

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

8° E 9° ANOS



PROFESSOR

Volume 2

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 Fortalecendo aprendizagens – Matemática 8º e 9º anos - professor – v.2
[recurso eletrônico] / Jorge Herbert Soares de Lira, organizador. -
Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Vários autores
Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-41811-8 (E-book)

1. Números reais. 2. Reta numérica. 3. Representação decimal. I.
Lira, Jorge Herbert Soares de, org. II. Título.

CDD: 515.8

GOVERNADORA

Maria Izolda Cella de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Assessora Especial de Gabinete	Ana Gardennya Linard
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Finais	Izabelle de Vasconcelos Costa (Orientadora) Tábita Viana Cavalcante (Gerente) Ednalva Menezes da Rocha Galça Freire Costa de Vasconcelos Carneiro Rafaella Fernandes de Araújo
Leitura Crítica	Tábita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Ednalva Menezes da Rocha
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Annelise Maymone Antonio Caminha M. Neto Jorge Herbert Soares de Lira

Sumário

1	Apresentação do Material	1
1.1	Rotinas pedagógicas e de uso do material	3
1.1.1	Primeira e segunda quinzenas	5
1.1.2	Terceira e quarta quinzenas	5
2	Equivalência de frações e proporcionalidade	7
2.1	Frações equivalentes	11
2.2	Escalas, razões e proporções	14
2.3	Velocidades, razões e proporções	30
2.4	Razões e proporções: aplicações	32
2.5	Razões e proporções: variáveis diretamente proporcionais	36
2.5.1	Variáveis Inversamente proporcionais	37
2.5.2	Proporcionalidade inversa e divisão de frações	41
2.5.3	Equivalência de frações e propriedades das proporções	48
2.6	Relações lineares entre grandezas	52
2.7	Exercícios Propostos	55
2.7.1	Sequência 1	55
2.7.2	Sequência 2	57
2.7.3	Sequência 3	60
2.7.4	Sequência 4	62
3	Orientações metodológicas	65
4	Referências	67

1 | Apresentação do Material

Caro(a) professor(a), continuamos, com este caderno, nossa colaboração com você e sua escola para, juntos, recuperarmos e fortalecermos o aprendizado de Matemática das crianças e jovens no ensino básico nos municípios do nosso estado. As avaliações diagnósticas, que ocorrerão processualmente em 2022, gerarão evidências sobre quais conhecimentos e habilidades matemáticas estão mais fragilizadas entre alunos do quinto ao nono ano. Como fonte inicial de informações, a análise minuciosa, tanto estatística quanto pedagógica dos dados, coletados tanto na série histórica do SAEB e do SPAECE quanto na avaliação de impacto da pandemia, realizada no fim do primeiro semestre de 2021, revela que a Aritmética está na base de tópicos e técnicas que devemos consolidar em primeiro lugar na recomposição das aprendizagens. Ou seja, fortalecendo e construindo *novos significados e abordagens* para as bases aritméticas, teremos fundações firmes para a ampliação do repertório matemático e o desenvolvimento cognitivo de nossos alunos.

Utilizando este caderno, você pode planejar e executar vários percursos curriculares: o tempo e a profundidade com os quais você trabalhará cada tema devem ser ajustados a cada aula. Sugerimos que seu planejamento leve em conta o desempenho dos alunos nos exercícios sugeridos ao fim de cada seção. Ao longo do texto, indicamos *sequências de tarefas* que podem ser usadas em *avaliações formativas*: nessas avaliações, é importante que você não apenas corrija tarefas em termos de “certo” ou “errado”, mas reconheça as razões dos eventuais erros e identifique os pontos em que o aluno tem avanços e outros em que ele(a) ainda necessita de reforços. Em resumo, torna-se fundamental dar ao aluno não apenas uma nota, mas uma *devolutiva* completa, acompanhada, se possível, de um roteiro de estudos específico, tendo em conta os tópicos em que ele(a) mostre estar com dificuldades.

Resumamos, agora, os conteúdos e habilidades trabalhadas neste caderno. Realizado, nos cadernos anteriores (ou nos cadernos dos anos anteriores) o percurso de estudo dos números racionais e dos números reais, especialmente de suas representações decimais e operações aritméticas, iniciamos o trabalho de transição para a **Álgebra**, ainda lidando com uma linguagem pré-algébrica, com ênfase na Aritmética. O tema que escolhemos para essa gradual passagem da Aritmética para o pensamento algébrico foram as **razões e proporções**, dada a contiguidade e dependência desse assunto da aritmética das frações. De fato, iniciamos o caderno, na seção 2, revisitando a noção fundamental de **equivalência de frações**, em que o devido destaque é dado, na seção 2.1, ao *conceito* de equivalência que, sabemos, define um número racional como classe de equivalência, a saber:

As frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são **equivalentes**, ou seja, a igualdade

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

é verdadeira *se, e somente se,*

$$q \times m = p \times n.$$

Nestas expressões, m , n , p e q são números naturais, com n e q diferentes de 0.

Note que essa definição embute a própria noção de proporcionalidade: a constante de proporcionalidade entre as grandezas m e n ou entre as grandezas p e q será a **razão** expressa pelo número racional representado tanto pela fração $\frac{m}{n}$ quanto pela fração $\frac{p}{q}$, equivalentes uma a outra. As caracterizações usuais de equivalência de frações são vistas, no material, como *consequências* dessa definição, mais primitiva e fundamental conceitualmente. Por exemplo, decorre da definição acima que as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{m \times a}{n \times a}$ são equivalentes, seja qual for o número natural $a \neq 0$ multiplicando, ao mesmo tempo, o numerador e o denominador da fração $\frac{m}{n}$. Mais adiante, na seção 2.5.3, esse mesmo conceito fundamental é a base para justificarmos e, de fato, esclarecermos as propriedades operacionais das relações de proporcionalidade. De modo similar, na seção 2.5.2, mostramos como a divisão de frações está vinculada à noção de proporcionalidade *inversa*, no sentido que as grandezas m e n ou p e q satisfazem uma relação de proporcionalidade inversa se, e somente se, $m : \frac{1}{n} = p : \frac{1}{q}$, ou seja, a razão de proporcionalidade

inversa, nesse caso, é o resultado comum dessas divisões de frações. A esse propósito, recomendamos o estudo dos problemas 33 e 34 na seção 2.5.2.

Essa transição suave do conceito aritmético de equivalência de frações para o conceito algébrico de proporcionalidade trará as devidas justificativas para as operações e cálculos que efetuaremos ao longo do caderno. Por exemplo, as chamadas “regras de três”, simples ou compostas, serão natural e completamente justificadas em termos da determinação da *razão* ou *constante de proporcionalidade* entre as duas ou mais grandezas envolvidas nas relações de proporcionalidade. Com essa abordagem, dispensamos as usuais “setas para cima” e “setas para baixo” que aparecem na lida com essas regras de três: de fato, explicamos por que esses arranjos práticos funcionam, escrevendo-os, simplesmente, como a expressão da constante de proporcionalidade. A esse respeito, sugerimos o estudo atento dos problemas 9 a 14 na seção 2.2. Em cada um desses exemplos, mostramos como a solução de problemas envolvendo razões e proporções, inclusive quando expressos em termos de “regras de três”, passa pela determinação da constante de proporcionalidade, que, por sua vez, é dada por produtos e quocientes das grandezas envolvidas, nos casos, respectivamente, de relações de proporcionalidade inversa ou direta, respectivamente, entre essas grandezas.

Note que usamos o vocábulo “grandeza” em vez de “número”, simplesmente. A intenção pedagógica é de que o estudante perceba as *relações* entre números ou as *variações* desses números como expressões numéricas das relações ou variações das *grandezas* representadas por esses números. Com isso, passamos de uma concepção *estática* do número tomado isoladamente para uma visão *dinâmica* das relações entre grandezas ou das variações dessas grandezas. Essa é uma mudança substantiva da passagem da Aritmética para a Álgebra, muito mais do que o fato incidental de passarmos a usar letras para designar variáveis, além dos algarismos que usamos na Aritmética. Essa mudança, sutil mas profunda, de ponto de vista faz com reconhecamos a equivalência de frações

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10},$$

por exemplo, como expressão da relação de proporcionalidade

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2},$$

em que as *variáveis* y e x dependem *linearmente* uma da outra ou em que variações de x são proporcionais a variações de y , sendo que y assume valores como 1, 2, 5, ... ao passo que x assume valores 2, 4, 10, ..., respectivamente.

Ao longo das seções, apresentamos a ideia de proporcionalidade sempre a partir de modelos que envolvem a razão entre grandezas, modeladas por variáveis numéricas, que dependem linearmente uma da outra. Em várias seções, como 2.2 e 2.3, temos contextos em que *variáveis* x e y guardam uma relação de proporcionalidade direta ou inversa, isto é, em que

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{ou} \quad xy = a,$$

respectivamente, onde a é a constante de proporcionalidade. Nessas seções, em particular, apresentamos situações e problemas, em contextos cotidianos e até mesmo científicos ou socioeconômicos, em que a constante a ora *significa* um fator de escala em mapas, plantas baixas e maquetes, ora é *interpretada* como velocidade ou densidade na linguagem cotidiana ou científica. O objetivo precípua é de que o estudante vislumbre como as relações de proporcionalidade ou linearidade são um primeiro exemplo fundamental de **função**, linear ou afim, nesses casos, que descreve modelos de dependência de uma variável com respeito a outra em diversos contextos.

Outra descrição, correlata a essa, é mais explorada na seção 2.6 e corresponde ao caso em que as *variações* das variáveis são diretamente proporcionais uma a outra, ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Esse será o modelo que, mais adiante, retomaremos em termos de equações lineares em duas variáveis e de funções afins. Note que, nesse caso, escrevendo as variações como $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$,

obtemos

$$\begin{aligned}y &= ax + y_0 - ax_0 \\ &\doteq ax + b,\end{aligned}$$

expressão algébrica de uma função afim, ou posto de outro modo, de uma equação linear a duas variáveis como em $y - ax = b$ ou $\alpha x + \beta y = \gamma$ onde $a = -\alpha/\beta$ e $b = \gamma/\alpha$. Recomendamos, portanto, que o problema 42 seja detalhadamente estudado por abordar, passo a passo, essa interpretação da relação proporcional entre variações de grandezas em termos de uma equação linear e do lugar geométrico que essa equação representa. Nesse sentido, demonstramos, nesse exemplo, que a constante de proporcionalidade a , ou seja, a razão entre as variações, é interpretada como o coeficiente angular ou declividade da reta descrita pela equação linear.

Em suma, o caderno parte de uma retomada de elementos básicos da aritmética de frações, dando novos significados ao conceito de equivalência de frações em termos de razões e proporções. A apresentação de modelos de relações lineares entre grandezas, abrindo caminho para a linguagem da Álgebra e das funções.

1.1 – Rotinas pedagógicas e de uso do material

Apresentamos, a seguir, um roteiro possível para uso deste caderno ao longo de um bimestre ou oito semanas. A tabela relaciona os objetos de conhecimentos (e suas especificações), as habilidades da BNCC e DCRC, os saberes e habilidades da **Matriz dos Saberes** e, por fim, quais descritores na Matriz de Referência do SAEB e SPAECE estão sendo trabalhados ou que dependem dos assuntos estudados neste material. Segue, então, uma proposta de **rotina pedagógica semanal**.

O percurso sugerido nas rotinas envolve o uso dos exercícios na seção 2.7, na parte final do caderno, os quais são agrupados em quatro sequências. Em cada sequência, os exercícios são dispostos em um crescendo de dificuldade técnica e/ou complexidade cognitiva. Da mesma forma, há um aumento de complexidade, da sequência 1 à sequência 4, tornando cada sequência específica recomendável para um dos quatro grupos de alunos que serão determinados e classificados de acordo com as possíveis fragilidades, em termos de conhecimentos e habilidades, apontadas, ao longo de 2022, pelas avaliações diagnósticas.

Em resumo, nas formações em cada ciclo do MAIS PAIC, apresentaremos as sugestões de uso das sequências e de exercícios específicos para cada um dos quatro grupos em que alocaremos os alunos, de acordo com as evidências das avaliações baseadas na Matriz dos Saberes. Além disso, devemos ofertar **blocos adicionais** de exercícios, tanto para consolidar os elementos cognitivos ou de repertório mais lacunares quanto para que o(a) professor(a) possa elaborar avaliações formativas estruturadas ao longo do bimestre, em complemento às avaliações diagnósticas via SISEDU.

Os temas a serem trabalhados nesse caderno, como vimos, são relacionadas à razões, proporções, relações lineares entre grandezas e aplicações e modelos que mobilizam o conhecimento desses conceitos. Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC, no Ensino Fundamental, anos finais, abrangidos pelos tópicos desse caderno, são:

- (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
- (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
- (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
- (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
- (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

- (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
- (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
- (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
- (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Quanto a Matriz dos Saberes, os saberes e habilidades que serão mobilizados com as atividades nessas seções são:

Saber S04: reconhecer e utilizar relações de proporcionalidade entre grandezas numéricas

- S04.H1: reconhecer relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas ou entre suas variações, em diferentes contextos, aplicações e problemas
- S04.H2: expressar proporcionalidade em termos de frações equivalentes
- S04.H3: relacionar números racionais a razões entre grandezas ou entre suas variações, expressando, em particular, a taxa de variação (percentual) entre essas grandezas
- S04.H4: reconhecer relações de proporcionalidade entre grandezas ou entre variações dessas grandezas em gráficos, tabelas e outros suportes
- S04.H6: determinar as relações entre razões, frações e suas representações decimais, inclusive quando expressas na forma de porcentagem
- S04.H7: expressar a relação de proporcionalidade inversa em termos de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o recíproco de outra
- S04.H8: resolver problemas, motivados por diferentes contextos e aplicações, que envolvam a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais
- S04.H9: resolver problemas que envolvam porcentagens, motivados por diferentes contextos e aplicações
- S04.H10: resolver problemas, utilizando procedimentos corretos e justificados, que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais (e.g., divisão em partes proporcionais)
- S04.H11: determinar termos desconhecidos em uma proporção a partir dos termos dados
- S04.H12: utilizar, correta e justificadamente, propriedades operacionais de razões e proporções, inclusive quando expressas na forma das chamadas “regras de três”, combinando grandezas direta e/ou inversamente proporcionais
- S04.H13: modelar e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações

Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC e os saberes e habilidades da Matriz dos Saberes mencionados anteriormente estão diretamente associados aos seguintes descritores na **Matriz de Referência do SAEB para o nono ano**: D7, D15, D22, D25, D29 e D233. Na Matriz de Referência do SPAECE para o nono ano, os descritores abrangidos são D17, D18 e D25. Em resumo, os saberes e habilidades (S04.H1, S04.H2, etc.) listados anteriormente devem ser entendidos como **metas de aprendizagem** dos alunos, associadas às habilidades da BNCC e do DCRC para os anos finais do Ensino Fundamental, já mencionadas. Além disso, estabelecem uma base firme para os conhecimentos e habilidades demandados pelo SAEB e pelo SPAECE do nono ano do Ensino Fundamental (e terceira série do Ensino Médio), especialmente em relação aos descritores enumerados acima. Em seu planejamento curricular para **um mês**, recomendamos o trabalho com este caderno de modo a cobrir estas metas de aprendizagem. Na sequência, sugerimos um roteiro de uso do caderno com essa finalidade.

1.1.1 – Primeira e segunda quinzenas

Na rotina pedagógica, propomos que a **primeira e segunda quinzenas** sejam iniciadas com a **revisão** dos elementos de aritmética de frações, como a **equivalência de frações** tratada nas seções 2 e 2.1 como base para o conceito de proporcionalidade. Em seguida, sugerimos a discussão dos problemas 1 a 14 em que, em diferentes contextos, abordamos os métodos básicos para a determinação de constantes de proporcionalidade ou de termos desconhecidos em uma relação de proporcionalidade, direta ou inversa. Apresentamos, em particular, exemplos de “regras de três”, simples ou composta, em termos do cálculo da constante de proporcionalidade dada por produtos e/ou quocientes das grandezas envolvidas, evidenciando a razão as “setas para cima” ou “setas para baixo” que, costumeiramente, aparecem na modelagem desses problemas.

Recomendamos que o(a) professor(a) discuta o contexto de cada um dos problemas, apresentando o *repertório* teórico e técnico, especialmente conhecimentos prévios necessários, para a modelagem matemática dos problemas apontados no contexto. Em seguida, é preciso averiguar se, tendo modelado adequadamente o problema em termos de razões e proporções, o aluno utiliza corretamente os conceitos, métodos e técnicas do repertório matemático relativo à proporcionalidade. Por fim, é didaticamente relevante buscar evidências sobre o quanto o aluno abstraiu princípios e métodos gerais suscitados pela modelagem e aplicação práticas trazidas pelos problemas. Por exemplo, torna-se importante, no estágio final do trabalho com os problemas, perceber se o aluno internalizou, conceitual e operacionalmente, como determinar razões ou constantes de proporcionalidade a partir dos dados informados no problema a respeito das variáveis envolvidas. Essas etapas serão descritas como **rubricas** associadas a **avaliações formativas** propostas na seção 3 ao fim do caderno.

1.1.2 – Terceira e quarta quinzenas

Nestas **terceira e quarta quinzenas**, sugerimos que seja aprofundada a relação entre **proporcionalidade** e **linearidade**, prenunciada nos modelos e problemas envolvendo *escalas, velocidades e densidades*, por exemplo, discutidos em detalhes nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, sobretudo. Vencida essa etapa inicial, indicamos que o(a) professor(a) possa apresentar a ideia de variável numérica, ao menos no contexto dos exemplos elaborados nas seções 2.5 e 2.5.1. As grandezas numéricas descritas nas modelagens dos problemas devem ser entendidas como variáveis cujos valores dependem uns dos outros: essa ideia firma as bases do pensamento algébrico que passa a ser trabalhado a partir desse caderno. Sob este ponto de vista, os valores numéricos em uma relação de proporcionalidade, direta ou inversa, são interpretados como valores numéricos de variáveis que estão linearmente relacionadas umas às outras ou a seus inversos numéricos.

O desfecho dessas duas quinzenas de rotina pedagógica pode ser a introdução ao modelo de linearidade entre duas variáveis (ou suas variações) a partir do exemplo extensamente trabalhado na seção 2.6, com o qual iniciamos a modelagem de uma relação linear entre variáveis em termos de uma equação linear ou de uma função afim, cujos coeficientes algébricos são, ao mesmo tempo, parâmetros geométricos (declividade e intercepto, por exemplo) da reta no plano cartesiano descrita pela equação ou pela função.

A seguir, descrevemos, sucintamente, uma **proposta de rotina pedagógica** para as quatro primeiras quinzenas:

- 1^a e 2^a quinzenas, 1^a a 4^a semanas (1^a a 8^a aulas):
 - 1) Seções 2 e 2.1.
 - 2) Seção 2.2, com discussão dos problemas 1 a 14.
 - 3) Sequências 1 e 2.
- 3^a e 4^a quinzenas, 5^a a 8^a semanas (9^a a 16^a aulas):
 - a) Seção 2.3.
 - b) Seção 2.4.
 - c) Seções 2.5 e 2.5.1
 - d) Sequências 3 e 4.

