CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

6° E 7° ANOS

PROFESSOR

Volume 1

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 Fortalecendo aprendizagens – Matemática 6º e 7º anos - professor – v.1
[recurso eletrônico] / Jorge Herbert Soares de Lira, organizador. -
Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Vários autores
Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-41813-2 (E-book)

1. Frações. 2. Adição de frações. 3. Subtração de frações. 4.
Multiplicação de frações. 5. Divisão de frações. I. Lira, Jorge
Herbert Soares de, org. II. Título.

CDD: 513.26

GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Assessora Especial de Gabinete	Ana Gardennya Linard
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Finais	Izabelle de Vasconcelos Costa (Orientadora) Tábita Viana Cavalcante (Gerente) Ednalva Menezes da Rocha Galça Freire Costa de Vasconcelos Carneiro Rafaella Fernandes de Araújo
Leitura Crítica	Tábita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Ednalva Menezes da Rocha
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Annelise Maymone Antonio Caminha M. Neto Jorge Herbert Soares de Lira

Sumário

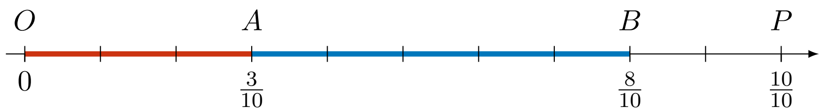
1 Operações com Frações

1.1 – Adição e subtração

Iniciamos o nosso roteiro com um problema simples cuja solução se resume a uma adição de frações.

> **Problema 1** Fernando percorreu $\frac{3}{10}$ do percurso total previsto para uma viagem de automóvel na primeira hora. Na segunda hora, ele percorreu mais $\frac{5}{10}$ do percurso. Qual a fração do percurso total que foi percorrida nas duas primeiras horas de viagem?

Solução. Na reta numérica abaixo, o segmento OP representa o percurso total previsto para a viagem. Esse segmento foi dividido em 10 partes iguais, portanto, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{10}$ do percurso. O segmento OA corresponde ao trecho que foi percorrido na primeira hora da viagem e o segmento AB corresponde ao trecho percorrido na segunda hora. Assim, o segmento OB corresponde ao que foi percorrido nas duas primeiras horas.



Assim, temos

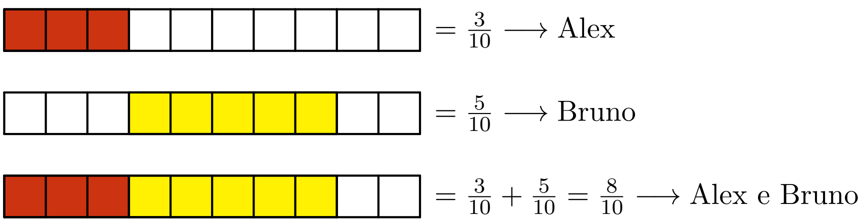
$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10},$$

ou seja, foram percorridos $\frac{8}{10}$ do percurso total nas duas primeiras horas da viagem. ■

Outro modo de interpretar a adição $\frac{3}{10} + \frac{5}{10}$ é o seguinte.

> **Exercício 1.1** Os irmãos Alex e Bruno ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Alex comeu $\frac{3}{10}$ da barra e Bruno comeu $\frac{5}{10}$ da barra. Que fração da barra os dois comeram juntos?

Solução. Observe as barras na figura, divididas em 10 partes iguais, representando as frações comidas pelos irmãos.



Na barra de cima, estão pintadas 3 das 10 partes, representando os $\frac{3}{10}$ da barra comidos por Alex. Na barra do meio, estão pintadas 5 das 10 partes, representando os $\frac{5}{10}$ da barra comidos por Bruno. Na barra de baixo, juntamos as partes comidas por Alex e Bruno, totalizando 8 das 10 partes da barra. Portanto,

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{3+5}{10} = \frac{8}{10},$$

ou seja, Alex e Bruno comeram, juntos, $\frac{8}{10}$ da barra de chocolate. ■

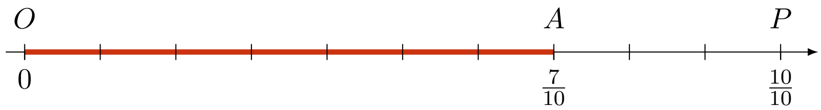
De modo geral, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para somá-las.

Adição de frações com um mesmo denominador: a soma de duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a soma dos numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações.

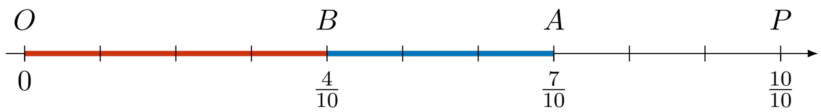
Agora, considere o problema

Problema 2 Nando percorreu $\frac{7}{10}$ do trajeto da sua casa até a escola, quando percebeu que tinha esquecido o livro de matemática em casa. Voltou $\frac{3}{10}$ desse mesmo trajeto, quando encontrou com o seu pai, que já tinha percebido o esquecimento e resolveu ir até a escola entregar o livro ao filho. Que fração do trajeto da casa de Nando até a escola o pai já tinha percorrido, quando os dois se encontraram?

Solução. Na reta numérica abaixo, o segmento OP representa o trajeto completo da casa de Nando até a escola. Esse segmento foi dividido em 10 partes iguais, logo, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{10}$ do trajeto. O ponto A representa o ponto onde Nando notou que tinha esquecido o livro, ou seja, o segmento OA corresponde ao trecho que Nando percorreu até o ponto onde percebeu o esquecimento do livro, que corresponde $\frac{7}{10}$ do trajeto de sua casa à escola.



O ponto B representa o ponto de encontro de Nando com o seu pai, ou seja, o segmento AB corresponde ao trecho que Nando percorreu de volta: $\frac{3}{10}$ do percurso total, desde o ponto onde notou o esquecimento, até o encontro com o seu pai.



Assim,

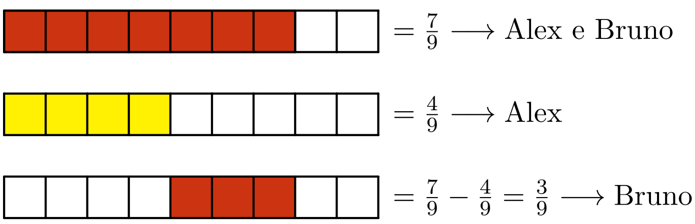
$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4 \div 2}{10 \div 2} = \frac{2}{5},$$

ou seja, o encontro entre Nando e seu pai aconteceu quando o pai tinha percorrido $\frac{2}{5}$ do trajeto de casa até a escola. ■

Veja também o seguinte exercício.

Exercício 1.2 Os irmãos Alex e Bruno ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Alex e Bruno comeram, juntos, $\frac{7}{9}$ da barra. Se $\frac{4}{9}$ é a fração da barra comida por Alex, que fração corresponde à parte comida por Bruno?

Solução. Observe a figura abaixo, onde estão representadas a barra dividida em 9 partes iguais, a fração comida em conjunto pelos dois irmãos e a fração comida por Alex.



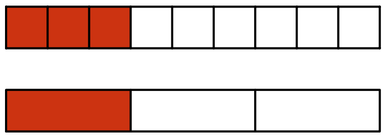
Na barra de cima, estão pintadas 7 das 9 partes, representado os $\frac{7}{9}$ da barra que foram comidos pelos dois irmãos juntos. Na barra do meio, estão pintadas 4 das 9 partes, representando os $\frac{4}{9}$ da barra comidos por Alex (sozinho). Na barra de baixo, subtraímos a parte comida por Alex (sozinho), da parte comida pelos dois irmãos juntos, mostrando que Bruno comeu 3 das 9 partes. Desse modo,

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Podemos, ainda, simplificar a fração $\frac{3}{9}$, dividindo numerador e denominador por 3:

$$\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}.$$

Assim, Bruno comeu, sozinho, $\frac{1}{3}$ da barra. A próxima figura traz uma representação geométrica para a simplificação acima. Antes de prosseguir, certifique-se de que você a entendeu (lembre da equivalência de frações que estudamos anteriormente).


$= \frac{3}{9}$

$= \frac{1}{3}$

■

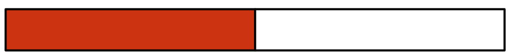
De modo análogo ao que foi feito no caso da adição, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para subtraí-las.

Subtração de frações com um mesmo denominador: a diferença entre duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a diferença entre os numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações.

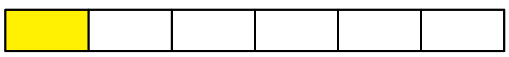
Os próximos exercícios trazem situações de adição e subtração de frações que *não possuem um mesmo denominador*.

Exercício 1.3 Paulo contratou João para pintar o muro de sua propriedade. João pintou $\frac{1}{2}$ do muro no primeiro dia de trabalho. No segundo dia, como teve de sair mais cedo para levar seu filho ao médico, João pintou apenas $\frac{1}{6}$ do muro. Que fração do muro João pintou nos dois primeiros dias de trabalho?

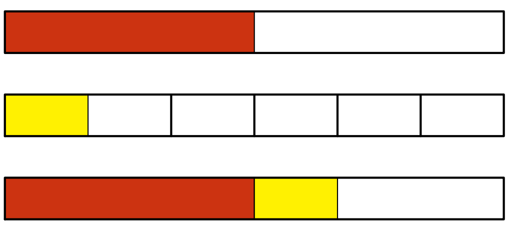
Solução. Representando o muro por uma barra, dividindo essa barra em 2 partes iguais e tomando 1 delas, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{2}$, que é exatamente a porção do muro que foi pintada no primeiro dia de trabalho.


$= \frac{1}{2}$

Dividindo essa mesma barra em 6 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{6}$, exatamente a parte do muro pintada no segundo dia.


$= \frac{1}{6}$

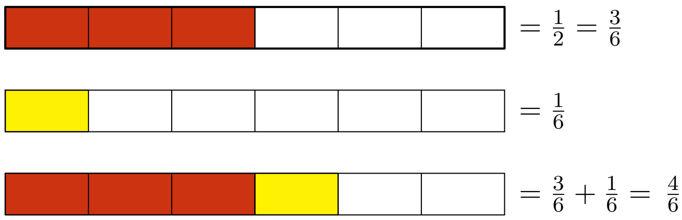
Agora, precisamos calcular a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ para obter a fração do muro pintada nos dois primeiros dias.


$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = ?$

Como essas frações não têm um mesmo denominador, a ideia é encontrar **frações equivalentes** a cada uma delas, as quais possuam um mesmo denominador, como fizemos anteriormente. Depois, soma-se as frações equivalentes e simplifica-se o resultado. Para isso, vamos dividir cada metade da barra de cima, representando a fração $\frac{1}{2}$, em 3 partes iguais. Assim, de acordo com a próxima figura, a barra ficará dividida em 6 partes. A parte destacada maior corresponde a três dessas partes, ou seja, pode ser representada pela fração $\frac{3}{6}$.



Portanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3},$$

ou seja, João pintou $\frac{2}{3}$ do muro nos dois primeiros dias.

■

Observação 1.1 — Nota ao(à) professor(a). Um erro muito comum que é cometido quando os alunos tentam somar duas frações é o de somar os seus numeradores e denominadores. Por exemplo, eles calculam a soma $\frac{5}{12} + \frac{4}{9}$ do seguinte modo:

$$\frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{5+4}{12+9} = \frac{9}{21}.$$

Talvez os alunos cometam esse erro porque seguem uma *analogia*, julgando que a operação de adição deve ser efetuada duas vezes, uma para cada par de números. Quando estudam a multiplicação de frações, as dúvidas podem tornar-se mais agudas, pois, para multiplicar duas frações, multiplicamos seus numeradores e denominadores! É muito importante que os alunos entendam que esse procedimento é *incorreto*. Para isso, é preciso reforçar e tornar natural a necessidade da equivalência de frações para termos “medidas em uma escala comum”, como fizemos no exemplo acima. Contra-exemplos bastante drásticos ajudam também como em

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

pois, se a igualdade ocorresse, duas metades dariam uma metade! Erros dessa natureza respondem por dificuldades conceituais e técnicas dos alunos em toda a sua trajetória acadêmica, muitas vezes.

Em geral, quando duas frações não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para somá-las.

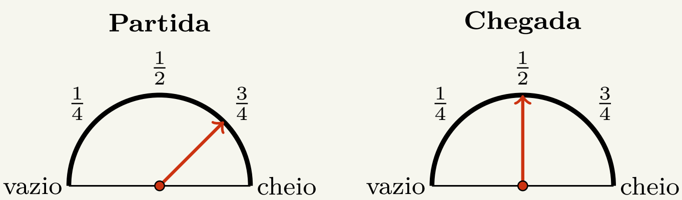
Adição de frações com denominadores distintos: para somar duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas; em seguida, somamos essas frações, aplicando a regra de soma de fração com o mesmo denominador. Por exemplo,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}.$$

Observação 1.2 Aqui, vale uma revisão sobre como encontrar as duas frações equivalentes às frações dadas. Veja que a dificuldade é achar um denominador para essas frações. Para isso, observamos que esse denominador deve ser um múltiplo dos denominadores das duas frações originais: 4 e 6, no exemplo acima. Então, precisamos achar um número que seja múltiplo de 4 e 6 ao mesmo tempo.

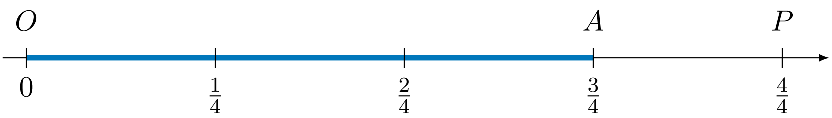
Uma possibilidade totalmente válida seria tomar, como denominador, o número $4 \times 6 = 24$; isso daria as frações $\frac{18}{24}$, equivalente a $\frac{3}{4}$, e $\frac{4}{24}$, equivalente a $\frac{1}{6}$. No entanto, a possibilidade 12 é mais econômica, exatamente porque 12 é o *mínimo múltiplo comum* de 4 e 6.

Exercício 1.4 — CMF - adaptada. No painel de um automóvel há um marcador que indica a quantidade de combustível no tanque. Através de um ponteiro, o marcador indica a fração de combustível existente no tanque em relação à capacidade máxima. Quando o ponteiro aponta para a posição *cheio*, isso significa que o tanque está completamente cheio de combustível. As figuras abaixo representam o marcador de combustível no momento da partida e no momento da chegada de uma viagem.

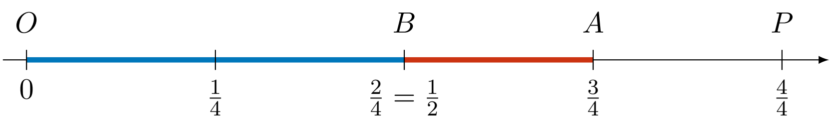


Que fração do tanque de combustível foi utilizada na viagem?

Solução. Veja que, no momento da partida, o tanque estava com $\frac{3}{4}$ da sua capacidade e, na chegada, estava com $\frac{1}{2}$ da sua capacidade. Assim, a fração que representa o total de gasolina gasto na viagem é dada pela diferença $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. O segmento OP na reta numérica abaixo representa o tanque cheio de combustível. Dividindo esse segmento em 4 segmentos iguais, cada um desses segmentos corresponde a $\frac{1}{4}$ do tanque. Logo, o segmento OA corresponde a $\frac{3}{4}$, fração do tanque que estava ocupada por combustível no momento da partida.



Agora, veja que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Assim, marcamos o ponto B, em que OB corresponde à fração do tanque ocupada por combustível no momento da chegada.



Portanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Logo, $\frac{1}{4}$ é a fração do tanque de combustível utilizada na viagem. ■

Mais uma vez, de modo análogo ao que foi feito para a adição, quando as frações não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para subtraí-las.

Subtração de frações com denominadores distintos: para calcular a diferença entre duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas; em seguida, calculamos a diferença entre essas frações. Por exemplo,

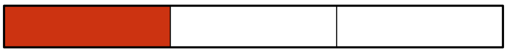
$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}.$$

A ideia geral para encontrar frações equivalentes às dadas e com um mesmo denominador é a mesma que observamos no caso da adição: começamos procurando um denominador que seja múltiplo dos dois denominadores das frações iniciais: por exemplo, seu MMC.

Exercício 1.5 A professora Juliana presenteou as alunas Bruna e Bia, medalhistas em uma olimpíada de Matemática, com uma caixa cheia de livros. Elas decidiram que Bruna, por ter conquistado uma medalha de ouro, ficaria com um terço dos livros; e Bia, por ter conquistado uma medalha de prata, ficaria com um quarto dos livros. Além disso, o restante dos livros seria doado à biblioteca da escola.

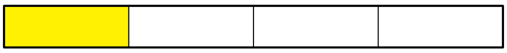
(a) Que fração representa a quantidade de livros que Bruna e Bia receberam juntas?
(b) Que fração representa a quantidade de livros que foram doados à biblioteca?

Solução. Vamos representar o total de livros contidos na caixa por uma barra. Dividindo essa barra em 3 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obteremos uma representação da fração $\frac{1}{3}$, parte dos livros que coube à Bruna.



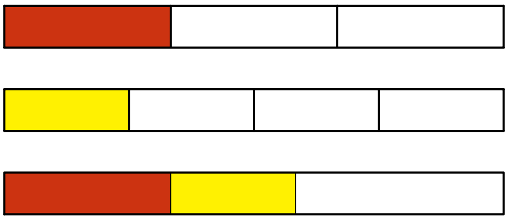
$= \frac{1}{3}$

Dividindo a mesma barra em 4 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obteremos uma representação da fração $\frac{1}{4}$, parte dos livros que coube à Bia.



$= \frac{1}{4}$

Para responder o item (a), devemos somar as frações correspondentes às quantidades de livros recebidos pelas duas colegas. Observe a figura abaixo, onde estão representadas as frações da caixa de livros recebidas por Bruna e Bia, separadamente, bem como a fração que representa o total de livros recebidos pelas duas juntas. Não fica claro quanto vale a soma.

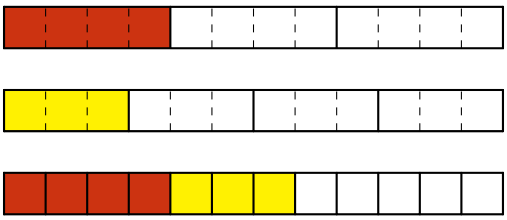


$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$

Uma vez que as barras, representando a caixa de livros, não foram divididas em quantidades iguais de partes nas duas figuras, não podemos somar as frações diretamente. Entretanto, como $\text{MMC}(3,4) = 12$, podemos subdividir as barras de modo que cada uma passe a ter 12 pedaços iguais. Para isso, podemos subdividir cada uma das 3 partes da primeira barra em 4 pedaços iguais; e cada uma das 4 partes da segunda barra em 3 pedaços iguais, conforme a próxima representação.



$= \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

$= \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

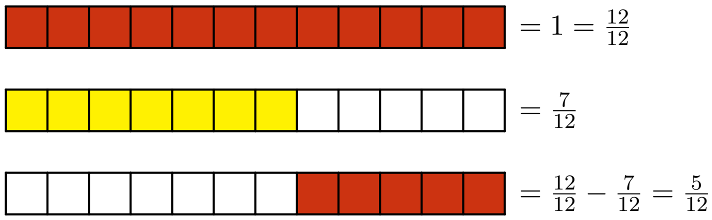
Assim, obtemos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$ equivalentes, respectivamente, às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, dadas no enunciado. Então, para somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, somamos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Assim, a fração que corresponde à quantidade de livros recebidos por Bruna e Bia, juntas, é $\frac{7}{12}$: a resposta para o item (a).

Finalmente, para descobrir a fração da caixa que representa os livros doados à biblioteca, devemos subtrair $\frac{7}{12}$, que é a quantidade de livros recebidos por Bruna e Bia, de 1, que representa a barra cheia.

Observe que, na barra de cima temos uma primeira fração que representa o total de livros na caixa, na barra do meio temos uma segunda fração que representa a quantidade de livros recebidos pelas duas



alunas e, na barra de baixo, temos uma terceira fração que dá a diferença entre a primeira e a segunda, ou seja, temos a fração

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}.$$

Portanto, a fração que representa os livros que foram doados à biblioteca é $\frac{5}{12}$: a resposta para o item (b). ■

Observação 1.3 Conforme observamos anteriormente, podemos somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, executando os seguintes passos.

(a) Encontramos uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$, multiplicando numerador e denominador pelo denominador da fração $\frac{1}{4}$:
$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 4}{3\times 4} = \frac{4}{12}.$$

(b) Encontramos uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$, multiplicando numerador e denominador pelo denominador da fração $\frac{1}{3}$:
$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{12}.$$

(c) Somamos as frações encontradas, que agora possuem um mesmo denominador:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Agora, tomando como exemplo a soma
$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8}$$
e procedendo de maneira semelhante, temos

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{1\times 8}{6\times 8} + \frac{3\times 6}{8\times 6} = \frac{8}{48} + \frac{18}{48} = \frac{8+18}{48} = \frac{26}{48}.$$

Por outro lado, observando que

$$\text{MMC}(6,8) = 24, \;\; 24 \div 6 = 4 \;\text{ e }\; 24 \div 8 = 3,$$

vemos que também é possível encontrar frações equivalentes a $\frac{1}{6}$ e a $\frac{3}{8}$, com um mesmo denominador, multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração por 4 e o numerador e o denominador da segunda, por 3. Assim fazendo, temos:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{1\times 4}{24} + \frac{3\times 3}{24} = \frac{4}{24} + \frac{9}{24} = \frac{13}{24}.$$

Conforme já observamos, a diferença entre os dois métodos anteriormente descritos é que, em muitos casos, utilizando o MMC dos denominadores das frações originais, a fração obtida para a soma é uma forma simplificada daquela que seria obtida utilizando o produto dos denominadores.

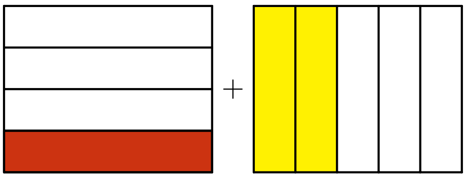
Exercício 1.6 Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram $\frac{1}{4}$ do percurso na primeira hora, $\frac{2}{5}$ do percurso na segunda hora e 14 quilômetros na terceira e última hora de passeio. Quantos quilômetros tem o percurso total do passeio?

(a) 14 (b) 16 (c) 40 (d) 36

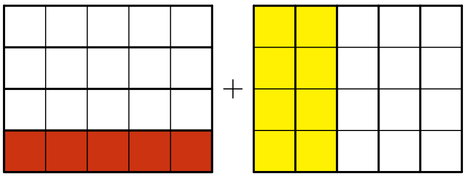
Solução. A ideia para resolver o problema é calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora de passeio. Isso porque já sabemos o valor, 14 quilômetros, da distância percorrida durante a terceira hora. Como veremos, esses dados, em conjunto, nos permitirão calcular o total do percurso.

