23} *moléculas desta substância.*

Solução. Em cada molécula de gás butano há um total de 14 átomos: 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio. Portanto, em um mol de moléculas de gás butano, há 4 moles de átomos de carbono e 10 moles de átomos de hidrogênio. Logo, se a massa de um mol de átomos de hidrogênio é igual a x gramas, então a massa total de um mol de moléculas de gás butano é

$$4\times 12x + 10x = 58x.$$

O fator 12, no cálculo acima, vem do fato de que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio. Portanto, a massa de carbono presente em um mol de moléculas de gás butano corresponde a

$$\frac{48}{58}$$

da massa deste mol, a qual é uma razão fixa. Assim, em 1.740 gramas de gás butano, temos

$$\frac{48}{58}\times 1.740 = 48\times 30 = 1440 \text{ gramas}$$

de carbono.

Exercício 2.15 (Canguru 2014 - Nível J, Questão 9) Numa cidade, a razão entre os números de homens adultos e de mulheres adultas é $2:3$ e a razão entre os números de mulheres adultas e de crianças é $8:1$. Qual é a razão entre os números de adultos – homens e mulheres – e de crianças?

A) $5:1$.
B) $10:3$.
C) $13:1$.
D) $12:1$.
E) $40:3$.

Solução. De acordo com o enunciado, para cada criança na cidade há 8 mulheres adultas. Assim, para cada 3 crianças, há 3×8 mulheres adultas. Como para cada 3 mulheres adultas, há 2 homens adultos, segue que para 3×8 mulheres adultas, há 2×8 homens adultos.

Concluímos que, para cada 3 crianças na cidade, há $3\times 8 = 24$ mulheres adultas e $2\times 8 = 16$ homens adultos. Ou seja, para cada 3 crianças, há $24 + 16 = 40$ homens e mulheres adultos. Assim, a razão entre adultos e crianças é $\frac{40}{3}$, ou seja,

$$40:3,$$

o que corresponde à alternativa da letra E).

Exercício 2.16 Os trens de alta velocidade que ligam Paris e Londres atravessam um túnel submarino de cerca de 50 quilômetros sob o Canal da Mancha, que separa a França da Inglaterra, a uma velocidade média de 160 quilômetros por hora. Sabendo que a distância de aproximadamente 500 quilômetros entre Paris e Londres é percorrida por estes trens a uma velocidade média de 200 quilômetros por hora, em quanto tempo é percorrido o trecho em terra, ou seja, fora do Canal?

Solução. Observe que o tempo t gasto no trajeto total pode ser calculado da seguinte forma

$$\frac{500}{t} = 200.$$

Portanto,

$$\frac{500}{200} = t,$$

ou seja,

$$t = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ horas}.$$

Como 0,5 de uma hora são $\frac{1}{2}\times 60 = 30$ minutos, concluímos que o tempo total do percurso é, em média, 2 horas e 30 minutos. O trecho do túnel é percorrido em

$$\frac{50}{160} = \frac{5}{16} = 0{,}3125 \cong 0{,}3\text{hora},$$

ou seja, 3 *décimos* de hora, que equivalem a 18 minutos. Assim, o trecho do percurso fora do túnel leva cerca de 2 horas e 12 minutos para ser percorrido.

Exercício 2.17 Uma estrela de nêutrons tem, tipicamente, 1,4 vezes a massa do Sol e um raio de cerca de 20 quilômetros, apenas. Sabendo que o Sol tem um raio de quase 700.000 quilômetros, calcule quantas vezes uma estrela de nêutrons é mais densa que o Sol.

Solução. Observe que o raio do Sol, em quilômetros, pode ser escrito em *notação científica* como

$$7\times10^5, \text{ aproximdamente.}$$

Se m denota a massa do Sol, então sua densidade é *proporcional* a

$$\frac{m}{7^3\times10^{15}} \text{ quilogramas por quilômetro.}$$

De fato, *densidade* é definida como a razão

$$\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

e o volume do Sol e da estrela de nêutrons são *proporcionais* aos cubos de seus respectivos raios.