2

Equivalência de frações e proporcionalidade

Iniciamos nosso estudo retomando ideias fundamentais sobre *frações*, com destaque para o conceito de **equivalência de frações**. Recorde-se que usamos frações, por exemplo, para expressar o resultado de uma divisão como $15 : 6$, que escrevemos como a fração

$$\frac{15}{6}$$

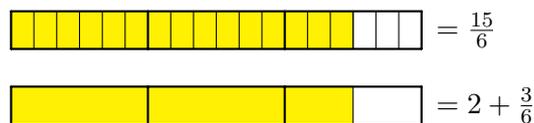
Lembremos que, ao dividir 15 por 6, obtemos um quociente 2 e um *resto* 3, ou seja,

$$15 = 6 \times 2 + 3.$$

Dividindo o resto 3 pelo divisor 6, não obtemos um número inteiro e sim um número fracionário

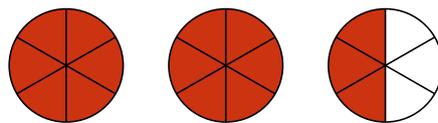
$$\frac{3}{6},$$

que podemos interpretar como uma *parte* de uma unidade. É bastante comum visualizarmos essa operação de divisão e as frações usando **barras**, como na figura a seguir,



em que a primeira barra é dividida em retângulos menores, *agrupados* de 6 em 6. Portanto, 15 unidades equivalem a 2 *grupos* de 6 e **parte** de outro grupo de 6, que corresponde a 3 das 6 unidades neste grupo. A segunda barra representa esses 2 grupos de 6 e a fração do terceiro grupo. Observe que a **unidade de medida** na segunda barra é 6 vezes *maior* do que na primeira.

Podemos também visualizar e interpretar as frações em termos de **gráficos de setores** ou **pizzas**, para dar-lhes um nome mais atraente. Se cada unidade ou pizza é dividida em seis partes iguais — fatias, 15 dessas partes podem ser representadas na seguinte figura,



em que as 15 fatias destacadas correspondem a 2 pizzas inteiras e $\frac{3}{6}$ da terceira pizza, ou seja, as 3 fatias das 6.

Em resumo, seja usando barras ou pizzas, vemos que a fração $\frac{3}{6}$ resulta da divisão $15 : 6$, que calculamos, em termos de frações, como:

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6},$$

Vejam um problema, relacionado a *unidades de medida* de comprimento ou distância em que frações como essa surgem naturalmente.

Problema 1 Uma medida tradicional de comprimento (distância), usada pelos habitantes da zona rural, é a **légua**. Se 1 légua corresponde a 6 quilômetros, quantas léguas correspondem a 15 quilômetros?

Para resolvermos o problema 1, consideramos as duas retas numéricas abaixo, em que os números na primeira indicam distâncias em quilômetros e os números na segunda, distância em léguas.

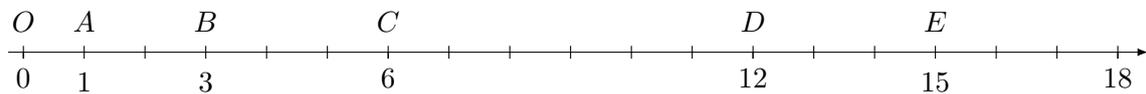


Figura 2.1: Distâncias em quilômetros.



Figura 2.2: Distâncias em léguas.

Comparando essas escalas, vemos que

- o ponto C corresponde a uma distância de 6 quilômetros ou 1 légua,
- o ponto D corresponde a uma distância de 12 quilômetros ou 2 léguas,
- o ponto A corresponde a uma distância de 1 quilômetro ou $\frac{1}{6}$ de légua,
- o ponto B corresponde a uma distância de 3 quilômetros ou $\frac{3}{6}$ de légua e
- o ponto E corresponde a uma distância de 15 quilômetros ou $\frac{15}{6}$ léguas.

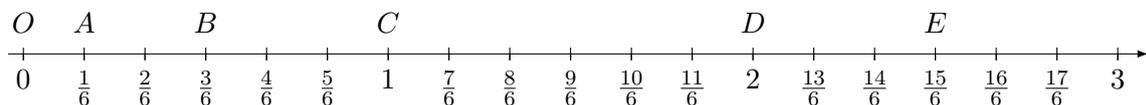


Figura 2.3: Conversão de quilômetros em léguas: 1 quilômetro é igual a $\frac{1}{6}$ de légua e 1 légua é igual a 6 quilômetros.

As **frações**

$$0 = \frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6} = 1, \frac{7}{6}, \dots$$

lidas como “um sexto”, “dois sextos”, e assim por diante, representam pontos que dividem a reta numérica em segmentos de comprimentos iguais. Por exemplo, a distância entre os pontos O e C , igual a 1 milha, é 6 vezes maior do que a distância do ponto O ao ponto A , que é igual à **fração**

$$\frac{1}{6}$$

de milha. Assim,

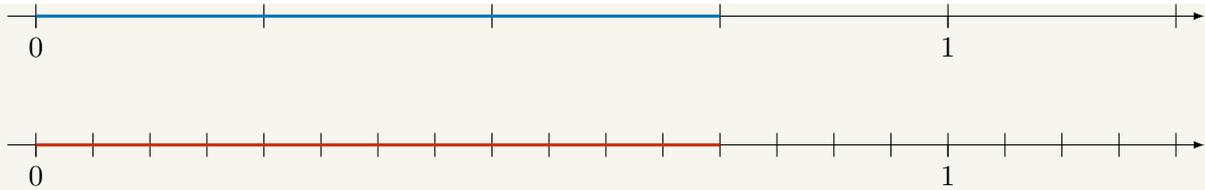
$$6 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Da mesma forma, a distância entre os pontos O e B é dada pela fração $\frac{3}{6}$ e é 3 vezes maior do que a distância entre os pontos O e A , ou seja,

$$3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Exercício 2.1 Escreva a fração correspondente aos segmentos destacados (mais escuros) nas retas numéricas abaixo.





Solução. Na primeira figura, o segmento de 0 a 1 está *particionado* em 8 segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{8}$. O segmento destacado tem 3 vezes esse comprimento. Portanto, mede

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Na segunda figura, o segmento destacado é 3 vezes maior do que aquele destacado na figura anterior e 9 vezes maior do que o segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Logo, sua medida é igual a

$$3 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \quad \text{ou} \quad 9 \times \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Observamos que

$$\frac{9}{8} = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{8}.$$

Na terceira figura, o segmento de 0 a 1 é particionado em 4 segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{4}$. Desse modo, o segmento destacado equivale a 3 segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$, isto é, mede $\frac{3}{4}$. Observe que cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ tem o dobro do comprimento do segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Portanto,

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = 3 \times 2 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}.$$

Logo, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ indicam o mesmo comprimento:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Dizemos, assim, que são frações **equivalentes**.

Na última figura, temos um segmento destacado de mesmo comprimento que o da terceira figura. Note que, na terceira figura, cada um dos 4 segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 é 4 vezes maior do que os segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 na quarta figura, onde a unidade está dividida em 16 partes iguais. Logo, cada um dos segmentos menores na quarta figura mede

$$\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$$

e o segmento destacado mede

$$12 \times \frac{1}{16} = \frac{12}{16}.$$

Comparando os segmentos destacados na terceira e na quarta figuras, concluímos que suas medidas são iguais, isto é,

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16},$$

encontrando mais um exemplo de frações equivalentes. ■

Observação 2.1 Em todos os exemplos que discutimos, usamos a reta numérica e associamos as frações a medidas de distância ou comprimento. No entanto, podemos usar a reta e as frações em outros contextos, envolvendo outras grandezas e medidas. Na verdade, frações são formas de representar os **números racionais**, que são objetos matemáticos abstratos e, portanto, cuja definição não requer que sejam medidas de algo concreto.

Observação 2.2 — Nota ao(à) professor(a). Neste ponto, convém usar as representações das frações em retas com diversas graduações (assim como em “pizzas” com diferentes números de fatias ou barras com diferentes números de subdivisões para explorar as ideias de equivalência de frações (que podemos entender como o efeito da mudança de “unidades de medida” ou de “escala”, alterando proporcionalmente o total de partes do todo e o total de partes consideradas). Da mesma forma, essas representações das frações permitem uma introdução bastante intuitiva da adição, multiplicação e mesmo divisão de frações, como acabamos de ver.

A esse respeito, considere a seguinte situação-problema, em que as frações representam uma grandeza bem diferente de comprimento ou distância. Mesmo assim, usaremos sua *representação* como pontos na reta numérica.

Exercício 2.2 Em uma prova, um aluno acertou 15 questões, o que corresponde a $\frac{5}{7}$ do total de questões. Nesta prova havia quantas questões?

- (a) 20 (b) 21 (c) 28 (d) 30 (e) 35

Solução. Vamos representar o total de questões da prova pelo segmento de reta entre os pontos 0 e 1 na reta numérica. Sendo assim, particionamos esse segmento em 7 segmentos de mesmo comprimento e destacamos 5 desses segmentos para representar o total de questões respondidas corretamente.



Como 5 dos segmentos menores correspondem a $\frac{5}{7}$ do total de questões, ou seja, a 15 questões, cada um desses segmentos corresponde a $15 : 5 = 3$ questões. Isso pode ser visualizado, na próxima figura, **particionando** cada segmento menor em 3 partes e observando que, agora, cada parte corresponde a uma questão. Portanto, os 7 segmentos, que representam o total de questões da prova, correspondem a $7 \times 3 = 21$ questões.

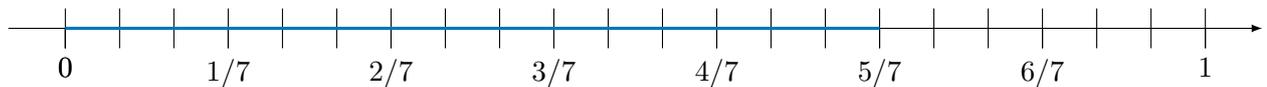


Figura 2.4: $\frac{5}{7}$ do segmento ou 15 questões.

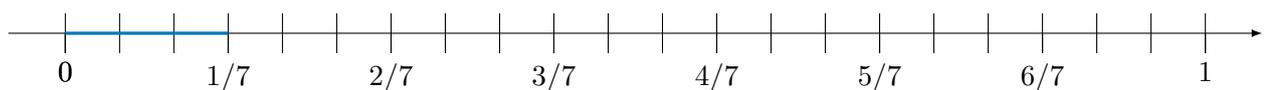


Figura 2.5: $\frac{1}{7}$ do segmento ou 3 questões.



Figura 2.6: $\frac{7}{7}$ do segmento, o segmento inteiro ou $7 \times 3 = 21$ questões.

Logo, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Observação 2.3 Uma forma de denotar frações em que o numerador é maior que o denominador — frações inadequadamente chamadas de *impróprias* — é escrevê-las como uma soma, mas omitindo o sinal +. No exemplo anterior, tínhamos

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4},$$

que foi denotada por

$$2\frac{1}{4}.$$

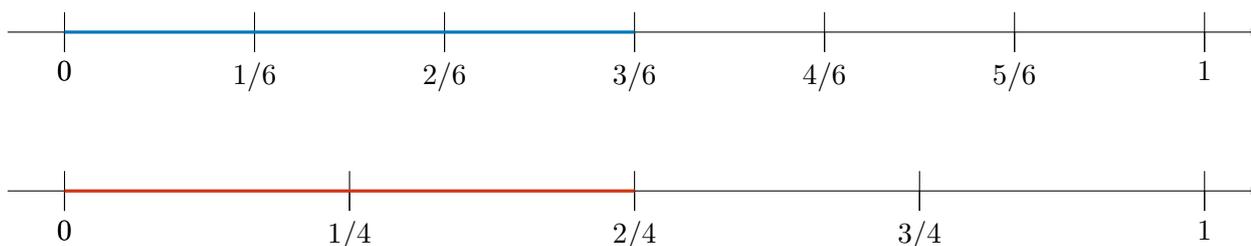
2.1 – Frações equivalentes



Diferentes frações podem representar uma mesma quantidade — um mesmo segmento na reta numérica. Essa frase fica mais precisa quando estudamos os chamados **números racionais**. Por ora, vamos entender geometricamente o que significa essa afirmação. Dizemos que as frações

$$\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6}$$

são **equivalentes** por representarem o mesmo ponto na reta numérica. De fato, temos



Duas frações equivalentes representam o mesmo ponto nessas retas e, portanto, o mesmo comprimento, medido desde o ponto 0. Temos, então, uma igualdade ou **equivalência** de frações:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}.$$

Note que se multiplicarmos cada um dos lados dessa igualdade por 12, que é um *múltiplo comum* de 4 e 6, a igualdade se mantém:

$$12 \times \frac{2}{4} = 12 \times \frac{3}{6}.$$

Esta segunda igualdade é verdadeira, pois, do lado esquerdo, temos:

$$12 \times \frac{2}{4} = 12 \times 2 \times \frac{1}{4} = 2 \times 12 \times \frac{1}{4} = 2 \times 3 = 6,$$

enquanto o lado direito é dado por

$$12 \times \frac{3}{6} = 12 \times 3 \times \frac{1}{6} = 3 \times 12 \times \frac{1}{6} = 3 \times 2 = 6.$$

Como a segunda igualdade é verdadeira, a primeira também o é. Logo, “comprovamos” que as frações são equivalentes.

De modo geral, as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são **equivalentes**, ou seja, a igualdade

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

é verdadeira *se, e somente se*,

$$q \times m = p \times n.$$

Nestas expressões, m, n, p e q são números naturais, com n e q diferentes de 0.

De fato, basta multiplicarmos cada um dos lados da igualdade pelo produto $q \times n$, obtendo

$$q \times n \times \frac{m}{n} = q \times n \times \frac{p}{q},$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$q \times m \times n \times \frac{1}{n} = n \times p \times q \times \frac{1}{q},$$

o que nos permite concluir que

$$q \times m = n \times p.$$

Observação 2.4 Em nosso estudo, esse conceito de equivalência de frações será visto como uma **relação de proporcionalidade**: diremos que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

quando *m está para n assim como p está para q*, situação em que vale a igualdade dos produtos dos *meios* e do produtos dos *extremos*:

$$q \times m = p \times n.$$

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar algumas **regras práticas** para verificar se duas frações são equivalentes.

Observação 2.5 Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** *a* natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. De fato,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \times a}{n \times a}$$

visto que

$$m \times n \times a = n \times m \times a.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}.$$

Neste caso, *a* deve ser um *divisor ou fator comum* de *m* e *n* com *m : a = p* e *n : a = q*. Assim, temos

$$\frac{m}{n} = \frac{p \times a}{q \times a} = \frac{p}{q} = \frac{m : a}{n : a},$$

como queríamos demonstrar.

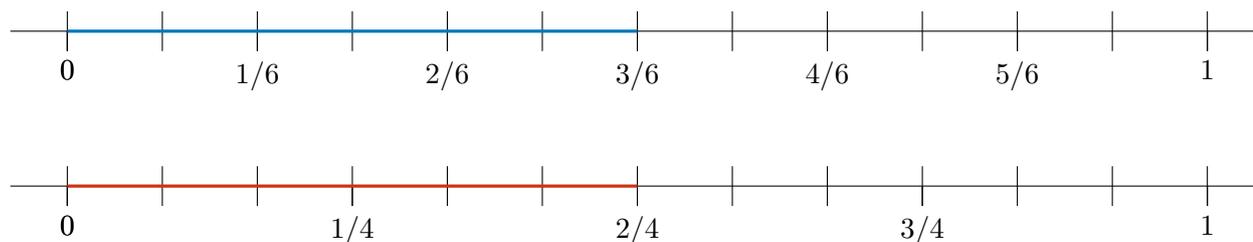
Por exemplo, no caso das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, multiplicando *tanto* o numerador *quanto* o denominador por 3 e por 2, respectivamente, obtemos:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

e

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12},$$

o que corresponde, na reta, a particionarmos cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes e cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ em 2 partes, conforme representado nas seguintes figuras.



Note que os comprimentos realçados nos dois segmentos são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações.

Recapitulando, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, aumentamos a quantidade de partes nas quais um dado segmento é dividido, bem como aumentamos *proporcionalmente* a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural diferente de zero, diminuímos *proporcionalmente* essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial.

Uma infinidade de frações equivalentes a uma dada fração pode ser obtida, portanto, multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, multiplicando-os por 2, 3, 4, e assim por diante, temos:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \dots$$

Da mesma forma, divisões sucessivas do numerador e denominador (isto é, *simplificações* das frações) produzem uma sequência de frações equivalentes

$$\dots = \frac{32}{20} = \frac{24}{15} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

em que a última é **irredutível**. Isto significa que 5 e 8 não têm *divisores comuns* além de 1. Portanto, não há mais como dividir, com resto 0, tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número. Lembremos, de nossos estudos anteriores, em que, neste caso, dizemos que 5 e 8 são *primos entre si*, ou seja, $\text{MDC}(5,8) = 1$.

Exercício 2.3 Qual das frações abaixo **não** é equivalente a $\frac{12}{18}$.

(a) $\frac{6}{9}$

(b) $\frac{10}{16}$

(c) $\frac{4}{6}$

(d) $\frac{8}{12}$

(e) $\frac{2}{3}$

 **Solução.** Uma possibilidade é simplificar as frações dadas, obtendo

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}.$$

Logo, $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes a $\frac{12}{18}$. Por outro lado,

$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 2}{12 \div 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\frac{8}{12}$ também é equivalente a $\frac{12}{18}$. Finalmente,

$$\frac{10}{16} = \frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}.$$

Mas, como $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ são frações irredutíveis diferentes, concluímos que $\frac{10}{16}$ e $\frac{12}{18}$ não são equivalentes. Portanto, a alternativa que apresenta uma fração que não é equivalente a $\frac{12}{18}$ é a letra (b).

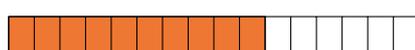
Para entendermos esses cálculos geometricamente, representemos as frações utilizando **barras** de mesmo comprimento, como nas figuras abaixo, particionadas em 18, 9, 6, 3 ou 16 partes iguais, respectivamente:

 = $\frac{12}{18}$

 = $\frac{6}{9}$

 = $\frac{4}{6}$

 = $\frac{2}{3}$

 = $\frac{10}{16}$

Uma solução alternativa seria verificar as equivalências de $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$, o que também pode ser feito para as frações dos itens (c), (d), (e), calculando os produtos 12×9 e 6×18 : como $12 \times 9 = 108 = 6 \times 18$, as frações $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes. Da mesma forma, $\frac{12}{18}$ não é equivalente a $\frac{10}{16}$ porque $12 \times 16 = 192$ e $10 \times 18 = 180$, logo, $12 \times 16 \neq 10 \times 18$.



2.2 – Escalas, razões e proporções

Além de permitir visualizar o espaço em que vivemos e localizar ruas, cidades e regiões, mapas são úteis para estimarmos distâncias entre localidades. Podemos, por exemplo, usar o seguinte mapa para determinar, aproximadamente, as distâncias entre as cidades de Juazeiro do Norte, Farias Brito e Santana de Cariri, representadas, respectivamente, pelos pontos *A*, *B* e *C* no mapa. Obviamente, as distâncias entre os pontos do mapa *A*, *B* e *C* no mapa **não são iguais** às distâncias reais. No entanto, estão na mesma **proporção** das distâncias reais. Que quer dizer isso?



Observe a **escala** representada na parte de baixo do mapa. Os retângulos desenhados nesta escala nos dão uma informação essencial: o comprimento de cada um deles (digamos, 1 centímetro) corresponde, na realidade, a uma distância de 10 quilômetros. Ou seja, se dois pontos no mapa estão a uma distância igual a 1 centímetro, as duas localidades que estes pontos representam estarão distantes 10 quilômetros uma da outra na realidade.

Podemos verificar que a distância, no mapa, de *A* a *B*, por exemplo, é aproximadamente igual a 4,2 vezes o comprimento fixado na escala. Da mesma forma, a distância, no mapa, do ponto *B* ao ponto *C* é quase igual a 3,3 vezes o comprimento da escala. Finalmente, os pontos *A* a *C*, no mapa, estão distantes cerca de 4,7 vezes o comprimento da escala.

Portanto, podemos, com alguma margem de erro, dizer que as distâncias *reais* de Juazeiro do Norte a Farias Brito, de Farias Brito a Santana do Cariri e de Santana do Cariri a Juazeiro do Norte são, respectivamente, iguais a 42 quilômetros, 33 quilômetros e 47 quilômetros.