Para calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora, devemos somar as frações correspondentes ao total percorrido na primeira e segunda horas e, em seguida, subtrair o resultado de 1, que corresponde ao percurso total do passeio.

Para somar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, vamos proceder, como antes, encontrando duas frações, uma equivalente à fração $\frac{1}{4}$ e outra equivalente à fração $\frac{2}{5}$, as quais tenham denominadores iguais. Na figura seguinte mostramos uma maneira diferente de visualizar este método.



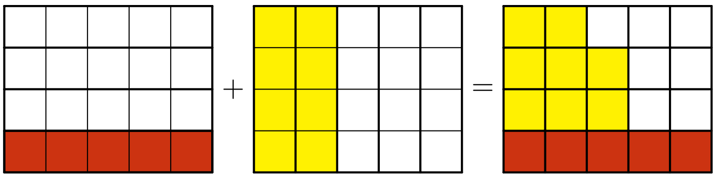
Ainda não há como efetuar diretamente a soma das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, pois o retângulo, que representa todo o percurso percorrido pelos ciclistas, foi dividido em 4 partes na figura da esquerda e em 5 partes na figura da direita. Entretanto, podemos representar as mesmas frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ subdividindo, cada $\frac{1}{4}$ da figura da esquerda, em 5 partes iguais e, cada $\frac{1}{5}$ da figura da direita, em 4 partes iguais. Note que, na figura a seguir, isso equivale a dividir o retângulo da esquerda em cinco *colunas* iguais e o da direita em quatro *linhas* iguais.



Agora, observe que as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{20}$ são **equivalentes**, bem como as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$. Além disso, é fácil somar as frações $\frac{5}{20}$ e $\frac{8}{20}$, pois ambas são frações de um inteiro que foi dividido em uma mesma quantidade de partes: $(5\times4 = 4\times5 = 20$ partes). Assim,

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20},$$

fração representada na última figura abaixo.

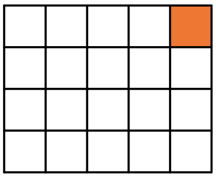


Observemos, agora, que resta a fração $1-\frac{13}{20}$ para completar o percurso, com

$$1-\frac{13}{20}=\frac{20}{20}-\frac{13}{20}=\frac{7}{20},$$

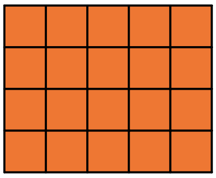
sendo essa fração a parte não pintada do lado direito da igualdade da figura anterior. De fato, o percurso completo foi dividido em 20 quadradinhos dos quais 7 não foram marcados.

Por fim, lembre-se que essa fração, $\frac{7}{20}$, corresponde aos 14 quilômetros percorridos na terceira hora de passeio. Portanto, a fração $\frac{1}{20}$, correspondente ao quadrado menor pintado na figura seguinte, equivale a $14 \div 7 = 2$ quilômetros.



$= \frac{1}{20} \longleftrightarrow 14 \div 7 = 2$ quilômetros

Logo, o percurso total, que tem 20 quadrados, corresponde a $20 \times 2 = 40$ quilômetros, conforme a sua ilustração na próxima figura. ■



$= \frac{20}{20} \longleftrightarrow 20 \times 2 = 40$ quilômetros

Observação 1.4 Resumidamente, a soma das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ foi calculada do seguinte modo.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}.$$

1.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 1.7 Represente geometricamente as operações com frações listadas abaixo utilizando setores circulares (“pizzas”) ou barras.

(a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$.

(b) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$.

(c) $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$.

(d) $\frac{4}{7} - \frac{1}{7}$.

(e) $\frac{5}{5} - \frac{2}{5}$.

(f) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$.

Exercício 1.8 Numa pizzaria, Gabriel comeu $\frac{5}{8}$ de uma pizza e Nando comeu $\frac{2}{8}$ da mesma pizza.

(a) Que fração da pizza os dois comeram juntos?
(b) Quem comeu mais pizza, João ou Carlos?
(c) Que fração de pizza um deles comeu a mais que o outro?

Solução. (a) A fração da pizza que os dois comeram juntos é igual à soma das frações que cada um deles comeu, ou seja,

$$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5+2}{8} = \frac{7}{8}.$$

(b) Para determinar quem comeu mais pizza, devemos verificar qual das frações $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{8}$ é a maior. Como as duas têm o mesmo denominador, a maior é $\frac{5}{8}$, pois é a que possui o maior numerador. Assim,

$$\frac{5}{8} > \frac{2}{8},$$

ou seja, Gabriel comeu mais pizza que Nando.

(c) A fração da pizza que Gabriel comeu a mais que Nando é igual à diferença entre $\frac{5}{8}$, fração comida por Gabriel, e $\frac{2}{8}$, fração comida por Nando, ou seja,

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}.$$

■

Exercício 1.9 João encheu o tanque do seu carro. Gastou $\frac{2}{5}$ do tanque para ir de casa ao trabalho durante a semana e $\frac{1}{5}$ do tanque para passear no final de semana. Que fração do tanque restou?

Exercício 1.10 Utilizando tinta de cor azul, Adamastor pintou $\frac{2}{10}$ da área de um muro, inicialmente pintado na cor branca, no primeiro dia de trabalho; $\frac{3}{10}$ da área do muro no segundo dia e $\frac{4}{10}$ no terceiro dia. No quarto dia, Adamastor percebeu uma diferença na tonalidade da tinta que foi utilizada e teve de repintar de branco $\frac{1}{10}$ da área do muro, relativa à parte que ficou pintada de cor diferente. Que fração do muro ficou pintada de azul após o quarto dia de trabalho?

(a) $\frac{2}{5}$. (b) $\frac{1}{2}$. (c) $\frac{7}{10}$. (d) $\frac{4}{5}$. (e) $\frac{9}{10}$.

Solução. Devemos somar as frações das áreas do muro pintadas, de azul, nos três primeiros dias e subtrair, do resultado, a fração do muro que foi pintada de branco no quarto dia. Portanto, a fração do muro que ficou pintada de azul após o quarto dia de trabalho é

$$\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{2+3+4-1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 1.11 Mariana está lendo um livro de romance que tem 150 páginas. Ontem ela leu 59 e hoje ela leu 25 das páginas desse livro.

(a) Que fração das páginas do livro Mariana já leu?
(b) Que fração representa as páginas que Mariana ainda não leu?

Solução. (a) Ontem Mariana leu $\frac{59}{150}$ e hoje $\frac{25}{150}$ das páginas do livro. Logo, a fração do livro que Mariana já leu é

$$\frac{59}{150}+\frac{25}{150}=\frac{59+25}{150}=\frac{84}{150}=\frac{84\div 6}{150\div 6}=\frac{14}{25}.$$

(b) Por outro lado, a fração do livro que Mariana ainda não leu é igual a

$$\frac{25}{25}-\frac{14}{25}=\frac{11}{25}.$$

■

Exercício 1.12 Gabi foi às compras e gastou $\frac{1}{3}$ do dinheiro que possuía, restando-lhe, ainda, R$ 240,00. Quanto Gabi possuía antes de ir às compras?

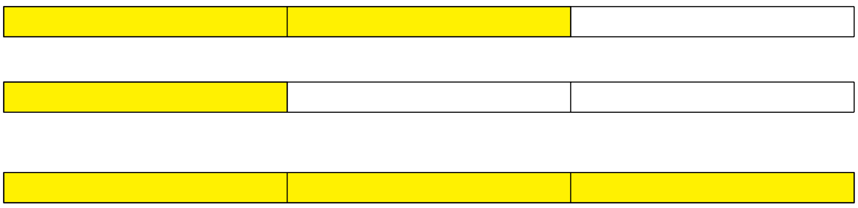
(a) R$ 80,00. (b) R$ 120,00. (c) R$ 240,00. (d) R$ 360,00. (e) R$ 480,00.

Solução. Como Gabi gastou $\frac{1}{3}$ do que tinha com as compras, a fração do dinheiro que lhe restou foi $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Representamos na reta numérica abaixo a fração $\frac{2}{3}$, que corresponde aos R$ 240,00 que restaram.

Na próxima reta numérica, podemos observar a representação geométrica de $\frac{1}{3}$, que correspode a R$ 240,00 $\div$ 2 $=$ R$ 120,00.

Finalmente, na reta numérica logo abaixo, podemos observar a representação geométrica de $\frac{3}{3}$, que correspode a $3 \times$R$ 120,00 = R$ 360,00.

Logo, Gabi tinha R$ 360,00 antes de fazer as compras, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(d)**. Uma representação geométrica alternativa para as frações envolvidas nesse problema é a seguinte.



$\frac{2}{3} \longrightarrow$ R$ 240,00

$\frac{1}{3} \longrightarrow$ R$ 240,00 $\div$ 2 = R$ 120,00

$\frac{3}{3} \longrightarrow$ $3 \times$R$ 140,00 = R$ 360,00

■

Exercício 1.13 — Canguru. Numa classe, os alunos nadam somente ou dançam somente ou fazem as duas coisas. Três quintos dos alunos da classe nadam e três quintos dançam. Há exatamente cinco alunos que fazem as duas coisas, isto é, nadam e dançam. Quantos alunos há na classe?

(a) 15. (b) 20. (c) 25. (d) 30. (e) 35.

Solução. Somando as frações que representam os alunos que nadam e os alunos que dançam, obtemos:

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}.$$

Note que a fração $\frac{6}{5}$ é maior que a fração $\frac{5}{5}$, que representa o total de alunos na classe. De fato, a diferença $\frac{6}{5} - \frac{5}{5} > 0$ ocorre porque a fração que corresponde aos alunos que praticam as duas atividades foi somada duas vezes, tanto na fração dos alunos que nadam quanto na fração dos alunos que dançam. Assim, essa diferença corresponde aos alunos que praticam as duas atividades. Logo,

$$\frac{1}{5} \longrightarrow 5 \text{ alunos.}$$

$$\frac{5}{5} \longrightarrow 5 \times 5 = 25 \text{ alunos.}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Sequência 2

Exercício 1.14 Encontre os resultados das operações com frações listadas abaixo.

(a) $\frac{7}{5} + \frac{2}{3}$.
(b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$.
(c) $\frac{4}{8} + \frac{2}{3}$.
(d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$.
(e) $\frac{3}{7} - \frac{1}{6}$.
(f) $\frac{1}{8} - \frac{1}{9}$.
(g) $\frac{7}{5} - \frac{2}{3}$.
(h) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$.

Exercício 1.15 Se $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{9}$ e $z = \frac{1}{5}$, calcule as seguintes expressões.

(a) $x + y$.
(b) $x - z$.

(c) $y + x - z$.
(d) $x + y + z$.

Exercício 1.16 Calcule o valor da expressão numérica

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right).$$

Solução. Temos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{2\times 3} - \frac{1\times 2}{3\times 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{2}{6} - \frac{1}{10} = \frac{2\times 5}{6\times 5} - \frac{1\times 3}{10\times 3} \\ &= \frac{10}{30} - \frac{3}{30} = \frac{7}{30}.\end{aligned}$$

■

Exercício 1.17 — UFMG - adaptado. Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Se o sorvete de chocolate comprado por Paula estivesse em um único pote, a que fração desse pote ele corresponderia?

(a) $\frac{2}{5}$.
(b) $\frac{3}{5}$.
(c) $\frac{5}{12}$.
(d) $\frac{5}{6}$.

Solução. Um dos potes continha quantidades iguais de chocolate, de creme e de morango, logo, a fração correspondente à quantidade de chocolate é $\frac{1}{3}$. O outro pote continha quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha, assim, a fração correspondente à quantidade de chocolate é $\frac{1}{2}$. Como os dois potes continham as mesmas quantidades de sorvete, as frações de chocolate nos dois potes são frações de uma mesma unidade, logo, se todo o sorvete de chocolate estivesse em um único pote, a fração desse pote que ele corresponderia é

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{3\times 2} + \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

Exercício 1.18 Três amigas planejavam preencher um álbum de figurinhas da copa. Karla contribuiu com $\frac{1}{6}$, Paula com $\frac{2}{3}$ e Cristina contribuiu com $\frac{1}{8}$ das figurinhas.

(a) Supondo que não havia figurinhas repetidas, que fração do álbum foi preenchida com as contribuições das três amigas?
(b) Que fração ainda falta preencher para completar o álbum?

Solução. (a) Supondo que não havia figurinhas repetidas, a fração do álbum, que foi preenchida com as contribuições das três amigas, é igual à soma

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1\times 4}{6\times 4} + \frac{2\times 8}{3\times 8} + \frac{1\times 3}{8\times 3} = \frac{4}{24} + \frac{16}{24} + \frac{3}{24} = \frac{4+16+3}{24} = \frac{23}{24}.$$

(b) A fração que ainda falta preencher, para completar o álbum, é

$$\frac{24}{24} - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}.$$

■

Exercício 1.19 No dia do lançamento de um prédio residencial, $\frac{1}{3}$ dos apartamentos foram vendidos e $\frac{1}{6}$ foram reservados. Que fração corresponde aos apartamentos que não foram vendidos ou reservados?

Solução. Somando as frações de apartamentos vendidos e de apartamentos reservados, temos:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

dos apartamentos. Logo, resta a outra metade, isto é, $\frac{1}{2}$ dos apartamentos ainda não vendidos nem reservados. ■

Exercício 1.20 Maurício fez um suco misto de laranja e acerola. Ele misturou metade de um copo de suco de acerola com $\frac{1}{3}$ do mesmo copo de suco de laranja. Calcule a fração que falta para ter o copo cheio.

(a) $\frac{5}{6}$. (b) $\frac{1}{6}$. (c) $\frac{2}{5}$. (d) $\frac{1}{3}$. (e) $\frac{2}{3}$.

Solução. As duas porções misturadas somam

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Logo, resta $\frac{1}{6}$ do volume do copo. A alternativa correta é a letra (**b**). ■

Exercício 1.21 — ENEM. Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares. Do total de lugares, reservou $\frac{2}{5}$ das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, $\frac{3}{8}$ para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele. Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

(a) 27. (b) 40. (c) 45. (d) 74. (e) 81.

Solução. O enunciado diz que $\frac{2}{5}$ das vagas foram reservadas para as pessoas que residem na capital, logo, a quantidade de vagas reservadas para essas pessoas é

$$\frac{2}{5}\cdot 120=\frac{120}{5}\cdot 2=24\cdot 2=48.$$

Por outro lado, $\frac{3}{8}$ das vagas são reservadas para as pessoas que moram no interior. Desse modo, o total de vagas reservadas para essas pessoas é

$$\frac{3}{8}\cdot 120=\frac{120}{8}\cdot 3=15\cdot 3=45.$$

Como o restante das vagas está reservado para as pessoas que residem fora do estado, essa quantidade é igual a

$$120-(48+45)=120-93=27.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Uma solução alternativa para o problema 1.21 consiste em somar as frações referentes às vagas reservadas para pessoas da capital e do interior, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, respectivamente; calcular a fração que corresponde às vagas reservadas para pessoas de fora do estado de São Paulo, que é a fração faltante para completar uma unidade; e calcular essa última fração de 120. Com efeito,

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{2\times 8}{5\times 8}+\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{16+15}{40}=\frac{31}{40};$$

$$\frac{40}{40}-\frac{31}{40}=\frac{9}{40};$$

$$\frac{9}{40} \cdot 120 = \frac{120}{40} \cdot 9 = 3 \cdot 9 = 27.$$

Exercício 1.22 — Unesp. Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar 2/5 da estrada e a outra os 81 km restantes, a extensão dessa estrada é de:

(a) 125 km.
(b) 135 km.
(c) 142 km.
(d) 145 km.
(e) 160 km.

Exercício 1.23 — CMRJ. O valor da expressão numérica

$$\frac{1}{1+1} + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}} + \frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}} + \frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}} + \frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}$$

é

(a) 1. (b) $\frac{63}{64}$. (c) $\frac{31}{32}$. (d) $\frac{15}{16}$. (e) $\frac{7}{8}$.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+1} + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}} + \frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}} + \frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}} + \frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{\frac{8}{7}} + \frac{\frac{1}{15}}{\frac{16}{15}} + \frac{\frac{1}{31}}{\frac{32}{31}} + \frac{\frac{1}{63}}{\frac{64}{63}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} + \frac{1}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{8} + \frac{1}{\cancel{15}} \cdot \frac{\cancel{15}}{8} + \frac{1}{\cancel{31}} \cdot \frac{\cancel{31}}{8} + \frac{1}{\cancel{63}} \cdot \frac{\cancel{63}}{8} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\
&= \frac{32+16+8+4+2+1}{64} \\
&= \frac{63}{64}.
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 1.24 — Banco da OBMEP. Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine trabalham como ambulantes vendendo sanduíches. Diariamente, elas passam na lanchonete do Sr. Manoel e pegam a mesma quantidade de sanduíches para vender. Um certo dia, Sr. Manoel estava doente e deixou um bilhete avisando o motivo pelo qual não estava lá, mas pedindo que cada uma pegasse $\frac{1}{5}$ dos sanduíches. Ana passou primeiro, seguiu as instruções do bilhete e saiu para vender seus sanduíches. Bia, passou em seguida, mas pensou que era a primeira a passar, pegando $\frac{1}{5}$ do que havia e saiu. Cátia, Diana e Elaine chegaram juntas e dividiram igualmente a quantidade que havia, já que Cátia sabia que Ana e Bia haviam passado antes.

a) Que fração do total de sanduíches coube a Bia?
b) Quem ficou com a menor quantidade de sanduíches? Quem ficou com a maior quantidade?
c) Ao final da divisão, nenhuma das vendedoras ficou com mais de 20 sanduíches. Quantos sanduíches o Sr. Manoel deixou para elas?

Solução. a) $\frac{4}{25}$. Como Bia pegou $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ela ficou com $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ dos sanduíches.

b) Ana pegou $\dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{25}$ e Cátia, Diana e Elaine dividiram entre as três a fração que restava, que era $1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$, ou seja, cada uma pegou $\dfrac{16}{75}$ dos sanduíches, que é maior que $\dfrac{12}{75}$ e $\dfrac{15}{75}$. Sendo assim, Cátia, Diana e Elaine ficaram com a maior parte dos sanduíches e Bia com a menor.

c) 75. A quantidade de sanduíches deve ser um múltiplo comum de 5, 25 e 75, sendo 75 o menor deles. Para 75 sanduíches, as quantidades de Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine são, respectivamente, 15, 12, 16, 16, 16, todas menores que 20, mas para o próximo múltiplo comum de 5, 25 e 75, que é 150, todas ficarão com mais de 20 sanduíches. Sendo assim, essa quantidade deve ser 75.

■

Sequência 3

Exercício 1.25 — Canguru. Partindo da extremidade esquerda de um cano, uma formiguinha andou $\frac{2}{3}$ do seu comprimento. Uma joaninha, que havia partido da extremidade direita do mesmo cano, andou $\frac{3}{4}$ do comprimento deste. Nessa situação, qual fração do comprimento do cano representa a distância entre os dois bichinhos?

(a) $\frac{3}{8}$. (b) $\frac{1}{12}$. (c) $\frac{5}{7}$. (d) $\frac{1}{2}$. (e) $\frac{5}{12}$.

Exercício 1.26 — Canguru. Numa escola, $\frac{2}{3}$ dos alunos gostam de Matemática e $\frac{3}{4}$ dos alunos gostam de Português. Qual é a menor fração que pode representar os alunos que gostam de ambas as matérias?

(a) $\frac{1}{12}$. (b) $\frac{5}{12}$. (c) $\frac{1}{2}$. (d) $\frac{5}{7}$. (e) $\frac{8}{9}$.

Solução. A soma das frações que representam as quantidades de alunos que gostam de Matemática e de Português é

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2{\times}4}{3{\times}4} + \frac{3{\times}3}{4{\times}3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}.$$

Desse modo, pelo menos

$$\frac{17}{12} - \frac{12}{12} = \frac{17-12}{12} = \frac{5}{12}$$

dos alunos gostam de ambas as matérias, pois se r é a fração dos alunos que gostam de ambas as matérias, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - r \leq 1 &\Longrightarrow \frac{17}{12} - r \leq 1 \\ &\Longrightarrow r \geq \frac{17}{12} - \frac{12}{12} \\ &\Longrightarrow r \geq \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

A fração que representa a quantidade de alunos que gostam de ambas as matérias é maior que $\frac{5}{12}$, quando há alunos que não gostam de nenhuma das duas. ■

Exercício 1.27 — CMM - adaptado. Sávio fez uma pesquisa com os moradores de seu condomínio sobre a prática de coleta seletiva de lixo. Ele constatou que $\frac{3}{4}$ dos entrevistados praticam esse tipo de coleta e $\frac{1}{5}$ dos entrevistados sequer sabem o que isso significa. Dessa maneira, a fração que representa a quantidade de pessoas que sabem o que significa a coleta seletiva mas não a praticam é:

(a) $\frac{1}{4}$. (b) $\frac{1}{9}$. (c) $\frac{1}{10}$. (d) $\frac{1}{15}$. (e) $\frac{1}{20}$.

Solução. Uma vez que $\frac{3}{4}$ dos estrevistados praticam a coleta seletiva, a fração que representa a quantidade de entrevistados que não a praticam é

$$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Agora, dentre os entrevistados que não praticam a coleta seletiva, há os que sabem e os que não sabem o que ela significa. Uma vez que a fração dos que não sabem o que esse tipo de coleta significa é igual a $\frac{1}{5}$, a fração que representa os que sabem o que significa a coleta seletiva, mas não a praticam, é

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1\times 5}{4\times 5} - \frac{1\times 4}{5\times 4} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}.$$

Assim, a alternativa correta é da letra **(e)**. ■

Exercício 1.28 — CMPA. Os animais de um pequeno zoológico se dividem em três classes: mamíferos, aves e répteis. Sabe-se que, do total de animais desse zoológico, $\frac{2}{5}$ são mamíferos, $\frac{3}{8}$ são aves e os 270 animais restantes são répteis. A quantidade total de animais desse zoológico é igual a:

(a) 930. (b) 1200. (c) 1330. (d) 1470. (e) 1540.

Solução. A fração que representa a soma das quantidades de mamíferos e aves é

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2\times 8}{5\times 8} + \frac{3\times 5}{8\times 5} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40}.$$

Logo, a fração que representa os animais restantes, ou seja, os répteis, é

$$\frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{9}{40} &\longrightarrow 270 \text{ animais} \\ \frac{1}{40} &\longrightarrow 270 \div 9 = 30 \text{ animais} \\ \frac{40}{40} &\longrightarrow 40\times 30 = 1200 \text{ animais} \end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 1.29 — Canguru. Miguel tem cães, vacas, gatos e cangurus no seu sítio. Ao todo são 24 animais, sendo que $\frac{1}{8}$ deles são cães, $\frac{3}{4}$ **não** são vacas e $\frac{2}{3}$ **não** são gatos. Quantos cangurus há no sítio?