Logo, a densidade da estrela de nêutrons, que tem massa igual a 1,4 vezes a massa do Sol, é proporcional a

$$\frac{1{,}4\,m}{20^3} = \frac{7m}{4\times10^4} \text{ quilogramas por quilômetro.}$$

Portanto, a comparação das densidades da estrela de nêutrons e da densidade do Sol resulta em

$$\frac{\frac{7m}{4\times10^4}}{\frac{m}{7^3\times10^{15}}} = \frac{7m}{m}\times\frac{7^3\times10^{15}}{4\times10^4} = 7^4\times25\times10^9 = 60.025\times10^9 \cong 6\times10^{13}.$$

Portanto, uma estrela de nêutrons é cerca de 10^{13} vezes mais densa que o Sol. Esta é a *ordem de grandeza* da comparação entre essas densidades.

Observação 2.3 Por sua vez, a densidade do Sol é cerca de 1,4 gramas por centímetro cúbico, enquanto a densidade da água é de cerca de 1 grama por centímetro cúbico, a depender, sempre, de condições como a temperatura e pressão. Assim, a densidade de uma estrela de nêutrons é, tipicamente,

$$6\times10^{13}\times1{,}4 = 8{,}4\times10^{13} \cong 8\times10^{13}$$

vezes a densidade da água. Portanto, em um centímetro cúbico de uma estrela de nêutrons há tanta massa quanto na quantidade de água de 4 Castanhões cheios. Se ficou curioso sobre o assunto, veja

https://www.youtube.com/watch?v=FRftmkRBUxQ

Esse exercício explora a noção de ordens de grandeza. Em particular, vimos algumas das impressionantes *diferenças de escala* que existem no Universo e na Natureza. Para entender visualmente as escalas com as quais a Ciência trabalha, veja, por exemplo,

https://www.youtube.com/watch?v=8Are9dDbW24

Para entender melhor como razões e proporções são fundamentais para estimar distâncias astronômicas, assista

https://www.youtube.com/watch?v=CWMh61yutjU

e outros vídeos do mesmo tipo.

Exercício 2.18 Segundo o Banco Central do Brasil, a *taxa de câmbio* entre o dólar americano e o real, no dia 13 de março de 2020, foi, aproximadamente,

$$1 \text{ dólar americano} = 4{,}88 \text{ reais.}$$

Fixada esta taxa, quantos dólares americanos equivaleriam a R$ 1.220,00?

Solução. A taxa de câmbio nada mais é do que a razão

$$\frac{1 \text{ “dólar americano”}}{4{,}88 \text{ reais}}.$$

Portanto, o número x de dólares que podem ser comprados com R$ 1.220,00 é dada pela relação de proporcionalidade

$$\frac{x \text{ dólares americanos}}{1.220 \text{ reais}} = \frac{1 \text{ dólar americano}}{4{,}88 \text{ reais}}.$$

Logo,

$$x = 1.220 \times \frac{1}{4{,}88} = 250 \text{ dólares americanos}.$$

2.4 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 2.19 Quais das seguintes igualdades são válidas?

A) $\frac{15}{24} = \frac{40}{64}$.
B) $\frac{10}{12} = \frac{22}{24}$.
C) $\frac{19}{24} = \frac{57}{72}$.
D) $\frac{54}{14} = \frac{75}{35}$.

Corrija as igualdades que não são verdadeiras.

Exercício 2.20 Calcule o valor de x para o qual é válida a seguinte igualdade de frações

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{18}.$$

Exercício 2.21 Determine o valor positivo de x para o qual é válida a seguinte igualdade de frações

$$\frac{x}{9} = \frac{16}{x}.$$

Exercício 2.22 Calcule as seguintes porcentagens.

A) 10% de 480.
B) 25% de 480.
C) 150% de 480.
D) 0,15% de 480.

Exercício 2.23 Suponha que uma passagem de ônibus de Iguatu a Juazeiro do Norte custe R$ 21,00. Calcule quanto passaria a custar caso houvesse

A) aumento de 20% no preço;
B) diminuição de 20% no preço;
C) aumento de 30%, seguido de diminuição de 10%;
D) diminuição de 10%, seguida de aumento de 30%;
E) dois aumentos sucessivos de 10%; e
F) duas diminuições sucessivas de 10%.

Exercício 2.24 Sabendo que duas variáveis, x e y, são diretamente proporcionais, complete seguinte a tabela com os valores adequados destas variáveis.

Valores de x	10	16	20	?	20	32
Valores de y	15	24	?	18	30	48

Qual a razão entre os valores das variáveis x e y?