Portanto, a **escala** é o fator de comparação entre as distâncias no mapa e as distâncias reais. Neste nosso exemplo, a escala é dada pela **razão**

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{10 \text{ quilômetros}}$$

Para simbolizar esta relação, digamos que x representa a distância real, **em quilômetros**, de Juazeiro do Norte (representada pelo ponto *A*) a uma localidade real representada por um ponto *P* no mapa. Assim, a distância, no mapa, entres os pontos *A* e *P* será dada, **em centímetros**, por

$$y = ax,$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{10}x.$$

Por exemplo, no mapa abaixo, o ponto P corresponde à cidade de Jardim, que fica a cerca de 46 quilômetros de Juazeiro do Norte. Logo, a distância representada no mapa é igual a

$$y = \frac{1}{10} \times 46 = 4,6 \text{ centímetros.}$$



Observamos que estas são as distâncias *geográficas*, não necessariamente as distâncias percorridas ao longo das estradas que ligam estas cidades.

Observação 2.6 Uma vez que

$$\begin{aligned} 10 \text{ quilômetros} &= 10.000 \text{ metros} = 10.000 \times 100 \text{ centímetros} \\ &= 1.000.000 \text{ centímetros,} \end{aligned}$$

a escala pode ser escrita comparando distâncias em centímetros, no mapa e na realidade:

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{1.000.000 \text{ centímetros}},$$

ou seja,

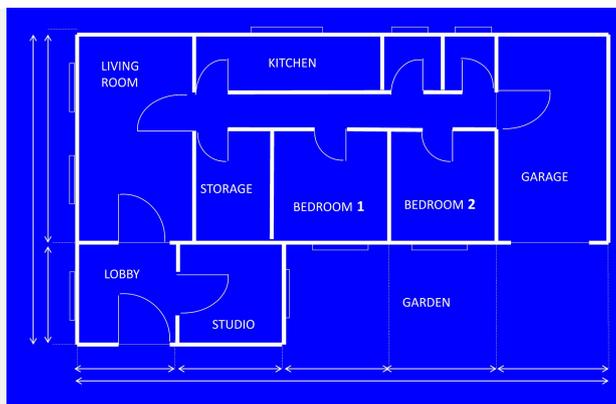
$$a = \frac{1}{1.000.000} = 1 : 1.000.000.$$

Essa última notação $1 : 1.000.000$ é bastante usada em Cartografia (Geografia) e apenas indica uma *razão*, isto é, uma comparação entre dois números: 1 centímetro no mapa equivale a 1.000.000 de centímetros na realidade. Observe que essa razão nada mais é do que a fração

$$\frac{1}{1.000.000},$$

também igual ao número decimal 0,000001 (um milionésimo); ou seja, a distância no mapa é um milionésimo da distância real.

Problema 2 A planta baixa de uma casa está representada na figura abaixo:



© by Tumisi from Pixabay

A área que representa o gabinete (“studio”) é cerca da metade da área que representa a sala de estar (“living room”) na planta. Sabendo que o gabinete tem 25 metros quadrados de área, qual a área, na realidade, da sala de estar?

Solução. Segundo o enunciado, a **razão** entre a área da sala de estar e a área do gabinete é igual a

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Como a área do gabinete é igual a 25 metros quadrados, a área da sala de estar é o dobro disso, ou seja, 50 metros quadrados.

Solução alternativa. Representando a área da sala de estar por x , temos a seguinte proporção (igualdade ou equivalência de frações):

$$\frac{x}{25} = \frac{2}{1}.$$

Multiplicando os dois lados dessa igualdade por 25, obtemos:

$$x = 25 \times 2.$$

Portanto, $x = 50$ metros quadrados. ■

Exercício 2.4 Ainda com relação à planta no exercício anterior, suponhamos que a escala usada nessa planta é 1 : 200, ou seja, 1 centímetro na planta corresponde a 200 centímetros (ou seja, 2 metros) na realidade. Sendo assim, estime:

- as dimensões do jardim (“garden”), sabendo que, na planta, as dimensões são 7 centímetros e 2 centímetros;
- as dimensões da garagem (“garage”), sabendo que, na planta, as dimensões são 2,5 centímetros e 4,5 centímetros;
- as dimensões da casa, sabendo que, na planta, as dimensões são 11 centímetros e 6,5 centímetros;
- as áreas do jardim e da garagem.

Solução. (a) A escala da planta é de 1 centímetro para cada 200 centímetros, ou seja, 2 metros na construção real. Assim, 2 centímetros na planta correspondem a

$$2 \times 200 \text{ centímetros} = 400 \text{ centímetros} = 4 \text{ metros}$$

na casa real, ao passo que 7 centímetros na planta correspondem a

$$7 \times 200 \text{ centímetros} = 1.400 \text{ centímetros} = 14 \text{ metros}$$

na realidade.

(b) De modo similar, vemos que as dimensões reais da garagem são:

$$\begin{aligned} 2,5 \times 200 \text{ centímetros} &= 500 \text{ centímetros} = 5 \text{ metros}, \\ 4,5 \times 200 \text{ centímetros} &= 900 \text{ centímetros} = 9 \text{ metros}. \end{aligned}$$

(c) Com respeito às dimensões reais da casa, temos:

$$\begin{aligned} 11 \times 200 \text{ centímetros} &= 2.200 \text{ centímetros} = 22 \text{ metros}, \\ 6,5 \times 200 \text{ centímetros} &= 1.300 \text{ centímetros} = 13 \text{ metros}. \end{aligned}$$

Em geral, se x representa um comprimento (em centímetros) no mapa e y representa o comprimento (em centímetros) correspondente na realidade, temos

$$y = 200x,$$

ou seja,

$$\frac{y}{x} = 200,$$

sempre que $x \neq 0$.

(d) A **área** do jardim é calculada *multiplicando* suas dimensões reais, isto é,

$$4 \times 14 = 56 \text{ metros quadrados}.$$

Observe que o produto das dimensões na escala é

$$2 \times 7 = 14 \text{ centímetros quadrados}.$$

A **razão** entre a **área real** e a **área do jardim na planta** é igual a

$$\begin{aligned} \frac{56 \text{ metros quadrados}}{14 \text{ centímetros quadrados}} &= \frac{56 \times 100 \times 100 \text{ centímetros quadrados}}{14 \text{ centímetros quadrados}} \\ &= \frac{56 \times 10.000}{14} = \frac{4 \times 10.000}{1} = 40.000. \end{aligned}$$

Note que esta razão é o *quadrado* da razão entre os comprimentos, isto é, o quadrado de 200.

Já a área do garagem é dada também multiplicando suas dimensões reais:

$$5 \times 9 = 45 \text{ metros quadrados}.$$

A área total da casa, por fim, é dada por

$$22 \times 13 = 286 \text{ metros quadrados}.$$

Problema 3 Para atrair compradores, as construtoras exibem maquetes, isto é, modelos em miniaturas de edifícios de apartamentos residenciais. Sabendo que a escala, isto é, a **razão** entre as dimensões da maquete e do que ela representa, é igual a $\frac{1}{50}$,



Image by Anna Pan'shina from Pixabay

qual é a altura real do edifício, sabendo que a maquete tem 90 centímetros de altura?

 **Solução.** A razão

$$\frac{1}{50}$$

significa que 1 centímetro na maquete corresponde a 50 centímetros no edifício real. Portanto, 90 centímetros na maquete correspondem a

$$90 \times 50 \text{ centímetros} = 4.500 \text{ centímetros} = 45 \text{ metros}$$

no edifício real. Logo, a altura real é dada por 45 metros. ■

Problema 4 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do maior tipo de apartamento, sabendo que o menor tem 120 metros quadrados de área?

 **Solução.** Representemos a área do maior apartamento, que não conhecemos, por x . Como as áreas da maquete devem ser *proporcionais* às áreas dos apartamentos reais, temos a mesma *razão* entre as áreas na maquete, ou seja, $\frac{4}{3}$, e as áreas reais, isto é, $\frac{x}{120}$. Logo,

$$\frac{x}{120} = \frac{4}{3}$$

Multiplicando os dois lados da equação por 120, temos:

$$x = 120 \times \frac{4}{3} = 120 \times \frac{1}{3} \times 4 = 40 \times 4 = 160 \text{ metros quadrados,}$$

o que nos fornece a área do maior tipo de apartamento. ■

Uma variação interessante deste exercício é a seguinte:

Problema 5 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do menor tipo de apartamento, sabendo que a soma das áreas dos dois apartamentos, um de cada tipo, é igual a 210 metros quadrados?

 **Solução.** Esse é um exemplo de uma *divisão em partes proporcionais*. Observe que a área do menor apartamento é $\frac{3}{4}$ da área do maior. Assim, se dividíssemos a área total dos dois, que é igual a 210 metros quadrados, em *sete* partes iguais de 30 metros quadrados, o apartamento menor corresponderia a 3 dessas partes, isto é, a

$$3 \times 30 = 90 \text{ metros quadrados,}$$

enquanto que o apartamento maior corresponderia a 4 dessas partes, isto é, a

$$4 \times 30 = 120 \text{ metros quadrados.}$$

A solução alternativa que propomos agora é mais algébrica e, portanto, também importante para o estudo das *equações lineares*, que faremos mais adiante.

Solução alternativa. Seja x a área do menor apartamento. Então, a área do maior é dada por $210 - x$, já que a área total dos dois é 210 metros quadrados. Logo, a *razão* entre a área do maior apartamento e a área do menor apartamento é

$$\frac{210 - x}{x} = \frac{4}{3}$$

Multiplicando, agora, os dois lados por x , temos:

$$210 - x = \frac{4}{3}x$$

Assim, somando x aos dois lados da equação, obtemos:

$$210 = x + \frac{4}{3}x.$$

Portanto

$$210 = \frac{7}{3}x.$$

Dividindo os dois lados da equação por 7, obtemos:

$$30 = \frac{1}{3}x.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 3, concluímos que

$$x = 90 \text{ metros quadrados,}$$

a área do apartamento menor.

Problema 6 O custo para revestir o piso do apartamento de 90 metros quadrados com porcelanato é igual a R\$ 4.500,00. Nestas mesmas condições, qual é o custo para revestir o piso do apartamento de 120 metros quadrados?

 **Solução.** Como o custo para revestir 90 metros quadrados de piso é igual a R\$ 4.500,00, cada metro quadrado de porcelanato custa

$$\frac{4.500}{90} = 50 \text{ reais.}$$

Portanto, o revestimento de 120 metros quadrados com o mesmo material custa

$$120 \times 50 = 6.000 \text{ reais.}$$

Solução alternativa. Podemos resolver este problema do seguinte modo: se x simboliza o custo do revestimento do apartamento de 120 metros quadrados, temos a seguinte **proporção**:

$$\frac{x}{4.500} = \frac{120}{90},$$

o que significa que o custo **varia na mesma proporção** que a área a ser revestida, ou seja, o custo x **está para** R\$ 4.500 **assim como** a área 120 metros quadrados **está para** 90 metros quadrados.

Multiplicando os dois lados da equação por 4.500, obtemos:

$$x = 4.500 \times \frac{120}{90},$$

o que nos leva a concluir que

$$x = 50 \times 120 = 6.000 \text{ reais.}$$

Podemos representar esta solução com o seguinte diagrama:

90 metros quadrados	—————	R\$ 4.500
↓	: 90	↓
1 metro quadrado	—————	R\$ 50
↓	× 120	↓
120 metros quadrados	—————	R\$ 6.000

Problema 7 Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R\$ 1.500,00 por metro quadrado, divididos, aproximadamente, do seguinte modo: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são relevantes. A partir destas informações, calcule:

(a) o custo médio, por metro quadrado, com material;

- (b) o custo médio, por metro quadrado, com mão-de-obra;
 (c) a **razão**, em média, entre o custo com material e o custo com mão-de-obra.

Observação 2.7 Lembramos que porcentagens são frações com denominador igual a 100. Por exemplo 40% é apenas uma *maneira de escrever* a fração $\frac{40}{100}$, que tem numerador 40 e denominador 100. Da mesma forma, 60% é, de fato, uma maneira alternativa de representar a fração $\frac{60}{100}$. Observe que quando escrevemos “40% de 120” queremos dizer que

$$\frac{40}{100} \times 120 = \frac{40 \times 120}{100} = \frac{4800}{100} = 48.$$

Da mesma forma, “60% de 120” significa, apenas, a fração

$$\frac{60}{100} \times 120 = \frac{60 \times 120}{100} = 72.$$

 **Solução.** (a) e (b). O custo com material por metro quadrado representa 40% do total, ou seja,

$$\frac{40}{100} \times 1.500 = 40 \times 15 = 600 \text{ reais,}$$

ao passo que o custo com mão-de-obra por metro quadrado representa 60% do total, isto é,

$$\frac{60}{100} \times 1.500 = 60 \times 15 = 900 \text{ reais.}$$

(c). Logo, a **razão** entre o custo com material e o custo com mão-de-obra é igual a

$$\frac{600}{900} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

■

Problema 8 Estima-se que, em 2021, o custo médio para construção civil foi de R\$ 1.500,00 por metro quadrado. A previsão é que este custo aumente 5% em 2022. Com base nessas informações, responda:

- (a) qual a previsão de custo médio por metro quadrado em 2022?
 (b) quanto passará a custar a construção de uma casa com 300 metros quadrados?
 (c) qual o aumento previsto, em reais, de 2021 para 2022, do custo de construção de uma casa de 300 metros quadrados?

 **Solução.** (a) A expressão “aumento de 5%” significa que devemos adicionar 5% de R\$ 1.500,00 ao custo médio anterior, ou seja, a R\$ 1.500. Portanto, calculemos, inicialmente 5% de R\$ 1.500. Temos

$$5\% = \frac{5}{100}$$

e, portanto,

$$5\% \text{ de R\$ } 1.500 = \frac{5}{100} \times 1.500 = 5 \times 15 = 75 \text{ reais.}$$

Logo, o novo custo médio é de

$$1.500 + 5\% \text{ de } 1.500 = 1.500 + 75 = 1.575,$$

ou seja, R\$ 1.575,00.

(b) Com o custo médio por metro quadrado ajustado para R\$ 1.575,00, o custo da construção de uma casa de 300 metros quadrados passa a ser

$$300 \times 1.575 = 472.500 \text{ reais.}$$

(c) Note que o custo para construção dos mesmos 300 metros quadrados seria, antes do aumento de 5%, igual a

$$300 \times 1.500 = 450.000 \text{ reais.}$$

Portanto, o acréscimo no custo total para construção da casa é de

$$300 \times 1.575 - 300 \times 1.500 = 300 \times 75 = 22.500 \text{ reais.}$$

Esse aumento corresponde à seguinte fração do custo total, calculado antes do aumento:

$$\frac{22.500}{450.000} = \frac{22.500 : 45}{450.000 : 45} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%,$$

como seria intuitivo. ■

Problema 9 O custo total da construção de um imóvel tem a seguinte composição: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são consideradas relevantes. Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R\$ 1.500,00 por metro quadrado. A partir destas informações, responda:

- qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com material passassem dos atuais R\$ 600,00 para R\$ 540,00?
- qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com mão-de-obra passassem dos atuais R\$ 900,00 para R\$ 720,00?
- qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com material aumentassem 10%?
- qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com mão-de-obra aumentassem 10%?
- quais seriam os custos com material e mão-de-obra, por metro quadrado, caso o custo total por metro quadrado aumentasse 10%?

Solução. (a) No enunciado, afirma-se que os custos com material representam 40% dos custos totais. Então,

$$40\% \text{ do custo total} = \frac{40}{100} \text{ do custo total} = 540 \text{ reais.}$$

Portanto, dividindo cada um destes números por 4, deduzimos que

$$10\% \text{ do custo total} = \frac{10}{100} \text{ do custo total} = \frac{540}{4} = 135 \text{ reais.}$$

Logo, multiplicando cada um deste números por 10, concluímos que

$$100\% \text{ do custo total} = \frac{100}{100} \text{ do custo total} = 135 \times 10 = 1.350 \text{ reais.}$$

Portanto, o custo total do metro quadrado passa a ser de R\$ 1.350,00, caso o custo com material reduza de R\$ 600,00 para R\$ 540,00.

Podemos resumir esses cálculos no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{rcc} \frac{40}{100} \text{ do custo total} & \text{—————} & \text{R\$ 540,00} \\ \downarrow & \text{: 4} & \downarrow \\ \frac{10}{100} \text{ do custo total} & \text{—————} & \text{R\$ 135,00} \\ \downarrow & \text{\times 10} & \downarrow \\ \frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{—————} & \text{R\$ 1.350,00} \end{array}$$

Observe que, na prática, para passarmos da primeira linha para a última, dividimos por 4 e multiplicamos por 10, isto é, multiplicamos por

$$\frac{10}{4}.$$

De fato,

$$540 \times \frac{10}{4} = \frac{5.400}{4} = 1.350.$$

Observação 2.8 Note que os custos com material passam de R\$ 600,00 para R\$ 540,00, ou seja, *diminuem* R\$ 60,00. Observe que

$$\frac{60}{600} = \frac{60 : 6}{600 : 6} = \frac{10}{100} = 10\%,$$

ou seja, o custo com material diminui o equivalente a 10% do custo inicial.

(b) Da mesma forma que no item anterior, observamos que o enunciado afirma que os custos com mão-de-obra representam 60%, ou seja, $\frac{60}{100}$ dos custos totais da construção. Então,

$$\begin{array}{r} \frac{60}{100} \text{ do custo total} \text{---} \text{R\$ 720,00} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad : 6 \qquad \qquad \downarrow \\ \frac{10}{100} \text{ do custo total} \text{---} \text{R\$ 120,00} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \times 10 \qquad \qquad \downarrow \\ \frac{100}{100} \text{ do custo total} \text{---} \text{R\$ 1.200,00} \end{array}$$

Observe que, na prática, para passarmos da primeira linha para a última, dividimos por 6 e multiplicamos por 10, isto é, multiplicamos por

$$\frac{10}{6}.$$

De fato,

$$720 \times \frac{10}{6} = \frac{7.200}{6} = 1.200 \text{ reais,}$$

o novo custo médio por metro quadrado, nesse caso.

(c) e (d) Caso os custos com material aumentassem em $10\% = \frac{10}{100}$, passariam de R\$ 600,00 para

$$600 + \frac{10}{100} \times 600 = 600 + 60 = 660 \text{ reais.}$$

Caso o custo com mão-de-obra permanecesse o mesmo, o custo total por metro quadrado passaria a ser igual a

$$660 + 900 = 1.560 \text{ reais.}$$

Por sua vez, se o custo com mão-de-obra aumentasse em $10\% = \frac{10}{100}$, passaria de R\$ 900,00 para

$$900 + \frac{10}{100} \times 900 = 900 + 90 = 990 \text{ reais.}$$

Com isto, supondo, desta vez, que o custo com material continuasse o mesmo, o custo por metro quadrado passaria a ser, em média,

$$600 + 990 = 1.590 \text{ reais.}$$

(e) Por fim, o aumento de 10% é, agora, aplicado sobre o custo total por metro quadrado. Então, temos:

$$1.500 + \frac{10}{100} \times 1.500 = 1.500 + 150 = 1.650 \text{ reais.}$$

Nesse caso, os novos custos médios de material e de mão-de-obra por metro quadrado seriam, respectivamente,

$$40\% \times 1.650 = \frac{40}{100} \times 1.650 = 660 \text{ reais}$$

e

$$60\% \times 1.650 = \frac{60}{100} \times 1.650 = 990 \text{ reais.}$$

Observação 2.9 Observe que, nos itens (c), (d) e (e) deste exercício, nos referimos sempre a aumento de 10%, mas sobre coisas diferentes: em (c), sobre os custos com material; em (d), sobre os custos com mão-de-obra; em (e), o aumento foi relativo aos custos totais. Por esta razão, obtivemos valores finais diferentes para os novos custos totais. No primeiro caso, temos 10% de aumento sobre algo que representa 40% do custo total, isto é,

$$\frac{10}{100} \times \frac{40}{100} \times 1.500 = 60 \text{ reais.}$$

No item 4, o aumento de 10% é sobre mão-de-obra, que representa 60% do custo total, ou seja,

$$\frac{10}{100} \times \frac{60}{100} \times 1.500 = 90 \text{ reais.}$$

Por fim, no item 5, o aumento de 10% incide diretamente sobre os 100% do custo total. Portanto,

$$\frac{10}{100} \times 1.500 = 150 \text{ reais.}$$

Problema 10 O custo total da construção de um imóvel tem a seguinte composição: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são consideradas relevantes. Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R\$ 1.500,00 por metro quadrado. A partir destas informações, responda:

- qual seria o custo médio por metro quadrado, caso os custos com mão-de-obra representassem 50% do custo total, mantidos os custos com material?
- Qual seria o custo médio por metro quadrado, caso os engenheiros conseguissem diminuir os custos com material para 25% do custo total, mantidos os custos com mão-de-obra?

