Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:
Bruno Holanda

Revisor:
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Módulo de Transição: Geometria - Volume 2

Congruência de Triângulos
Lugares Geométricos Notáveis
Teorema de Pitágoras
Relações Métricas
Ângulos na Circunferência

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

H722m Holanda, Francisco Bruno de Lima
Módulo de transição: geometria – volume 2 [recurso eletrônico] / Francisco Bruno de Lima Holanda, Antonio Caminha Muniz Neto. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43576-4 (E-book)

1. Congruências de triângulos. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Ângulos no círculo. I. Holanda, Francisco Bruno de Lima. II. Muniz Neto, Antonio Caminha. III. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). IV. Título.

CDD: 516

9 Geometria Plana

9.1 – Introdução

Iniciaremos esse módulo tratando sobre um tipo especial de relação entre figuras planas, que chamaremos de *congruência*.

De maneira intuitiva, duas figuras são ditas congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre todos os pontos da primeira figura com pontos da segunda figura de modo que a distância entre quaisquer dois pontos na primeira figura seja igual à distância entre os pontos correspondentes na segunda figura. Para ilustrar essa noção, considere o desenho a seguir:

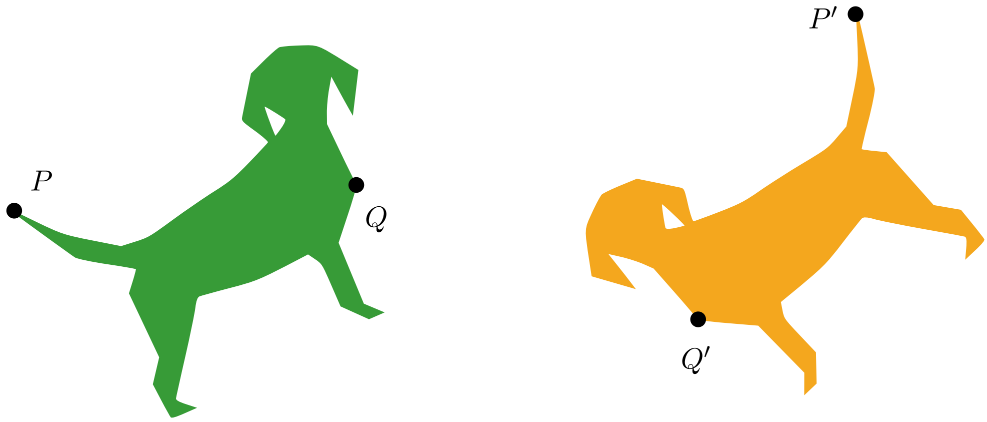


Figura 9.1: Duas figuras congruentes.

Na Figura 9.1, é possível visualizar dois desenhos iguais de cachorros, um verde e outro laranja, apenas dispostos em lugares diferentes da folha. Os pontos P e Q no desenho da esquerda são correspondentes aos pontos P' e Q' no desenho da direita, e a distância entre os pontos P e Q é a igual à distância entre P' e Q'. Fazendo um exercício mental, podemos reconhecer o fato de que a distância entre qualquer par de pontos no desenho da esquerda é igual à distância do par correspondente no desenho da direita. Assim, as figuras são *congruentes*.

Uma outra maneira de compreender a noção de congruência de duas figuras planas é imaginar que podemos "recortar" a primeira figura do plano (como se ele fosse de papel) e encaixá-la perfeitamente sobre a segunda figura.

Obs Agora que você já entendeu a noção de congruência, deve estar se perguntando qual é a relevância de estudarmos isso para a construção da Geometria Plana. Para responder a esta pergunta, apresentamos a seguinte alegoria:

Imagine que você pretende cozinhar uma macarronada durante alguns dias para seu almoço. Como você nunca cozinhou esse prato antes, é necessário antes "aprender"a fazer uma macarronada. Depois que você aprender, não precisa aprender por uma segunda vez, pois a macarronada será a mesma em todas as vezes em que você for fazê-la.

O mesmo ocorre com figuras congruentes: se você aprender as propriedades de uma delas, então qualquer figura congruente terá as mesmas propriedades. Assim, evita-se o trabalho de restabelecer fatos já conhecidos anteriormente.

9.2 – Congruência de Triângulos

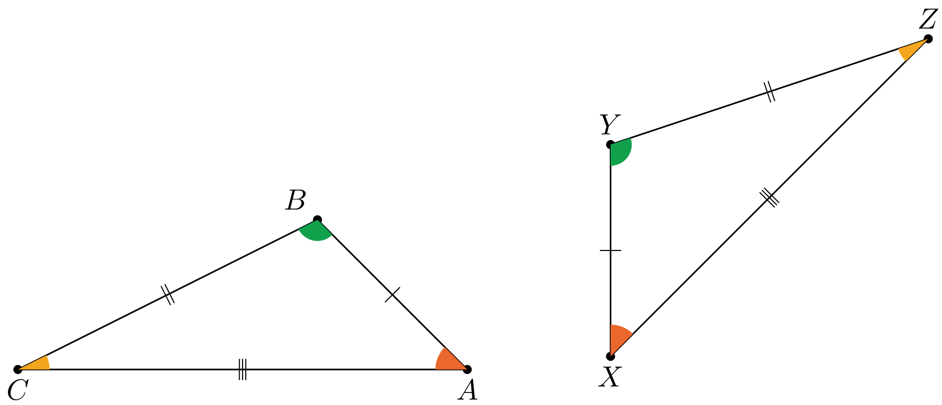
Para não precisar construir uma teoria de congruência muito complexa, nos concentraremos em estudar a congruência de figuras planas bem simples: os triângulos.