Exercício 2.25 Sabendo que duas variáveis, x e y, são inversamente proporcionais, complete a seguinte tabela com os valores adequados destas variáveis.

Valores de x	10	15	20	?	30	40
Valores de y	36	24	?	15	12	9

Qual o produto dos valores das variáveis x e y?

Exercício 2.26 Em uma escola de ensino médio, a razão entre os números de alunos que estudam pela manhã e os que estudam à tarde é de $\frac{3}{5}$. Sabendo que há um total de 240 alunos nestes dois turnos, quantos estudam pela manhã?

Exercício 2.27 Um suco de caju em uma caixa de 960 mililitros tem $\frac{3}{4}$ de polpa de fruta e $\frac{1}{4}$ de água. Aline diluiu este suco, adicionando 120 mililitros de água. Qual passou a ser a proporção de polpa no suco após este acréscimo de água?

Exercício 2.28 Os 45 colegas de uma turma da primeira série, de uma escola em Arneiroz, decidiram dividir, entre eles, as despesas de uma excursão nas férias de fim de ano. Porém, com a desistência de 5 deles, cada um dos demais terá que pagar, agora, R$ 7,00 a mais do que pagaria antes. Qual o total das despesas da excursão a serem pagas por todos?

Exercício 2.29 Um relógio em uma torre da igreja, de uma pequena cidade, atrasa dois segundos a cada hora. Quanto tempo de atraso acumulará em 2 dias?

Exercício 2.30 (UECE) Sejam x e y duas grandezas inversamente proporcionais. Se x sofre um acréscimo de 25%, o decréscimo percentual sofrido por y é

A) 20%.
B) 22%.
C) 24%.
D) 25%.

Exercício 2.31 (OBM – 1999) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos ele ainda pode carregar?

A) 132.
B) 144.
C) 146.
D) 148.
E) 152.

Exercício 2.32 Uma vendedora em uma loja de roupas recebe, como comissão, 6% do valor das vendas que realizar. Qual o total de vendas que ela deve realizar para que receba R$ 120,00?

Exercício 2.33 O preço de um litro de gasolina custava R$ 0,55 em julho de 1994, quando o Plano Real foi lançado. No fim de 2019, chegou a R$ 4,55. Qual o percentual de aumento do litro de gasolina em todo este período?

Nível 2

Exercício 2.34 Com um consumo de 6.000 litros, o volume de uma cisterna baixou de $\frac{3}{4}$ para $\frac{3}{8}$ de sua capacidade total. Sabendo disto, determine a capacidade desta cisterna em litros.

Exercício 2.35 (IBMEC) Se aplicativo e meio executa tarefa e meia em minuto e meio, quantas tarefas executa um aplicativo em seis minutos?

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 8.
E) 16.

Exercício 2.36 (ESPM – 2003) Certo grupo de funcionários realiza certo trabalho em 6 horas. Descobriu-se que, se eles fossem 40% mais eficientes, com 2 funcionários a menos esse mesmo trabalho seria feito em 5 horas. O número de funcionários em questão é

A) 10.
B) 11.
C) 12.
D) 13.
E) 14.

Exercício 2.37 (Mackenzie) Um taxista inicia o dia de trabalho com o tanque de combustível de seu carro inteiramente cheio. Percorre 325 quilômetros e reabastece, sendo necessários 25 litros para completar o tanque; em seguida, percorre 520 quilômetros até esvaziar completamente o tanque. Com base nessas informações, concluímos que a capacidade do tanque do carro, em litros, é

A) 40.
B) 45.
C) 50.
D) 55.
E) 60.

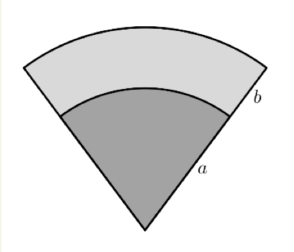
Exercício 2.38 (UECE – Vestibular 2018.1) Se a base de um triângulo é aumentada em 10% e a altura diminuída em 10%, então, em relação à área do triângulo alterado, comparada com a área do triângulo inicial, é correto afirmar que ela

A) diminui 1%.
B) permanece a mesma.
C) aumenta 0,01%.
D) diminui 0,1%.