 **Solução.** (a) Já vimos que os custos com material por metro quadrado totalizam R\$ 600,00. Se estes custos passarem a representar

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \text{ do custo total,}$$

então, o custo total passa a ser

$$2 \times 600 = 1.200 \text{ reais,}$$

ou seja, R\$ 1.200,00.

(b) A redução é feita nos custos com material, mas ainda são mantidos os mesmos R\$ 900,00 de custos com mão-de-obra, por metro quadrado. Esse valor representa, agora, com as mudanças feitas pelos engenheiros, $100\% - 25\% = 75\%$ do custo médio por metro quadrado. Assim,

$$\begin{array}{rcl} \frac{75}{100} \text{ do custo total} & \text{---} & \text{R\$ 900,00} \\ \downarrow & \text{: 75} & \downarrow \\ \frac{1}{100} \text{ do custo total} & \text{---} & \text{R\$ 12,00} \\ \downarrow & \text{\times 100} & \downarrow \\ \frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{---} & \text{R\$ 1.200,00} \end{array}$$

Portanto, o custo médio por metro quadrado passaria a ser de R\$ 1.200,00.

Observação 2.10 Reunindo os cálculos que fizemos no item (b), temos

$$\frac{900 \times 100}{75},$$

fração igual a

$$12 \times 100 = 1.200 \text{ reais.}$$

Esta solução pode ser representada no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 75\% \text{ do custo total} & \text{————} & 900 \text{ reais} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{————} & x \text{ reais} \end{array}$$

onde

$$\frac{x}{900} = \frac{100}{75},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 900,

$$x = \frac{900 \times 100}{75} = 1.200 \text{ reais.}$$

■

Problema 11 Na construção de um condomínio de casas, os engenheiros responsáveis conseguiram modernizar as técnicas de construção, o que permite dispensar 10% da mão-de-obra, mantendo o mesmo cronograma e qualidade da empreita. Com isso, a construção passou a ter 450 empregados. Quantos empregados havia antes da dispensa de mão-de-obra?

 **Solução.** Esses 450 empregados representam, de acordo com o enunciado

$$100\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100}$$

do total de empregados que havia antes da dispensa de mão-de-obra. Logo, podemos arranjar estes dados no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 90\% \text{ do custo total} & \text{————} & 450 \text{ empregados} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{————} & x \text{ empregados} \end{array}$$

onde x é o número de empregados antes da dispensa de mão-de-obra. Portanto,

$$\frac{x}{450} = \frac{100}{90},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 100,

$$x = \frac{450 \times 100}{90} = 5 \times 100 = 500 \text{ empregados.}$$

■

Problema 12 (EsSA – 1988) Doze pedreiros fizeram 5 barracões em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia. O número de horas por dia que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazer 10 barracões em 20 dias é:

- A) 8.
- B) 9.
- C) 10.
- D) 12.
- E) 15.

 **Solução.** Observamos, inicialmente, que os doze pedreiros trabalham

$$30 \times 6 = 180 \text{ horas,}$$

ou seja, 6 horas por dia, durante 30 dias, para construir 5 barracões. Portanto, para construir um barracão apenas, os mesmos doze pedreiros trabalhariam cinco vezes menos, ou seja,

$$\frac{180}{5} = 36 \text{ horas}$$

apenas. Logo, um pedreiro sozinho teria que trabalhar doze vezes mais, isto é,

$$12 \times 36 = 432 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Obviamente, dezoito pedreiros gastariam um tempo 18 vezes menor que um pedreiro, ou seja,

$$\frac{1}{18} \times 432 = \frac{12 \times 36}{18} = \frac{2}{3} \times 36 = 24 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Logo, os dezoito pedreiros utilizariam

$$10 \times 24 = 240 \text{ horas}$$

para construir 10 barracões. Esse é o total de horas trabalhadas pelos 18 pedreiros em 20 dias. Portanto, a equipe de 18 pedreiros trabalharia

$$\frac{240}{20} = 12 \text{ horas}$$

por dia, trabalhando durante 20 dias.

Observação 2.11 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos:

$$\frac{30 \times 6 \times 12 \times 10}{5 \times 18 \times 20},$$

fração igual a

$$\frac{10 \times 12 \times 10}{5 \times 20} = 12 \text{ horas.}$$

Essa solução pode ser representada no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 12 \text{ pedreiros} & \text{---} & 5 \text{ barracões} & \text{---} & 30 \text{ dias} & \text{---} & 6 \text{ horas} \\ & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \downarrow \\ 18 \text{ pedreiros} & \text{---} & 10 \text{ barracões} & \text{---} & 20 \text{ dias} & \text{---} & x \text{ horas} \end{array}$$

onde

$$\frac{x}{6} = \frac{30 \times 10 \times 12}{20 \times 5 \times 18}$$

Logo,

$$x = 12 \text{ horas,}$$

como já havíamos calculado. Desse modo, obtemos a resposta da questão, a alternativa D). ■

Problema 13 (Colégio Militar de Brasília – 2008) Uma montadora recebeu uma encomenda de 40 carros. Para entregá-los, a montadora trabalhou 5 dias, utilizando 6 robôs, de mesmo rendimento, que trabalham 8 horas por dia cada um. Uma outra encomenda foi feita, dessa vez para montar 60 carros. Contudo, um dos robôs apresentou um defeito e não pôde ser usado no trabalho. Para atender o cliente, a montadora precisou, então, trabalhar 12 horas por dia, por alguns dias. O número de dias que a fábrica trabalhou para entregar o segundo pedido foi igual a:

- A) 5.
- B) 6.
- C) 11.
- D) 12.
- E) 13.

 **Solução.** De acordo com o enunciado, são usados 6 robôs para montar 40 carros em um total de

$$5 \times 8 = 40 \text{ horas.}$$

Portanto, os seis robôs montam 40 carros em 40 horas, ou seja, montam

$$\frac{40}{40} = 1 \text{ carro por hora.}$$

Assim, gastariam

$$60 \times 1 = 60 \text{ horas}$$

para montar 60 carros. Sendo assim, um robô, apenas, consumiria **seis vezes mais tempo** para montar os 60 carros, isto é, consumiria

$$6 \times 60 = 360 \text{ horas}$$

para montar os 60 carros. Logo, cinco robôs levariam **cinco vezes menos tempo** para montar esses 60 carros, quer dizer,

$$\frac{360}{5} = 72 \text{ horas.}$$

Utilizando os robôs 12 horas por dia, seriam necessários

$$\frac{72}{12} = 6 \text{ dias.}$$

Concluimos que seriam necessários 6 dias para que 5 robôs, funcionando 12 horas por dia, montassem 60 carros.

Observação 2.12 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos:

$$\frac{5 \times 8 \times 60 \times 6}{40 \times 5 \times 12},$$

fração igual a

$$\frac{60 \times 6}{5 \times 12} = 6 \text{ dias.}$$

Montamos o seguinte diagrama a partir dos dados no enunciado:

$$\begin{array}{ccccccc} 6 \text{ robôs} & \text{---} & 40 \text{ carros} & \text{---} & 8 \text{ horas} & \text{---} & 5 \text{ dias} \\ & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \downarrow \\ 5 \text{ robôs} & \text{---} & 60 \text{ carros} & \text{---} & 12 \text{ horas} & \text{---} & x \text{ dias} \end{array}$$

onde

$$\frac{x}{5} = \frac{8 \times 60 \times 6}{12 \times 40 \times 5}.$$

Portanto,

$$x = \frac{5 \times 8 \times 60 \times 6}{12 \times 40 \times 5} = \frac{60 \times 6}{12 \times 5} = 6.$$

Assim, concluímos que

$$x = 6 \text{ dias,}$$

como já havíamos calculado. Somados aos 5 dias anteriores, temos 11 dias. Assim, obtém-se a resposta da questão, a saber, a alternativa C). ■

Solução alternativa. Neste problema, a quantidade de carros montada (que indicaremos pela letra Q) depende de três *variáveis*: o número n de robôs em funcionamento, a quantidade de dias d em que estes robôs operam e o total t de horas por dia em que funcionam.

Portanto, Q aumenta *na mesma proporção* em que aumentam n , d ou t . Por exemplo, se tivermos mais robôs operando, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável n , aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (d e t) forem mantidas constantes.

Da mesma forma, se tivermos mais dias de funcionamento dos robôs, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável d , aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (n e t) forem mantidas constantes.

Podemos escrever tudo isto de forma mais abreviada, dizendo que existe um número a fixo tal que

$$Q = a \times n \times d \times t,$$

ou seja, de modo que a **razão**

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = a$$

é sempre constante e igual ao número a .

Voltando à resolução do problema, observamos que, na primeira encomenda, tivemos

$$Q = 40 \text{ carros}$$

com os seguintes valores das variáveis n , d e t :

$$n = 6 \text{ robôs}$$

$$d = 5 \text{ dias}$$

$$t = 8 \text{ horas.}$$

Assim, na primeira encomenda, tivemos

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = \frac{40}{6 \times 5 \times 8}.$$

Sobre a segunda encomenda, sabemos que

$$Q = 60 \text{ carros}$$

e que

$$n = 5 \text{ robôs}$$

$$t = 12 \text{ horas.}$$

No entanto, devemos calcular o valor correspondente da variável d (o número de dias), o qual não foi informado desta vez. Para isso, usamos o fato de que a **razão** nas duas encomendas foi a mesma, ou seja, que a razão (ou fração)

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

não muda, embora os valores das variáveis mudem! Assim, igualando estas razões nas duas encomendas, temos:

$$\frac{40}{6 \times 5 \times 8} = \frac{60}{5 \times d \times 12}.$$

Logo, simplificando o lado direito da igualdade, temos

$$\frac{40}{6 \times 5 \times 8} = \frac{1}{d},$$

ou seja,

$$d = \frac{6 \times 5 \times 8}{40} = 6 \text{ dias.}$$

Problema 14 Com a tecnologia atual, 15 profissionais executam 810 metros quadrados de construção em seis dias, em uma jornada diária de 9 horas de trabalho. Nestas mesmas condições, calcule:

- quantos profissionais seriam necessários para construir 3.240 metros quadrados em seis jornadas diárias de 9 horas;
- quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em duas jornadas diárias de 9 horas;
- quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em seis jornadas diárias de 3 horas;
- quantos profissionais seriam necessários para construir 3.600 metros quadrados em quatro jornadas diárias de 6 horas;

(e) quantos metros quadrados podem ser construídos com o trabalho de 50 profissionais em quatro jornadas diárias de 6 horas.

 **Solução.** Segundo o enunciado, 15 trabalhadores constroem 810 metros quadrados em seis dias, trabalhando 9 horas por dia. É natural *supor* que a quantidade Q de metros construídos dependa *proporcionalmente* das variáveis

$$\begin{aligned}n &= \text{número de profissionais,} \\d &= \text{número de dias de trabalho,} \\t &= \text{número de horas por dia ou jornada.}\end{aligned}$$

Isso significa que, fixadas duas destas variáveis, a quantidade Q aumenta (respectivamente, diminui) **à mesma proporção** em que a variável restante aumenta (respectivamente, diminui). Em termos matemáticos, existe um número fixo a , a **razão** entre essas variáveis, tal que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = a.$$

Com os dados do enunciado, sabemos que

$$Q = 810 \text{ metros quadrados}$$

se

$$\begin{aligned}n &= 15 \text{ profissionais,} \\d &= 6 \text{ dias de trabalho,} \\t &= 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.}\end{aligned}$$

Portanto,

$$a = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Calculada esta razão, podemos determinar os valores das variáveis em cada uma das situações nos itens do problema.

(a) Nesta primeira situação, são informados os valores das seguintes variáveis

$$Q = 3.240 \text{ metros quadrados,}$$

se

$$\begin{aligned}d &= 6 \text{ dias de trabalho,} \\t &= 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.}\end{aligned}$$

O problema é determinar n , o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos o total d de dias e o número t de horas por dia, serão necessários **4 vezes mais** profissionais, já que a quantidade Q de metros quadrados é também **4 vezes maior**, isto é,

$$3.240 = 4 \times 810.$$

Portanto, serão necessários

$$4 \times 15 = 60 \text{ profissionais}$$

para essa nova quantidade de metros quadrados.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos:

$$\frac{3.240}{n \times 6 \times 9} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}.$$

Note que os valores $d = 9$ e $t = 6$ foram mantidos. Multiplicando os dois lados da igualdade por esses valores comuns, temos:

$$\frac{3.240}{n} = \frac{810}{15}.$$

Portanto, multiplicando os dois lados por n e por 15 e dividindo o resultado por 810, obtemos:

$$n = \frac{3.240}{810} \times 15 = 4 \times 15 = 60.$$

(b) Nesta segunda situação, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e } t = 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.}$$

No entanto, passamos a ter

$$d = 2 \text{ dias de trabalho.}$$

O problema é, uma vez mais, determinar n , o novo número de profissionais para essa situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos os valores Q e t e o novo número de dias corresponde a $\frac{1}{3}$ do anterior, isto é,

$$2 \text{ jornadas diárias} = \frac{1}{3} \times 6 \text{ jornadas diárias,}$$

serão necessários **3 vezes mais** profissionais, ou seja,

$$3 \times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para essa nova (e menor) quantidade de jornadas diárias.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos:

$$\frac{810}{n \times 2 \times 9} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}.$$

Note que os valores $Q = 810$ e $t = 9$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos:

$$\frac{1}{n \times 2} = \frac{1}{15 \times 6},$$

Concluimos que

$$2n = 15 \times 6,$$

ou seja,

$$n = 15 \times 3 = 45 \text{ profissionais,}$$

como já havíamos calculado.

(c) Desta vez, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e } d = 6 \text{ jornadas diárias.}$$

No entanto, passamos a ter

$$t = 3 \text{ dias de trabalho,}$$

ou seja, $\frac{1}{3}$ ou **3 vezes menos** horas por jornada. Como os valores das demais variáveis foram mantidos, podemos deduzir que serão necessários **3 vezes mais** profissionais, ou seja

$$3 \times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para essa nova (e menor) quantidade de horas por jornada diária.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos:

$$\frac{810}{n \times 6 \times 3} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}.$$

Note que os valores $Q = 810$ e $d = 6$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n \times 3} = \frac{1}{15 \times 9}.$$

Concluimos que

$$3n = 15 \times 9,$$

ou seja,

$$n = 15 \times 3 = 45 \text{ profissionais,}$$

como já havíamos calculado.

(d) Nesta situação, são alterados os valores das variáveis Q , d e t . Temos:

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	3.600	n	4	6

Assim, igualando as razões

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

nas duas situações, obtemos

$$\frac{3.600}{n \times 4 \times 6} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Deste modo, deduzimos que

$$\frac{1}{n} = 1 \times \frac{4 \times 6}{3.600}$$

ou

$$n = \frac{3.600}{4 \times 6} = \frac{900}{6} = 150 \text{ profissionais.}$$

(e) Por fim, neste último caso, são alterados os valores das variáveis n , d e t . Temos:

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	Q	50	4	6

Já vimos que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = 1$$

em *qualquer* cenário. Logo,

$$Q = 6 \times n \times d \times t.$$

Portanto, na nova situação exposta no enunciado, calculamos

$$Q = 6 \times 50 \times 4 \times 6 = 6 \times 6 \times 2 \times 100 = 7.200 \text{ metros quadrados.}$$

■

2.3 – Velocidades, razões e proporções

As linhas vermelhas no mapa abaixo indicam os trajetos de ônibus urbanos que ligam o centro de Fortaleza ao terminal rodoviário do Papicu. Um desses ônibus segue pela Avenida Santos Dumont, passando pelo cruzamento com a Avenida Dom Manuel às 6:00 da manhã e pelo cruzamento com a Avenida Virgílio Távora às 6:15. A distância percorrida total é igual a cerca de 3 quilômetros. Observe que o tempo decorrido neste percurso é igual a 15 minutos, ou seja,

$$\frac{1}{4} \text{ de hora.}$$

Portanto, a velocidade média do ônibus é igual a

$$v = \frac{3 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{4} \text{ hora}} = \frac{3 \times 4 \text{ quilômetros}}{1 \text{ hora}} = 12 \frac{\text{quilômetros}}{\text{hora}}.$$

Uma vez que

$$\frac{6}{30} = \frac{6:10}{30:10} = \frac{0,6}{3},$$

concluimos que o tempo esperado para que o ônibus realize esse segundo percurso é igual a 3 minutos.

Com essas estimativas, podemos montar a seguinte tabela de horários **aproximados** para essa linha de ônibus em seu trajeto ao longo da Avenida Santos Dumont:

Parada	Horário previsto
Dom Manuel	6:00
Ponto A	6:02
Ponto B	6:11
Ponto C	6:14
Virgílio Távora	6:15

Observação 2.13 Em resumo, se denotarmos por s a distância percorrida desde a posição inicial, no cruzamento com a Avenida Dom Manuel, e por t o intervalo de tempo decorrido desde o instante inicial 6 horas da manhã, a velocidade média do ônibus neste trajeto é igual a

$$\frac{s}{t} = v.$$

Portanto, multiplicando os dois lados desta equação por t , temos

$$s = vt.$$

No exemplo acima, vimos que

$$v = 12 \text{ quilômetros por hora.}$$

Problema 15 Estime o tempo necessário para que o ônibus, com $\frac{3}{4}$ da velocidade média que calculamos antes, percorra o trecho entre os pontos A e C do mapa na figura.



2.4 – Razões e proporções: aplicações

Os problemas nesta seção demonstram como razões e proporções aparecem nas mais variadas aplicações, tanto na vida cotidiana quanto nas Ciências que estudamos na escola e que são importantes para compreendermos o mundo e desenvolvermos a sociedade.

Problema 16 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um estacionamento cobrava R\$ 18,00 por três horas de utilização e agora passou a cobrar R\$ 18,00 por duas horas. O percentual de aumento do preço cobrado pelo estacionamento, em relação ao preço inicial, foi:

- 0%.
- 1%.
- 3%.
- 18%.
- 50%.

Solução. Houve um aumento do preço **por hora** do estacionamento: antes, o preço **por hora** era igual a

$$\frac{18 \text{ reais}}{3 \text{ horas}} = 6 \text{ reais por hora,}$$

ao passo que, agora, o preço por hora foi ajustado para

$$\frac{18 \text{ reais}}{2 \text{ horas}} = 9 \text{ reais por hora.}$$

Portanto, o aumento absoluto do preço por hora foi igual a

$$9 - 6 = 3 \text{ reais por hora.}$$

Logo, o **aumento relativo** ao preço que era cobrado é igual a

$$\frac{9 - 6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o aumento relativo em termos de porcentagem é dado por

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%.$$

Problema 17 Em 2019, a inflação acumulada de preços para famílias de baixa renda (i.e, as que têm renda de até R\$ 1.643,78 por mês) foi de 4,43%. Para estas famílias, 70% da inflação se deve às altas dos preços de alimentos e habitação. Uma família que gastava R\$ 840,00 com esses dois itens, no início de 2019, teve que gastar quanto a mais no fim do ano, para continuar atendendo suas necessidades no mesmo nível de antes?