Definição 9.2.1 Dois triângulos ABC e XYZ são *congruentes* se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre os vértices do primeiro e os vértices do segundo de modo que todos os lados e ângulos do primeiro triângulo sejam iguais aos lados e ângulos correspondentes no segundo triângulo. Assim, se ABC e XYZ realmente forem congruentes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow Y$ e $C \leftrightarrow Z$, então

$$AB = XY, \quad BC = YZ, \quad CA = ZY$$

e

$$\angle ABC = \angle XYZ, \quad \angle BCA = \angle YZX, \quad \angle CAB = \angle ZXY.$$



Obs Utilizaremos o símbolo $(\equiv)$ para denotar dois triângulos congruentes. Assim, nas notações da figura, se $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$, suporemos implicitamente que a correspondência de vértices é $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow Y$ e $C \leftrightarrow Z$.

Para provar que dois triângulos são congruentes, não é necessário verificar todas as seis igualdades da definição. A seguir, veremos que certas combinações de três dessas seis igualdades serão suficientes para demonstrar que dois triângulos são congruentes. Chamaremos essas combinações de *casos de congruências*, e o primeiro deles é o seguinte:

Caso LAL. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $BC = YZ$ e $\angle ABC = \angle XYZ$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Este caso de congruência é um *postulado* da Geometria Euclidiana. Ou seja, assim como outros axiomas que apresentamos no módulo **Geometria A**, ele *não pode ser demonstrado* e deve ser simplesmente aceito como verdadeiro.

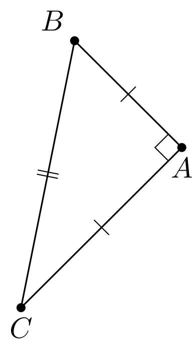
Por outro lado, os demais casos de congruência podem ser demonstrados a partir do caso LAL e são os seguintes:

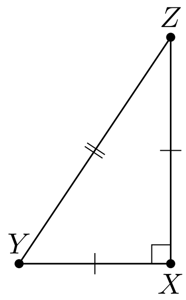
Caso LLL. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $BC = YZ$ e $CA = ZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Caso ALA. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $\angle ABC = \angle XYZ$, $BC = YZ$ e $\angle BCA = \angle YZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Caso LAA$_\mathbf{o}$. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $\angle ABC = \angle XYZ$ e $\angle BCA = \angle YZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

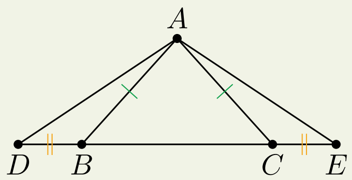
Caso Cateto-Hipotenusa. Se ABC e XYZ são dois triângulos retângulos com $\angle BAC = \angle YXZ = 90°$, $AB = XY$ e $BC = YZ$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.





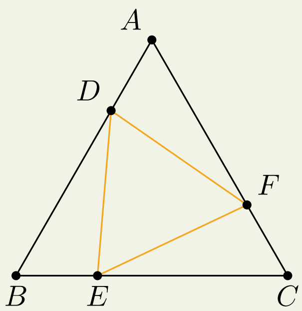
Os demais casos de congruência podem ser intuídos através de construções usando régua e compasso. Você poderá encontrar essa abordagem no livro *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 Geometria Euclidiana Plana* escrito por Antonio Caminha Muniz Neto. Neste módulo, porém, nos concentraremos em aprender a utilizar os casos de congruência para provar, na próxima seção, alguns fatos geométricos importantes.

Exercício 9.1 Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles de base BC. Como mostrado na figura, marque sobre a base BC segmentos congruentes BD e CE. Prove que o triângulo ADE é isósceles.



Solução. Como ABC é isósceles de base BC, temos $AB = AC$ e $\angle ABC = \angle ACB$. Então, $\angle ABD = \angle ACB$, pois tais ângulos são suplementos de ângulos iguais. Como $BD = CD$ por hipótese, concluímos que os triângulos ABD e ACE são congruentes pelo caso LAL. Portanto, $AD = AE$. ■

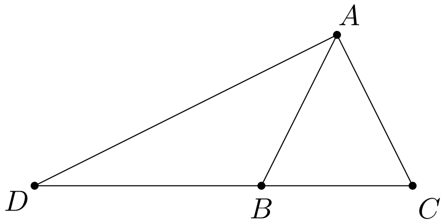
Exercício 9.2 Sobre os lados de um triângulo equilátero ABC, marcam-se os pontos D, E e F, conforme ilustrado na figura. Sendo $AD = BE = CF$, prove que o triângulo DEF também é equilátero.