Exercício 2.39 (FUVEST – 2016) Um veículo viaja entre dois povoados da Serra da Mantiqueira, percorrendo a primeira terça parte do trajeto à velocidade média de 60 quilômetros por hora, a terça parte seguinte a 40 quilômetros por hora e o restante do percurso a 20 quilômetros por hora. O valor que melhor aproxima a velocidade média do veículo nessa viagem, em quilômetros por hora, é

A) 32,5.
B) 35.
C) 37,5.
D) 40.
E) 42,5.

Exercício 2.40 (UNICAMP – Vestibular 2018) A figura abaixo exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área.



A razão $\frac{a}{b}$ é igual a

A) $\sqrt{3}+1$.
B) $\sqrt{2}+1$.
C) $\sqrt{3}$.
D) $\sqrt{2}$.

Exercício 2.41 Considere que um reservatório de água, inicialmente vazio, seja abastecido por duas torneiras. Para enchê-lo sozinha, a primeira torneira gastaria 2 horas. Já usando apenas a segunda, seriam gastas três horas para encher o reservatório. Com as duas torneiras abertas simultaneamente, o tanque estará cheio em

A) 36 minutos.
B) 60 minutos.
C) 72 minutos.
D) 300 minutos.

Exercício 2.42 (Portal da Matemática, Módulo Razões e Proporções, Exercício 7, adaptado) Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas simultaneamente. Observou-se que o comprimento restante de uma era o dobro do comprimento restante da outra. Por quanto tempo ficaram acesas?

Exercício 2.43 A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

Alimento	A	B
Quantidade	20 gramas	20 gramas
Valor energético	60 quilocalorias	80 quilocalorias
Sódio	10 miligramas	20 miligramas
Proteína	6 gramas	1 grama

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre as quantidades de proteína em A e em B é igual a

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 10.

Exercício 2.44 (OBM) Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa em 30 segundos, enquanto Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta de número 80, Paulinho estará completando a volta de número

A) 79.

B) 78.
C) 76.
D) 77.
E) 75.

Exercício 2.45 (Portal da Matemática, Módulo de Razões e Proporções, Exercício 15) Dois recipientes, R_1 e R_2, contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções $3 : 5$ em R_1 e $2 : 3$ em R_2. Juntando-se, em um terceiro recipiente, os conteúdos de R_1 e R_2, qual a proporção de água e álcool nesta mistura?

Exercício 2.46 De julho a novembro de 2019, o preço de quilograma de carne subiu, em média, 25%. Após este período de alta de preços, houve uma redução de 20%, de novembro para dezembro de 2019. O que aconteceu, portanto, com o preço da carne em dezembro com relação a julho?

A) Aumentou 5%.
B) Aumentoiu 10%.
C) Aumentou 45%.
D) Aumentou 50%.

Exercício 2.47 (UNICAMP – Vestibular 2018) Dois anos atrás, certo carro valia R$ 50.000,00 e, atualmente, vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

A) R$ 25.600,00.
B) R$ 24.400,00.
C) R$ 23.000,00.
D) R$ 18.000,00.

Exercício 2.48 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 6) A razão entre a área do quadrado inscrito em um semicírculo de raio R e a área do quadrado inscrito em um círculo de raio R é

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) $\frac{3}{4}$.
D) $\frac{2}{5}$.
E) $\frac{1}{4}$.

Exercício 2.49 (OBM – 1998) Para fazer 12 bolinhos, preciso de exatamente de 100 gramas de açúcar, 50 gramas de manteiga, meio litro de leite e 400 gramas de farinha. A maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500 gramas de açúcar, 300 gramas de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha é

A) 48.
B) 60.
C) 72.
D) 54.
E) 42.

Exercício 2.50 (UFC, Questão 50, 2010) Uma garrafa está cheia de uma mistura, na qual 2/3 do conteúdo é composto pelo produto A e 1/3 pelo produto B. Uma segunda garrafa, com o dobro da capacidade da primeira, está cheia de uma mistura dos mesmos produtos da primeira garrafa, sendo agora 3/5 do conteúdo composto pelo produto A e 2/5 pelo produto B. O conteúdo das duas garrafas é derramado em uma terceira garrafa, com o triplo da capacidade da primeira. Que fração do conteúdo da terceira garrafa corresponde ao produto A?