Fontes: IPEA, IBGE e Agência Brasil

Solução. Inflação, neste caso, significa alta de preços ao consumidor: para calculá-la, comparamos os preços de vários itens no fim e no começo de um certo período (um ano, neste caso) e calculamos a *variação percentual*:

$$\frac{\text{preços finais} - \text{preços iniciais}}{\text{preços iniciais}}.$$

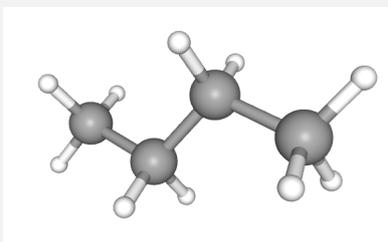
A inflação específica com alimentos e habitação foi, no ano de 2019, segundo os dados, igual a

$$70\% \text{ de } 4,43\% = \frac{70}{100} \times 4,43\% = 3,101\% \cong 3,1\%$$

Portanto, despesas com alimentos e habitação, que totalizavam R\$ 840,00 no início do ano, passaram a ser, corrigidas por esta inflação, iguais a

$$840 + \frac{3,1}{100} \times 840 \cong 840 + 26,05 = 866,05 \text{ reais.}$$

Problema 18 O gás butano é o composto orgânico usado como gás de cozinha. Sua fórmula química é C_4H_{10} , o que significa que uma molécula deste gás é composta por 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio.



Disponível em <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/Butane>

Uma das mais belas leis da Química afirma que a massa (em gramas) de um mol de átomos de um elemento químico é *numericamente* igual à massa atômica desse elemento, isto é, ao número de prótons e nêutrons deste átomo, aproximadamente. Sabendo que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio, determine a massa, em gramas, do carbono presente em 1.740 gramas de gás butano.

Lembrete: *um mol de uma substância química é igual a, aproximadamente, 6×10^{23} moléculas desta*

substância.

 **Solução.** Em cada molécula de gás butano há um total de 14 átomos: 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio. Portanto, em um mol de moléculas de gás butano, há 4 moles de átomos de carbono e 10 moles de átomos de hidrogênio. Logo, se a massa de um mol de átomos de hidrogênio é igual a x gramas, então, a massa total de um mol de moléculas de gás butano é

$$4 \times 12x + 10x = 58x.$$

(O fator 12, no cálculo acima, vem de que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio.) Portanto, a massa de carbono presente em um mol de moléculas de gás butano corresponde a

$$\frac{48}{58}$$

da massa deste mol (uma razão fixa). Assim, em 1.740 gramas de gás butano, temos

$$\frac{48}{58} \times 1.740 = 48 \times 30 = 1440 \text{ gramas}$$

de carbono. ■

Problema 19 (Canguru 2014 - Nível J, Questão 9) Numa cidade, a razão entre os números de homens adultos e de mulheres adultas é 2 : 3 e a razão entre os números de mulheres adultas e de crianças é 8 : 1. Qual é a razão entre os números de adultos (homens e mulheres) e de crianças?

- A) 5 : 1.
- B) 10 : 3.
- C) 13 : 1.
- D) 12 : 1.
- E) 40 : 3.

 **Solução.** De acordo com o enunciado, para cada criança na cidade há 8 mulheres adultas. Assim, para cada 3 crianças, há 3×8 mulheres adultas. Como para cada 3 mulheres adultas, há 2 homens adultos, segue que para 3×8 mulheres adultas, há 2×8 homens adultos.

Concluimos que, para cada 3 crianças na cidade, há $3 \times 8 = 24$ mulheres adultas e $2 \times 8 = 16$ homens adultos. Ou seja, para cada 3 crianças, há $24 + 16 = 40$ adultos (homens e mulheres). Assim, a razão entre adultos e crianças é $\frac{40}{3}$, ou seja,

$$40 : 3,$$

o que corresponde à alternativa E). ■

Problema 20 Os trens de alta velocidade que ligam Paris e Londres atravessam um túnel submarino de cerca de 50 quilômetros sob o Canal da Mancha, que separa a França da Inglaterra, a uma velocidade média de 160 quilômetros por hora. Sabendo que a distância de aproximadamente 500 quilômetros entre Paris e Londres é percorrida por esses trens a uma velocidade média de 200 quilômetros por hora, em quanto tempo é percorrido o trecho em terra, ou seja, fora do Canal?

 **Solução.** Observe que o tempo t gasto no trajeto total pode ser calculado da seguinte forma:

$$\frac{500}{t} = 200.$$

Portanto,

$$\frac{500}{200} = t,$$

ou seja,

$$t = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ horas.}$$

Como 0,5 de uma hora são $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ minutos, concluímos que o tempo total do percurso é, em média, 2 horas e 30 minutos. O trecho do túnel é percorrido em

$$\frac{50}{160} = \frac{5}{16} = 0,3125 \cong 0,3 \text{ hora,}$$

ou seja, 3 *décimos* de hora, que equivalem a 18 minutos. Assim, o trecho do percurso fora do túnel leva cerca de 2 horas e 12 minutos. ■

Problema 21 Uma estrela de nêutrons tem, tipicamente, 1,4 vezes a massa do Sol e um raio de cerca de 20 quilômetros, apenas. Sabendo que o Sol tem um raio de quase 700.000 quilômetros, calcule quantas vezes uma estrela de nêutrons é **mais densa** que o Sol.

 **Solução.** Observe que o raio (aproximado) do Sol (em quilômetros) pode ser escrito em *notação científica* como

$$7 \times 10^5.$$

Se m denota a massa do Sol, então sua densidade é *proporcional* a

$$\frac{m}{7^3 \times 10^{15}} \text{ quilogramas por quilômetro}$$

De fato, *densidade* é definida como a **razão**

$$\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

e o volume do Sol (e da estrela de nêutrons) é *proporcional* ao **cubo** de seus respectivos raios.

Logo, a densidade da estrela de nêutrons, que tem massa igual a 1,4 vezes a massa do Sol, é proporcional a

$$\frac{1,4m}{20^3} = \frac{7m}{4 \times 10^4} \text{ quilogramas por quilômetro.}$$

Portanto, a comparação das densidades da estrela de nêutrons e da densidade do Sol resulta em

$$\frac{\frac{7m}{4 \times 10^4}}{\frac{m}{7^3 \times 10^{15}}} = \frac{7m}{m} \times \frac{7^3 \times 10^{15}}{4 \times 10^4} = 7^4 \times 25 \times 10^9 = 60.025 \times 10^9 \cong 6 \times 10^{13}.$$

Portanto, uma estrela de nêutrons é cerca de 10^{13} vezes mais densa que o Sol. Essa é a *ordem de grandeza* da comparação entre essas densidades. ■

Observação 2.14 Por sua vez, a densidade do Sol é cerca de 1,4 gramas por centímetro cúbico, enquanto a densidade da água é de cerca de 1 grama por centímetro cúbico (a depender, sempre, de condições como a temperatura e pressão). Assim, a densidade de uma estrela de nêutrons é, tipicamente,

$$6 \times 10^{13} \times 1,4 = 8,4 \times 10^{13} \cong 8 \times 10^{13}$$

vezes a densidade da água. Portanto, em um centímetro cúbico de uma estrela de nêutrons há tanta massa quanto na quantidade de água de 4 Castanhões cheios. Se ficou curioso sobre o assunto, veja:

<https://www.youtube.com/watch?v=FRftmkRBUxQ>

Esse exercício explora a noção de ordens de grandeza. Em particular, vimos algumas das impressionantes *diferenças de escala* que existem no Universo e na Natureza. Para entender visualmente as escalas com as quais a Ciência trabalha, veja, por exemplo,

<https://www.youtube.com/watch?v=8Are9dDbW24>

Para entender melhor como razões e proporções são fundamentais para estimar distâncias astronômicas, assista à

<https://www.youtube.com/watch?v=CWMh61yutjU>

e a outros vídeos do mesmo tipo.

Problema 22 Segundo o Banco Central do Brasil, a *taxa de câmbio* entre o dólar americano e o real, no dia 13 de março de 2020, foi, aproximadamente,

$$1 \text{ dólar americano} = 4,88 \text{ reais.}$$

Fixada essa taxa, quantos dólares americanos equivaleriam a R\$ 1.220,00?

 **Solução.** A taxa de câmbio nada mais é do que a *razão*

$$\frac{1 \text{ dólar americano}}{4,88 \text{ reais}}.$$

Portanto, o número x de dólares que podem ser comprados com R\$ 1.220,00 é dada pela seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{x \text{ dólares americanos}}{1.220 \text{ reais}} = \frac{1 \text{ dólar americano}}{4,88 \text{ reais}},$$

ou seja,

$$x = 1.220 \times \frac{1}{4,88} = 250 \text{ dólares americanos.}$$

■

2.5 – Razões e proporções: variáveis diretamente proporcionais



Na seção anterior, vimos exemplos de variáveis que dependem proporcionalmente uma da outra, ou seja, de *variáveis diretamente proporcionais*. Isto significa que a *razão* entre estas variáveis é *sempre a mesma*:

$$\frac{y}{x} = \text{constante},$$

ou seja, dividindo-se os valores da variável y pelos valores *correspondentes* da variável x , encontramos sempre uma constante, a *razão* entre estas variáveis. Escrevemos

$$\frac{y}{x} = a$$

ou

$$y = ax.$$

Supomos, sempre, que a razão a é um número diferente de zero.

Em outras palavras, as variáveis x e y são diretamente proporcionais quando, aumentando (respectivamente, diminuindo) o valor da variável x , o valor da variável y aumenta (respectivamente, diminui) *na mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela:

Valores de x	3	4	5	6	10	35
Valores de y	9	12	15	18	30	105

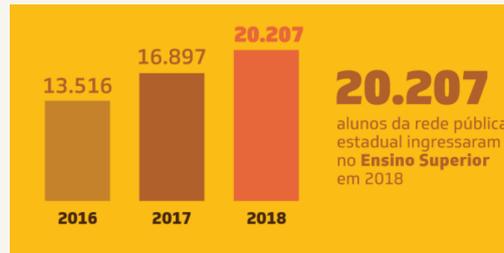
Observemos que, dividindo os valores de y pelos valores correspondentes de x , sempre obtemos o mesmo resultado:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{30}{10} = \frac{105}{35} = 3.$$

Portanto, a *razão* entre as variáveis y e x é constante e igual a **3**. Como essa razão é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 40$ é $y = 3 \times 40 = 120$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 135$ é $x = \frac{1}{3} \times 135 = 45$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos de problemas envolvendo variáveis que são diretamente proporcionais.

Exercício 2.5 Nos últimos anos, tem crescido o número de alunos da escola pública estadual no ensino superior. Veja o quadro abaixo, com dados dos anos de 2016 a 2018:



Percebemos que o número de alunos aumenta cerca de 3.300 a cada ano. Se esta tendência persistir, quantos alunos da rede pública estadual se espera que entrem no ensino superior em 2022?

Solução. Supondo que a tendência seja mantida, isto é, que a cada ano ingressem *mais* 3.300 alunos da rede pública no ensino superior, o número *a mais* de ingressos (y) dependeria linearmente do número de anos desde 2016 (x) da seguinte forma

$$y = 3.300x.$$

Dada essa tendência, em 2022, ou seja, quando $x = 2022 - 2016 = 6$, deveremos ter

$$y = 3.300 \times 6 = 19.800$$

alunos *a mais* do que em 2016. Portanto, o número total deve ser, em 2022, cerca de

$$13.516 + 19.800 = 33.316$$

alunos da rede pública estadual nas universidades. ■

Problema 23 Dois amigos, professores de Matemática, foram almoçar em um restaurante *self-service*. Um deles serviu-se de 360 gramas e pagou R\$ 14,40, enquanto o outro pagou R\$ 16,80 por 420 gramas de comida. Qual o valor de um quilograma de comida neste restaurante?

Solução. O valor pago depende proporcionalmente, ou linearmente, do peso. A razão entre o valor pago e o peso é dada por

$$\frac{14,40}{360} = \frac{16,80}{420} = 0,04,$$

ou seja, 4 centavos de real por grama de comida. Assim, o preço de uma quilograma de comida é $0,04 \times 1.000 = 40$ reais. De modo geral, se x representa o peso da comida em gramas e y o valor a ser pago, temos

$$y = 0,04x.$$

2.5.1 – Variáveis Inversamente proporcionais

Veremos, agora, situações em que duas variáveis são **inversamente proporcionais**. Isso significa apenas que o **produto** (e não a **razão**) destas variáveis permanece constante. Ou seja, multiplicando o valor de uma dessas variáveis (digamos, a variável x) pelo valor correspondente da outra (a variável y , digamos), obtém-se sempre a **mesma constante**, isto é,

$$yx = \text{constante}$$

De outra forma, existe um número real não nulo k tal que

$$yx = k$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{1} = k.$$

Assim, as variáveis x e y são inversamente proporcionais quando, aumentando (respectivamente, diminuindo) o valor da variável x , o valor de variável y diminui (respectivamente, aumenta) na *mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela:

Valores de x	4	5	6	10	12	24
Valores de y	30	24	20	12	10	5

Observemos que, multiplicando os valores de y pelos valores correspondentes de x , obtemos sempre o mesmo resultado:

$$4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 10 \times 12 = 12 \times 10 = 24 \times 5 = 120.$$

Portanto, o **produto** das variáveis x e y é constante e igual a **120**. Como esse produto é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 30$ é $y = 120 \times \frac{1}{30} = 4$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 6$ é $x = 120 \times \frac{1}{6} = 20$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos e problemas envolvendo variáveis que são inversamente proporcionais.

Problema 24 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um pai resolve premiar seus dois filhos com R\$ 140,00. Este valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais ao número de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2 e 5. Então, a quantia a ser recebida pelo filho com menos faltas é:

- A) R\$ 7,00.
- B) R\$ 20,00.
- C) R\$ 40,00.
- D) R\$ 100,00.

 **Solução.** Pelo enunciado, essas partes são inversamente proporcionais a 2 e 5. Portanto, são *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{5}$. Logo, a soma destas partes, ou seja, os 140 reais, são *diretamente* proporcionais à soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

Logo, a primeira parte está para o todo, isto é, para 140 reais, como $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Portanto, é igual a

$$140 \times \frac{\frac{5}{10}}{\frac{7}{10}} = 140 \times \frac{5}{7} = 20 \times 5 = 100 \text{ reais.}$$

Da mesma forma, a segunda parte está para 140 reais como $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Logo, é dada por

$$140 \times \frac{\frac{2}{10}}{\frac{7}{10}} = 140 \times \frac{2}{7} = 20 \times 2 = 40 \text{ reais.}$$

■

Solução alternativa. Sejam a e b as partes dadas pelo pai aos filhos. Sendo assim, temos

$$a + b = 140 \tag{2.1}$$

e

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{5},$$

ou seja

$$2a = 5b. \tag{2.2}$$

Note que, multiplicando os dois lados de (2.1) por 2, obtém-se

$$2a + 2b = 280.$$

Agora, levando em conta a igualdade em (2.2), deduz-se que

$$5b + 2b = 280,$$

logo,

$$7b = 280.$$

Assim, a parte menor (que cabe ao filho que faltou mais) é igual a $b = 40$ reais. Por conseguinte, a parte maior (que cabe ao filho que faltou menos) é dada por $a = 100$ reais. A alternativa correta é D).

De modo geral, dividir um número, digamos, 140, em partes *inversamente* proporcionais a dois números (positivos) m e n significa dividi-lo em partes *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$. A soma destas partes é, portanto, diretamente proporcional a

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}.$$

Portanto, as partes são diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{1}{m}}{\frac{m+n}{mn}} = \frac{n}{m+n} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{m+n}{mn}} = \frac{m}{m+n},$$

nesta ordem.

Problema 25 (Canguru 2014, Nível J, Questão 10) O perímetro da roda maior de uma bicicleta é 4,2 metros e o perímetro da menor é 0,9 metro. Num certo momento, as duas válvulas dos pneus estão em seu ponto mais baixo e a bicicleta caminha para a esquerda. Depois de quantos metros as duas válvulas estarão novamente em sua posição mais baixa?



- A) 4,2.
- B) 6,3.
- C) 12,6.
- D) 25,2.

Solução. . O produto da circunferência (o perímetro) pelo número de voltas de cada roda é igual à distância percorrida pela bicicleta. Assim, a condição do enunciado impõe que tenhamos

$$4,2 \times m = 0,9 \times n,$$

onde m e n são números (inteiros de voltas) das rodas, maior e menor, respectivamente, até que as válvulas estejam em suas posições mais baixas. Logo,

$$42 \times m = 9 \times n$$

ou, simplificando,

$$14 \times m = 3 \times n.$$

A igualdade anterior pode ser reescrita como

$$2 \times 7 \times m = 3 \times n.$$

Os menores valores (inteiros positivos) para os quais esta igualdade ocorre são $m = 3$ e $n = 2 \times 7 = 14$, de modo que

$$2 \times 7 \times 3 = 3 \times 2 \times 7$$

Assim, a distância percorrida até que as válvulas voltem às posições mais baixas pela primeira vez é $4,2 \times 3 = 12,6$ metros, o que corresponde à alternativa C). ■

Problema 26 (UNICAMP) A quantia de R\$ 1.280,00 será dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

- a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
- a divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

 **Solução.** a) Dizer que as três partes são *diretamente proporcionais* a 8, 5 e 7 significa que são proporcionais a

$$\frac{8}{8+5+7} = \frac{8}{20}, \quad \frac{5}{8+5+7} = \frac{5}{20} \quad \text{e} \quad \frac{7}{8+5+7} = \frac{7}{20}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{8}{20} \times 1.280 = 512, \quad \frac{5}{20} \times 1.280 = 320 \quad \text{e} \quad \frac{7}{20} \times 1.280 = 448$$

reais.

b) Dizer que as três partes são *inversamente proporcionais* a 5, 2 e 10 significa que são diretamente proporcionais a $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{10}$, respectivamente. Portanto, a soma dessas partes é diretamente proporcional a

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}.$$

Logo, as partes são, respectivamente, diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{2}{8}, \quad \frac{\frac{5}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{2}{8} \times 1.280 = 320, \quad \frac{5}{8} \times 1.280 = 800 \quad \text{e} \quad \frac{1}{8} \times 1.280 = 160$$

reais. ■

Problema 27 Uma corrente elétrica de 20 Ampères percorre um fio condutor que se bifurca em dois, o primeiro ligado a uma resistência de 4 Ohms e o outro a uma resistência 6 Ohms. Que proporções da corrente total passarão por cada um destes dois fios?

 **Solução.** Aqui, trata-se um problema de **divisão em partes inversamente proporcionais**. De fato, a corrente que passa por um fio condutor é (ao menos para valores pequenos) *inversamente proporcional* à chamada *resistência* do material deste fio. Portanto, as proporções da correntes nos fios com resistências 4 e 6 Ohms, respectivamente, são iguais a

$$20 \times \frac{6}{4+6} = 12 \text{ Ampères}$$

e

$$20 \times \frac{4}{4+6} = 8 \text{ Ampères.} \quad \blacksquare$$



2.5.2 – Proporcionalidade inversa e divisão de frações

Problema 28 No almoço da escola, Dona Ana deve servir 2 litros de suco em copos de $\frac{1}{4}$ de litro. Quantos copos, completamente cheios, podem ser servidos?

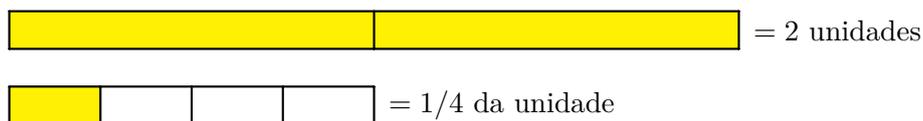
Problema 29 Para manter a forma física, Seu Alberto faz caminhadas diárias de 2 quilômetros, com paradas rápidas a cada trecho de $\frac{1}{4}$ de quilômetro. Em quantos trechos ele divide sua caminhada diária?