(a) 4. (b) 5. (c) 6. (d) 7. (e) 8.

Exercício 1.30 Certa quantia foi repartida entre três pessoas da seguinte maneira: a primeira recebeu $\frac{2}{3}$ da quantia mais R\$ 5,00; a segunda recebeu $\frac{1}{5}$ da quantia mais R\$ 12,00; e a terceira recebeu o restante, no valor de R\$ 15,00. Qual a quantia que foi repartida?

Solução. Uma vez que R\$ 5,00 + R\$ 12,00 = R\$ 17,00 e

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2\times 5}{3\times 5} + \frac{1\times 3}{5\times 3} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15},$$

as duas primeiras pessoas receberam, juntas, $\frac{13}{15}$ da quantia mais R\$ 17,00. Desse modo, a quantia que coube à terceira pessoa, somada com R\$ 17,00, ou seja, R\$ 17,00 + R\$ 15,00 = R\$ 32,00, corresponde à fração

$$\frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{15-13}{15} = \frac{2}{15},$$

extamente o que falta para completar a fração unidade ($1 = \frac{15}{15}$), representando o total da quantia que foi repartida. Portanto, temos:

$$\frac{2}{15} \longrightarrow \text{R\$ } 32{,}00$$

$$\frac{1}{15} \longrightarrow \text{R\$ } 32{,}00 \div 2 = \text{R\$ } 16{,}00$$

$$\frac{15}{15} \longrightarrow 15 \times \text{R\$ } 16{,}00 = \text{R\$ } 240{,}00$$

■

Exercício 1.31 Uma fortuna foi repartida entre três filhos do seguinte modo: uma filha solteira recebeu $\frac{3}{7}$ da herança mais R\$ 8000,00; o filho menor recebeu $\frac{3}{8}$ mais R\$ 5000,00 e a filha casada recebeu os R\$ 42.000,00 restantes. Quanto recebeu o filho menor?

Exercício 1.32 Uma torneira enche um tanque em 6 horas e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Sabendo que o tanque encontra-se vazio, se as duas torneiras forem abertas ao mesmo tempo, em quantas horas elas encherão o tanque?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{6}$ do tanque e a outra enche $\frac{1}{3}$ do mesmo tanque. Desse modo, se as duas forem abertas ao mesmo tempo, em 1 hora encherão

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

do tanque. Logo, se o tanque estiver vazio e as torneiras forem abertas juntas, o tanque estará completamente cheio em 2 horas. ■

Exercício 1.33 Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas, sozinha, enche o tanque em 7 horas. Em quanto tempo a outra torneira, sozinha, encheria o tanque?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{4}$ do tanque e as duas juntas enchem $\frac{1}{7}$ do mesmo tanque. Desse modo, em 1 hora, a outra torneira encherá

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1 \times 7}{4 \times 7} - \frac{1 \times 4}{7 \times 4} = \frac{7}{28} - \frac{4}{28} = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28}$$

do tanque. Assim, essa torneira enche $\frac{3}{28}$ do tanque em 60 minutos. Logo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{3}{28} \longrightarrow 60\,\text{min}$$

$$\frac{1}{28} \longrightarrow 60\,\text{min} \div 3 = 20\,\text{min}$$

$$\frac{28}{28} \longrightarrow 28 \times 20\,\text{min} = 560\,\text{min}$$

Ou seja, a segunda torneira, sozinha, enche completamente o tanque em $560\,\text{min} = 9\,\text{h}20\,\text{min}$. ■

Sequência 4

Exercício 1.34 — OBMEP. Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a + b$?

(a) 5. (b) 7. (c) 14. (d) 20. (e) 31.

Solução. Veja que

$$\frac{31}{33} = \frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{a \times 3}{11 \times 3} + \frac{b \times 11}{3 \times 11} = \frac{3a}{33} + \frac{11b}{33} = \frac{3a + 11b}{33}.$$

Assim, $3a + 11b = 31$. Desse modo, procuramos um múltiplo de 3 positivo que somado a um múltiplo de 11, também positivo, resulte em 31. Como $31 - 11 = 20$ não é múltiplo de 3 e $31 - 22 = 9$ é múltiplo de 3, obtemos

$$3a = 9 \Longrightarrow a = 3$$

e

$$11b = 22 \Longrightarrow b = 2.$$

Portanto, $a + b = 5$. A alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 1.35 — OBMEP. Elisa tem 46 livros de Ciências e outros de Matemática e Literatura. Sabendo que um nono dos seus livros são de Matemática e um quarto são de Literatura, quantos livros de Matemática ela possui?

(a) 23. (b) 18. (c) 8. (d) 9. (e) 36.

Exercício 1.36 Duas torneiras enchem um tanque em 6 e 7 horas, respectivamente. Há um ralo no fundo do tanque, que o esvazia completamente em exatamente 2 horas, se o tanque estiver cheio e as torneiras fechadas. Estando o tanque cheio e abrindo-se as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{6}$ do tanque e a outra enche $\frac{1}{7}$ do mesmo tanque. Abertas, simultaneamente, em 1 hora, as duas enchem

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1\times 7}{6\times 7} + \frac{1\times 6}{7\times 6} = \frac{7}{42} + \frac{6}{42} = \frac{6+7}{42} = \frac{13}{42}.$$

Por outro lado, o ralo esvazia $\frac{1}{2}$ do tanque em 1 hora, pois necessita de 2 horas para esvaziá-lo completamente. Agora, como $\frac{1}{2} = \frac{21}{42} > \frac{13}{42}$, o ralo, em cada hora, retira mais água do que o que as torneiras conseguem colocar. Desse modo, se o tanque estiver cheio, com os ralos e as torneiras abertos, o tanque ficará vazio. De fato, em $1\,\text{h} = 60\,\text{min}$, a fração de água que o tanque terá perdido é

$$\frac{1}{2} - \frac{13}{42} = \frac{21}{42} - \frac{13}{42} = \frac{8}{42} = \frac{8 \div 2}{42 \div 2} = \frac{4}{21}.$$

Assim, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{4}{21} \longrightarrow 60\,\text{min}$$

$$\frac{1}{21} \longrightarrow 60\,\text{min} \div 4 = 15\,\text{min}$$

$$\frac{21}{21} \longrightarrow 21\times 15\,\text{min} = 315\,\text{min}$$

Portanto, com os ralos e torneiras abertos e o tanque completamente cheio, depois de $315\,\text{min} = 5\,\text{h}15\,\text{min}$ o tanque ficará completamente vazio. ■

Exercício 1.37 Três torneiras, abertas simultaneamente, enchem um tanque em 8 horas. A primeira e a segunda torneiras são capazes de encher o tanque em 18 e 24 horas, respectivamente. Quantas horas a terceira torneira levaria para encher o tanque sozinha?

Exercício 1.38 Felipe e Lucas, encarregados de uma obra, fariam todo o trabalho em 12 dias. No fim do quarto dia de trabalho, Felipe adoeceu e Lucas concluiu o trabalho sozinho, gastando mais 10 dias. Em quanto tempo Lucas faria o trabalho se tivesse trabalhado sozinho desde o início?

Exercício 1.39 — CMM - adaptado. Lucas e Lauro estavam correndo numa mesma pista circular. Eles iniciaram a corrida ao mesmo tempo, do mesmo ponto de partida, porém em sentidos contrários. Em um determinado momento, os dois pararam, sem que ainda tivessem passado um pelo outro. Lucas já tinha percorrido $\frac{1}{2}$ do comprimento total da pista e Lauro tinha percorrido $\frac{1}{6}$ do comprimento total, mais 110 metros. Se, no momento da parada, a distância entre eles era de 90 metros, qual o comprimento total desta pista de corrida?

(a) 210 metros.
(b) 240 metros.
(c) 246 metros.
(d) 400 metros.
(e) 600 metros.

Solução. Veja que eles saíram em sentidos contrários e ainda não haviam se encontrado no momento em que ocorreu a parada. Assim, se somarmos as distâncias que os dois percorreram e a distância entre eles no momento da parada, obteremos o comprimento da pista. Mas observe que Lucas já havia percorrido $\frac{1}{2}$ do comprimento da pista e Lauro $\frac{1}{6}$ do mesmo comprimento mais 110 m. Agora, uma vez que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4\div 2}{6\div 2}=\frac{2}{3}$$

e

$$\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3},$$

a fração $\frac{1}{3}$ corresponde a $110\,\text{m}+90\,\text{m}=200\,\text{m}$. Assim, temos as seguintes correspondências.

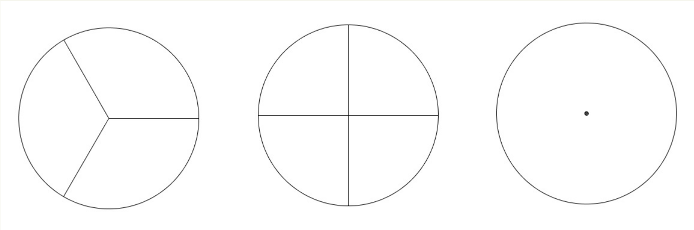
$$\frac{1}{3}\longrightarrow 200\,\text{m}$$

$$\frac{3}{3}\longrightarrow 3\times 200\,\text{m}=600\,\text{m}$$

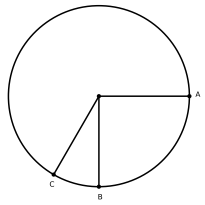
Portanto, concluímos que a pista possui 600 m, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

Exercício 1.40 Dois caminhões tanques, completamente cheios com uma mistura de álcool e gasolina, despejam totalmentes suas cargas num mesmo reservatório vazio de um posto de combustíveis. Em um dos tanques, a mistura continha $1/12$ de álcool, e no outro, a mistura continha $1/16$ de álcool. Qual a fração de álcool nesse reservatório depois de despejadas as duas cargas?

Exercício 1.41 — Adaptado do Banco da OBMEP. Certo matemático estava editando figuras no formato de discos em seu computador. As três figuras a seguir mostram discos de mesmo formato em que os dois primeiros foram cortados em 3 e 4 pedaços iguais, respectivamente. Ele deseja cortar o terceiro disco usando dois botões do seu programa de imagens: um que simula uma régua e corta em linha reta e outro que permite copiar e colar pedaços já cortados de discos da imagem. Explique como usar esses dois botões e os discos já desenhados para cortar o terceiro disco em 12 partes iguais.



Solução. O primeiro passo é usar o botão de copiar e colar para sobrepor os pedaços de tamanhos $1/3$ e $1/4$ dos discos da esquerda produzindo a figura a seguir:



Note que a fatia conectando os pontos B e C equivale a

$$1/3 - 1/4 = 1/12$$

do disco inteiro. Agora basta usar o botão de copiar e colar, repetindo sucessivamente o procedimento que gera essa fatia 11 vezes, obtendo pedaços consecutivos para dividir o terceiro disco em 12 partes iguais ■

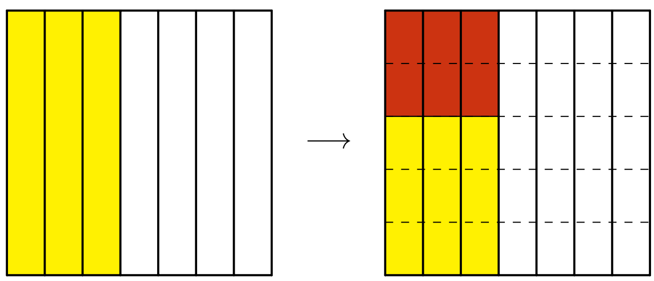
Observação 1.5 Também é possível resolver esse exercício trocando o botão de copiar e colar por um compasso, que essencialmente servirá para transportar os comprimentos de arcos entre um disco e outro.

1.3 – Multiplicação e divisão

Para dar continuidade ao estudo das operações com números racionais na forma de frações, apresentamos agora um exemplo que está relacionado à *multiplicação de frações*.

Exercício 1.42 Dona Josefa fez uma torta de frango para distribuir com seus queridos vizinhos. Ela pensou em dar $\frac{3}{7}$ da torta para Dona Francisca, a sua vizinha da direita. Porém, quando a torta estava no forno, o cheiro se espalhou pela vizinhança e ela teve que refazer a distribuição para contemplar um número maior de vizinhos. Decidiu, então, dar a Dona Francisca apenas $\frac{2}{5}$ da fração que tinha pensado em dar inicialmente. Depois de refeita a divisão, que fração da torta Dona Francisca recebeu?

Solução. A torta pode ser representada por um quadrado, que inicialmente foi dividido em sete partes iguais, pelos cortes verticais. Pintamos 3 dessas partes, representando a fração da torta que Dona Francisca receberia inicialmente: $\frac{3}{7}$ = "3 retângulos". Em seguida, cada um desses retângulos é dividido em 5 partes iguais, pelos cortes horizontais, gerando retângulos pequenos. Assim, o quadrado fica dividido em $5\times 7 = 35$ desses últimos retângulos. Agora, a fração da torta que a Dona Francisca recebeu corresponde a $\frac{2}{5}$ da parte originalmente pintada. Por isso, realçamos, numa cor mais escura, dois dos cinco retângulos menores de cada retângulo vertical pintado anteriormente, totalizando $2\times 3 = 6$ retângulos realçados. Então, em termos do total de retângulos menores, a fração dos realçados é igual a $\frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}$.



Graças ao raciocínio acima, definimos o produto $\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}$ como

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7} = \frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} = \frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}.$$

Assim, Dona Francisca recebeu $\frac{6}{35}$ da torta, depois que Dona Josefa refez a divisão. ■

De modo geral, temos o seguinte algoritmo.

Multiplicação de Frações: o produto de duas frações é a fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas. Por exemplo,

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{5\times3}{8\times2}=\frac{15}{16}.$$

Não esquecendo que

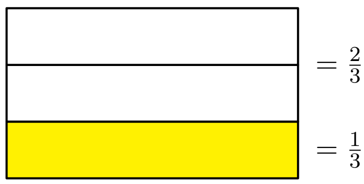
$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{2} \text{ é } \frac{5}{8} \text{ de } \frac{3}{2},$$

ou seja, multiplicando duas frações, estamos calculando uma fração de outra fração.

Exercício 1.43 Clotilde distribuiu certa quantidade de bombons de chocolate a seus três sobrinhos. Tobias, o mais velho dos três, recebeu $\frac{1}{3}$ do total de bombons. Adalberto, o mais jovem, recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou, depois que Tobias recebeu a sua parte. André recebeu os 16 bombons restantes. Adalberto deu $\frac{1}{6}$ de seus bombons a Marcela, sua namorada. Quantos bombons Marcela recebeu?

(a) 42. (b) 2. (c) 12. (d) 14.

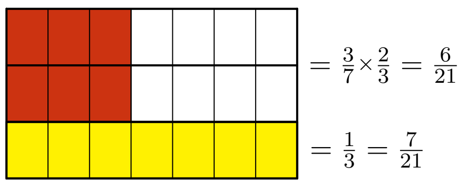
Solução. Tobias recebeu $\frac{1}{3}$ do total de bombons. Podemos representar geometricamente essa fração através da figura abaixo, na qual a parte dos bombons que coube a Tobias está pintada de amarelo.



Depois que Tobias pegou a sua parte, restaram $\frac{2}{3}$ do total de bombons, que estão representados na figura pelas duas partes brancas. Então, Adalberto recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou, ou seja, recebeu

$$\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{21}.$$

Para representar essa fração, dividimos cada retângulo horizontal em 7 retângulos menores, e pintamos de uma cor mais escura, em cada uma das duas linhas brancas, 3 desses 7 retângulos menores, pois Adalberto recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou. O resultado é mostrado na próxima figura.



Sendo assim, as partes de Tobias e Adalberto somadas correspondem a todos os retângulos pintados:

$$\frac{1}{3}+\frac{6}{21}=\frac{7}{21}+\frac{6}{21}=\frac{13}{21}.$$

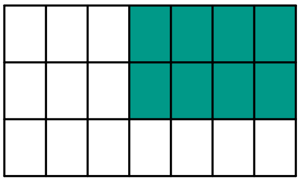
Desse modo, os oito retângulos que ficaram brancos na última figura correspondem à fração

$$\frac{21}{21}-\frac{13}{20}=\frac{8}{21}$$

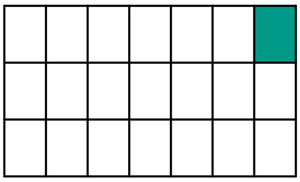
do todo. Tais 8 retângulos correspondem aos 16 bombons que André recebeu. Então, cada retângulo, $\frac{1}{21}$ dos bombons, é o mesmo que 2 bombons. Portanto, Clotilde distribuiu ao todo $21\times2=42$ bombons, como essa conclução ilustrada na seguinte sequência de três figuras.

Desses 42 bombons, $\frac{6}{21}$ foram para Adalberto. Uma vez que

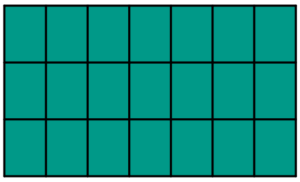
$$\frac{6}{21}\times42=6\times\frac{42}{21}=6\times2=12,$$



$= \frac{8}{21} \longleftrightarrow$ 16 bombons



$= \frac{1}{21} \longleftrightarrow 16 \div 8 = 2$ bombons



$= \frac{21}{21} \longleftrightarrow 21 \cdot 2 = 42$ bombons

concluímos que Adalberto recebeu 12 bombons. Além disso, ele deu $\frac{1}{6}$ de seus bombons para Marcela. Como

$$\frac{1}{6}\times 12 = \frac{12}{6} = 2,$$

podemos afirmar que Marcela recebeu 2 bombons. ■

O próximo exemplo está relacionado com a *divisão de frações*.

Exercício 1.44 André possui um sítio, localizado na cidade de Canindé. No sítio, há uma vaca que produz exatamente 5 litros de leite todos os dias. André divide o leite produzido em garrafas de capacidade $\frac{1}{3}$ de litro e as distribui com os parentes e amigos mais próximos. Quantas garrafas de leite são produzidas por dia no sítio de André?

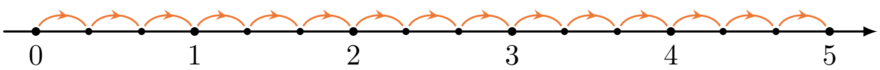
Solução. Conceitualmente, precisamos dividir 5 litros por $\frac{1}{3}$ de litro, sendo essa divisão de um inteiro por uma fração: $5 \div \frac{1}{3}$. Na figura abaixo, cada uma das caixas numeradas de 1 a 5 representa um litro de leite.

Como as garrafas têm capacidade de $\frac{1}{3}$ de litro, cada litro de leite enche exatamente 3 garrafas: algebricamente, temos $3\times\frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Portanto, os 5 litros de leite enchem $5\times 3 = 15$ garrafas, o que pode ser contado na figura. ■

Observando a solução do problema acima, percebemos que

$$5 \div \frac{1}{3} = 5\times\frac{3}{1} = 15.$$

Também podemos utilizar a reta numérica para interpretar geometricamente a divisão $5 \div \frac{1}{3} = 5\times 3 = 15$. Imagine que estamos caminhando sobre a reta e desejamos ir de 0 a 5, dando passos de tamanho $\frac{1}{3}$.

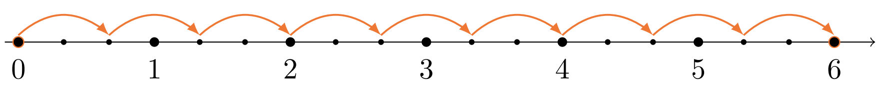


Observe, pela figura anterior, que são necessários 3 passos para percorrer cada um dos segmentos entre os números inteiros. Logo, são necessários $5{\times}3 = 15$ passos para ir de 0 a 5. Portanto,

$$5 \div \frac{1}{3} = 5{\times}3 = 15.$$

De modo análogo, $6 \div \frac{2}{3}$ representa a quantidade de passos que devemos dar se desejamos ir de 0 a 6, utilizando passos com $\frac{2}{3}$ de seu tamanho. Mas veja que, nesse caso, são necessários 3 passos de tamanho $\frac{2}{3}$ para percorrer 2 unidades inteiras, ou seja, para cada um dos intervalos $[0,2]$, $[2,4]$ e $[4,6]$. Portanto, são necessários $\frac{6}{2}{\times}3 = 6{\times}\frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ passos para ir de 0 a 6, ou seja,

$$6 \div \frac{2}{3} = 6{\times}\frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$



Para apresentar uma interpretação geométrica para a divisão $1 \div \frac{5}{13}$, procuraremos uma resposta para a pergunta: quantos segmentos de medida $\frac{5}{13}$ cabem em 1 segmento de medida 1? Para responder a essa pergunta, primeiro note que

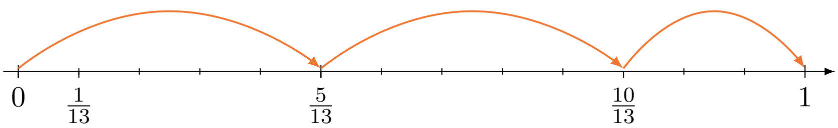
$$\begin{array}{r|l} 1\,3 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

Assim,

$$\left(2 + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = 1,$$

ou seja,

$$1 \div \frac{5}{13} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$



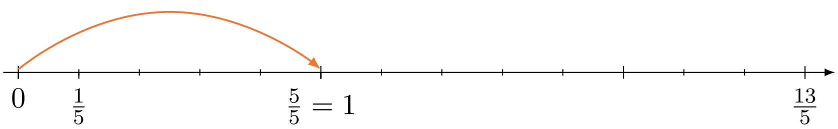
Agora, se $0 < p < n$ são números naturais, então, dividindo n por p, encontramos números naturais q e r tais que $0 \leq r < p$ e $n = qp + r$. Também aqui, obtemos

$$\left(q + \frac{r}{p}\right) \cdot \frac{p}{n} = 1,$$

o que implica

$$1 \div \frac{p}{n} = \frac{n}{p}.$$

Por outro lado, podemos interpretar geometricamente a divisão $1 \div \frac{13}{5}$, através da seguinte figura.



Na figura, a unidade foi dividida em 5 intervalos de medida $\frac{1}{5}$ e a fração $\frac{13}{5}$ corresponde a 13 desses intervalos. Assim, $\frac{5}{13}$ da fração $\frac{13}{5}$ correspondem a 5 desses intervalos menores, cuja medida é $\frac{1}{5}$. Logo, concluímos que $1 \div \frac{13}{5} = \frac{5}{13}$.

Mais geralmente, temos o seguinte algoritmo.