(a) 10/15.
(b) 5/15.
(c) 28/45.
(d) 17/45.
(e) 3/8.

Nível 3

Exercício 2.51 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 7) Um comerciante comprou mercadorias para revendê-las. Ele deseja marcar essas mercadorias com preços tais que, ao dar descontos de 20% sobre os preços marcados, ele ainda obtenha um lucro de 25% sobre o preço de compra. Em relação ao preco de compra, o preco marcado nas mercadorias é

A) 30% maior.
B) 40% maior.
C) 45% maior.
D) 50% maior.
E) mais de 50% maior.

Exercício 2.52 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 10) Duas velas do mesmo tamanho são acesas no mesmo instante. A primeira é consumida totalmente em 4 horas e a segunda, em 3 horas. Suponha que cada uma das velas seja consumida a uma velocidade constante. Após serem acesas, o tamanho da primeira vela será o triplo do tamanho da segunda, decorridas

A) 2 horas e 45 minutos.
B) 2 horas e 40 minutos.
C) 2 horas e 48 minutos.
D) 2 horas e 52 minutos.
E) 2 horas e 30 minutos.

Exercício 2.53 (Colégio Militar de Fortaleza – 2007) Daniel tem ração suficiente para alimentar quatro galinhas durante 18 dias. No fim do sexto dia, ele comprou mais duas galinhas. Com o restante da ração, ele poderá alimentar suas galinhas durante

A) 2 dias.
B) 4 dias.
C) 6 dias.
D) 8 dias.
E) 10 dias.

Exercício 2.54 (Colégio Militar de Salvador – 2007) Rodrigo e Júnior trabalham carregando caminhões. Para carregar um caminhão, Rodrigo leva 20 minutos. Juntos, conseguem fazê-lo em 15 minutos. Em quanto tempo Júnior, sozinho, é capaz de carregar um caminhão?

(A) 15 minutos.
(B) 20 minutos.
(C) 35 minutos.
(D) 45 minutos.
(E) 60 minutos.

Exercício 2.55 (Canguru 2014, Nível J, Questão 15) Um tipo especial de jacaré tem sua cauda com comprimento igual a um terço de seu comprimento total. Sua cabeça tem 93 cm de comprimento, correspondente a um quarto do comprimento total, descontada a cauda. Qual é o comprimento total do jacaré, em centímetros?

A) 186.
B) 372.
C) 490.
D) 496.
E) 558.

Exercício 2.56 (Canguru 2014, Nível J, Questão 17) Ana andou 8 km com velocidade constante de 4 km/h e passou a correr com velocidade constante de 8 km/h. Quanto tempo ela correu com esta velocidade até que a sua velocidade média no percurso atingiu 5 km/h ?

A) 15 minutos.
B) 20 minutos.
C) 30 minutos.
D) 35 minutos.
E) 40 minutos.

Exercício 2.57 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 158) O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em www1.folha.uol.com.br. Acesso em 26 de abril de 2020 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações, que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A) R$ 900,00.
B) R$ 1.200,00.
C) R$ 2.100,00.
D) R$ 3.900,00.
E) R$ 5.100,00.

Exercício 2.58 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 159) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 metros cúbicos de concreto. Qual é o volume de cimento, em metros cúbicos, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A) 1,75.
B) 2,00.
C) 2,33.
D) 4,00.
E) 8,00.

Exercício 2.59 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 163) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

A) R$ 15,00.
B) R$ 14,00.
C) R$ 10,00.
D) R$ 5,00.
E) R$ 4,00.

Exercício 2.60 (FGV, 2017, Prova C - Rosa, Questão 15) O custo de produção de uma peça é composto de: 40% de mão de obra; 25% de matéria-prima; 20% de energia elétrica e 15% das demais despesas. Num certo momento, ocorrem os seguintes aumentos: mão de obra, 10%; matéria-prima, 20%; energia elétrica, 15%; e demais despesas, 10%. O aumento percentual no custo total da peça foi de

A) 13,0%.
B) 13,5%.
C) 12,0%.
D) 12,5%.
E) 11,5%.

Nível 4

Exercício 2.61 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 167 - adaptado) Suponha que uma peça de cerâmica, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 centímetros e 15 centímetros. Após o cozimento da argila, necessário para fabricar a cerâmica, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça de cerâmica, após o cozimento, ficou reduzida em

A) 4%.
B) 20%.
C) 36%.
D) 64%.
E) 96%.