Problema 30 Mariana quer marcar uma linha de 2 metros usando uma fita de $\frac{1}{4}$ de metro. Quantas medições deve fazer?

Problema 31 Trocando 2 reais em moedas de 25 centavos, quantas moedas recebemos?

Problema 32 Quantos quartos de hora temos em 2 horas?

 **Solução.** Todos esses problemas podem ser modelados usando a mesma representação geométrica, como ilustrado na figura seguinte. A parte de cima da figura é formado por duas barras retangulares, cada uma representando uma unidade de medida. Na parte de baixo da figura, destacamos um quadrado que corresponde a $\frac{1}{4}$ da barra retangular:



Perceba que podemos dividir 1 barra retangular em 4 cópias do quadrado, que corresponde a $\frac{1}{4}$ da barra, isto é,

$$1 : \frac{1}{4} = 4.$$

Dito de outro modo, 4 cópias do quadrado (que corresponde a $\frac{1}{4}$ da barra) formam 1 barra inteira, ou seja,

$$4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Da mesma forma, 2 barras retangulares, como na parte de cima da figura, podem ser divididas em 8 cópias do quadrado, que corresponde, como sabemos, a $\frac{1}{4}$ da barra, ou seja,

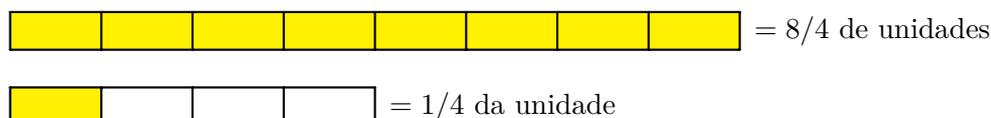
$$2 : \frac{1}{4} = 8,$$

uma vez que

$$8 \times \frac{1}{4} = 2,$$

ou seja, 8 cópias do quadrado formam o equivalente a 2 barras inteiras.

Para verificar essas afirmações, perceba, na seguinte figura, que, de fato, cada barra retangular pode ser dividida em 4 cópias do quadrado. Isso nos permite comparar as regiões pintadas como múltiplos do quadrado:



Podemos interpretar as soluções dos problemas acima do seguinte modo: a barra representa a unidade de medida original; o quadrado representa uma nova unidade de medida, equivalente a $\frac{1}{4}$ da unidade de medida original. O que corresponde a 2 unidades de medida originais é, agora, dado por **8 unidades da nova medida**. ■

Baseando-se nos problemas anteriores, podemos compreender o que acontece na divisão de um número natural a por uma fração da forma $1/b$, onde b é também um número natural, não-nulo. Consideremos os seguintes problemas:

Problema 33 Em uma fábrica artesanal de sandálias, um certo número de operários, trabalhando durante 15 dias, produz 1 200 sandálias. Com apenas $1/3$ desses operários, trabalhando com a mesma **produtividade**, em quantos dias teríamos a mesma produção de sandálias?

- a) em 5 dias.
- b) em 30 dias.
- c) em 45 dias.
- d) em 80 dias.

Problema 34 Em uma promoção para o Dia das Crianças, uma sorveteria vende uma bola de sorvete por $2/3$ do preço normal. Quantas bolas de sorvete teria que vender para que tivesse a mesma receita de 12 bolas vendidas ao preço normal?

- a) 8.
- b) 16.
- c) 18.
- d) 48.

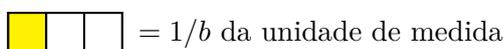
Observação 2.15 Assim como antes, podemos modelar os problemas acima com uma única representação geométrica: consideramos um número natural a como a primeira quantidade inteira em cada problema, isto é,

$$a = \begin{cases} \text{número de máquinas} = 15 \\ \text{número de bolas de sorvete} = 12 \end{cases}$$

Além disso, fixamos b como o número natural que indica em quantas vezes dividimos a *segunda* quantidade inteira do problema, ou seja,

$$1/b = \begin{cases} \text{fração do número inicial de máquinas} = 1/3 \\ \text{fração do preço normal da bola de sorvete} = 2/3 \end{cases}$$

Na parte de cima da figura a seguir, temos a cópias de um retângulo que representa 1 unidade de medida, enquanto, na parte de baixo da figura, destacamos um quadrado que representa $1/b$ desse retângulo. Para fixar ideias, vamos considerar $a = 8$ e $b = 3$. Temos:



Devemos calcular quantas cópias do quadrado, que representa a fração $\frac{1}{b}$ da barra, preenchem inteiramente as a barras, ou seja, devemos calcular o quociente

$$a : \frac{1}{b}$$

Para tanto, dividimos cada barra retangular em b quadrados, visto que 1 barra equivale a b quadrados, isto é,

$$1 : \frac{1}{b} = b,$$

ou seja,

$$b \times \frac{1}{b} = 1.$$

Assim, contamos, ao todo, $a \cdot b$, visto que temos a cópias da barra retangular na parte de cima da figura:

 = $a \cdot b$ vezes $1/b$ da unidade

 = $1/b$ da unidade de medida

Em resumo, o número de quadrados, cada um representando $\frac{1}{b}$ da barra, que preenchem a barras inteiras é dado por $a \cdot b$, ou seja,

$$a : \frac{1}{b} = a \cdot b,$$

ou, escrevendo de outro modo,

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = a \cdot b.$$

Resumimos esse resultado no seguinte quadro:

Divisão de um número inteiro positivo a pela fração $\frac{1}{b}$: o resultado final é o produto de a pelo inverso da fração que está como divisor, ou seja, $a \cdot b$.

 **Solução. Problema 33.** Neste problema específico, temos

$$a = 15 \text{ dias}$$

e

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{3} \text{ das máquinas.}$$

Assim, o número de dias necessário para produzir as 1 200 sandálias com apenas $1/3$ das máquinas é igual a

$$\frac{15}{\frac{1}{3}} = 15 : \frac{1}{3} = 15 \cdot 3 = 45 \text{ dias.}$$

Representamos geometricamente essa divisão da seguinte forma:

 = produção das máquinas em 15 dias

 = produção de $1/3$ das máquinas por dia

 = produção de $\frac{1}{3}$ das máquinas em 45 dias

Na primeira parte da figura, cada barra retangular representa a produção de *todas* as máquinas em 1 dia. As 15 barras representam a produção de todas as *máquinas* em 15 dias. Na segunda parte da figura, representamos, destacada em outra cor, a produção, em um dia, de apenas $1/3$ das máquinas. Por fim, na terceira parte da figura, temos a produção, em 45 dias, de apenas $1/3$ das máquinas. Note que a produção de todas as máquinas em 15 dias é a *mesma* de $1/3$ das máquinas em $15 \cdot 3 = 45$ dias. A soma das barras, na primeira e na terceira partes da figura, é a mesma: 1 200 sandálias. ■

 **Solução. Problema 34.** Agora, neste outro problema, temos

$$a = 12 \text{ bolas}$$

e

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ do preço da bola.}$$

Assim, o número m de bolas vendidas necessário para termos a mesma **receita** que teríamos vendendo 12 bolas ao preço normal, inteiro, é dado por

$$m \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

Multiplicando cada um dos lados dessa igualdade por 3, temos:

$$m \cdot 2 = 12 \cdot 3$$

Agora, dividindo cada um dos lados dessa nova igualdade por 2, obtemos:

$$m = 12 \cdot \frac{3}{2},$$

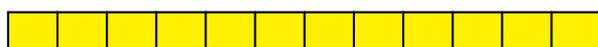
ou seja,

$$m = \frac{36}{2} = 18 \text{ bolas de sorvete.}$$

Observe que

$$m = 12 \cdot \frac{3}{2} = 12 : \frac{2}{3}$$

Representamos geometricamente essa divisão da seguinte forma:

 = venda de 12 bolas ao preço inteiro

 = venda de 1 bola a $\frac{2}{3}$ do preço

 = venda de 18 bolas a $\frac{2}{3}$ do preço

Na primeira parte da figura, cada barra retangular representa o preço normal de 1 bola de sorvete; as 12 barras representam a receita obtida com venda de 12 bolas a esse preço. Na segunda parte da figura, representamos a receita da venda de 1 bola a $\frac{2}{3}$ do preço normal. Por fim, na terceira parte da figura, temos a receita da venda de 18 bolas de sorvete a $\frac{2}{3}$ do preço normal. Note que a receita de 18 bolas ao preço normal é a *mesma* de 18 bolas a $\frac{2}{3}$ desse preço. ■

Observação 2.16 Nesses dois problemas, temos duas grandezas cujo produto deve ser mantido *constante*. Por exemplo, no caso das bolas de sorvete, a receita das vendas deve ser mantida a mesma: se o preço de 1 bola de sorvete é reduzido à *metade* do normal, precisamos *duplicar* a quantidade de bolas vendidas; se o preço é reduzido a *um terço* do normal, precisamos *triplicar* a quantidade de bolas vendidas, e assim por diante. Para fixar ideias, digamos que o preço normal de 1 bola de sorvete seja R\$ 6,00. Nesse caso, teríamos a seguinte tabela de preços, quantidades vendidas e receita:

Preço unitário (em reais)	Quantidade vendida	Receita das vendas (em reais)
6	12	$6 \cdot 12 = 72$
$4 = \frac{2}{3} \cdot 6,00$	$\frac{3}{2} \cdot 12 = 18$	$4 \cdot 18 = 72$
$2 = \frac{1}{3} \cdot 6,00$	$\frac{3}{1} \cdot 12 = 36$	$2 \cdot 36 = 72$

Nessa situação *hipotética*, dizemos que a grandeza **preço** e a grandeza **quantidade vendida** são *inversamente proporcionais*. Observe que, ao diminuir o preço de 6 reais para $6/b$, devemos aumentar a quantidade vendida de 12 para $12 \cdot b$, a fim de manter sempre a mesma receita, isto é, 72 reais.

A partir do próximo problema, estudaremos a interpretação geométrica do *algoritmo* de divisão de uma fração por outra.

Problema 35 Em seu aniversário, Rafaela convidou os amigos para um rodízio de pizzas, encomendando à pizzaria uma dada quantidade de fatias por convidado. No dia, a pizzaria serviu apenas $\frac{3}{4}$ da quantidade combinada de fatias por convidado. Por outro lado, compareceram $\frac{3}{8}$ dos convidados, somente. A quantidade de fatias de pizza por convidado presente aumentou, diminuiu ou permaneceu a mesma que havia sido encomendada?

 **Solução.** Note que $\frac{3}{8}$ é a *metade* de $\frac{3}{4}$, isto é,

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{4} : 2,$$

ou seja

$$\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{3}{8}$$

Assim, a quantidade de fatias de pizza *por* convidado presente foi, no aniversário de Rafaela, dada por

$$\frac{\frac{3}{4} \text{ da quantidade de fatias}}{\frac{3}{8} \text{ dos convidados}} = \frac{3}{4} \text{ da quantidade de fatias por convidado} = 2.$$

Concluimos que foi servida, na prática, uma quantidade de fatias de pizza, por convidado, **2 vezes maior** do que a inicialmente encomendada. ■

Observação 2.17 Para fixar ideias, podemos supor que fossem convidadas 16 pessoas e que tenham sido encomendadas 10 fatias por convidado, com um total de 160 fatias encomendadas. Se apenas $\frac{3}{8}$ dos convidados comparecessem, teríamos, de fato, apenas

$$\frac{3}{8} \text{ de } 16 = 3 \cdot \frac{1}{8} \text{ de } 16 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ convidados.}$$

Se apenas $\frac{3}{4}$ da quantidade encomendada de pizzas fossem realmente servidos, teríamos:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 160 = 3 \cdot \frac{1}{4} \text{ de } 160 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ fatias.}$$

Assim, a quantidade de fatias de pizza servidas por convidado seria igual a

$$\frac{120 \text{ fatias}}{6 \text{ convidados}} = 20 \text{ fatias por convidado,}$$

2 vezes mais do que as 10 fatias por convidado que haviam sido encomendadas.

Observação 2.18 Para compreendermos melhor a conclusão desse problema, suponhamos que outras situações ocorram. Por exemplo, suponha que $\frac{5}{8}$ dos convidados tenham comparecido em vez de apenas $\frac{3}{8}$, como supomos anteriormente. Nesse caso, observemos, antes de mais nada, a **equivalência de frações**

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Logo, o quociente de quantidade de fatias por convidado seria

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{6}{8} : \frac{5}{8} = \frac{\frac{6}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{6}{5},$$

ou seja, teríamos $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ vezes mais fatias de pizza por convidado do que inicialmente encomendado. Se fossem encomendadas 10 fatias por convidado, teríamos, agora, $\frac{6}{5}$ de 10, ou seja, $6 \cdot \frac{1}{5}$ de 10, que é igual a $6 \cdot 2 = 12$ fatias de pizza por convidado.

Problema 36 Calcule o resultado da divisão

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

 **Solução.** Solução aritmética do Problema 36. Temos as seguintes equivalências de frações:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

e

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Assim, a *divisão de frações* é calculada da seguinte forma:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9} = \frac{8}{9}.$$



Observação 2.19 Uma solução alternativa é observar que, se $3/4$ correspondem a $2/3$, então $1/4$ corresponde a $1/3$ de $2/3$. Como $1/3$ de $1/3$ é $1/9$, temos que $1/3$ de $2/3$ é $2/9$. Em resumo, $1/4$ corresponde a $2/9$. Logo, $1 = 4/4$ correspondem a $4 \cdot 2/9$, ou seja, $8/9$ do tempo disponível.

Observação 2.20 Essa solução anterior pode ser expressada da seguinte forma: o resultado da divisão

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

não se altera se multiplicarmos tanto o dividendo (a primeira fração) quanto o divisor (a segunda fração) por 3, obtendo:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Esse quociente também não muda se multiplicarmos, agora, tanto o dividendo (nesse caso, o número 2) quanto o divisor (nesse caso, o número $\frac{9}{4}$) por 4, obtendo:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Em resumo, temos:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

Problema 37 Marcela fez $3/4$ das questões da prova de Matemática e acertou $2/3$ de todas as questões. Considerando apenas as questões que ela fez, qual fração delas Marcela acertou?

 **Solução.** Temos

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

pois $2 \cdot 4 < 3 \cdot 3$. Verificaremos essa desigualdade, representando as duas frações em retas numéricas. Por ora, concluímos dessa desigualdade que

$$\frac{2}{3} < 1.$$

Portanto, como já sabíamos, Marcela **não** acerta todas as questões que fez na prova. Para comprovar isso de forma mais precisa, calculemos o quociente das duas frações. Começamos representando as frações $2/3$ e $3/4$ nas seguintes retas numéricas:



Figura 2.7: $2/3$ da unidade de medida



Figura 2.8: $3/4$ da unidade de medida

Considerando 12 como *divisor comum* de 3 e 4, temos as equivalências de frações

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12},$$

representadas nas seguintes retas numéricas (com doze intervalos, cada um deles de comprimento igual a $1/12$ da unidade de medida):



Figura 2.9: $2/3 = 8/12$ da unidade de medida



Figura 2.10: $3/4 = 9/12$ da unidade de medida

Observe que a *razão* entre o comprimento do segmento correspondente a $2/3$ e o comprimento do segmento correspondente a $3/4$ é de 8 para 9, ou seja: $2/3$ está para $3/4$ assim como 8 está para 9. Ao utilizarmos $1/12$ da unidade de medida nas duas retas numéricas, conseguimos comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e obtemos

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{8}{12}}{\frac{9}{12}} = \frac{8}{9} < 1.$$

Logo, comprovamos o que já havíamos concluído: Marcela acerta $\frac{8}{9}$ das questões que fez, ou seja, não acerta todas as questões que fez. Para esclarecer esse ponto, digamos que o teste tivesse 12 questões. Marcela teria feito

$$\frac{3}{4} \cdot 12 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ questões}$$

e teria acertado $2/3$ do *total* de questões, isto é,

$$\frac{2}{3} \cdot 12 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ questões.}$$

Assim, a *razão* entre questões acertadas e questões feitas por Marcela seria

$$\frac{8}{9},$$

como já havia sido calculado. ■

Resumindo o que observamos com esses exemplos, temos o seguinte **algoritmo da divisão de frações**:

Divisão de uma fração $\frac{a}{b}$ pela fração $\frac{c}{d}$. Dados números naturais a, b, c, d com $b \neq 0, c \neq 0$ e $d \neq 0$, temos

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Vamos justificar esse algoritmo, usando retas numéricas. Na primeira das seguintes retas numéricas, representamos $a = 5$ cópias de um segmento cujo comprimento é igual a $\frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ da unidade de medida. Na segunda reta numérica, destacamos $c = 3$ cópias de um segmento cuja comprimento é igual a $\frac{1}{d} = \frac{1}{4}$ da unidade de medida.

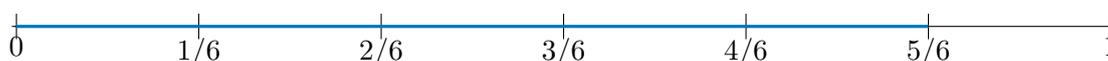


Figura 2.11: a vezes $1/b$, ou seja, $\frac{a}{b}$ da unidade de medida.



Figura 2.12: c vezes $1/d$, ou seja, $\frac{c}{d}$ da unidade de medida.

Considerando $c \cdot d = 6 \cdot 4 = 24$ como *divisor comum* de 3 e 4 (poderíamos ter escolhido 12 em vez de 24, também), temos as **equivalências de frações**

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b},$$

representadas nas seguintes retas numéricas (com $b \cdot d$ intervalos, de comprimento $\frac{1}{b \cdot d}$):

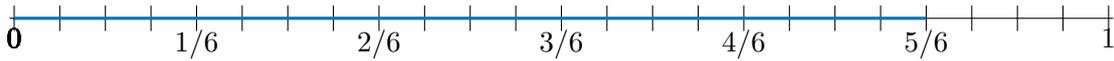


Figura 2.13: $a/b = a \cdot d / b \cdot d$ da unidade de medida.



Figura 2.14: $c/d = c \cdot b / d \cdot b$ da unidade de medida.

Na terceira (respectivamente, quarta) reta numérica, a escala é d vezes menor (respectivamente, b vezes menor) do que na primeira (respectivamente, segunda), com intervalos de comprimento $\frac{1}{b \cdot d}$ da unidade de medida entre uma marcação e outra. Temos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{b \cdot c}{b \cdot d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

No exemplo que temos trabalhado, essas expressões são dadas por

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}}{\frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 4}} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 6} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}.$$



2.5.3 – Equivalência de frações e propriedades das proporções

Em nosso estudo de Aritmética de frações na seção 2.1, aprendemos que frações como $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ são **equivalentes** ou iguais:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

De fato,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}.$$

Como vimos, o argumento para justificar a equivalência (ou igualdade) dessas duas frações é o seguinte: multiplicando cada uma das frações pelo **mínimo múltiplo comum** dos denominadores que, nesse caso, é igual a 12, obtemos:

$$12 \times \frac{3}{4} = 12 \times \frac{9}{12}.$$

Cancelando um fator 4 no primeiro membro e um fator 12 no segundo membro da igualdade acima, obtemos:

$$3 \times 3 = 9.$$

De modo similar, verifiquemos se as frações

$$\frac{6}{9} \text{ e } \frac{8}{12}$$

são equivalentes. Nesse caso, multiplicamos cada uma das frações pelo produto dos dois denominadores, isto é, 12×9 , e checamos se a igualdade

$$12 \times 9 \times \frac{6}{9} = 12 \times 9 \times \frac{8}{12}$$

é realmente verdadeira. Cancelando um fator 9 no lado esquerdo e um fator 12 no lado direito, chegamos a

$$12 \times 6 = 9 \times 8.$$

Como essa última igualdade é verdadeira (os dois produtos valem 72), concluímos que, de fato, as frações $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ são iguais.