Divisão de Frações: para dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda. Por exemplo,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3}\times\frac{5}{4} = \frac{2\times 5}{3\times 4} = \frac{10}{12}$$

e

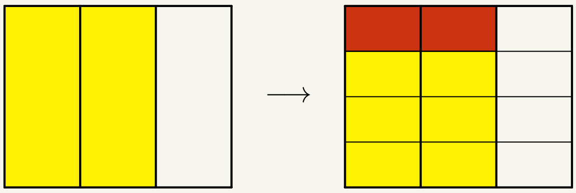
$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{5}\times\frac{3}{1} = \frac{1\times 3}{5\times 1} = \frac{3}{5}.$$

1.4 – Exercícios resolvidos e propostos

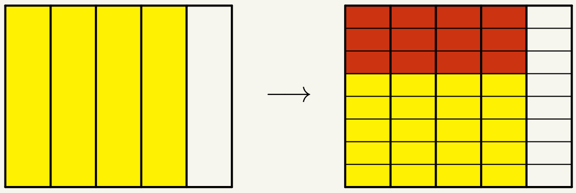
Sequência 1

Exercício 1.45 Em cada um dos itens abaixo, a parte pintada de cor clara no retângulo da esquerda representa uma fração e a parte pintada de cor escura no retângulo da direita representa o produto dessa fração por uma segunda fração. Encontre as duas frações e calcule seu produto.

(a)



(b)



Solução. (a) A parte mais clara no retângulo da esquerda representa a fração $\frac{2}{3}$. No retângulo da direita, a parte escura representa $\frac{1}{4}$ da parte mais clara no retângulo da esquerda. Assim, a figura representa o produto

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{12}.$$

(b) A parte clara no retângulo da esquerda representa a fração $\frac{4}{5}$, enquanto a parte escura no retângulo da direita representa $\frac{3}{8}$ da parte mais clara no retângulo da esquerda. Logo, a figura representa o produto

$$\frac{3}{8}\times\frac{4}{5} = \frac{12}{40}.$$

■

Exercício 1.46 Calcule

(a) $8\times\frac{1}{4}$.

(b) $\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}$.

(c) $\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}$.

(d) $\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{7}$.

(e) $\frac{1}{2} \div 2$.

(f) $3 \div \frac{5}{3}$.

(g) $\frac{7}{4} \div \frac{7}{5}$.

(h) $\frac{9}{11} \div \frac{13}{22}$.

Para tornar mais simples os cálculos efetuados em uma multiplicação de frações, podemos dividir, por um mesmo número natural, o numerador de uma das frações e o denominador de outra, procedimento esse chamado de **simplificação**. Do mesmo modo, em uma divisão de frações, podemos dividir os seus numeradores por um mesmo número natural e, também, podemos dividir os seus denominadores por um mesmo número natural. Lembre-se de que, para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda. Logo, quando transformamos a divisão dessas frações em uma multiplicação, o numerador da segunda fração vira denominador e o seu denominador vira numerador. Por exemplo, com relação aos itens (d) e (h), do exercício 1.46, temos

$$\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{7}}=1$$

e

$$\frac{9}{11}\div\frac{13}{22}=\frac{9}{11\div 11}\div\frac{13}{22\div 11}=\frac{9}{1}\div\frac{13}{2}=\frac{9}{1}\times\frac{2}{13}=\frac{9\times 2}{13\times 1}=\frac{18}{13}.$$

Exercício 1.47 Carlos passa $\frac{1}{4}$ do dia estudando. Do tempo que passa estudando, ele utiliza $\frac{1}{3}$ para estudar Matemática. Que fração do dia Carlos utiliza para estudar Matemática?

Solução. Carlos estuda Matemática durante $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1\times 1}{3\times 4}=\frac{1}{12}$ do dia. ■

Exercício 1.48 Joana gastou $\frac{3}{4}$ de sua mesada na cantina da escola. Do total que gastou na cantina, $\frac{3}{7}$ foram gastos com doces. Que fração de sua mesada Joana gastou com doces?

Exercício 1.49 Quantas garrafas com capacidade de $\frac{2}{3}$ de litro são necessárias para distribuir 30 litros de suco?

Solução. A quantidade de garrafas com capacidade de $\frac{2}{3}$ de litro necessárias para distribuir os 30 litros de suco é

$$30\div\frac{2}{3}=\frac{30\div 2}{1}\div\frac{2\div 2}{3}=15\div\frac{1}{3}=15\times 3=45.$$

■

Exercício 1.50 Numa corrida de revezamento, as equipes devem percorrer um total de $\frac{9}{2}$ quilômetros e cada atleta deve percorrer $\frac{3}{4}$ de quilômetro. Quantos atletas cada equipe deve ter?

Sequência 2

Para o próximo exercício, observe que, na presença de adições ou subtrações, juntamente com multiplicações ou divisões, as multiplicações e divisões têm, por convenção, prioridade de execução sobre as adições e subtrações, sendo esse procedimento conhecido como **ordem de precedência** da multiplicação e da divisão sobre a adição e subtração.

Exercício 1.51 Calcule:

(a) $1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$.

(b) $1\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{4}-4$: atenção ao uso de frações mistas!

(c) $\frac{3}{5}-\frac{5}{6}\div 6$.

(d) $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\div 4$.

Exercício 1.52 Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza e José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou. Que fração da pizza foi comida por José?

Solução. Uma vez que Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ da pizza, restaram $\frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}$ da pizza. Assim, como José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou, a fração da pizza que ele comeu foi

$$\frac{2}{7}\times\frac{7}{8} = \frac{2 \div 2}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{8 \div 2} = \frac{1}{1}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, José comeu $\frac{1}{4}$ da pizza. ■

Se a multiplicação das frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{8}$ é feita sem os cancelamentos e simplificações, obtemos

$$\frac{2}{7}\times\frac{7}{8} = \frac{2\times 7}{7\times 8} = \frac{14}{56}.$$

Veja que obtivemos como resposta a fração $\frac{14}{56}$, que é equivalente a $\frac{1}{4}$, uma vez que $\frac{14\div 14}{56\div 14} = \frac{1}{4}$. A vantagem de fazer os cancelamentos e simplificações, antes de efetuar a multiplicação, é que os cálculos ficam mais simples.

Exercício 1.53 Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza e José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou. Que fração da pizza os dois comeram juntos?

Exercício 1.54 A família de Jaime bebe água em copos cuja capacidade é $\frac{2}{5}$ de litro. Se o garrafão de água que estão utilizando ainda tem $5\frac{3}{5}$ de litros de água, quantos copos eles ainda poderão encher completamente?

Solução. Inicialmente, veja que $5\frac{3}{5} = \frac{5\times 5+3}{5} = \frac{28}{5}$. Logo, ainda há $\frac{28}{5}$ litros de água no garrafão. Dividindo essa quantidade em copos com capacidade de $\frac{2}{5}$ de litro, obtemos um total de

$$\frac{28}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{28}{\cancel{5}} \div \frac{2}{\cancel{5}} = 28 \div 2 = 14 \text{ copos.}$$

Assim, a família de Jaime ainda poderá encher, completamente, 14 copos com a água que resta no garrafão. ■

Exercício 1.55 O pai de Bruna a presenteou com alguns doces na última sexta-feira. No sábado, ela comeu metade dos doces que ganhou e no domingo comeu a metade do que havia restado no sábado. Que fração da quantidade total de doces Bruna comeu no domingo?

Exercício 1.56 O pai de Maria a presenteou com alguns doces na última sexta-feira. Ela comeu metade dos doces que tinha no sábado e metade do que restou no domingo. Que fração da quantidade total de doces Maria comeu durante o fim de semana?

Exercício 1.57 A fazenda de Armando produziu 270 litros de leite durante a última semana. Ele utilizou $\frac{2}{3}$ dessa quantidade para fazer queijo e o restante vendeu em garrafas de capacidade de $\frac{1}{2}$ de litro. Quantas garrafas de leite Armando vendeu?

Exercício 1.58 Fernando construiu sua casa em $\frac{3}{7}$ de seu lote. Dias depois, plantou frutas em $\frac{1}{3}$ do restante. Calcule a fração do terreno destinada ao plantio de frutas.

Exercício 1.59 — Canguru. Em um teatro infantil, um sexto da audiência era de adultos e dois quintos das crianças eram de meninos. Qual fração da audiência era de meninas?

(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{1}{5}$. (e) $\frac{2}{5}$.

Solução. Uma vez que $\frac{1}{6}$ da audiência era formada por adultos, $1-\frac{1}{6}=\frac{6}{6-\frac{1}{6}}=\frac{5}{6}$ da audiência era composta por crianças. Como $\frac{2}{5}$ das crianças eram meninos, $1-\frac{2}{5}=\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ das crianças eram meninas. Assim, a fração da audiência composta por meninas era

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{3\div 3}{5\div 5}\times\frac{5\div 5}{6\div 3}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 1.60 — Canguru. Um oitavo dos convidados de um casamento eram crianças. Três sétimos dos adultos convidados eram homens. Que fração dos convidados eram mulheres adultas?

(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{5}$. (d) $\frac{1}{7}$. (e) $\frac{3}{7}$.

Exercício 1.61 Num time de futebol carioca, metade dos jogadores contratados são cariocas, um terço são de outros estados e os 4 restantes são estrangeiros. Quantos jogadores contratados tem o clube?

Solução. A fração, em relação ao total, dos jogadores brasileiros é $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$. Então $\dfrac{1}{6}$ dos jogadores é estrangeiro, que totalizam 4. Assim, o total de jogadores do clube é $\dfrac{6}{1}\cdot 4=24$. ■

Sequência 3

Exercício 1.62 — OBMEP. Dois meses atrás, o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês, foi feito 1/3 da obra e no segundo mês, mais 1/3 do que faltava. A que fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola?

(a) 1/3.
(b) 4/9.
(c) 1/2.
(d) 2/3.
(e) 5/6.

Solução. Depois de concluído o primeiro $\frac{1}{3}$ da obra no primeiro mês, restaram $\frac{2}{3}$. Assim, no segundo mês foram concluídos $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ da obra. Assim, a fração da obra da escola concluída nos dois primeiros meses é

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1\times 3}{3\times 3}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}.$$

Logo, a fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola é

$$\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}.$$

■

Exercício 1.63 Uma caixa possui 64 biscoitos. Em cada um dos dias da semana passada, de segunda a sexta-feira, Artur comeu metade dos biscoitos que havia na caixa. Quantos biscoitos restaram?

Solução. Como, em cada, dia Artur come a metade dos biscoitos, a quantidade de biscoitos que resta na caixa é igual à quantidade de biscoitos que ele comeu. Assim, na segunda, Artur comeu $\frac{1}{2}\times 64=32$ biscoitos, na terça comeu $\frac{1}{2}\times 32=16$; na quarta $\frac{1}{2}\times 16=8$; na quinta $\frac{1}{2}\times 8=4$ e na sexta $\frac{1}{2}\times 4=2$. Portanto, restaram 2 biscoitos na caixa. ■

Exercício 1.64 — Fundação Carlos Chagas - adaptado. João trabalhou ininterruptamente por 2 horas e 50 minutos na digitação de um texto. Sabendo que ele concluiu essa tarefa quando eram decorridos 11/16 do dia, contados a partir das 0 h, podemos afirmar que ele iniciou a digitação do texto às

(a) 13h 40min.
(b) 13h 20min.
(c) 13h.
(d) 12h 20min.
(e) 12h 10min.

Solução. Como 1 dia tem 24 horas e cada hora tem 60 minutos, 1 dia possui $24 \times 60 = 1440$ minutos. Assim, João finalizou a tarefa $\frac{11}{16} \times 1440 = \frac{1440}{16} \times 11 = 90 \times 11 = 990$ minutos depois de 0 h. Agora, veja que $990 = 60 \times 16 + 30$, conforme o seguinte algoritmo de divisão.

$$\begin{array}{r|l} 9\,9\,0 & 6\,0 \\ \cline{2-2} 3\,9\,0 & 1\,6 \\ 3\,0 & \end{array}$$

Logo, João concluiu o texto às 16h 30min. Subtraindo 2h 50min de 16h 30min, obtemos 16h 30min, conforme o algoritmo de subtração abaixo.

$$\begin{array}{rrl} & 16\text{h} & 30\text{min} \\ - & 2\text{h} & 50\text{min} \\ \hline & 13\text{h} & 40\text{min} \end{array}$$

Portanto, João iniciou a digitação às 13h 40min. Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 1.65 — OBM. Carlos fez uma viagem de 1210 km, sendo 7/11 de aeroplano, 2/5 do restante de trem, 3/8 do novo resto de automóvel e os demais quilômetros a cavalo. Calcule quantos quilômetros Carlos percorreu a cavalo.

Exercício 1.66 — Adaptado da OBMEP. Na igualdade abaixo, $\square$ é um número inteiro positivo. Qual é o seu valor?

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\square}}$$

Sequência 4

Exercício 1.67 No pátio de uma montadora há carros de cinco cores: preto, branco, vermelho, azul e prata. Metade dos carros são pretos e um quinto dos carros são brancos. De cada uma das outras três cores, há números iguais de carros. Sabendo-se que existem 42 carros vermelhos, quantos carros brancos há no pátio?

Solução. Dos carros que se encontram no pátio da montadora, $\frac{1}{2}$ são pretos e $\frac{1}{5}$ são brancos. Assim, a fração que corresponde ao total de carros pretos ou brancos é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} + \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

Desse modo, a fração que corresponde aos carros que não são pretos nem brancos é

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Agora, como há quantidades iguais das outras três cores, a fração que corresponde à quantidade de carros de cada uma dessas cores é

$$\frac{3}{10} \div 3 = \frac{3 \div 3}{10} \div 3 \div 3 = \frac{1}{10} \div 1 = \frac{1}{10}.$$

Como há 42 carros vermelhos, quantidade essa que corresponde a $\frac{1}{10}$ do total de carros no pátio da montadora, concluímos as seguintes correspondências.

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 42 \text{ carros}$$

$$\frac{10}{10} \longrightarrow 10{\times}42 = 420 \text{ carros}$$

Logo, há 420 carros no pátio. Os carros brancos correspondem a $\frac{1}{5}$ do total de carros no pátio, ou seja, a quantidade de carros brancos é

$$\frac{1}{5}{\times}420 = 84 \text{ carros}.$$

■

Uma vez que a a fração que corresponde aos carros vermelhos é conhecida, podemos proceder do seguinte modo alternativo para encontrar a quantidade de carros brancos.

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 42 \text{ carros}$$

$$\frac{2}{10} \longrightarrow 2{\times}42 = 84 \text{ carros}$$

Note que $\frac{2 \div 2}{10 \div 2} = \frac{1}{5}$. Logo, a quantidade de carros brancos é igual a 84.

Exercício 1.68 A metade de um muro é pintada de vermelho, um terço do que não é pintado de vermelho, é pintado de verde, e o restante é pintado de azul. A parte pintada de azul mede 160 cm de comprimento. Qual o comprimento da parte pintada de vermelho?

Exercício 1.69 Uma herança em dinheiro foi distribuída entre quatro irmãos. Ao primeiro, coube $\frac{2}{3}$ do total, enquanto o segundo recebeu $\frac{3}{4}$ do restante. Ao terceiro coube $\frac{1}{33}$ da soma das partes dos dois primeiros. Por fim, o quarto recebeu R$ 15.000,00. Quanto recebeu cada um dos herdeiros?

Exercício 1.70 — OBMEP - adaptada. Uma loja de roupas reduziu em $\frac{1}{10}$ o preço de uma camiseta, mas não conseguiu vendê-la. Na semana seguinte, reduziu em $\frac{1}{5}$ o novo preço, e a camiseta foi vendida por R$ 54,00. Qual era o preço original da camiseta?

Solução. Quando a loja reduziu em $\frac{1}{10}$ o preço da camiseta, o novo preço passou a ser $\frac{10}{10} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ do preço original. Depois da nova redução de $\frac{1}{5}$ do novo preço, o preço da camiseta passou a ser $\frac{4}{5}{\times}\frac{9}{10} = \frac{4 \div 2}{5}{\times}\frac{9}{10 \div 2} = \frac{2{\times}9}{5{\times}5} = \frac{18}{25}$ do preço orginal. Portanto, $\frac{18}{25}$ do preço original corresponde a R$ 54,00. Desse modo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{18}{25} \longrightarrow 54$$

$$\frac{1}{25} \longrightarrow 54 \div 3 = 18$$

$$\frac{25}{25} \longrightarrow 25{\times}3 = 75$$

Concluímos, assim, que o preço original da camiseta era R$ 75,00. ■

Exercício 1.71 Douglas tem uma caixa de tomates. No domingo, $\frac{1}{8}$ dos tomates da caixa estragaram; na segunda-feira, estragou $\frac{1}{3}$ do que sobrou no domingo. Sobraram 70 tomates em boas condições. Qual o total de tomates que havia na caixa?

Exercício 1.72 — CMF. Para o Desfile Cívico-Militar de 7 de setembro, o Colégio Militar de Fortaleza precisou deslocar o Batalhão Escolar para a Avenida Beira-Mar. Esse deslocamento foi realizado utilizando-se 18 ônibus com 50 lugares cada um. Em $\frac{1}{3}$ dos ônibus, $\frac{1}{10}$ dos lugares ficaram livres. Em $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus, dois lugares ficaram livres em cada um. Nos demais ônibus, ficou um lugar livre em cada um. Pode-se afirmar que o efetivo deslocado para a Avenida Beira-Mar poderia ter sido transportado em:

(a) 16 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.
(b) 16 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.
(c) 16 ônibus e sobrariam exatamente três lugares livres em um ônibus.
(d) 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.
(e) 17 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.

Solução. Vamos calcular o total de pessoas que foram à avenida Beira-mar para participar do desfile. Como $\frac{1}{3}\times 18 = \frac{18}{3} = 6$ e $\frac{1}{10}\times 50 = \frac{50}{10} = 5$, 6 ônibus foram à Beira-mar com 45 lugares ocupados. Agora, veja que $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus correspondem a $\frac{3}{4}\times 12 = \frac{12}{4}\cdot 3 = 3\times 3 = 9$ ônibus, os quais foram à Beira-mar com 48 lugares ocupados. Os 3 ônibus restantes foram à Beira-mar com 49 lugares ocupados. Assim, o total de pessoas que foram ao desfile é

$$\begin{aligned} 6\times 45 + 9\times 48 + 3\times 49 &= 6\times(50-5) + 9\times(50-2) + 3\times(50-1) \\ &= 18\times 50 - (6\times 5 + 9\times 2 + 3\times 1) \\ &= 900 - 51 \\ &= 849. \end{aligned}$$

Portanto, fica claro que a alternativa correta é a da letra **(d)**, ou seja, o efetivo do CMF poderia ser transportado em 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus. ■

Exercício 1.73 — CMF. Doze amigas resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. Metade do aluguel foi pago no dia da assinatura do contrato, sendo o valor dividido igualmente por todas as doze amigas. O restante deveria ser pago no dia em que chegassem à casa, porém, no dia do passeio, três amigas desistiram. O restante do valor do aluguel teve, então, de ser dividido igualmente apenas entre aquelas amigas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceram foi de:

(a) $\frac{7}{72}$. (b) $\frac{1}{18}$. (c) $\frac{1}{24}$. (d) $\frac{1}{6}$. (e) $\frac{2}{9}$.

Solução. A metade do aluguel, que foi paga no dia da assinatura do contrato, foi dividida igualmente para as 12 amigas, logo, cada uma delas pagou $\frac{1}{2} \div 12 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{24}$ do valor do aluguel. Já a segunda metade, foi igualmente dividida, no dia da chegada à casa, somente entre as amigas que compareceram. Assim, cada uma das nove amigas que compareceram pagou mais $\frac{1}{2} \div 9 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ do valor do aluguel. Portanto, a fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceram foi

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{1\times 3}{24\times 3} + \frac{1\times 4}{18\times 4} = \frac{3}{72} + \frac{4}{72} = \frac{7}{72}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

2 Operações com frações e números decimais

Nesta seção, vamos revisitar as operações com *frações* vistas no caderno anterior, enfatizando modelos geométricos dos cálculos aritméticos com frações e números decimais.

2.1 – A divisão de frações

Problema 3 No almoço da escola, Dona Ana deve servir 2 litros de suco em copos de $1/4$ de litro. Quantos copos, completamente cheios, podem ser servidos?

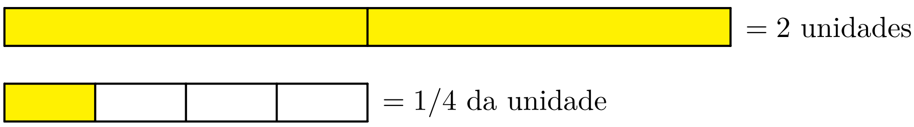
Problema 4 Para manter a forma física, Seu Alberto faz caminhadas diárias de 2 quilômetros, com paradas rápidas a cada trecho de $1/4$ de quilômetro. Em quantos trechos ele divide sua caminhada diária?

Problema 5 Mariana quer marcar uma linha de 2 metros usando uma fita de $1/4$ de metro. Quantas medições deve fazer?

Problema 6 Trocando 2 reais em moedas de 25 centavos, quantas moedas recebemos?

Problema 7 Quantos quartos de hora temos em 2 horas?

Solução. Todos esses problemas podem ser modelados usando a mesma representação geométrica, como ilustrado na figura seguinte. A parte de cima da figura é formado por duas barras retangulares, cada uma representando uma unidade de medida. Na parte de baixo da figura, destacamos um quadrado que corresponde a $1/4$ da barra retangular:



Perceba que podemos dividir 1 barra retangular em 4 cópias do quadrado, que corresponde a $1/4$ da barra, isto é,

$$1 : \frac{1}{4} = 4.$$

Dito de outro modo, 4 cópias do quadrado (que corresponde a $1/4$ da barra) formam 1 barra inteira, ou seja,

$$4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Da mesma forma, 2 barras retangulares, como na parte de cima da figura, podem ser divididas em 8 cópias do quadrado, que corresponde, como sabemos, a $1/4$ da barra, ou seja,

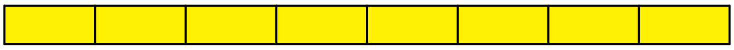
$$2 : \frac{1}{4} = 8,$$

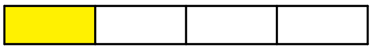
uma vez que

$$8 \times \frac{1}{4} = 2,$$

ou seja, 8 cópias do quadrado formam o equivalente a 2 barras inteiras.