Exercício 2.62 (Canguru 2014, Nível J, Questão 24) Numa ilha, os sapos são verdes ou azuis. O número de sapos azuis cresceu 60%, enquanto que o número de sapos verdes diminuiu 60%. Se a razão entre o número de sapos azuis e o número de sapos verdes é, agora, o inverso dessa razão antes da variação, qual a porcentagem da variação do número total de sapos?

A) 0%.
B) 20%.
C) 30%.
D) 40%.
E) 50%.

Exercício 2.63 (Colégio Militar de Fortaleza, 2006 – adaptado) Um comerciante vendeu $\frac{3}{10}$ de seu estoque de certo produto com lucro de 30% e o restante desse estoque com prejuízo de 10%. No total da operação, o comerciante

(A) teve lucro de 20%.
(B) Teve lucro de 2%.
(C) Teve prejuízo de 20%.
(D) Teve prejuízo de 2%.
(E) Não teve lucro nem prejuízo.

Exercício 2.64 (Colégio Naval, 1980) Um pai resolveu premiar seus três filhos com R\$ 1.900,00. Esse valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais aos números de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2, 4 e 5. Então, a quantia que caberá ao que recebeu menos é de

(A) R\$ 300,00.
(B) R\$ 400,00.
(C) R\$ 500,00.
(D) R\$ 600,00.
(E) R\$ 700,00.

Exercício 2.65 (UEG, 2010) Em uma liga metálica de 160 gramas, o teor de ouro é de 18%, enquanto o restante é prata. A quantidade de gramas de prata que deve ser retirada desta liga a fim de que o teor de ouro passe a ser de 32%, é

(A) 80.
(B) 70.
(C) 66.
(D) 46.

Exercício 2.66 (OBM, 2005) Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, composto de 20% de polpa e 80 % de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

(A) 5%.
(B) 7%.
(C) 8%.
(D) 20%.
(E) 60%.

Exercício 2.67 (OBM, 2005) Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio

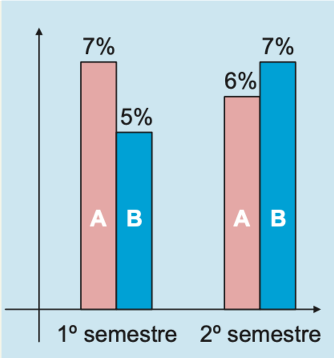
"*Compre um e leve outro pela metade do preço.*"

Outro anúncio que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é

(A) "*Leve dois e pague um.*"
(B) "*Leve três e pague um.*"
(C) "*Leve três e pague dois.*"
(D) "*Leve quatro e pague três.*"
(E) "*Leve cinco e pague quatro.*"

Exercício 2.68 (OBM, 2004) Na população de uma espécie rara de 1.000 aves da Floresta Amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia, que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

Exercício 2.69 (OBMEP 2016, Primeira Fase, Nível 3, Questão 4) O gráfico representa o percentual de aumento do preço de dois produtos, A e B, em uma mercearia, no primeiro e no segundo semestres do ano passado.



As afirmativas abaixo referem-se ao período completo do ano passado. Qual delas é a correta?

A) O aumento percentual do preço de B foi maior do que o de A.
B) O aumento percentual dos precos dos dois produtos foi o mesmo.
C) O aumento percentual do preço de A foi de exatamente 13%.
D) O preço de A diminuiu e o de B aumentou.
E) O aumento percentual do preço de B foi maior do que 12%.

Exercício 2.70 (OBMEP 2017, Primeira Fase, Nível 3, Questão 17) Ana e Beto foram os únicos candidatos na eleição para a presidência do grêmio estudantil da escola em que ambos estudam. Nessa eleição, votaram ao todo 1.450 alunos. Durante a apuração, houve um momento em que Ana teve a certeza de que, no final, ela teria pelo menos a metade dos votos válidos. Naquele momento, os percentuais eram os seguintes:

- votos não válidos: 20% dos votos apurados;
- votos em Ana: 60% dos votos válidos;
- votos em Beto: 40% dos votos válidos.

Quantos votos tinham sido apurados até aquele momento?

A) 1.110.
B) 1.150.
C) 1.200.
D) 1.250.
E) 1.300.