Assim como neste exemplo particular, o seguinte *critério* é válido para provar que duas frações *quaisquer* são equivalentes:

Teorema 2.21 As frações

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d}$$

são iguais ou equivalentes se, e somente, se

$$a \times d = b \times c.$$

Dizemos, portanto, que essas frações são iguais se, e somente, se o produto dos *meios* b e c for igual ao produto dos *extremos* a e d .

Demonstração. Revisemos a demonstração dessa afirmação, que já vimos na seção 2.1. Se as frações são iguais, então, multiplicando os dois lados da igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

pelo produto $b \times d$, temos

$$\frac{a}{b} \times b \times d = b \times d \times \frac{c}{d}.$$

Portanto, dividindo b por b do lado esquerdo e d por d do lado direito, obtém-se

$$a \times d = b \times c,$$

ou seja, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Na direção contrária, se o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja, se

$$a \times d = b \times c,$$

então, dividindo os dois lados desta igualdade pelo produto $b \times d$, obtém-se

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}.$$

Portanto, dividindo d por d do lado esquerdo e b por b do lado direito, chegamos à igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

■

Problema 38 Calcule o valor de x para o qual as frações

$$\frac{x}{8} = \frac{9}{12}$$

são equivalentes (ou seja, iguais).

Solução. Essas frações são iguais se, e somente se, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, isto é,

$$12 \times x = 8 \times 9.$$

Dividindo os dois lados dessa expressão por 12, concluímos que as frações são iguais se, e somente se,

$$x = \frac{8 \times 9}{12},$$

isto é, se e somente se,

$$x = 6.$$

Sendo assim, a igualdade entre frações é escrita como

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12}.$$

Estas frações são, de fato, equivalentes, uma vez que

$$\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}.$$

Conforme veremos nos exercícios subsequentes, as duas equivalências listadas no teorema a seguir são muito úteis para lidarmos *arithmeticamente* com frações.

Teorema 2.22 Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

e

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração. Sendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Isso é o mesmo que

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Por outro lado, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica

$$ad = bc$$

e, portanto,

$$ad + cd = bc + cd.$$

Assim,

$$(a+c)d = (b+d)c,$$

o que equivale a

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d},$$

como queríamos demonstrar. ■

Problema 39 A razão entre a soma e a diferença de dois números positivos, distintos um do outro, é 2. Qual a razão entre esses números?

Solução. Sendo a e b os dois números, temos

$$\frac{a+b}{a-b} = 2.$$

Aplicando o Teorema 2.21, obtemos

$$2(a-b) = a+b,$$

ou seja,

$$a = 3b.$$

Assim, a razão entre esses números é

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Problema 40 As idades de pai e filho somam 60 anos, sendo que a razão entre essas idades é igual a 3. Calcule as idades dos dois.

Solução. Sejam a e b as idades de pai e filho, respectivamente. Sendo assim, temos

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Portanto, pela primeira parte do Teorema 2.22, temos

$$\frac{a+b}{b} = \frac{3+1}{1},$$

ou seja,

$$\frac{60}{b} = 4.$$

Logo,

$$b = \frac{60}{4} = 15 \text{ anos}$$

(a idade do filho), de onde segue que a idade do pai é

$$a = 60 - 15 = 45 \text{ anos.}$$

Problema 41 As proporções de rapazes e moças em duas turmas da segunda série de uma escola de tempo parcial são ambas iguais a $\frac{3}{4}$. Sabendo que o total de alunos nessas turmas é de 84 alunos, calcule quantas moças há nas duas turmas, ao todo.

Solução. Sejam a e b as quantidades de rapazes e moças, respectivamente, na primeira turma; e c e d as quantidades de rapazes e moças, respectivamente, na segunda turma. O enunciado informa que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, pela segunda parte do Teorema 2.22, temos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{3}{4}.$$

Como a quantidade total de alunos é 84, temos:

$$(a+c) + (b+d) = 84.$$

A quantidade total de moças é $b+d$. Para calculá-la, usamos novamente a segunda parte do Teorema 2.22:

$$\frac{(a+c) + (b+d)}{b+d} = \frac{3+4}{4}$$

ou, ainda,

$$\frac{84}{b+d} = \frac{7}{4}.$$

Logo,

$$7(b+d) = 84 \times 4,$$

ou seja,

$$b+d = \frac{84 \times 4}{7} = 48.$$



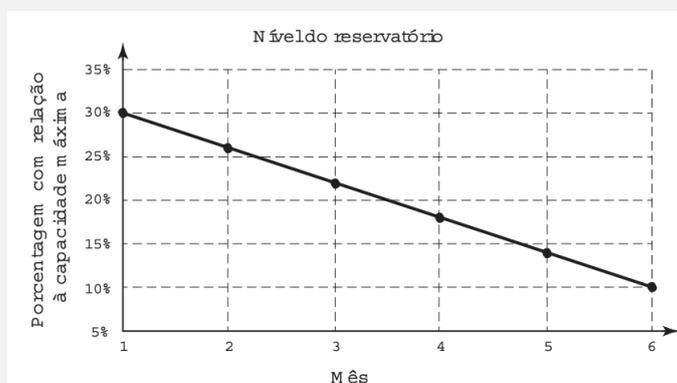
2.6 – Relações lineares entre grandezas

O Ceará tem boa parte de seu território em um região semiárida, com chuvas irregulares. As estações de *seca* têm se tornado cada vez mais frequentes. Já no ano de 1901, em *Os Sertões*, Euclides da Cunha mencionava esse fenômeno, falando do centenário açude do Cedro em Quixadá:

As cisternas, poços artesianos e raros, ou longamente espaçados lagos como o de Quixadá, têm um valor local, inapreciável. Visam, de um modo geral, atenuar a última das consequências da seca – a sede.

Os nossos reservatórios precisam repor suas cargas de água para abastecer o consumo humano, a agricultura industrial e de subsistência e o saneamento básico. A propósito deste contexto da importância do manejo adequado de recursos hídricos, consideremos o seguinte problema, retirado de uma dos cadernos do ENEM 2016.

Problema 42 (ENEM 2016, Questão 158, Caderno Azul) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, especialmente os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por certo período, sendo o resultado mostrado no gráfico abaixo. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

Antes de passarmos à solução, cumpre fazermos algumas observações. Inicialmente, o *gráfico*, ou seja, a linha reta inclinada na figura, passa pelos seis pontos destacados com círculos. Um destes pontos corresponde ao *mês* 1 e à *porcentagem* $30\% = \frac{30}{100}$ da capacidade máxima do reservatório. Outro desses pontos corresponde ao *mês* 6 e à *porcentagem* $10\% = \frac{10}{100}$ da capacidade máxima do reservatório.

Portanto, as observações foram feitas em um intervalo de tempo de

$$6 - 1 = 5 \text{ meses,}$$

durante o qual a porcentagem da capacidade máxima do reservatório *variou negativamente*, isto é, diminuiu

$$10\% - 30\% = -20\% = -\frac{20}{100}.$$

Podemos *inferir* que, a cada mês, neste período de 5 meses, a porcentagem da capacidade máxima diminuiu

$$\frac{-20\%}{5} = -4\% = -\frac{4}{100},$$

ou seja, $-\frac{4}{100}$ a cada mês. Sendo assim, no mês 2, ou seja, passado 1 mês, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} = \frac{26}{100}.$$

Da mesma forma, no mês 3, isto é, passados 2 meses, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% \times 2 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 2 = \frac{22}{100}.$$

Procedendo de forma similar, vemos que, passados 3 meses e 4 meses, ou seja, nos meses 4 e 5, respectivamente, as porcentagens da capacidade máxima seriam

$$30\% - 4\% \times 3 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 3 = \frac{18}{100}$$

e

$$30\% - 4\% \times 4 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 4 = \frac{14}{100},$$

respectivamente. Finalmente, no mês 6, isto é, após 5 cinco meses, a porcentagem da capacidade máxima ainda disponível no reservatório seria dada por

$$30\% - 4\% \times 5 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 5 = \frac{10}{100},$$

como já havíamos observado. Podemos organizar estes dados na seguinte tabela:

Mês	Porcentagem da capacidade máxima
1	30%
2	26%
3	22%
4	18%
5	14%
6	10%

De modo geral, se indicamos por x a variável *mês*, cujos valores estão exibidos na coluna da esquerda, então, os números na coluna da direita representam os valores da variável

$$y = 30\% - 4\% \times (x - 1),$$

ou seja,

$$y = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}(x - 1). \quad (2.3)$$

Esta variável representa a *porcentagem da capacidade máxima* do reservatório no mês x . A expressão (2.3) significa que y *depende linearmente* de x . Reagrupando os termos, podemos escrever

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x.$$

Essa **dependência linear** pode ser vista na tabela: de uma linha para outra, temos um *incremento* (ou seja, um aumento) de um mês. Portanto, a variável x aumenta uma unidade de uma linha para a seguinte. Essa variação de x implica uma variação de y : de uma linha para outra da tabela, a variável y *diminui* 4 pontos percentuais, isto é, 4%. Portanto, passados x meses, a *variação* correspondente de y nesse período é igual a

$$y - \frac{30}{100} = -\frac{4}{100}(x - 1).$$

Logo, a *variação* de y , dividida (ou comparada) com a *variação* de x , é dada por

$$\frac{y - \frac{30}{100}}{x - 1} = -\frac{4}{100}.$$

Portanto, a **razão** entre as *variações* de y e de x é constante e igual a $-\frac{4}{100}$.

Pela análise da figura, percebemos que os valores nas duas colunas da tabela correspondem às coordenadas dos pontos destacados na linha reta inclinada. Esses pontos, alinhados sobre a reta inclinada, têm coordenadas

$$(x, y),$$

onde

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x. \quad (2.4)$$

Portanto, as coordenadas desses pontos são, exatamente, os números da tabela: o primeiro número do par ordenado, o valor da variável x , é lido na primeira coluna da tabela. O segundo número do par ordenado, o valor da variável y (correspondente ao valor de x) é informado na coluna da direita.

O enunciado da questão faz referência à *tendência linear* observada no gráfico: isso significa, justamente, que as coordenadas dos pontos dependem linearmente uma da outra. Vimos acima que essa relação linear é dada por (2.4).

Finalizando esses comentários, observamos, pela figura do enunciado, que o gráfico da relação entre x e y , ou seja, a linha inclinada, determina um triângulo ABC (acompanhe na próxima figura) com lados BC de “comprimento”

$$30\% - 10\% = 20\% = \frac{20}{100}$$

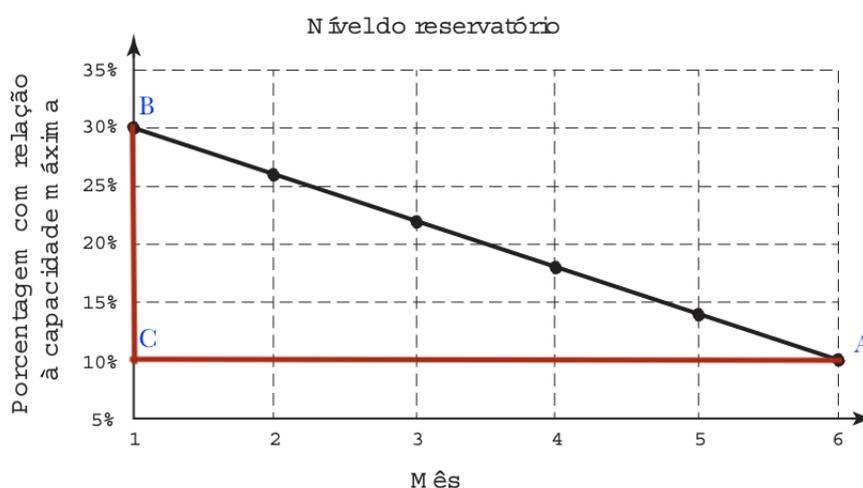
no eixo vertical, e AC de comprimento

$$6 - 1 = 5$$

no eixo horizontal. Portanto, a *inclinação* desta reta pode ser medida como a seguinte *razão*

$$\frac{\frac{20}{100}}{5} = \frac{4}{100}.$$

Esta razão é a *tangente* do ângulo no vértice A , oposto ao lado BC , conforme a figura.



Note ainda que, trocando o sinal desse valor, obtemos o coeficiente $-\frac{4}{100}$ que multiplica a variável x na expressão (2.4)

Por fim, apresentamos a resolução da questão, utilizando boa parte da discussão anterior.

Solução. Devemos calcular em qual mês (ou seja, para qual valor da variável x) teremos “zerado” toda a capacidade do reservatório, isto é, teremos

$$y = 0.$$

Considerando a expressão (2.4), vemos que isso ocorre quando

$$\frac{34}{100} - \frac{4}{100}x = 0,$$

ou seja, quando

$$x = \frac{\frac{34}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{34}{4} = \frac{32}{4} + \frac{2}{4} = 8 + \frac{1}{2} = 8,5.$$

Logo, mantida a tendência observada no gráfico, o reservatório atingirá o nível zero de sua capacidade entre o mês 8 e o mês 9, dois meses e meio depois do mês 6. ■



2.7 – Exercícios Propostos

2.7.1 – Sequência 1

Exercício 2.6 Quais das seguintes igualdades são válidas?

- A) $\frac{15}{24} = \frac{40}{64}$.
- B) $\frac{10}{12} = \frac{22}{24}$.
- C) $\frac{19}{24} = \frac{57}{72}$.
- D) $\frac{54}{14} = \frac{75}{35}$.

Corrija as igualdades que não são verdadeiras.

Exercício 2.7 Calcule o valor de x para o qual a seguinte igualdade de frações é válida:

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{18}.$$

Exercício 2.8 Determine o valor positivo de x para o qual a seguinte igualdade de frações é válida:

$$\frac{x}{9} = \frac{16}{x}.$$

Exercício 2.9 Calcule as seguintes porcentagens:

- A) 10% de 480.
- B) 25% de 480.
- C) 150% de 480.
- D) 0,15% de 480.

Exercício 2.10 Suponha que uma passagem de ônibus de Iguatu a Juazeiro do Norte custe R\$ 21,00. Calcule quanto passaria a custar caso houvesse:

- A) aumento de 20% no preço;
- B) diminuição de 20% no preço;
- C) aumento de 30%, seguido de diminuição de 10%;
- D) diminuição de 10%, seguida de aumento de 30%;
- E) dois aumentos sucessivos de 10%;
- F) duas diminuições sucessivas de 10%.

Exercício 2.11 Sabendo que duas variáveis, x e y , são diretamente proporcionais, complete a tabela com os valores adequados dessas variáveis:

Valores de x	10	16	20	?	20	32
Valores de y	15	24	?	18	30	48

Qual a **razão** entre os valores das variáveis x e y ?

Exercício 2.12 Sabendo que duas variáveis, x e y , são inversamente proporcionais, complete a tabela com os valores adequados destas variáveis:

Valores de x	10	15	20	?	30	40
Valores de y	36	24	?	15	12	9

Qual o **produto** dos valores das variáveis x e y ?

Exercício 2.13 Em uma escola de ensino médio, a razão entre os números de alunos que estudam pela manhã e os que estudam à tarde é de $\frac{3}{5}$. Sabendo que há um total de 240 alunos nesses dois turnos, quantos estudam pela manhã?

Exercício 2.14 Um suco de caju em uma caixa de 960 mililitros tem $\frac{3}{4}$ de polpa de fruta e $\frac{1}{4}$ de água. Aline diluiu esse suco, adicionando 120 mililitros de água. Qual passou a ser a proporção de polpa no suco após esse acréscimo de água?

Exercício 2.15 Os 45 colegas de uma turma da primeira série de uma escola em Arneiroz decidiram dividir entre eles as despesas de uma excursão nas férias de fim de ano. Porém, com a desistência de 5 deles, cada um dos demais terá que pagar, agora, R\$ 7,00 a mais do que pagaria antes. Qual o total das despesas da excursão a serem pagas por todos?

Exercício 2.16 Um relógio em um torre da igreja de uma pequena cidade atrasa dois segundos a cada hora. Quanto tempo de atraso acumulará em 2 dias?

Exercício 2.17 (UECE) Sejam x e y duas grandezas inversamente proporcionais. Se x sofre um acréscimo de 25%, o decréscimo percentual sofrido por y é

- A) 20%.
- B) 22%.
- C) 24%.
- D) 25%.

Exercício 2.18 (OBM – 1999) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se forem colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos ele ainda pode carregar?

- A) 132.
- B) 144.
- C) 146.
- D) 148.
- E) 152.

Exercício 2.19 Uma vendedora em uma loja de roupas recebe, como comissão, 6% do valor das vendas que realizar. Qual o total de vendas que ela deve realizar para que receba R\$ 120,00?

Exercício 2.20 O preço de um litro de gasolina custava R\$ 0,55 em julho de 1994, quando o Plano Real foi lançado. No fim de 2019, chegou a R\$ 4,55. Qual o percentual de aumento do litro de gasolina em todo esse período?

2.7.2 – Sequência 2

Exercício 2.21 Com um consumo de 6.000 litros, o volume de uma cisterna baixou de $\frac{3}{4}$ para $\frac{3}{8}$ de sua capacidade total. Sabendo disso, determine a capacidade desta cisterna em litros.

Exercício 2.22 (IBMEC) Se um aplicativo e meio executa uma tarefa e meia em minuto e meio, quantas tarefas executa um aplicativo em seis minutos?

- A) 1.
- B) 2.
- C) 4.
- D) 8.
- E) 16.

Exercício 2.23 (ESPM – 2003) Certo grupo de funcionários realiza certo trabalho em 6 horas. Descobriu-se que, se eles fossem 40% mais eficientes, com 2 funcionários a menos esse mesmo trabalho seria feito em 5 horas. O número de funcionários em questão é

- A) 10.
- B) 11.
- C) 12.
- D) 13.
- E) 14.

Exercício 2.24 (Mackenzie) Um taxista inicia o dia de trabalho com o tanque de combustível de seu carro inteiramente cheio. Percorre 325 quilômetros e reabastece, sendo necessários 25 litros para completar o tanque; em seguida, percorre 520 quilômetros até esvaziar completamente o tanque. Com base nessas informações, concluímos que a capacidade do tanque do carro, em litros, é

- A) 40.
- B) 45.
- C) 50.
- D) 55.
- E) 60.

Exercício 2.25 (UECE – Vestibular 2018.1) Se a base de um triângulo é aumentada em 10% e a altura diminuída em 10%, então, em relação à área do triângulo alterado, comparada com a área do triângulo inicial, é correto afirmar que ela

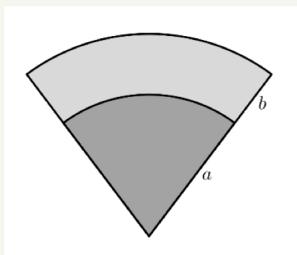
- A) diminui 1%.
- B) permanece a mesma.
- C) aumenta 0,01%.
- D) diminui 0,1%.

Exercício 2.26 (FUVEST – 2016) Um veículo viaja entre dois povoados da Serra da Mantiqueira, percorrendo a primeira terça parte do trajeto à velocidade média de 60 quilômetros por hora, a terça parte seguinte a 40 quilômetros por hora e o restante do percurso a 20 quilômetros por hora. O valor que melhor aproxima a velocidade média do veículo nessa viagem, em quilômetros por hora, é

- A) 32,5.
- B) 35.
- C) 37,5.

- D) 40.
E) 42,5.

Exercício 2.27 (UNICAMP – Vestibular 2018) A figura abaixo exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área.



A razão $\frac{a}{b}$ é igual a

- A) $\sqrt{3} + 1$.
B) $\sqrt{2} + 1$.
C) $\sqrt{3}$.
D) $\sqrt{2}$.

Exercício 2.28 Considere que um reservatório de água, inicialmente vazio, seja abastecido por duas torneiras. Para enchê-lo sozinha, a primeira torneira gastaria 2 horas. Já usando apenas a segunda, seriam gastas três horas para encher o reservatório. Com as duas torneiras abertas simultaneamente, o tanque estará cheio em

- A) 36 minutos.
B) 60 minutos.
C) 72 minutos.
D) 300 minutos.