Para verificar essas afirmações, perceba, na seguinte figura, que, de fato, cada barra retangular pode ser dividida em 4 cópias do quadrado. Isso nos permite comparar as regiões pintadas como múltiplos do quadrado:

 $= 8/4$ de unidades

 $= 1/4$ da unidade

Podemos interpretar as soluções dos problemas acima do seguinte modo: a barra representa a unidade de medida original; o quadrado representa uma nova unidade de medida, equivalente a $1/4$ da unidade de medida original. O que corresponde a 2 unidades de medida originais é, agora, dado por **8 unidades da nova medida**. ■

Baseando-se nos problemas anteriores, podemos compreender o que acontece na divisão de um número natural a por uma fração da forma $1/b$, onde b é também um número natural, não-nulo. Consideremos os seguintes problemas:

Problema 8 Em uma fábrica artesanal de sandálias, um certo número de operários, trabalhando durante 15 dias, produz 1 200 sandálias. Com apenas $1/3$ desses operários, trabalhando com a mesma **produtividade**, em quantos dias teríamos a mesma produção de sandálias?

a) em 5 dias.
b) em 30 dias.
c) em 45 dias.
d) em 80 dias.

Problema 9 Em uma promoção para o Dia das Crianças, uma sorveteria vende uma bola de sorvete por $2/3$ do preço normal. Quantas bolas de sorvete teria que vender para que tivesse a mesma receita de 12 bolas vendidas ao preço normal?

a) 8.
b) 16.
c) 18.
d) 48.

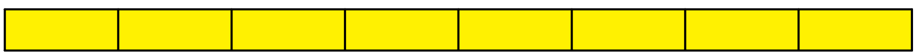
Observação 2.1 Assim como antes, podemos modelar os problemas acima com uma única representação geométrica: consideramos um número natural a como a primeira quantidade inteira em cada problema, isto é,

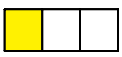
$$a = \begin{cases} \text{número de máquinas} & = 15 \\ \text{número de bolas de sorvete} & = 12 \end{cases}$$

Além disso, fixamos b como o número natural que indica em quantas vezes dividimos a *segunda* quantidade inteira do problema, ou seja,

$$1/b = \begin{cases} \text{fração do número inicial de máquinas} & = 1/3 \\ \text{fração do preço normal da bola de sorvete} & = 2/3 \end{cases}$$

Na parte de cima da figura a seguir, temos a cópias de um retângulo que representa 1 unidade de medida, enquanto, na parte de baixo da figura, destacamos um quadrado que representa $1/b$ desse retângulo. Para fixar ideias, vamos considerar $a = 8$ e $b = 3$. Temos:

 $= a$ unidades de medida

 $= 1/b$ da unidade de medida

Devemos calcular quantas cópias do quadrado, que representa a fração $\frac{1}{b}$ da barra, preenchem inteiramente as a barras. Ou seja, devemos calcular o quociente

$$a : \frac{1}{b}$$

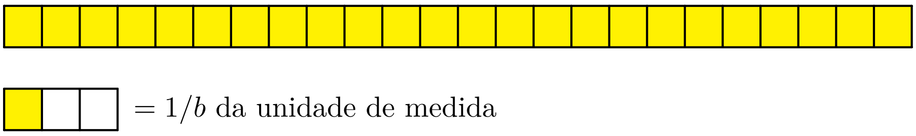
Para tanto, dividimos cada barra retangular em b quadrados, visto que 1 barra equivale a b quadrados, isto é,

$$1 : \frac{1}{b} = b,$$

ou seja,

$$b \times \frac{1}{b} = 1.$$

Assim, contamos, ao todo, $a \cdot b$, visto que temos a cópias da barra retangular na parte de cima da figura:



$= a \cdot b$ vezes $1/b$ da unidade

$= 1/b$ da unidade de medida

Em resumo, o número de quadrados, cada um representando $\frac{1}{b}$ da barra, que preenchem a barras inteiras é dado por $a \cdot b$, ou seja,

$$a : \frac{1}{b} = a \cdot b,$$

ou, escrevendo de outro modo,

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = a \cdot b.$$

Resumimos esse resultado no seguinte quadro:

> **Divisão de um número inteiro positivo a pela fração $\frac{1}{b}$:** o resultado final é o produto de a pelo inverso da fração que está como divisor, ou seja, $a \cdot b$.

Solução. Problema 8. Nesse problema específico, temos

$$a = 15 \text{ dias}$$

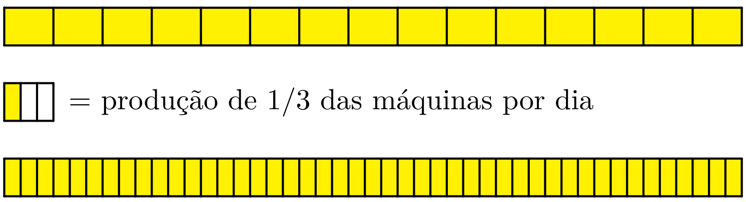
e

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{3} \text{ das máquinas.}$$

Assim, o número de dias necessário para produzir as 1 200 sandálias com apenas 1/3 das máquinas é igual a

$$\frac{15}{\frac{1}{3}} = 15 : \frac{1}{3} = 15 \cdot 3 = 45 \text{ dias.}$$

Representamos geometricamente essa divisão da seguinte forma:



= produção das máquinas em 15 dias

= produção de 1/3 das máquinas por dia

= produção de $\frac{1}{3}$ das máquinas em 45 dias

Na primeira parte da figura, cada barra retangular representa a produção de *todas* as máquinas em 1 dia. As 15 barras representam a produção de todas as *máquinas* em 15 dias. Na segunda parte da figura, representamos, destacada em outra cor, a produção, em um dia, de apenas 1/3 das máquinas. Por fim, na terceira parte da figura, temos a produção, em 45 dias, de apenas 1/3 das máquinas. Note que a produção de todas as máquinas em 15 dias é a *mesma* de 1/3 das máquinas em $15 \cdot 3 = 45$ dias. A soma das barras, na primeira e na terceira partes da figura, é a mesma: 1 200 sandálias. ■

Solução. Problema 9. Agora, nesse outro problema, temos

$$a = 12 \text{ bolas}$$

e

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ do preço da bola.}$$

Assim, o número m de bolas vendidas necessário para termos a mesma **receita** que teríamos vendendo 12 bolas ao preço normal, inteiro, é dado por

$$m \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

Multiplicando cada um dos lados dessa igualdade por 3, temos:

$$m \cdot 2 = 12 \cdot 3$$

Agora, dividindo cada um dos lados dessa nova igualdade por 2, obtemos:

$$m = 12 \cdot \frac{3}{2},$$

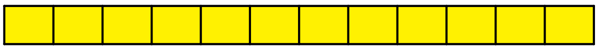
ou seja,

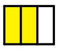
$$m = \frac{36}{2} = 18 \text{ bolas de sorvete.}$$

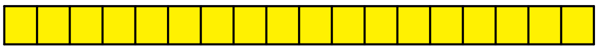
Observe que

$$m = 12 \cdot \frac{3}{2} = 12 : \frac{2}{3}$$

Representamos geometricamente essa divisão da seguinte forma:

 = venda de 12 bolas ao preço inteiro

 = venda de 1 bola a $\frac{2}{3}$ do preço

 = venda de 18 bolas a $\frac{2}{3}$ do preço

Na primeira parte da figura, cada barra retangular representa o preço normal de 1 bola de sorvete; as 12 barras representam a receita obtida com venda de 12 bolas a esse preço. Na segunda parte da figura, representamos a receita da venda de 1 bola a 2/3 do preço normal. Por fim, na terceira parte da figura, temos a receita da venda de 18 bolas de sorvete a 2/3 do preço normal. Note que a receita de 18 bolas ao preço normal é a *mesma* de 18 bolas a 2/3 desse preço. ■

Observação 2.2 Nesses dois problemas, temos duas grandezas cujo produto deve ser mantido *constante*. Por exemplo, no caso das bolas de sorvete, a receita das vendas deve ser mantida a mesma: se o preço de 1 bola de sorvete é reduzido à *metade* do normal, precisamos *duplicar* a quantidade de bolas vendidas; se o preço é reduzido a *um terço* do normal, precisamos *triplicar* a quantidade de bolas vendidas, e assim por diante. Para fixar ideias, digamos que o preço normal de 1 bola de sorvete seja R$ 6,00. Nesse caso, teríamos a seguinte tabela de preços, quantidades vendidas e receita:

Preço unitário (em reais)	Quantidade vendida	Receita das vendas (em reais)
6	12	$6 \cdot 12 = 72$
$4 = \frac{2}{3} \cdot 6{,}00$	$\frac{3}{2} \cdot 12 = 18$	$4 \cdot 18 = 72$
$2 = \frac{1}{3} \cdot 6{,}00$	$\frac{3}{1} \cdot 12 = 36$	$2 \cdot 36 = 72$

Nessa situação *hipotética*, dizemos que a grandeza **preço** e a grandeza **quantidade vendida** são *inversamente proporcionais*. Observe que, ao diminuir o preço de 6 reais para $6/b$, devemos aumentar a quantidade vendida de 12 para $12 \cdot b$, a fim de manter sempre a mesma receita, isto é, 72 reais.

A partir do próximo problema, estudaremos a interpretação geométrica do *algoritmo* de divisão de uma fração por outra.

Problema 10 Em seu aniversário, Rafaela convidou os amigos para um rodízio de pizzas, encomendando à pizzaria uma dada quantidade de fatias por convidado. No dia, a pizzaria serviu apenas 3/4 da quantidade combinada de fatias por convidado. Por outro lado, compareceram 3/8 dos convidados, somente. A quantidade de fatias de pizza por convidado presente aumentou, diminuiu ou permaneceu a mesma que havia sido encomendada?

Solução. Note que $\frac{3}{8}$ é a *metade* de $\frac{3}{4}$, isto é,

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{4} : 2,$$

ou seja

$$\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{3}{8}.$$

Assim, a quantidade de fatias de pizza *por* convidado presente foi, no aniversário de Rafaela, dada por

$$\frac{\frac{3}{4} \text{ da quantidade de fatias}}{\frac{3}{8} \text{ dos convidados}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} \text{ da quantidade de fatias por convidado} = 2.$$

Concluímos que foi servida, na prática, uma quantidade de fatias de pizza, por convidado, **2 vezes maior** do que a inicialmente encomendada. ■

Observação 2.3 Para fixar ideias, podemos supor que fossem convidadas 16 pessoas e que tenham sido encomendadas 10 fatias por convidado, com um total de 160 fatias encomendadas. Se apenas 3/8 dos convidados comparecessem, teríamos, de fato, apenas

$$\frac{3}{8} \text{ de } 16 = 3 \cdot \frac{1}{8} \text{ de } 16 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ convidados.}$$

Se apenas 3/4 da quantidade encomendada de pizzas fossem realmente servidos, teríamos:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 160 = 3 \cdot \frac{1}{4} \text{ de } 160 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ fatias.}$$

Assim, a quantidade de fatias de pizza servidas por convidado seria igual a

$$\frac{120 \text{ fatias}}{6 \text{ convidados}} = 20 \text{ fatias por convidado,}$$

2 vezes mais do que as 10 fatias por convidado que haviam sido encomendadas.

Observação 2.4 Para compreendermos melhor a conclusão desse problema, suponhamos que outras situações ocorram. Por exemplo, suponha que 5/8 dos convidados tenham comparecido em vez de apenas 3/8, como supomos anteriormente. Nesse caso, observemos, antes de mais nada, a **equivalência de frações**

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Logo, o quociente de quantidade de fatias por convidado seria

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{6}{8} : \frac{5}{8} = \frac{\frac{6}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{6}{5},$$

ou seja, teríamos $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ vezes mais fatias de pizza por convidado do que inicialmente encomendado. Se fora encomendadas 10 fatias por convidado, teríamos, agora, $\frac{6}{5}$ de 10, ou seja, $6 \cdot \frac{1}{5}$ de 10, que é igual a $6 \cdot 2 = 12$ fatias de pizza por convidado.

Problema 11 Calcule o resultado da divisão

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}.$$

Solução. **Solução aritmética do Problema 11.** Temos as seguintes **equivalências de frações**:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

e

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}.$$

Assim, a *divisão de frações* é calculada da seguinte forma:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{8}{12}}{\frac{9}{12}} = \frac{8}{9}.$$

■

Observação 2.5 Uma solução alternativa é observar que, se $3/4$ correspondem a $2/3$, então $1/4$ corresponde a $1/3$ de $2/3$. Como $1/3$ de $1/3$ é $1/9$, temos que $1/3$ de $2/3$ é $2/9$. Em resumo, $1/4$ corresponde a $2/9$. Logo, $1 = 4/4$ correspondem a $4 \cdot 2/9$, ou seja, $8/9$ do tempo disponível.

Observação 2.6 Essa solução anterior pode ser expressada da seguinte forma: o resultado da divisão

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

não se altera se multiplicarmos tanto o dividendo (a primeira fração) quanto o divisor (a segunda fração) por 3, obtendo:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{9}{4}}.$$

Esse quociente também não muda se multiplicarmos, agora, tanto o dividendo (nesse caso, o número 2) quanto o divisor (nesse caso, o número $\frac{9}{4}$) por 4, obtendo:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{8}{9}.$$

Em resumo, temos:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}}{3 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{8}{9}.$$

Problema 12 Marcela fez $3/4$ das questões da prova de Matemática e acertou $2/3$ de todas as questões. Considerando apenas as questões que ela fez, qual fração delas Marcela acertou?

Solução. Temos

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

pois $2 \cdot 4 < 3 \cdot 3$. Verificaremos essa desigualdade, representando as duas frações em retas numéricas. Por ora, concluímos dessa desigualdade que

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} < 1.$$

Portanto, como já sabíamos, Marcela **não** acerta todas as questões que fez na prova. Para comprovar isso de forma mais precisa, calculemos o quociente das duas frações. Começamos representando as frações $2/3$ e $3/4$ nas seguintes retas numéricas:

Figura 2.1: $2/3$ da unidade de medida

Figura 2.2: $3/4$ da unidade de medida

Considerando 12 como *divisor comum* de 3 e 4, temos as equivalências de frações

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \qquad \text{e} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12},$$

representadas nas seguintes retas numéricas (com doze intervalos, cada um deles de comprimento igual a $1/12$ da unidade de medida):

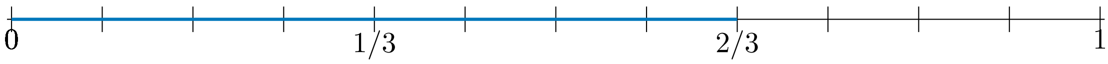


Figura 2.3: $2/3 = 8/12$ da unidade de medida

Figura 2.4: $3/4 = 9/12$ da unidade de medida

Observe que a *razão* entre o comprimento do segmento correspondente a $2/3$ e o comprimento do segmento correspondente a $3/4$ é de 8 para 9, ou seja: $2/3$ *está para* $3/4$ assim como 8 está para 9. Ao utilizarmos $1/12$ da unidade de medida nas duas retas numéricas, conseguimos comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e obtemos

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{8}{12}}{\frac{9}{12}} = \frac{8}{9} < 1.$$

Logo, comprovamos o que já havíamos concluído: Marcela acerta $\frac{8}{9}$ das questões que fez, ou seja, não acerta todas as questões que fez. Para esclarecer esse ponto, digamos que o teste tivesse 12 questões. Marcela teria feito

$$\frac{3}{4} \cdot 12 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ questões}$$

e teria acertado $2/3$ do *total* de questões, isto é,

$$\frac{2}{3} \cdot 12 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ questões}.$$

Assim, a *razão* entre questões acertadas e questões feitas por Marcela seria

$$\frac{8}{9},$$

como já havia sido calculado. ■

Resumindo o que observamos com esses exemplos, temos o seguinte **algoritmo da divisão de frações**:

Divisão de uma fração $\frac{a}{b}$ pela fração $\frac{c}{d}$. Dados números naturais a, b, c, d com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, temos

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Vamos justificar esse algoritmo, usando retas numéricas. Na primeira das seguintes retas numéricas, representamos $a = 5$ cópias de um segmento cujo comprimento é igual a $\frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ da unidade de medida. Na segunda reta numérica, destacamos $c = 3$ cópias de um segmento cuja comprimento é igual a $\frac{1}{d} = \frac{1}{4}$ da unidade de medida.

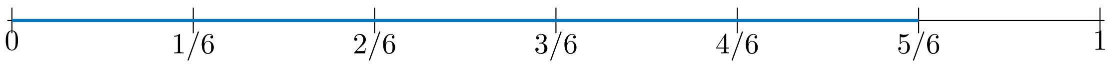


Figura 2.5: a vezes $1/b$, ou seja, $\frac{a}{b}$ da unidade de medida

Figura 2.6: c vezes $1/d$, ou seja, $\frac{c}{d}$ da unidade de medida

Considerando $c \cdot d = 6 \cdot 4 = 24$ como *divisor comum* de 3 e 4 (poderíamos ter escolhido 12 em vez de 24, também), temos as **equivalências de frações**

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{e} \qquad \frac{c}{d} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b},$$

representadas nas seguintes retas numéricas (com $b \cdot d$ intervalos, de comprimento $\frac{1}{b \cdot d}$):

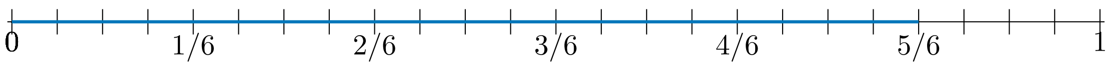


Figura 2.7: $a/b = a \cdot d/b \cdot d$ da unidade de medida

Figura 2.8: $c/d = c \cdot b/d \cdot b$ da unidade de medida

Na terceira (respectivamente, quarta) reta numérica, a escala é d vezes menor (respectivamente, b vezes menor) do que na primeira (respectivamente, segunda), com intervalos de comprimento $\frac{1}{b \cdot d}$ da unidade de medida entre uma marcação e outra. Temos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{b \cdot c}{b \cdot d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

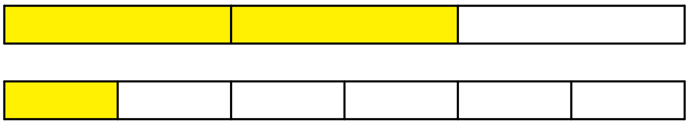
No exemplo que temos trabalhado, essas expressões são dadas por

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}}{\frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 4}} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 6} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}.$$

Nos últimos exemplos, decompusemos as figuras em quadrados mediante uma escolha conveniente de de inteiros que dependiam nos denominadores das frações envolvidas. O próximo exemplo nos motiva a discutir outros tipos de divisões que produzem o mesmo resultado.

Exercício 2.1 Calcule a divisão $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$.

Solução. Para a representação da divisão entre duas frações, vamos recorrer novamente às barras. Consideramos a seguinte operação $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$. Conseguimos representar por meio das barras, tanto o número $\frac{2}{3}$ quanto $\frac{1}{6}$, como mostrado a seguir:



$= 2/3$ de unidade de medida

$= 1/6$ da unidade de medida

Temos:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} : \frac{1}{6} = \frac{4}{6} : \frac{1}{6} = 4$$

Geometricamente, dividimos o segmento de reta de 0 a 1 em 6 partes iguais de comprimento $\frac{1}{6}$:

$= 2/3$ ou $4/6$ da unidade de medida

$= 1/6$ da unidade de medida

■

Exercício 2.2 Nas divisões a seguir, use frações equivalentes aos termos da divisão para encontrar os resultados:

a) $\frac{4}{3} : \frac{2}{9}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{3}{8}$

c) $\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$

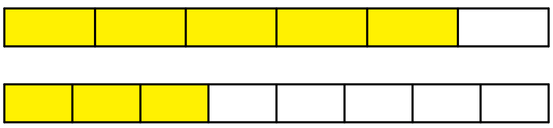
Solução. a) Temos:

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{9} = \left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) : \left(3 \cdot \frac{2}{9}\right) = 4 : \frac{6}{9} = 9 \cdot 4 : \left(9 \cdot \frac{6}{9}\right) = 36 : 6 = 6$$

De modo mais direto, poderíamos ter multiplicado tanto o dividendo quanto o divisor por 9, que é múltiplo comum de 3 e 9, obtendo:

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{9} = \left(9 \cdot \frac{4}{3}\right) : \left(9 \cdot \frac{2}{9}\right) = 12 : 2 = 6$$

b) Representando as frações no dividendo e no divisor por barras, temos:



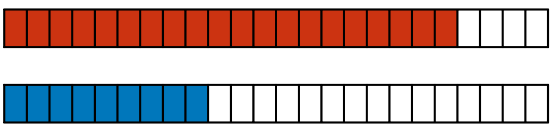
$= 5/6$ de unidade de medida

$= 3/8$ da unidade de medida

Considerando que 24 é múltiplo comum dos denominadores 6 e 8 das frações no dividendo e divisor, respectivamente, temos:

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{8} = \left(24 \cdot \frac{5}{6}\right) : \left(24 \cdot \frac{3}{8}\right) = (4 \cdot 5) : (3 \cdot 3) = 20 : 9.$$

Geometricamente, dividimos o segmento de reta de 0 a 1 em 24 partes iguais de comprimento $\frac{1}{24}$, representamos o resultado $\frac{20}{9}$ pela *comparação* ou *razão* das partes destacadas nas figuras a seguir:



$= 5/6$ ou $20/24$ de unidade de medida

$= 3/8$ ou $9/24$ da unidade de medida

c) Desta vez, representamos as frações no dividendo e divisor como segmentos da reta numérica. Temos:

Figura 2.9: 7 vezes 1/8, ou seja, $\frac{7}{8}$ da unidade de medida

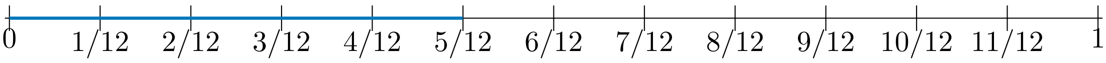


Figura 2.10: 5 vezes 1/12, ou seja, $\frac{5}{12}$ da unidade de medida

Dividindo cada um dos intervalos marcados na primeira reta em 3 partes iguais, obtemos intervalos de comprimento igual a 1/24 da unidade de medida, já que os intervalos originais têm comprimento igual a 1/8 da unidade de medida. Por sua vez, dividindo cada um dos intervalos marcados na segunda reta em 2 partes iguais, obtemos intervalos de comprimento igual a 1/24 da unidade de medida, já que os intervalos originais têm comprimento igual a 1/12 da unidade de medida. Obtemos, assim, a seguinte comparabilidade de 7/8 e 5/12 em termos de **frações equivalentes**:

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24}.$$

Assim,

$$\frac{7}{8} : \frac{5}{12} = \frac{21}{24} : \frac{10}{24} = \frac{21}{10}$$

Observemos, geometricamente, o resultado dessa divisão como a *comparação* ou *razão* entre os comprimentos dos segmentos destacados nas seguintes representações da reta numérica:

Figura 2.11: $\frac{7}{8}$ ou $\frac{21}{24}$ da unidade de medida

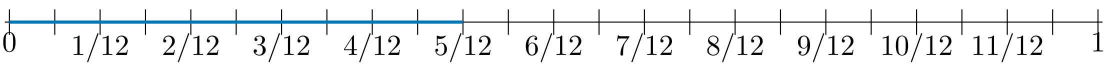


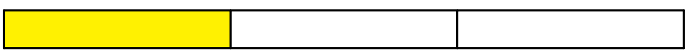
Figura 2.12: $\frac{5}{12}$ ou $\frac{10}{24}$ da unidade de medida

■

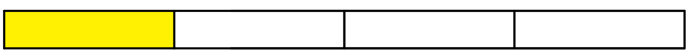
■ **Exemplo 2.1** Considere a divisão de frações

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{4},$$

em que, novamente, vamos utilizar barras para representar cada uma dessas frações e compará-las. Dividindo a barra que representa 1 unidade de medida em 3 partes iguais, cada parte representa $\frac{1}{3}$ da unidade de medida. A parte destacada representa, portanto, $\frac{1}{3}$ da unidade de medida:

 = 1/3 de unidade de medida

Na figura, seguinte, por sua vez, cada parte representa $\frac{1}{4}$ da unidade de medida:

 = 1/4 da unidade de medida

Observe que, alinhando partes cujas medidas são, respectivamente, 1/3 da unidade de medida e 1/4 da unidade de medida, obtemos:

 $= 1/3$ de unidade de medida

Ou seja,

$$3 \text{ partes de medida } \frac{1}{3} = 4 \text{ partes de medida } \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

isto é, a medida $1/3$ está para a medida $1/4$ como 4 está para 3: temos, aqui, uma relação de proporcionalidade. Note que isto significa que a parte correspondente a $1/3$ equivale a

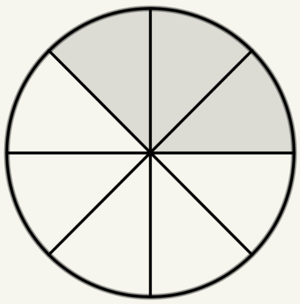
$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

da parte que corresponde a $1/4$. Essa análise nos diz que na parte que mede $\frac{1}{3}$ "cabe" uma parte medindo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ de outra parte medindo $\frac{1}{4}$.

Exercício 2.3 Determine se $4 : \frac{3}{5}$ é maior ou menor que 5.

Solução. Como $4 : \frac{3}{5} = 5 : \frac{3}{4}$ e dentro de cada unidade "cabe" mais do que $3/4$ de uma unidade, deduzimos que $5 : \frac{3}{4} > 5$. Portanto, $4 : \frac{3}{5} > 5$. ■

Exercício 2.4 A pizza da figura foi dividida em 8 pedaços de mesmo tamanho e peso. A parte cinza são os pedaços comidos por Leandro. Se Leandro comeu 225 gramas, quanto pesa a pizza toda?



Solução. Se $\frac{3}{8}$ da pizza pesavam 225 gramas, a pizza toda pesava $\frac{8}{3} \cdot 225 = 8 \cdot 75 = 600$ gramas. ■

Exercício 2.5 Encontre o resultado das divisões a seguir:

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$
b) $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$
c) $\frac{2}{7} : 3$
d) $\frac{5}{6} : \frac{7}{9}$

Exercício 2.6 — Colégio Militar de Belo Horizonte - 2016. A força de cada alienígena é dada pelo produto entre seu Poder de Ataque e a experiência de seu treinador. Pedrinho e Daniel têm 18 e 21 pontos de experiência, respectivamente. Sabendo que o Poder de Ataque dos alienígenas de Pedrinho e de Daniel é dado na tabela abaixo, é correto afirmar que o:

Alienígena × Treinador	Pedrinho	Daniel
Alienchu	$1\dfrac{4}{3}$	$\left(\dfrac{11}{3}-\dfrac{11}{5}\right)\cdot\dfrac{5}{2}$
Zubalien	$\dfrac{13}{6}+\dfrac{3}{2}$	$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{12}{5}$
Deltalien	$\left(\dfrac{7}{6}+\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{21}{4}:\dfrac{9}{4}$

a) Alienchu de Pedrinho tem a mesma Força que o Deltalien de Daniel.
b) Deltalien de Daniel tem mais Força que o Zubalien de Pedrinho.
c) Alienchu de Daniel tem a mesma Força que o Zubalien de Pedrinho.
d) Deltalien de Daniel tem mais Força que o Deltalien de Pedrinho.
e) Zubalien de Daniel tem mais Força que o Alienchu de Pedrinho.

Solução. Vamos refazer a tabela com os resultados de cada célula:

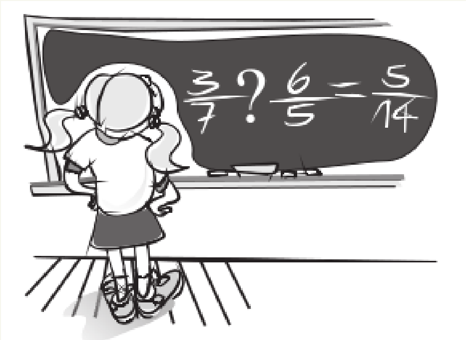
Alienígena × Treinador	Pedrinho	Daniel
Alienchu	$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$
Zubalien	$\frac{11}{3}$	2
Deltalien	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$

Vamos ver agora como fica o produto do poder pela experiência do treinador:

Alienígena × Treinador	Pedrinho	Daniel
Alienchu	42	77
Zubalien	66	42
Deltalien	48	49

Temos, então, que o Deltalien de Daniel tem mais Força que o Deltalien de Pedrinho. A resposta correta é a da alternativa d). ■

Exercício 2.7 — OBMEP. Qual sinal que Clotilde deve colocar no lugar de "?" para que a igualdade fique correta?



(a) ÷ (b) × (c) + (d) = (e) −

Solução. O método direto aqui é simplesmente substituir todos os sinais das alternativas e decidir se a afirmativa obtida é verdadeira ou falsa. Vamos fazer isso:

(a) substituindo ? por ÷ obtemos $\frac{3}{7}:\frac{6}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{7}:\frac{5}{2}=\frac{5}{14}$. Afirmativa verdadeira

(b) substituindo ? por × obtemos $\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}=\frac{18}{35}=\frac{5}{14}$. Afirmativa falsa

(c) substituindo ? por $+$ obtemos $\frac{3}{7}+\frac{6}{5}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}+\frac{6\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{15}{35}+\frac{42}{35}=\frac{57}{35}=\frac{5}{14}$. Afirmativa falsa

(d) substituindo ? por $=$ obtemos $\frac{3}{7}=\frac{6}{5}=\frac{5}{14}$. Afirmativa falsa

(e) substituindo ? por $-$ obtemos $\frac{3}{7}-\frac{6}{5}=\frac{5}{14}$. Afirmativa falsa, pois ao subtrair um número menor de um número maior, não é possível obter um número maior que zero.

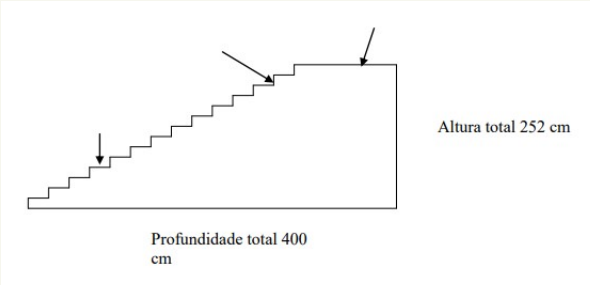
■

3 Problemas adicionais sobre operações com frações

Neste capítulo, vamos resolver desde exercícios imediatos a problemas mais elaborados envolvendo as quatro operações com frações. Pretendemos reforçar a visão geométrica dessas operações, juntamente com os procedimentos aritméticos que são fundamentais para a resolução de problemas que envolvem frações. Será dada especial atenção a problemas que envolvem a interpretação aritmética e a organização de dados presentes em textos.

3.1 – Interpretação de Dados

Exercício 3.1 — PISA. A figura abaixo apresenta uma escada com 14 degraus, com uma altura total de 252 cm:



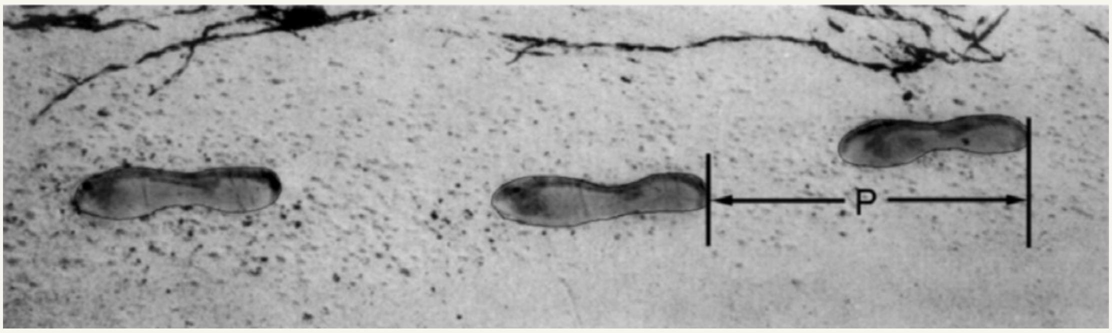
Qual é a altura de cada um dos 14 degraus?

Solução. As alturas dos 14 degraus devem somar a altura total da escada, ou seja, 252 centímetros. Logo, a altura de 1 degrau é igual a

$$\frac{252}{14} = \frac{126}{7} = \frac{70+56}{7} = 10 + 8 = 18 \text{ centímetros.}$$

■

Exercício 3.2 — PISA. A figura mostra a pegada de um homem caminhando. O comprimento do passo P é a distância entre a parte posterior de duas pegadas consecutivas.



Para homens, a fórmula, $\frac{n}{P} = 140$, dá uma relação aproximada entre n e P onde,

n = número de passos por minuto, e

P = comprimento do passo em metros.

Se a fórmula se aplica ao andar de Heitor e ele anda 70 passos por minuto, qual é o comprimento do passo de Heitor?

Solução. Aplicando a fórmula ao número de passos de Heitor, temos $n = 70$ e, portanto,

$$\frac{70}{P} = 140.$$

Multiplicando cada um dos lados da equação por P, temos:

$$70 = 140 \cdot P.$$

Logo,

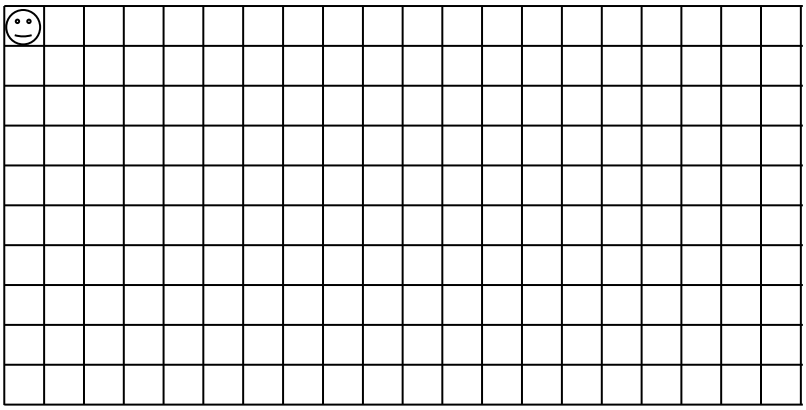
$$P = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

pois $140 \cdot \frac{1}{2} = 70$. Podemos concluir que o comprimento do passo de Heitor é de 0,5 m. ■

Exercício 3.3 — PISA. Um campo retangular de 100 m por 50 m foi reservado ao público para um concerto de rock. Os ingressos para o concerto estavam esgotados e o campo estava cheio de fãs, todos em pé. Qual das opções a seguir é, provavelmente, a melhor estimativa do número total de pessoas que compareceram ao concerto?

a) 2 000.
b) 5 000.
c) 20 000.
d) 50 000.
e) 100 000.

Solução. Como o campo estava totalmente cheio para o concerto, podemos supor que, duas pessoas estejam distantes entre si por 0,5 m. Assim, podemos dividir o campo em $200 \times 100 = 20\,000$ quadradinhos e estimar por essa quantidade o número de pessoas.



■

Exercício 3.4 [a] Em uma escola, duas turmas diferentes possuem o mesmo número de horas de aulas de Matemática e estão resolvendo o mesmo livro de exercícios, que tem 360 páginas. A turma do 7° ano consegue aproveitar 60% do tempo da aula para a resolução de exercícios, enquanto que a turma do 6° consegue aproveitar apenas 40% do tempo com essa tarefa. Além disso, os alunos de ambas as turmas conseguem resolver o mesmo número de página por hora e os alunos do 7° ano vão resolver o livro inteiro em um ano. Em um ano, quantas páginas do mesmo livro serão resolvidas pelos alunos do 6° ano?

[a] Baseado em: https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf. Acesso em: 27 de outubro 2021 (adaptado).

Solução. Os alunos do 7° ano vão gastar $\frac{60}{100}$ do total de horas de aula de Matemática com exercícios de matemática. Se $\frac{60}{100}$ do tempo total de horas de aula serão usados para cobrir as 360 páginas do livro de exercícios, então *cada página* do livro toma

$$\frac{60}{100} : 360$$

desse tempo, ou seja,

$$\frac{60}{360\times100} = \frac{1}{6\times100} = \frac{1}{600}$$

do tempo total de horas de aula de Matemática para cada página do livro de exercícios. Esse é a mesma fração do tempo que os alunos do 6° utilizam para cada página. Como eles gastam $\frac{40}{100}$ do tempo total com exercícios, conseguirão trabalhar

$$\frac{40}{100} : \frac{1}{600} = \frac{40}{100}\cdot 600 = 40\times6 = 240$$

páginas do livro de exercícios.

Observação 3.1 Outra maneira de resolver o problema é comparar a produtividade de um aluno do 7° por um aluno do 6° com o quociente entre o número de páginas total e o número de páginas x que serão resolvidas por um aluno do 6°:

$$\frac{\frac{60}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{360}{x}$$

Portanto,

$$x = \frac{\frac{40}{10}}{\frac{60}{100}}\times 360 = 240 \text{ páginas.}$$

■

Exercício 3.5 [a] Bruno pedala sua bicicleta para visitar seu avô, que mora a 40 km de sua casa. Na ida, ele mantém a velocidade constante de 15km/h. Na volta para sua casa, como ele está com mais pressa, aumenta a velocidade para 18km/h. Qual é a velocidade média no trajeto inteiro?

Observação: A velocidade média do trajeto é a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto nesse percurso.

[a] Baseado em: https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf. Acesso em: 27 de outubro 2021 (adaptado).

Solução. A distância total percorrida foi de $40 + 40 = 80km$. O tempo, em horas, que ele gastou na ida foi $\frac{40}{15}$ e o tempo, em horas, da volta foi $\frac{40}{18}$. Assim, o tempo total gasto, em horas, foi de

$$\frac{40}{15} + \frac{40}{18} = \frac{40\cdot6}{15\cdot6} + \frac{40\cdot5}{18\cdot5} = \frac{240}{90} + \frac{200}{90} = \frac{440}{90} = \frac{44}{9}\,\text{km/h.}$$

Portanto, a velocidade média é dada por

$$\frac{40+40}{\frac{40}{15}+\frac{40}{18}} = \frac{80}{\frac{44}{9}} = 80\cdot\frac{9}{44} = 20\cdot\frac{9}{11} = \frac{180}{11} = \frac{176+4}{11} = 16 + \frac{4}{11}.$$

Logo, a velocidade média no percurso total foi de $16\frac{4}{11}$km/h.

Observação 3.2 É importante não confundir a velocidade média ao longo do percurso, que foi calculada anteriormente, com a média das velocidades dadas, que é igual a

$$\frac{15+18}{2} = 33{,}5\,\text{km/h.}$$

■

Exercício 3.6 — OBMEP. A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é 0,48. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma?

(a) 24 (b) 37 (c) 40 (d) 45 (e) 48

Solução. O número 0,48 pode ser escrito na forma de uma fração decimal como $\frac{48}{100}$. Simplificando esta fração, de modo que o numerador e o denominador sejam os menores possíveis, obtemos:

$$\frac{48}{100} = \frac{4 \cdot 12}{4 \cdot 25} = \frac{12}{25}.$$

Assim, os dois menores números inteiros positivos que produzem o quociente 0,48 são os números 12 e 25. Esses números representam, respectivamente, o menor número possível de meninas e meninos da turma. Logo, o menor número possível de alunos é $12 + 25 = 37$. ■

Exercício 3.7 — OBMEP. Em 2009, uma escola tinha 320 alunos esportistas, dos quais 45% jogavam vôlei. Em 2010, essa porcentagem diminuiu para 25%, mas o número de jogadores de vôlei não se alterou. Qual era o número de alunos esportistas em 2010?

(a) 480 (b) 524 (c) 560 (d) 576 (e) 580

Solução. Em 2009, o número de alunos que jogavam vôlei era $0{,}45 \times 320 = 144$. Esse número correspondia a 25% (ou seja, $\frac{1}{4}$) dos alunos esportistas em 2010. Assim, em 2010, o número de esportistas era $4 \times 144 = 576$. ■

Exercício 3.8 Em um recipiente, estão contidos 6 litros de uma mistura homogênea de duas substâncias líquidas (alfa e beta) na razão de 7 : 2, enquanto que em outro recipiente, estão contidos 9 litros de outra mistura, com as mesmas duas substâncias (alfa e beta), mas na razão de 4 : 7. Misturando os líquidos dos dois recipientes, qual será a nova razão entre as duas substâncias na mistura?

Solução. No primeiro recipiente, a quantidade da substância alfa é

$$\frac{7}{7+2} \text{ de 6 litros} = \frac{7}{9} \cdot 6 = 7 \cdot \frac{6}{9} = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \text{ litros},$$

e da substância beta é

$$\frac{2}{7+2} \text{ de 6 litros} = \frac{2}{9} \cdot 6 = 2 \cdot \frac{6}{9} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ litros}.$$

No segundo recipiente, a quantidade da substância alfa é

$$\frac{4}{4+7} \text{ de 9 litros} = \frac{4}{11} \cdot 9 = \frac{36}{11} \text{ litros},$$

e da substância beta é

$$\frac{7}{4+7} \text{ de 9 litros} = \frac{7}{11} \cdot 9 = \frac{63}{11} \text{ litros}.$$

Assim, na mistura dos líquidos dos dois recipientes, teremos

$$\frac{14}{3} + \frac{36}{11} = \frac{154}{33} + \frac{108}{33} = \frac{262}{33} \text{ litros}$$

da substância alfa e

$$\frac{4}{3} + \frac{63}{11} = \frac{44}{33} + \frac{189}{33} = \frac{233}{33} \text{ litros}$$

da substância beta. Portanto, a razão entre as quantidade das substâncias alfa e beta (alfa : beta), na mistura final, é

$$\frac{\frac{262}{33}}{\frac{233}{33}} = \frac{262}{233}.$$

■

Exercício 3.9 — OBMEP. A quantidade de água de uma melancia corresponde a 95% de seu peso. Joaquim retirou água dessa melancia até que a quantidade de água correspondesse a 90% de seu peso, que passou a ser 6 kg. Qual era o peso original da melancia?

(a) 6,5 kg (b) 7 kg (c) 8,5 kg (d) 10 kg (e) 12 kg

Solução. Aqui, usaremos os termos peso e massa como sinônimos, para tornar o texto mais próximo da linguagem coloquial.

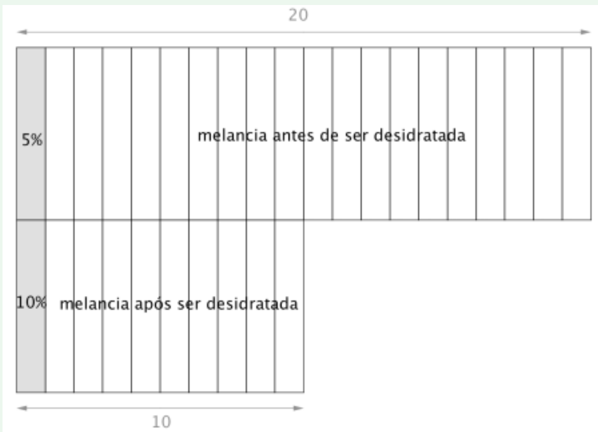
Uma melancia é constituída de duas partes: água e componentes sólidos (fibras, açúcares, etc.). Durante a desidratação somente ocorre perda de água; o peso dos demais componentes, antes e depois da desidratação, permanece o mesmo.

O enunciado diz que, após ser desidratada, a melancia pesa 6 kg, dos quais 90% correspondem a água; os 10% restantes, cujo peso é

$$\frac{1}{10}\times 6 = \frac{6}{10} = 0{,}6\,\text{kg},$$

correspondem aos componentes sólidos. Por outro lado, antes de ser desidratada, a melancia tinha 95% de água, logo continha 5% de componentes sólidos. Como o peso desses componentes não muda, vemos que 5% do peso original da melancia era 0,6 kg. Portanto 10%, ou seja, a décima parte, do peso original da melancia era igual a 1,2 kg. Assim, o peso original da melancia era $10\times 1{,}2 = 12$ kg. ■

Observação 3.3 A solução acima pode ser visualizada na figura a seguir, que consiste de dois retângulos que representam o peso da melancia antes e depois de ser desidratada; em ambos, o retângulo sombreado representa o peso dos componentes sólidos. No primeiro retângulo, o pequeno retângulo sombreado corresponde a 5% do peso da melancia, que corresponde então a 20 desses retângulos, pois $20\times 5\% = 100\%$. Já no segundo retângulo, o pequeno retângulo sombreado corresponde a 10% do peso da melancia, que corresponde então a 10 desses retângulos, pois $10\times 10\% = 100\%$. Logo, o peso da melancia antes de ser desidratada (correspondente a 20 retângulos), era igual a duas vezes o peso da melancia após a desidratação (correspondente a 10 retângulos), ou seja, era igual a 12 kg.



Exercício 3.10 — ENEM. Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro, em seu computador de bordo, acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: www.superdanilof1page.com.br. Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento foi

(a) $\frac{20}{0,075}$. (b) $\frac{20}{0,75}$. (c) $\frac{20}{7,5}$. (d) $20\times 0,075$. (e) $20\times 0,75$.

Solução. A capacidade do tanque de combustível é 100 kg, ou seja, essa é a massa do combustível que ocupa o tanque quando ele está cheio. Como a densidade da gasolina utilizada é $750\,\mathrm{g/L} = 0{,}75\,\mathrm{kg/L}$, a quantidade de gasolina que havia no tanque no início da corrida era $\frac{100}{0,75}$L. Na primeira parada, o carro havia consumido $\frac{4}{10}$ da gasolina que havia inicialmente. Logo, a quantidade de gasolina que restava no tanque, em litro, era

$$\frac{6}{10}\times\frac{100}{0{,}75}.$$

Desse modo, a equipe pôs no carro um total de

$$\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}\times\frac{100}{0{,}75}\mathrm{L}.$$

Mas, observe que

$$\frac{1}{3\div 3}\times\frac{6\div 3}{1\cancel{0}}\times\frac{10\cancel{0}}{0{,}75} = 2\times\frac{10}{0{,}75} = \frac{20}{0{,}75}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(b)**.