Exercício 2.29 (Portal da Matemática, Módulo Razões e Proporções, Exercício 7, adaptado) Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas simultaneamente. Observou-se que o comprimento restante de uma era o dobro do comprimento restante da outra. Por quanto tempo ficaram acesas?

Exercício 2.30 A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

Alimento	A	B
Quantidade	20 gramas	20 gramas
Valor energético	60 quilocalorias	80 quilocalorias
Sódio	10 miligramas	20 miligramas
Proteína	6 gramas	1 grama

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre as quantidades de proteína em A e em B é igual a:

- A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 10.

Exercício 2.31 (OBM) Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa em 30 segundos, enquanto Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta de número 80, Paulinho estará completando a volta de número:

- A) 79.
- B) 78.
- C) 76.
- D) 77.
- E) 75.

Exercício 2.32 (Portal da Matemática, Módulo de Razões e Proporções, Exercício 15) Dois recipientes, R_1 e R_2 , contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções 3 : 5 em R_1 e 2 : 3 em R_2 . Juntando-se, em um terceiro recipiente, os conteúdos de R_1 e R_2 , qual a proporção de água e álcool nesta mistura?

Exercício 2.33 De julho a novembro de 2019, o preço de quilograma de carne subiu, em média, 25%. Após este período de alta de preços, houve uma redução de 20%, de novembro para dezembro de 2019. O que aconteceu, portanto, com o preço da carne em dezembro com relação a julho?

- A) Aumentou 5%.
- B) Aumentou 10%.
- C) Aumentou 45%.
- D) Aumentou 50%.

Exercício 2.34 (UNICAMP – Vestibular 2018) Dois anos atrás, certo carro valia R\$ 50.000,00 e, atualmente, vale R\$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

- A) R\$ 25.600,00.
- B) R\$ 24.400,00.
- C) R\$ 23.000,00.
- D) R\$ 18.000,00.

Exercício 2.35 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 6) A razão entre a área do quadrado inscrito em um semicírculo de raio R e a área do quadrado inscrito em um círculo de raio R é

- A) $\frac{1}{2}$.
- B) $\frac{1}{3}$.
- C) $\frac{3}{4}$.
- D) $\frac{2}{5}$.
- E) $\frac{1}{4}$.

Exercício 2.36 (OBM – 1998) Para fazer 12 bolinhos, preciso de exatamente de 100 gramas de açúcar, 50 gramas de manteiga, meio litro de leite e 400 gramas de farinha. A maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500 gramas de açúcar, 300 gramas de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha é

- A) 48.
- B) 60.
- C) 72.

- D) 54.
- E) 42.

2.7.3 – Sequência 3

Exercício 2.37 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 7) Um comerciante comprou mercadorias para revendê-las. Ele deseja marcar essas mercadorias com preços tais que, ao dar descontos de 20% sobre os preços marcados, ele ainda obtenha um lucro de 25% sobre o preço de compra. Em relação ao preço de compra, o preço marcado nas mercadorias é

- A) 30% maior.
- B) 40% maior.
- C) 45% maior.
- D) 50% maior.
- E) mais de 50% maior.

Exercício 2.38 (FGV, 2016, Prova A - Verde, Questão 10) Duas velas do mesmo tamanho são acesas no mesmo instante. A primeira é consumida totalmente em 4 horas e a segunda, em 3 horas. Suponha que cada uma das velas seja consumida a uma velocidade constante. Após serem acesas, o tamanho da primeira vela será o triplo do tamanho da segunda, decorridas

- A) 2 horas e 45 minutos.
- B) 2 horas e 40 minutos.
- C) 2 horas e 48 minutos.
- D) 2 horas e 52 minutos.
- E) 2 horas e 30 minutos.

Exercício 2.39 (Colégio Militar de Fortaleza – 2007) Daniel tem ração suficiente para alimentar quatro galinhas durante 18 dias. No fim do sexto dia, ele comprou mais duas galinhas. Com o restante da ração, ele poderá alimentar suas galinhas durante

- A) 2 dias.
- B) 4 dias.
- C) 6 dias.
- D) 8 dias.
- E) 10 dias.

Exercício 2.40 (Colégio Militar de Salvador – 2007) Rodrigo e Júnior trabalham carregando caminhões. Para carregar um caminhão, Rodrigo leva 20 minutos. Juntos, conseguem fazê-lo em 15 minutos. Em quanto tempo Júnior, sozinho, é capaz de carregar um caminhão?

- (A) 15 minutos.
- (B) 20 minutos.
- (C) 35 minutos.
- (D) 45 minutos.
- (E) 60 minutos.

Exercício 2.41 (Canguru 2014, Nível J, Questão 15) Um tipo especial de jacaré tem sua cauda com comprimento igual a um terço de seu comprimento total. Sua cabeça tem 93 cm de comprimento, correspondente a um quarto do comprimento total, descontada a cauda. Qual é o comprimento total do jacaré, em centímetros?

- A) 186.
- B) 372.
- C) 490.
- D) 496.
- E) 558.

Exercício 2.42 (Canguru 2014, Nível J, Questão 17) Ana andou 8 km com velocidade constante de 4 km/h e passou a correr com velocidade constante de 8 km/h. Quanto tempo ela correu com esta velocidade até que a sua velocidade média no percurso atingiu 5 km/h?

- A) 15 minutos.
- B) 20 minutos.
- C) 30 minutos.
- D) 35 minutos.
- E) 40 minutos.

Exercício 2.43 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 158) O contribuinte que vende mais de R\$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em www1.folha.uol.com.br. Acesso em 26 de abril de 2020 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R\$ 34 mil um lote de ações que custou R\$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

- A) R\$ 900,00.
- B) R\$ 1.200,00.
- C) R\$ 2.100,00.
- D) R\$ 3.900,00.
- E) R\$ 5.100,00.

Exercício 2.44 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 159) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 metros cúbicos de concreto. Qual é o volume de cimento, em metros cúbicos, na carga de concreto trazido pela betoneira?

- A) 1,75.
- B) 2,00.
- C) 2,33.
- D) 4,00.
- E) 8,00.

Exercício 2.45 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 163) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

- A) R\$ 15,00.
- B) R\$ 14,00.
- C) R\$ 10,00.

- D) R\$ 5,00.
E) R\$ 4,00.

Exercício 2.46 (FGV, 2017, Prova C - Rosa, Questão 15) O custo de produção de uma peça é composto de: 40% de mão de obra; 25% de matéria-prima; 20% de energia elétrica e 15% das demais despesas. Num certo momento, ocorrem os seguintes aumentos: mão de obra, 10%; matéria-prima, 20%; energia elétrica, 15%; e demais despesas, 10%. O aumento percentual no custo total da peça foi de

- A) 13,0%.
B) 13,5%.
C) 12,0%.
D) 12,5%.
E) 11,5%.

2.7.4 – Sequência 4

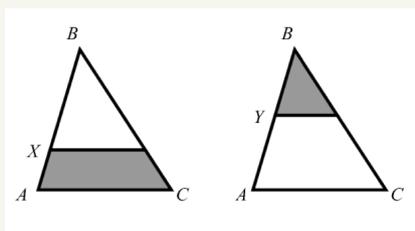
Exercício 2.47 (ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 167 - adaptado) Suponha que uma peça de cerâmica, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 centímetros e 15 centímetros. Após o cozimento da argila, necessário para fabricar a cerâmica, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça de cerâmica, após o cozimento, ficou reduzida em

- A) 4%.
B) 20%.
C) 36%.
D) 64%.
E) 96%.

Exercício 2.48 (Canguru 2014, Nível J, Questão 24) Numa ilha, os sapos são verdes ou azuis. O número de sapos azuis cresceu 60%, enquanto que o número de sapos verdes diminuiu 60%. Se a razão entre o número de sapos azuis e o número de sapos verdes é, agora, o inverso dessa razão antes da variação, qual a porcentagem da variação do número total de sapos?

- A) 0%.
B) 20%.
C) 30%.
D) 40%.
E) 50%.

Exercício 2.49 (Canguru 2015, Nível J, Questão 24) No triângulo ABC , podemos traçar as paralelas à base AC , pelos pontos X e Y , tal que as áreas das regiões cinzentas sejam iguais. Se a razão $BX : XA$ é igual a $4 : 1$, então qual é a razão $BY : YA$?



- A) 1 : 1.

- B) 2 : 1.
- C) 3 : 1.
- D) 3 : 2.
- E) 4 : 3.

Exercício 2.50 (Colégio Militar de Fortaleza, 2006 – adaptado) Um comerciante vendeu $\frac{3}{10}$ de seu estoque de certo produto com lucro de 30% e o restante desse estoque com prejuízo de 10%. No total da operação, o comerciante

- (A) teve lucro de 20%.
- (B) teve lucro de 2%.
- (C) teve prejuízo de 20%.
- (D) teve prejuízo de 2%.
- (E) não teve lucro nem prejuízo.

Exercício 2.51 (Colégio Naval, 1980) Um pai resolveu premiar seus três filhos com R\$ 1.900,00. Esse valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais aos números de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2, 4 e 5. Então, a quantia que caberá ao que recebeu menos é de

- (A) R\$ 300,00.
- (B) R\$ 400,00.
- (C) R\$ 500,00.
- (D) R\$ 600,00.
- (E) R\$ 700,00.

Exercício 2.52 (UEG, 2010) Em uma liga metálica de 160 gramas, o teor de ouro é de 18%, enquanto o restante é prata. A quantidade de gramas de prata que deve ser retirada desta liga a fim de que o teor de ouro passe a ser de 32%, é

- (A) 80.
- (B) 70.
- (C) 66.
- (D) 46.

Exercício 2.53 (OBM, 2005) Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, composto de 20% de polpa e 80 % de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

- (A) 5%.
- (B) 7%.
- (C) 8%.
- (D) 20%.
- (E) 60%.

Exercício 2.54 (OBM, 2005) Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio:

“Compre um e leve outro pela metade do preço.”

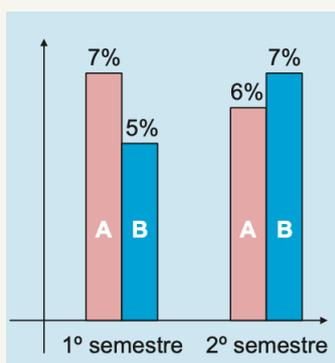
Outro anúncio que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é

- (A) *“Leve dois e pague um.”*
- (B) *“Leve três e pague um.”*
- (C) *“Leve três e pague dois.”*

- (D) “Leve quatro e pague três.”
 (E) “Leve cinco e pague quatro.”

Exercício 2.55 (OBM, 2004) Na população de uma espécie rara de 1.000 aves da Floresta Amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

Exercício 2.56 (OBMEP 2016, Primeira Fase, Nível 3, Questão 4) O gráfico representa o percentual de aumento do preço de dois produtos, A e B, em uma mercearia, no primeiro e no segundo semestres do ano passado.



As afirmativas abaixo referem-se ao período completo do ano passado. Qual delas é a correta?

- A) O aumento percentual do preço de B foi maior do que o de A.
 B) O aumento percentual dos preços dos dois produtos foi o mesmo.
 C) O aumento percentual do preço de A foi de exatamente 13%.
 D) O preço de A diminuiu e o de B aumentou.
 E) O aumento percentual do preço de B foi maior do que 12%.

Exercício 2.57 (OBMEP 2017, Primeira Fase, Nível 3, Questão 17) Ana e Beto foram os únicos candidatos na eleição para a presidência do grêmio estudantil da escola em que ambos estudam. Nessa eleição, votaram ao todo 1.450 alunos. Durante a apuração, houve um momento em que Ana teve a certeza de que, no final, ela teria pelo menos a metade dos votos válidos. Naquele momento, os percentuais eram os seguintes:

- votos não válidos: 20% dos votos apurados;
- votos em Ana: 60% dos votos válidos;
- votos em Beto: 40% dos votos válidos.

Quantos votos tinham sido apurados até aquele momento?

- A) 1.110.
 B) 1.150.
 C) 1.200.
 D) 1.250.
 E) 1.300.

Na apresentação do material e ao longo do texto, apontamos várias sugestões de caráter metodológico para a implementação de roteiros curriculares e rotinas pedagógicas de uso do material, com ênfase na recuperação e fortalecimento das aprendizagens e, não menos importante, no gradual desenvolvimento de competências complexas, além das competências e habilidades da BNCC e do DCRC direta ou indiretamente relacionadas aos temas deste caderno.

Nesta seção, apresentamos, em linhas gerais, algumas sugestões relacionadas ao conceito e práticas de **avaliação formativa** integrada ao ensino, conforme sistematizados por autores como Dylan Wiliam e Paul Black com a noção de *embedded formative assessment*. De acordo com esses autores, em uma tradução livre, a avaliação formativa “abrange todas as atividades levadas a cabo por professores e/ou por seus estudantes, as quais forneçam informações a serem usadas como *devolutivas* para modificar as atividades de ensino e aprendizagem em que estão envolvidos”. O grifo na palavra “devolutivas” é nosso, visto que esse é o elemento central, do ponto de vista pedagógico, da avaliação formativa embutida e organicamente vinculada ao planejamento didático. Segundo John Hattie, em seu livro *Aprendizagem visível para professores*, o efeito médio da devolutiva ou *feedback* é duas vezes maior que o efeito médio de todos os outros efeitos da escolarização. Ainda nas palavras de Hattie, “os professores trabalham a partir de teorias ou inferências sobre o que os alunos fazem que não são sempre abertas a mudanças à luz do que os alunos *na verdade* fazem. Em vez disso, os professores precisam primeiro se concentrar no que os alunos fazem, dizem, criam ou escrevem e modificar suas teorias sobre os alunos a partir dessas observações (ou dessas evidências)”.

Com o propósito de ajudar os professores na geração e registro dessas evidências, elaboramos a seguinte matriz que descreve três níveis de realização de etapas cognitivas associadas aos objetivos de aprendizagem desse material, *explicitados* na seção de apresentação do caderno. A observação atenta das atividades de cada aluno, individualmente, ao longo do trabalho com os textos e tarefas nas sequências de exercícios permitirá que o professor possa dar *devolutivas* precisas a esse aluno, reconhecendo suas progressões, lacunas ou entraves no processo de aprendizagem.

Objetivo da tarefa ou nível de realização da etapa	Objetivo não alcançado ou etapa não realizada	Objetivo parcialmente alcançado ou etapa parcialmente realizada	Objetivo plenamente alcançado ou etapa plenamente realizada
Processos básicos: ler e interpretar o enunciado e o comando, inclusive os textos preliminares.	O aluno revela dificuldade na compreensão dos textos/contextos que precedem as tarefas, especialmente quanto à localização e interpretação de informações numéricas relevantes.	O aluno compreende o texto, mas têm dificuldades em identificar/distinguir as informações relevantes para a resolução do problema.	O aluno compreende o texto e entende quais informações quantitativas são relevantes para o problema.
Processos básicos: reconhecer os conceitos aritméticos (números racionais, frações equivalentes, operações aritméticas com frações) fundamentais mobilizados na tarefa.	O aluno desconhece conceitos fundamentais necessários para a realização dessa atividade, associados à Aritmética de Números Racionais.	O aluno conhece os conceitos e operações aritméticas, mas não os associa às situações demandadas na tarefa, especialmente quando relacionadas a frações equivalentes.	O aluno compreende que deve buscar informações quantitativas expressas por números racionais, representados por frações equivalentes.

Tabela 3.1: Rubricas

Objetivo da tarefa ou nível de realização da etapa	Objetivo não alcançado ou etapa não realizada	Objetivo parcialmente alcançado ou etapa parcialmente realizada	Objetivo plenamente alcançado ou etapa plenamente realizada
Processos intermediários: reconhecer os usos e significados de razões e proporções.	O aluno demonstra dificuldades, conceituais ou técnicas, com o conceito de proporcionalidade	O aluno conhece a definição formal de proporcionalidade, mas não o associa a grandezas relativas e constantes de proporcionalidade, como escalas e velocidades, por exemplo.	O aluno conhece a noção de proporcionalidade e a aplica em contextos envolvendo grandezas relativas, como escalas e velocidades, e constantes de proporcionalidade.
Processos intermediários: modelar problemas em termos de razões e proporções.	O aluno tem dificuldades em relacionar as demandas propostas pelo problema ao conceito de proporcionalidade ou de equivalência de frações.	O aluno modela o problema em termos de proporcionalidade, mas comete equívocos na descrição do modelo usando frações.	O aluno consegue modelar adequadamente os problemas, revelando domínio do repertório conceitual e técnico em Aritmética, no contexto de equivalência de frações, razões e proporções.
Processos intermediários: determinar constantes de proporcionalidade ou termos desconhecidos em uma relação de proporcionalidade.	O aluno revela dificuldades conceituais ou procedimentais em efetuar cálculos envolvendo razões e proporções.	O aluno efetua cálculos relativos a razões e proporções, mas não consegue justificá-los em termos da própria noção de proporcionalidade.	O aluno utiliza, de forma correta e eficiente, as propriedades e algoritmos das operações aritméticas na modelagem dos problemas propostos, particularmente no contexto das grandezas e medidas.
Processos finalísticos: reconhecer relações de proporcionalidade direta ou inversa, envolvendo duas ou mais grandezas.	O aluno não executa procedimentos como as “regras de três”, simples ou compostas, ao tentar lidar com relações de proporcionalidade envolvendo duas ou mais grandezas.	O aluno executa procedimentos como as “regras de três”, simples ou compostas, ao tentar lidar com relações de proporcionalidade envolvendo duas ou mais grandezas, mas não consegue justificá-los em termos da própria noção de proporcionalidade.	O aluno executa procedimentos, como as “regras de três”, simples ou compostas, e os justifica em termos da noção de proporcionalidade.
Processos finalísticos: expressar a relação entre proporcionalidade e linearidade.	O aluno não compreende o conceito de linearidade nem tampouco sua relação com proporcionalidade.	O aluno compreende os conceitos de proporcionalidade e linearidade, mas não consegue relacioná-los de modo claro, nos contextos apresentados nos problemas.	O aluno compreende e relaciona, de modo claro, em diversos contextos e problemas, os conceitos de proporcionalidade e linearidade.

Tabela 3.2: Rubricas

O acompanhamento diligente das atividades dos estudantes, individualmente ou em grupo, na realização de atividades relacionadas aos textos e sequências de tarefas, permitirá que o(a) professor(a) possa marcar, para cada processo explicitado nas linhas da tabela, o nível de cumprimento dos objetivos de aprendizagem descritos nas colunas. Esse quadro, relativo a uma ou mais tarefas escolhidas nas sequências, dá ao professor um mapa do progresso de seus estudantes, que deve ser compartilhado com eles, complementado com exemplos de evidências registradas pelo professor. Erros e lacunas não devem ser simplesmente apontados como instâncias fixas, mas como momentos importante de meta-cognição e oportunidade para refazer percursos e consolidar habilidades.

- Alguns portais e plataformas
 - Portal da Matemática: <https://portaldaoemep.impa.br>
 - Khan Academy: <https://www.khanacademy.org/math/cc-fifth-grade-math>
 - Roda de Matemática: <https://www.rodadematematica.com.br/>
 - OBMEP: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>
 - Canguru: <https://www.cangurudematematicabrasil.com.br>
- Alguns canais e vídeos
 - Isto é Matemática: <https://www.youtube.com/c/istoematematica>
 - OBMEP: <https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial>
 - Matemaniaca: <https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA>
 - Números na BBC Brasil: <https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k>
 - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional
 - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
 - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.
 - Hattie, J. Aprendizagem visível para professores: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.
 - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
 - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
 - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.
 - Wiliam, Dylan. Creating the schools our children need. Florida: Learning Sciences International, 2018.
- Referências sobre a temática do caderno
 - Bellos, Alex. Alex no país dos números. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
 - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
 - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
 - Wu, Hung-Hsi. Compreender os números na Matemática Escolar. Porto: Porto Editora & Sociedade Portuguesa de Matemática
 - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
 - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.