■

Exercício 3.11 — Banco OBMEP. Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine trabalham como ambulantes vendendo sanduíches. Diariamente, elas passam na lanchonete do Sr. Manoel e pegam a mesma quantidade de sanduíches para vender. Um certo dia, Sr. Manoel estava doente e deixou um bilhete avisando o motivo pelo qual não estava lá, mas pedindo que cada uma pegasse $\frac{1}{5}$ dos sanduíches. Ana passou primeiro, seguiu as instruções do bilhete e saiu para vender seus sanduíches. Bia, passou em seguida, mas pensou que era a primeira a passar, pegando $\frac{1}{5}$ do que havia e saiu. Cátia, Diana e Elaine chegaram juntas e dividiram igualmente a quantidade que havia, já que Cátia sabia que Ana e Bia haviam passado antes.

a) Que fração do total de sanduíches coube a Bia?
b) Quem ficou com a menor quantidade de sanduíches? Quem ficou com a maior quantidade?
c) Ao final da divisão, nenhuma das vendedoras ficou com mais de 20 sanduíches. Quantos sanduíches o Sr. Manoel deixou para elas?

Solução. a) A resposta é $\frac{4}{25}$. De fato, como Bia pegou $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$ dos sanduíches, ela ficou com $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ dos sanduíches.

b) Ana pegou $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$ dos sanduíches e Cátia, Diana e Elaine dividiram, entre as três, a fração que restava, isto é,

$$1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},$$

ou seja, cada uma pegou 1/3 desta quantidade, ou seja,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{25} = \frac{16}{75}\text{ dos sanduíches,}$$

quantidade maior que $\frac{4}{25} = \frac{12}{75}$ e $\frac{5}{25} = \frac{15}{75}$. Sendo assim, Cátia, Diana e Elaine ficaram com a maior parte e Bia com a menor.

c) A resposta é 75. Vejamos: a quantidade de sanduíches deve ser um múltiplo comum de 5, 25 e 75, sendo 75 o menor desses múltiplos. No caso de uma quantidade de 75 sanduíches, as quantidades de Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine são, respectivamente, 15, 12, 16, 16, 16, todas menores que 20. Mas, considerando que a quantidade de sanduíches é 150, o próximo múltiplo comum de 5, 25 e 75, todas ficarão com mais de 20 sanduíches. Sendo assim, a quantidade de sanduíches deve ser 75.

■

Exercício 3.12 — OBM. Em um aquário, há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que no aquário 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

Solução. Para simplificar os cálculos, considere a quantidade de peixes no aquário igual a 100. Se A e V denotam as quantidades de peixes amarelos e vermelhos, temos $A = 90$ e $V = 10$. Se após a morte de x peixes amarelos eles ainda constituíam 75% dos peixes restantes, temos

$$90 - x = \frac{75}{100}(100 - x),$$

ou seja, $x = 60$. Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de

$$\frac{60}{90} = \frac{2}{3} = 0{,}666... = \frac{66{,}\overline{6}}{100},$$

ou seja, aproximadamente 67%. ■

Observação 3.4 Uma solução alternativa para esse problema é a seguinte: a quantidade de peixes vermelhos é a mesma antes e depois da contaminação pela doença. A quantidade de peixes amarelos, depois da doença, é **3 vezes maior** do que a de peixes vermelhos, pois esses correspondem a 25% e os amarelos, a 75% do total de peixes após a doença. Antes da doença, a quantidade de peixes amarelos era **9 vezes maior** do que a de peixes vermelhos, que segue sendo a mesma, como já dissemos. Logo, a quantidade de peixes amarelos passou de **9 vezes** a quantidade de peixes amarelos para **3 vezes** essa quantidade. Ou seja, a doença deixou apenas $\frac{1}{3}$ dos peixes amarelos vivos, tendo exterminado

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \approx 67\%$$

desses peixes.

3.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 3.13 — OBMEP. Sabendo que $987 \times 154 = 151998$ podemos concluir que $9870 \times 1{,}54$ é igual a

(a) 15,1998 (b) 1519,98 (c) 15199,8 (d) 151998 (e) 1519980

Solução. Temos $9870 \times 1{,}54 = 987 \times 10 \times \frac{154}{100} = \frac{987 \times 154}{10} = \frac{151998}{10} = 15199{,}8$. ■

Exercício 3.14 — OBMEP. Qual das expressões abaixo tem valor diferente de $\frac{15}{4}$?

(a) $15 \times \frac{1}{4}$

(b) $\frac{15 + 15 + 15}{4 + 4 + 4}$

(c) $\frac{3}{4} + 3$

(d) $\frac{10}{2} + \frac{5}{2}$

(e) $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2}$

Solução. Os valores das expressões nas alternativas são:

(a) $15 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$

(b) $\dfrac{15+15+15}{4+4+4} = \dfrac{3 \times 15}{3 \times 4} = \dfrac{15}{4}$

(c) $\dfrac{3}{4} + 3 = \dfrac{3+12}{4} = \dfrac{15}{4}$

(d) $\dfrac{10}{2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{10+15}{2} = \dfrac{15}{2}$

(e) $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 2} = \dfrac{15}{4}$

Logo, a única alternativa em que o valor da expressão não é igual a $\frac{15}{4}$ é a alternativa (d). ■

Exercício 3.15 — OBMEP. Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

(a) $\dfrac{7}{12}$ (b) $\dfrac{2}{3}$ (c) $\dfrac{3}{4}$ (d) $\dfrac{5}{6}$ (e) $\dfrac{4}{3}$

Solução. Como $\frac{2}{3}$ L de água enchem uma caneca, segue que

$$3 \times \frac{2}{3} = 2L$$

de água enchem $3 \times 1 = 3$ canecas. Logo,

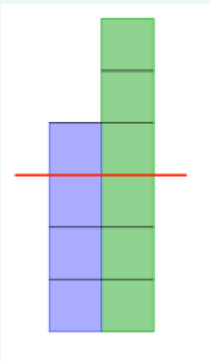
$$\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2} L$$

de água enchem

$$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$$

de uma caneca. Logo, a alternativa correta é a da letra (c). ■

Observação 3.5 Outra solução pode ser obtida considerando a figura a seguir:



A coluna da direita, em verde, representa 1L de água; cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{6}$ L. A coluna da esquerda, em azul, representa a capacidade da caneca, que é de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ L; observamos que cada quadradinho azul corresponde a $\frac{1}{4}$ da capacidade da caneca. Dividindo a figura ao meio pela linha vermelha, vemos que três quadrados verdes ($\frac{1}{2}$ L de água) correspondem a três quadrados azuis ($\frac{3}{4}$ da capacidade da caneca). Logo, $\frac{1}{2}$ L de água enche $\frac{3}{4}$ da caneca.

Exercício 3.16 — OBMEP. Em uma caixa quadrada há 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, e numa caixa redonda há 6 bolas, todas pretas. Paula quer que tanto na caixa quadrada quanto na redonda a razão entre a quantidade de bolas brancas e o total de bolas em cada caixa seja a mesma. Quantas bolas brancas Paula precisa tirar da caixa quadrada e passar para a caixa redonda?

(a) Nenhuma (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Solução. Cada vez que se passa uma bola branca da caixa quadrada para a redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas na caixa quadrada diminui 1 unidade; já na caixa redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas aumenta 1 unidade.

Número de bolas brancas passadas da caixa quadrada para a redonda	0	1	2	3	4
Caixa quadrada: $\dfrac{\text{bolas brancas}}{\text{total de bolas}}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{4}$
Caixa redonda: $\dfrac{\text{bolas brancas}}{\text{total de bolas}}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$

Como $\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{9}$, Paula terá que passar 3 bolas brancas da caixa quadrada para a redonda. ■

Sequência 2

Exercício 3.17 — ENEM. Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

(a) R$ 15,00. (b) R$ 14,00. (c) R$ 10,00. (d) R$ 5,00. (e) R$ 4,00.

Exercício 3.18 — ENEM. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

(a) 105 peças. (b) 120 peças. (c) 210 peças. (d) 243 peças. (e) 420 peças.

Solução. Antes de mais nada, devemos escrever todos os comprimentos em centímetros porque, deste modo, fazemos uma única conversão de unidades de medida. Observe que $2\,\text{m} = 200\,\text{cm}$.

As tábuas devem ser cortadas, sem deixar sobras, em pedaços de um mesmo comprimento menor que 200 cm. Esse comprimento comum deve ser o maior divisor comum a 540, 810 e 1080, menor que 200. Observe que

$$540 = 2\times 270 = 4\times 135,$$
$$810 = 3\times 270 = 6\times 135,$$
$$1\,080 = 4\times 270 = 8\times 135.$$

Concluímos, assim, que 135 é o máximo divisor comum de 540, 810 e 1 080, menor que 200, As quantidades de peças por tábua são, então, respectivamente dadas por

$$\frac{540}{135} = 4 \qquad \frac{810}{135} = 6 \qquad \frac{1\,080}{135} = 8$$

Desse modo, o número total de peças é igual a

$$40{\times}4 + 30{\times}6 + 10{\times}8 = 160 + 180 + 80 = 420.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (e). ■

Exercício 3.19 — ENEM. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras 3,10 mm, 3,021 mm, 2,96 mm, 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

(a) 2,099. (b) 2,96. (c) 3,021. (d) 3,07. (e) 3,10.

Solução. Para resolver esse problema, deve-se escolher, dentre as cinco medidas de espessura disponíveis, aquela que é a mais próxima de 3 mm. Como todas as espessuras são dadas em milímetros, vamos tomar o valor absoluto, ou seja, o módulo, da diferença entre cada um desses valores e 3 para saber qual é a espessura mais próxima de 3 mm. Temos

$$\begin{aligned}|3 - 2{,}099| &= 0{,}901,\\ |3 - 2{,}96| &= 0{,}04,\\ |3 - 3{,}021| &= 0{,}021,\\ |3 - 3{,}07| &= 0{,}07 \text{ e}\\ |3 - 3{,}10| &= 0{,}1.\end{aligned}$$

O menor dos números encontrados acima é 0,021. Logo a alternativa correta é a da letra (c), que indica a lente de 3,021 mm como a que deve ser adquirida. ■

Exercício 3.20 — ENEM. Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos.

Garrafa I: 0,15 litro.
Garrafa II: 0,30 litro.
Garrafa III: 0,75 litro.
Garrafa IV: 1,50 litro.
Garrafa V: 3,00 litros.

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame. Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

(a) I. (b) II. (c) III. (d) IV. (e) V.

Solução. Inicialmente, vamos expressar as capacidades das garrafas em mililitros. Como 1 L = 1000 mL, obtemos as seguintes medidas.

Garrafa I: $0{,}15\,\text{L} = 0{,}15{\times}1000\,\text{mL} = 150\,\text{mL}$.
Garrafa II: $0{,}35\,\text{L} = 0{,}35{\times}1000\,\text{mL} = 350\,\text{mL}$.
Garrafa III: $0{,}75\,\text{L} = 0{,}75{\times}1000\,\text{mL} = 750\,\text{mL}$.

Garrafa IV: 1,50 L = 1,50×1000 mL = 1500 mL.
Garrafa V: 3,00 L = 3,00×1000 mL = 3000 mL.

A paciente deve ingerir 150 mL de água a cada meia hora, por 10 horas, esvaziando completamente o conteúdo das duas garrafas que ela comprou. Assim, a paciente deve ingerir 20 copos d'água durante as 10 horas, pois são 2 copos a cada hora, o que dá um total de 20×150 mL = 3000 mL. Portanto, a paciente deve comprar duas garrafas de $\frac{3000}{2} = 1500\,\text{mL}$, ou seja, duas garrafas do tipo IV. Logo, a alternativa correta é a da letra (d). ■

Exercício 3.21 — ENEM. Uma empresa europeia construiu um avião solar, objetivando dar uma volta ao mundo utilizando somente energia solar. O avião solar tem comprimento AB igual a 20 m e uma envergadura de asas CD igual a 60 m. Para uma feira de ciências, uma equipe de alunos fez uma maquete desse avião. A escala utilizada pelos alunos foi de 3 : 400. A envergadura CD na referida maquete, em centímetro, é igual a

(a) 5. (b) 20. (c) 45. (d) 55. (e) 80.

Solução. Como 1 m = 100 cm, temos que a envergadura CD do avião é igual a 60 m = 60×100 cm = 6000 cm. Agora, uma vez que a escala da maquete é 3 : 400, cada 3 unidades de comprimento na maquete correspondem a 400 dessas unidades no avião. Portanto, 6 000 centímetros equivalem a

$$\frac{6\,000}{400} \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45 \text{ centímetros.}$$

Logo, a alternativa correta é a letra (c). ■

Exercício 3.22 — ENEM. O veículo terrestre mais veloz já fabricado até hoje é o Sonic Wind LSRV, que está sendo preparado para atingir a velocidade de 3000 km/h. Ele é mais veloz do que o Concorde, um dos aviões de passageiros mais rápidos já feitos, que alcança 2330 km/h.

BASILIO, A. Galileu, mar. 2012 (adaptado). Para percorrer uma distância de 1000 km, o valor mais próximo da diferença, em minuto, entre os tempos gastos pelo Sonic Wind LSRV e pelo Concorde, em suas velocidades máximas, é

(a) 0,1. (b) 0,7. (c) 6,0. (d) 11,2. (e) 40,2.

Solução. O problema nos informa a velocidade máxima de dois veículos e nos pede para calcular a diferença de tempo que esses veículos levam, em suas velocidades máximas, para percorrer a distância de 1000 km. Assim, vamos calcular quanto tempo cada veículo leva para percorrer 1000 km e calcular, em minutos, a diferença entre esses tempos. Como uma hora tem 60 minutos, o LSRV percorre 3000 km em 60 minutos e o Concorde percorre 2330 km nos mesmos 60 minutos. Logo, o LSRV leva

$$\frac{1\cancel{000}\times 60}{3\cancel{000}} = \frac{60}{3} = 20\,\text{min}$$

para percorrer 1000 km, enquanto o Concorde leva

$$\frac{100\cancel{0}\times 60}{233\cancel{0}} = \frac{6000}{233} \cong 26\,\text{min}.$$

Portanto, a diferença entre o maior e o menor tempo é de aproximadamente 26 − 20 = 6 min, ou seja, a alternativa da letra (c) fornece a melhor aproximação para essa diferença. ■

Exercício 3.23 — ENEM. Uma caixa d'água em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura, necessita de higienização. Nessa operação, a caixa precisará ser esvaziada em 20 min, no máximo. A retirada da água será feita com o auxílio de uma bomba de vazão constante, em que vazão é o volume do líquido que passa pela bomba por unidade de tempo. A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

(a) 2. (b) 3. (c) 5. (d) 12. (e) 20.

Solução. Como a caixa d'água tem o formato de paralelepípedo reto retângulo, o seu volume é dado pelo produto das suas dimensões, ou seja, é igual a

$$4\times3\times2 = 24\,\text{m}^3.$$

Como sabemos, $1\,\text{m} = 10\,\text{dm}$, logo $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{L}$. Daí, $24\,\text{m}^3 = 24.000\,\text{L}$. Agora, note que o problema pede a vazão mínima para esvaziar o tanque no tempo estipulado. Essa vazão, que é dada pela *razão*

$$\frac{\text{capacidade}}{\text{tempo}},$$

é mínima quando é considerado o máximo intervalo de tempo tolerado para o escoamento, ou seja, $20\,\text{min} = 20\times60\,\text{s} = 1200\,\text{s}$. Assim, a vazão de escoamento mínima é igual a

$$\frac{24000}{1200} = 20\,\text{L/s}$$

e, portanto, a alternativa correta é a da letra (e). ■

Exercício 3.24 — OPM. As medalhas dos Jogos Olímpicos Rio 2016 foram produzidas no Brasil, pela Casa da Moeda, e pesam 500 gramas cada, sendo, assim, as mais pesadas da história. As medalhas de ouro, prata e bronze têm as mesmas inscrições, sem diferenciação pelo metal ou pela modalidade esportiva: de um lado fica a imagem padrão da deusa Nike e, do outro, os louros e a marca dos Jogos Rio 2016. As de ouro contêm 494 g de prata e apenas 6 g de ouro em sua composição metálica. As medalhas de prata contêm 500 g de prata. Já as de bronze têm 475 g de cobre e 25 g de zinco. Para esse problema, utilize uma calculadora.

(a) Considerando que 1 g de ouro vale R\$142,33 e que 1 g de prata vale R\$2,13, calcule o custo dos metais utilizados por medalha de ouro.
(b) As medalhas de ouro desse ano são 21,3 vezes mais pesadas do que as dos jogos olímpicos de Estocolmo em 1912. Porém, os jogos de 1912 foram os últimos em que as medalhas de ouro foram feitas inteiramente de ouro. Considerando a quantidade de metal e o valor atual do ouro, qual seria hoje o custo da medalha de ouro que foi entregue nos jogos de Estocolmo em 1912?
(c) A Taça Jules Rimet conquistada pelo Brasil ao vencer a Copa do Mundo de 1970 continha 3800 gramas de ouro. Que porcentagem do ouro da Taça Jules Rimet seria necessária para a produção das 306 medalhas de ouro que estão sendo entregues nos jogos Rio 2016?

Solução. (a) O custo dos metais utilizados por medalha de ouro é

$$6\times142{,}33 + 494\times2{,}13 = \text{R\$}\,1906{,}20.$$

(b) Para calcular o custo da medalha, devemos calcular a massa de ouro e multiplicar pelo valor atual do ouro, como segue:

$$\frac{500}{21{,}3}\times142{,}33 \cong 23{,}5\times142{,}33 \cong \text{R\$}\,3344{,}76.$$

(c) Como são 306 medalhas de ouro com 6 g de ouro cada, no total são $306\times6 = 1\,836$ g de ouro para a produção das medalhas. A porcentagem do ouro necessária para a taça é

$$\frac{1836}{3800} \cong 0{,}483 = 48{,}3\%$$

■

Exercício 3.25 — Banco OBMEP. Em um certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

(a) 2%. (b) 4%. (c) 10%. (d) 12%. (e) 12,2%.

Solução. Após o ajuste, o preço da dúzia de ovos passa a ser

$$100\% - 2\% = 98\% = 0{,}98$$

vezes o preço inicial da dúzia de ovos, enquanto o preço de 10 maçãs é ajustado para

$$100\% + 10\% = 110\% = 1{,}1$$

vezes o preço inicial das 10 maçãs, de antes do ajuste. Logo, o custo para comprar, com os novos preços, uma dúzia de ovos e 10 maçãs é igual a

$$0{,}98 + 1{,}1 = 2{,}08$$

vezes o preço inicial de um dos dois itens. Assim, o aumento será de

$$\frac{2{,}08}{2} = 1{,}04$$

vezes o preço dos 2 itens juntos. Logo, o aumento no custo dos dois itens, juntos, é de $0{,}04 = 4\%$, Logo, a alternativa correta é a da letra (b). ■

Observação 3.6 Uma solução alternativa para o exercício acima é atribuir um mesmo preço – 10 reais, por exemplo – aos produtos, que têm o mesmo preço. Daí, depois de uma semana, uma dúzia de ovos passa a custar 9,8 reais e 10 maçãs passam a custar 11 reais, ou seja, o preço dos dois itens, juntos, salta de 20 reais para $9{,}8 + 11 = 20{,}8$ reais. Agora é só calcular o aumento percentual de 20,8 reais sobre 20,0 reais, iato é,

$$\frac{20{,}8 - 20}{20} = \frac{0{,}8}{20} = \frac{8}{200} = \frac{4}{100,}$$

que é igual a 4%.

Exercício 3.26 Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%.

a) Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?
b) Quantos homens e quantas mulheres havia na festa depois da chegada dos casais?

Solução.

a) Sejam m o número de mulheres e h o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos:

$$m = 4h.$$

Deste modo, a fração de homens pelo total de pessoas presentas antes da chegada dos cinco casais era:

$$\frac{h}{h+m} = \frac{h}{h+4h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%.$$

b) Após a chegada dos cinco casais, ficamos com $h+5$ homens e $m+5$ mulheres. Assim, o novo percentual de homens é:

$$\frac{h+5}{h+5+m+5} = \frac{h+5}{h+4h+10} = \frac{h+5}{5h+10}.$$

Fazendo

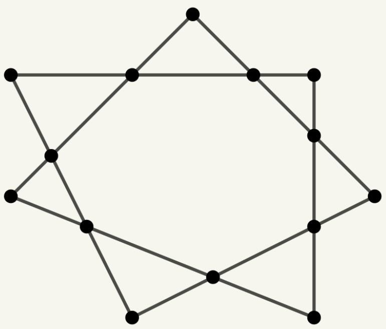
$$\frac{h+5}{5h+10} = \frac{26}{100},$$

temos $h = 8$. Consequentemente, $m = 4h = 32$ e, após a chegada dos cinco casais, teremos $8+5 = 13$ homens e $32+5 = 37$ mulheres.

■

Sequência 3

Exercício 3.27 Os números 1, 2, 3, . . ., 14 devem ser escritos nos 14 vértices da linha poligonal abaixo, de modo que as somas dos 4 números escritos em cada um dos 7 segmentos da poligonal seja a mesma.



a) Qual a soma de todos os números de 1 a 14?
b) Qual deve ser a soma dos números escritos em um segmento?
c) Dê um exemplo de distribuição desses números.

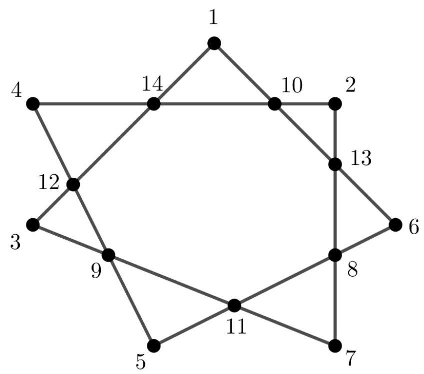
Solução. a) A soma de todos os números que devem ser escritos é

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 105.$$

b) Ao somarmos os números escritos em cada um dos 7 segmentos, cada um deles será somado duas vezes. Portanto, a soma comum a cada um desses segmentos é

$$\frac{105 \cdot 2}{7} = 30.$$

c) A figura abaixo mostra uma possível distribuição



■

Exercício 3.28 — ENEM. Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito na relação abaixo:

Caixa 1: 86 cm×86 cm×86 cm.
Caixa 2: 75 cm×82 cm×90 cm.
Caixa 3: 85 cm×82 cm×90 cm.
Caixa 4: 82 cm×95 cm×82 cm.
Caixa 5: 80 cm×95 cm×85 cm.

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

Solução. Para resolver essa questão, é preciso levar em conta que as dimensões da caixa não podem ser inferiores ao comprimento da aresta do objeto cúbico. Logo, a caixa 2, que tem uma das arestas com comprimento igual a 75 cm, não pode ser a caixa escolhida pelo casal. Dentre as demais, queremos encontrar a de menor volume (para que sobre o menor espaço possível após inserido o cubo). A caixa 1 tem volume $86\,\text{cm}\times 86\,\text{cm}\times 86\,\text{cm} = 636\,056\,\text{cm}^3$. Analogamente, obtemos que os volumes das caixas 3, 4 e 5 são, respetivamente, $627\,300\,\text{cm}^3$, $638\,780, \text{cm}^3$ e $646\,000, \text{cm}^3$. Logo a alternativa correta é a da letra (c), correspondente à caixa 3. ■

Observação 3.7 O procedimento que seguimos acima para resolver a questão é simples, mas envolve muitos cálculos, o que faz com que uma questão simples possa ter uma solução demorada, sem falar na possibilidade de erro em meio a tantas contas de multiplicar. Além disso, passar muito tempo para resolver uma questão como essa geralmente contribui para piorar o desempenho em testes e exames. A fim de contornar isso, a melhor alternativa é comparar diretamente o volume das caixas. Com isso em mente, começamos comparando as caixas 1 e 3. Observando primeiro suas duas últimas dimensões, temos:

$$82 \cdot 90 = (86 - 4) \cdot (86 + 4) = 86^2 - 4^2 < 86 \cdot 86.$$

Portanto,

$$85 \cdot 82 \cdot 90 < 85 \cdot 86 \cdot 86 < 86 \cdot 86 \cdot 86.$$

Logo, o volume da caixa 3 é menor que o volume da caixa 1. Comparando a caixa 3 com a caixa 4, veja que ambas possuem 82 como uma de suas dimensões e, para outras duas dimensões, temos $85 \cdot 90 = 7650$ e $82 \cdot 95 = 7790$. Logo, $85 \cdot 82 \cdot 90 < 82 \cdot 95 \cdot 82$ e, assim, a caixa 3 tem capacidade menor que a caixa 4. Enfim, para comparar a caixa 3 com a caixa 5, observe que $82 \cdot 90 < 80 \cdot 95$. Daí, $85 \cdot 82 \cdot 90 < 80 \cdot 95 \cdot 85$ e, deste modo, a caixa 3 tem menor capacidade que a caixa 5.

Um erro comum seria, simplesmente, subtrair 80 de cada uma das dimensões dos itens listados e comparar o que sobra. Nesse sentido, ao remover da caixa de dimensões $86\times 86\times 86$ um cubo de dimensões $80\times 80\times 80$, perceba que não sobra apenas o espaço $6\times 6\times 6$. Na verdade, o que sobra é

$$86 \cdot 86 \cdot 86 - 80 \cdot 80 \cdot 80 = 636056 - 512000 = 124056 \neq 6 \cdot 6 \cdot 6.$$

Exercício 3.29 — OPM. Num folheto de propaganda, uma montadora explica que um veículo equipado com a tecnologia *flex fuel*, bicombustível, pode usar álcool, gasolina, ou uma mistura de álcool e gasolina em qualquer proporção. Testes realizados com cinco proporções apresentaram os seguintes desempenhos:

Proporção de combustível		**Consumo**
Álcool	*Gasolina*	**(km por litro)**
—	100%	14
40%	60%	13,2
50%	50%	11,8
70%	30%	10
100%	—	8

Considere que o preço do litro de álcool é R$ 3,00 e o preço do litro de gasolina é R$ 6,00. Sendo assim, numa viagem de 400 km com esse veículo:

(a) Quantos reais seriam gastos se o veículo fosse abastecido somente com álcool?
(b) Qual das cinco proporções apresentadas possibilita o menor gasto com combustível?

Na resolução de um problema, utilize uma calculadora.

Solução. (a) Abastecido somente com álcool, o veículo percorre 400 km com 1 litro de combustível. Logo, serão necessários $\frac{400}{8} = 50$ litros, gerando um gasto de $50\times$ R\$3,00 = R\$50,00.

(b) As proporções de combustível apresentadas possibilitam os seguintes gastos para se percorrer os 400 km:

$$\frac{400}{14}\times(0\%\times3{,}00 + 100\%\times6{,}00) \cong 171{,}43 \text{ reais.}$$
$$\frac{400}{13{,}2}\times(40\%\times3{,}00 + 60\%\times6{,}00) \cong 145{,}45 \text{ reais.}$$
$$\frac{400}{11{,}8}\times(50\%\times3{,}00 + 50\%\times6{,}00) \cong 152{,}54 \text{ reais.}$$
$$\frac{400}{10}\times(70\%\times3{,}00 + 30\%\times6{,}00) = 156{,}00 \text{ reais.}$$
$$\frac{400}{8}\times(100\%\times3{,}00 + 0\%\times6{,}00) = 150{,}00 \text{ reais.}$$

Assim, a proporção que possibilita o menor gasto com combustível é formada por 40% de álcool e 60% de gasolina.

■

Sequência 4

Exercício 3.30 Uma escola com 862 alunos participará de uma gincana, cujas regras são:

I) O número de inscritos tem que ser um número entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{9}$ do total de alunos da escola.
II) Como os alunos serão divididos em grupos com 11 alunos, o número de inscritos deverá ser múltiplo de 11.

Quantas são as possíveis quantidades de inscritos dessa escola?

Solução. Como $\frac{2}{3}\cdot 862 = 574{,}\overline{6}$ e $\frac{7}{9}\cdot 862 = 670{,}\overline{4}$, então a quantidade de alunos deve ser um múltiplo de 11 no intervalo entre os números 575 e 670. O menor múltiplo no intervalo é $53\cdot 11 = 583$ e o maior é $60\cdot 11 = 660$. Portanto, são $60 - 52 = 8$ possíveis quantidades diferentes de alunos dessa escola para a participação na gincana. ■

Exercício 3.31 — Extraído do Banco da OBMEP. A professora Célia, em uma aula sobre sequências, resolve fazer uma brincadeira de adivinhação com padrões:

I) Primeiro ela escolhe um número Natural.
II) Cláudia deve dizer o dobro do seu sucessor.
III) Marcelo deve dizer o triplo do antecessor dito por Cláudia.
IV) Por fim, Ademar deve dizer o quádruplo do sucessor do número dito por Marcelo.

a) Se a professora Célia escolher 3, qual será a sequência formada pelos 4 números?
b) Diani estava no banheiro e quando voltou, ouviu Ademar dizendo 184. Qual foi o número escolhido pela professora?
c) Crie uma expressão para determinar o número escolhido pela professora se Ademar disse que o resultado é x.

Solução. a) Se a professora Célia escolher 3, Cláudia deve dizer $2\cdot 4 = 8$, Marcelo deve dizer $3\cdot 7 = 21$ e Ademar deve dizer $4\cdot 22 = 88$.

b) Precisamos analisar o problema de "trás para frente", utilizando as operações inversas. Se Ademar disse 184, então Marcelo só pode ter dito $\frac{184}{4} - 1 = 46 - 1 = 45$ e, consequentemente, Cláudia só pode ter dito $\frac{45}{3} + 1 = 16$. Por fim, a professora Célia deve ter dito $\frac{16}{2} - 1 = 7$.

c) Usando o raciocínio do item anterior, se Ademar disse x, então Marcelo deve ter dito $\frac{x}{4}-1$, Cláudia deve ter dito
$$\frac{\frac{x}{4}-1}{3}+1$$
e o número escolhido pela professora foi
$$\frac{\frac{\frac{x}{4}-1}{3}+1}{2}-1=\frac{x-16}{24}.$$

■

Exercício 3.32 Uma fração irredutível é uma fração onde o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum. Por exemplo, $\frac{11}{7}$ é irredutível enquanto que $\frac{12}{14}$ não é irredutível, pois ainda podemos reduzi-la efetuando o cancelamento do número 2:
$$\frac{12}{14}=\frac{\cancel{2}\cdot 6}{\cancel{2}\cdot 7}=\frac{6}{7}.$$
Assim, $\frac{12}{14}$ é igual a fração irredutível $\frac{6}{7}$.

a) Determine uma fração irredutível igual a $\frac{111111}{14}$.
b) Determine uma fração irredutível igual a $\frac{111111111}{18}$.
c) Determine uma fração irredutível igual a $\frac{111\ldots111}{15}$, onde o dígito 1 se repete 2013 vezes no numerador.
d) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual a
$$\frac{111\ldots111}{2020\ldots0202};$$
na fração anterior, o numerador representa um número com 2014 algarismos iguais a 1 e no denominador existem 1007 algarismos 2 alternados por algarismos 0.

Solução. a) Temos:
$$\frac{111111}{14}=\frac{\cancel{7}\cdot 15873}{\cancel{7}\cdot 2}=\frac{15873}{2}$$
Como 15873 não possui fator 2, a fração é irredutível.
b) Observe que:
$$\frac{111111111}{18}=\frac{\cancel{9}\cdot 12345679}{\cancel{9}\cdot 2}=\frac{12345679}{2}.$$
Como 12345679 não possui fator 2, a fração é irredutível.
c) Como $111=3\cdot 37$, dividindo o numerador em grupos de três dígitos consecutivos, temos:
$$\underbrace{111\ldots111}_{2013\text{ vezes}}=3\cdot\underbrace{37037\ldots037}_{671\text{ vezes}}$$
Portanto,
$$\frac{111\ldots111}{15}=\frac{\cancel{3}\cdot 37037\ldots037}{\cancel{3}\cdot 5}=\frac{37037\ldots037}{5}.$$
Como o numerador da fração anterior não é divisível por 5, ela é irredutível.
d) Note que $11\cdot 1010\ldots0101=111\ldots111$ e $2\cdot 1010\ldots0101=2020\ldots0202$. Portanto,
$$\frac{111\ldots111}{2020\ldots0202}=\frac{11\cdot\cancel{1010\ldots0101}}{2\cdot\cancel{1010\ldots0101}}=\frac{11}{2}.$$
Como $11/2$ é irredutível, a soma desejada é $11+2=13$.

■

Exercício 3.33 — Banco da OBMEP. Luana possui dois dados, sendo um verde e o outro amarelo. Ela brinca formando frações com os números que saem nesses dois dados. O número que sai no dado verde é o numerador da fração, e o número que sai no dado amarelo é o denominador. Por exemplo, se ela tirar 5 no dado verde e 6 no dado amarelo, ela forma a fração $\frac{5}{6}$, e se ela tirar 4 no verde e 1 no amarelo, ela forma a fração $\frac{4}{1} = 4$.

a) Quantas frações próprias diferentes ela pode formar (considere, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$)?
b) Formando duas frações diferentes, qual a menor soma que ela pode obter?
c) Formando duas frações diferentes, qual a maior razão que ela pode obter?
d) Quantas frações diferentes ela pode formar?

Solução. a) Frações próprias são aquelas em que o numerador é menor que o denominador. Sendo assim, para o numerador 1, são 5 frações próprias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$); para o numerador 2, são 4 frações; para o denominador 3, são 3 frações; para o numerador 4, são 2 frações; e para o numerador 5, apenas 1 fração. Portanto, são $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ frações próprias ao todo.

b) As duas menores frações são $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{5}$. Assim, sua soma é

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}.$$

c) A maior razão entre dois números positivos é obtida quando o numerador é o maior possível (6) e o denominador é o menor possível ($\frac{1}{6}$). Sendo assim, a razão é

$$\frac{6}{\frac{1}{6}} = 6 \cdot \frac{6}{1} = 36.$$

d) Como ela joga dois dados, são $6 \cdot 6 = 36$ resultados possíveis. Agora, vamos contar as repetições:

i. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$;
ii. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$;
iii. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$;
iv. $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$;
v. $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$;
vi. $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$;
vii. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6}$.

Vemos que existem 13 repetições. Portanto, o número de frações diferentes é $36 - 13 = 23$.

■

Exercício 3.34 — OPM. Para um medicamento experimental ser testado, ele deve ser comparado com um placebo (substância inerte). Um novo medicamento, o OPMinol , foi testado em dois grupos A e B, sem pessoas em comum.

(a) No grupo A, o OPMinol foi administrado a 100 pessoas, sendo que em 66 delas obteve-se o efeito desejado; o placebo foi aplicado em 40 pessoas, e em 24 destas o efeito desejado foi constatado. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo. Complete a tabela a seguir, calculando as porcentagens de sucessos do OPMinol e do placebo, respectivamente.

Grupo A	**Número de pessoas testadas**	**Sucessos**	**Porcentagem de sucessos**
OPMinol	100	66	
Placebo	40	24	

(b) Os resultados do grupo B estão resumidos na tabela a seguir. Complete a tabela a seguir, determinando o número de pessoas nas quais o medicamento foi aplicado e o número de casos em que o placebo foi bem sucedido.

Grupo B	**Número de pessoas testadas**	**Sucessos**	**Porcentagem de sucessos**
OPMinol		180	90%
Placebo	500		87%

(c) Para aprovar o medicamento no teste, é necessário que no resultado total (isto é, juntando-se os dois grupos) ele possua uma maior porcentagem de sucessos quando comparada ao placebo. Complete a tabela a seguir e em seguida, diga se o OPMinol deve ser aprovado ou não. Dois valores já foram colocados para você.

Grupos A e B juntos	**Número de pessoas testadas**	**Sucessos**	**Porcentagem de sucessos**
OPMinol		246	
Placebo	540		

Solução. (a) A porcentagem de sucessos no grupo A com o uso do OPMinol é $\frac{66}{100} = 66\%$. Já com o placebo é $\frac{24}{40} = 60\%$.

(b) No grupo B, o número de pessoas testadas com o OPMinol é $\frac{180}{90\%} = 200$ e o número de pessoas testadas com placebo é $500 \times 87\% = 435$.

(c) Nos grupos A e B juntos, o número de pessoas testadas com o OPMinol é $100 + 200 = 300$; logo a porcentagem de sucessos com este medicamento é $\frac{246}{300} = 82\%$. E com placebo, o número de sucessos obtido é $24 + 435 = 459$ e, assim, a porcentagem de sucessos neste caso é $\frac{459}{540} = 85\%$. Como a porcentagem de sucessos do OPMinol é menor que a obtida com placebo, ele não deve ser aprovado.

■

Exercício 3.35 — Banco OBMEP. Na cidade de Trocalândia, 20% dos gatos pensam que são cachorros e 25% dos cachorros pensam que são gatos. Certo dia, um psicólogo veterinário resolve testar todos os gatos e cachorros de Trocalândia, verificando que 30% do total pensava ser gato. Que proporção dos animais testados era de cães?

Solução. Vamos denotar por C a quantidade de cães e por G a quantidade de gatos. Assim, $0{,}2G$ é a quantidade de gatos que pensam que são cães e $0{,}8G$ é a quantidade de gatos que sabem que são gatos. Por outro lado, $0{,}25C$ é a quantidade de cães que pensam ser gatos. Logo, o total de animais que pensam que são gatos é $0{,}8G + 0{,}25C$. Mas, de acordo com o psicólogo, essa quantidade é igual a $0{,}3(C+G)$. Portanto, $0{,}8G + 0{,}25C = 0{,}3C + 0{,}3G$. Como

$$\begin{aligned} 0{,}8G + 0{,}25C = 0{,}3C + 0{,}3G &\iff 0{,}8G - 0{,}3G = 0{,}3C - 0{,}25C \\ &\iff 0{,}5G = 0{,}05C \\ &\iff 10G = C, \end{aligned}$$

a proporção de cães era de

$$\frac{C}{C+G} = \frac{10G}{10G+G} = \frac{10G}{11G} = \frac{10}{11}.$$

■

Exercício 3.36 — OBMEP. Uma torneira enche um tanque em oito horas e outra torneira enche o mesmo tanque em quatro horas. Ao meio dia, a primeira torneira foi aberta com o tanque vazio e, duas horas depois, a segunda torneira também foi aberta. A que horas o tanque ficou cheio?

(a) 14h (b) 14h30 (c) 15h (d) 15h30 (e) 16h

Solução. A primeira torneira enche $\frac{1}{8}$ tanque/hora; as duas juntas enchem então $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ tanque/hora. A primeira torneira, aberta por 2 horas, encheu $2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ do tanque, deixando vazio $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ do tanque. As duas torneiras juntas levaram então $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}=2$ horas para acabar de encher o tanque, que ficou cheio 4 horas após o meio dia, ou seja, às 16h. ■

Exercício 3.37 Os denominadores de duas frações irredutíveis são 600 e 700. Qual é o menor valor possível do denominador de sua soma quando escrita como uma fração irredutível?

Observação: Dizemos que a fração p/q é irredutível se os inteiros p e q não possuem fatores primos em comum em suas fatorações. Por exemplo, $5/7$ é uma fração irredutível.

Solução. Sejam $a/600$ e $b/700$ as duas frações irredutíveis. Assim, $mdc(a,600)=mdc(b,700)=1$. A soma das duas frações pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{a}{600}+\frac{b}{700} &= \frac{7a+6b}{6\cdot 7\cdot 100}\\ &= \frac{7a+6b}{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 5^2}.\end{aligned}$$

Como a e b são ímpares, $7a+6b$ é ímpar e assim não possui o fator primo 2 em sua fatoração. Como 7 não divide b, segue que a soma $7a+6b$ também não possui o fator primo 7 em sua fatoração. De modo semelhante, como 3 não divide a, podemos concluir que esse fator não está presente na fatoração de $7a+6b$. Assim, apenas o fator primo 5 pode ser comum ao numerador e ao denominador da soma e por conseguinte o denominador será pelo menos $3\cdot 7\cdot 2^3$. Para verificar que ele é admissível, basta encontrarmos a e b tais que 25 seja um divisor de $7a+6b$. Isso pode ser obtido com $a=1$ e $b=3$, por exemplo,

$$\frac{1}{600}+\frac{3}{700}=\frac{1}{168}.$$

■

4 Orientações metodológicas

Na apresentação do material e ao longo do texto, apontamos várias sugestões de caráter metodológico para a implementação de roteiros curriculares e rotinas pedagógicas de uso do material, com ênfase na recuperação e fortalecimento das aprendizagens e, não menos importante, no gradual desenvolvimento de competências complexas, além das competências e habilidades da BNCC e DCRC, direta ou indiretamente relacionadas aos temas desse caderno.

Nesta seção, continuamos apresentando, brevemente, algumas sugestões relacionadas ao conceito e práticas do **ensino explícito**, conforme sistematizados pelo Professor Clermont Gauthier e seus colaboradores. Esta metodologia tem forte base empírica, não sendo apenas algo normativo e, sim, fundamentado em evidências da Psicologia Cognitiva e, ainda mais relevante, em avaliações de impacto realizadas com o necessário rigor analítico.Como mencionamos no caderno anterior, o desenho metodológico do ensino explícito é baseado na tríade

preparação-interação-consolidação,

referida pelo acrônimo PIC. Seguimos, assim como no caderno anterior, descrevendo alguns dos elementos da etapa P, a de preparação, uma vez que está fortemente associada ao contexto de recuperação de aprendizagens em que esses materiais são trabalhados, segundo o planejamento pedagógico no âmbito do Mais PAIC e do Pacto pela Aprendizagem. Consideremos, aqui, o seguinte elemento:

Determinar os conhecimentos prévios.

A respeito desta estratégia, é preciso que esteja claro para o professor quais conhecimentos (definições, técnicas, exemplos, métodos, fatos, habilidades, dentre outros elementos cognitivos) são **pré-requisitos** para os objetos de conhecimento e os objetivos de aprendizagem almejados no planejamento. Isso é particularmente válido nas rotinas pedagógicas que visam trabalhar descritores de avaliações como o SAEB, uma vez que cada descritor *pressupõe* uma cadeia (de fato, uma teia) de conhecimentos anteriores, em termos lógicos e cognitivos. Veja, por exemplo, como associamos alguns descritores da Matriz de Referência do quinto ano a uma lista inteira de saberes e habilidades, tanto da Matriz dos Saberes quanto da própria BNCC e, por conseguinte, do DCRC. O professor precisa enumerar e, mais que isso, estabelecer as relações de interdependência entre esses conhecimentos prévios ou necessários. Ainda mais relevante, deve **averiguar** se os alunos detêm esses conhecimentos e em que grau. Os exercícios das sequências 1 e 2, sobretudo os iniciais, podem ajudar nessa sondagem, já que foram pensados exatamente para essa função diagnóstica. As tarefas de revisão finais também são adequadas ao diagnóstico de conhecimentos prévios, especialmente daqueles diretamente associados aos descritores do SAEB ali enumerados.

Por fim, é de extrema importância que o professor possa acessar, por meio de questionamentos, discussões e cuidadosa análise das tarefas, as representações e pré-conceitos (no sentido de conceitos previamente formulados, ainda que, muitas vezes, de modo não formal) dos alunos com respeito a esses conhecimentos prévios. Tais representações, significados e usos já estabelecidos na memória dos alunos podem trazer consigo falhas de entendimento ou limitações na mobilização desses conhecimentos. Nas palavras de Gauthier e colaboradores

> Já salientamos o fato de que o professor deve estar especialmente atento às representações que impõem obstáculos ao aprendizado, isto é, às interpretações equivocadas que surgem ao longo das sessões de aprendizado e se transformam em dificuldades para os alunos. Em ensino explícito, o professor deve estar constantemente à espreita do conteúdo da mente, dos modos de raciocínio e dos erros de compreensão dos alunos, de modo a trabalhar as representações continuamente através de questionamentos, **modelagens**, uso de exemplos e contraexemplos, **andaimes**, práticas guiadas e *feedbacks* (Gauthier et al., 2014)

Nos próximos cadernos, desenvolveremos esses e outros conceitos mais detalhadamente. As tarefas de revisão foram estruturadas para propiciar **andaimes** cognitivos (tradução do termo *scaffolding* na literatura especializada em inglês).

5 Referências

- Alguns portais e plataformas
  - Portal da Matemática: https://portaldaobmep.impa.br
  - Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-fourth-grade-math
  - Roda de Matemática: https://www.rodadematematica.com.br/
  - OBMEP: http://www.obmep.org.br/provas.htm
  - Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br
- Alguns canais e vídeos
  - Isto é Matemática: https://www.youtube.com/c/istoematematica
  - OBMEP: https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial
  - Matemaníaca: https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA
  - Números na BBC Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
  - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional
  - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
  - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petropólis, RJ: Vozes, 2014.
  - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
  - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
  - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.
- Referências sobre a temática do caderno
  - Bellos, Alex. Alex no pais dos números. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
  - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
  - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
  - Wu, Hung-Hsi. Compreender os Números na Matemática Escolar. Porto: Porto Editora & Sociedade Portuguesa de Matemática
  - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
  - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.