Solução. Sendo $AB = BC = AC = l$ e $AD = BE = CF = x$, observe que $DB = EC = AF = l - x$ e que $\angle DAF = \angle EBD = \angle FCE = 60°$. Portanto, $\Delta ADF \equiv \Delta BED \equiv \Delta FCE$, pelo caso LAL. Consequentemente, $DF = EF = DE$. ■

Exercício 9.3 Explique por que **LLA** não é um caso de congruência de triângulos.

Solução. Como mostrado na figura, considere um triângulo isósceles BAC com $BA = AC$, e um ponto D sobre o prolongamento da reta BC, mais próximo de B do que de C. Veja que os triângulos DBA e DAC são tais que $\angle ADB = \angle ADC$, AD é compartilhado e $AB = AC$. Portanto, esta situação se encaixaria em um possível caso LLA. Por outro lado, claramente percebemos que os triângulos DBA e DAC não são congruentes, uma vez que $CD > BC$.

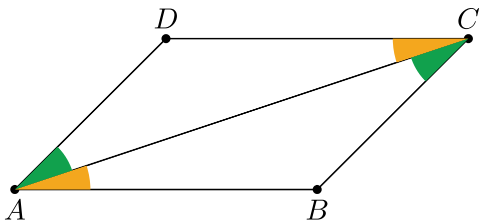


■

9.3 – Aplicações de Congruência de Triângulos

Começamos esta seção deduzindo uma propriedade muito importante dos paralelogramos.

Proposição 9.3.1 Em todo paralelogramo, os pares de lados opostos têm comprimentos iguais.



Prova. Considere um paralelogramo $ABCD$. Por definição, seus pares de lados opostos são paralelos. Assim, pelo quinto postulado de Euclides, temos que

$$\angle CAB = \angle DCA \qquad \text{e} \qquad \angle ACB = \angle DAC.$$

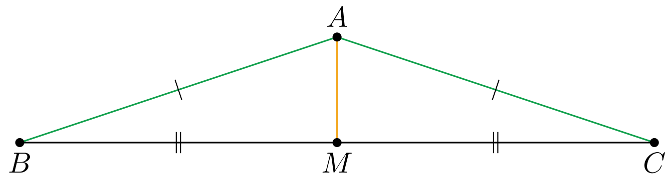
Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ pelo caso **LAL**. Portanto, $AB = CD$ e $CB = AD$. ■

O próximo resultado é um fato que já havíamos enunciado, sem demonstração, no módulo **Geometria A**. O fato é o seguinte:

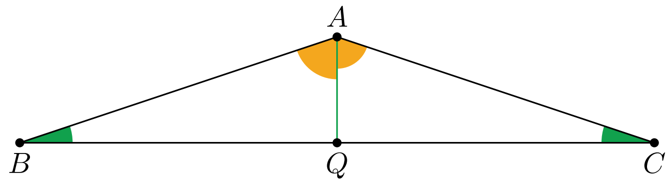
Proposição 9.3.2 Seja ABC um triângulo. Então $AB = AC$ se e somente se $\angle ABC = \angle ACB$.

Prova. Observe que essa proposição é *bicondicional*. Assim, devemos provar os dois sentidos da equivalência:

I. Assuma que $AB = AC$. Seja M o ponto médio do lado BC. Como $AB = AC$, $BM = CM$ e AM é comum, o caso LLL garante que os triângulos AMB e AMC são congruentes. Daí, $\angle ABC = \angle ACB$.



II. Assuma que $\angle ABC = \angle ACB$. Seja Q o pé da bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Como AQ é um lado comum, $\angle QAB = \angle QAC$ e $\angle QBA = \angle QCA$, concluímos que os triângulos AQB e AQC são congruentes pelo caso LAA$_o$. Assim, $AB = AC$.



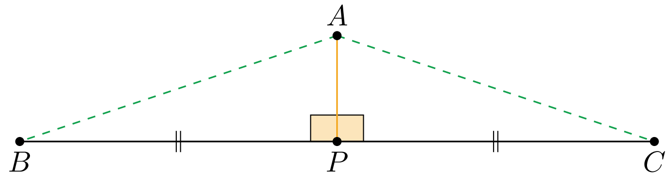
■

Obs Apesar de serem visualmente quase idênticos, os dois desenhos utilizados para demonstrar a Proposição 9.3.2 são conceitualmente diferentes, pois são construídos com base em hipóteses distintas.

A **mediatriz** de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele. No que segue, utilizaremos congruência de triângulos para caracterizar a mediatriz como *lugar geométrico*.

Proposição 9.3.3 Se A é um ponto fora da reta BC, então $AB = AC$ se e somente se A está sobre a mediatriz de BC.

Prova.
Primeira parte: A está sobre a mediatriz de BC: se P é o ponto médio de BC, então a definição de mediatriz garante que $\angle APC = \angle APB = 90°$ e $BP = PC$. Com isso, $\Delta APC \equiv \Delta APB$ pelo caso LAL (pois o lado AP é comum aos dois triângulos). Portanto, $AB = AC$.

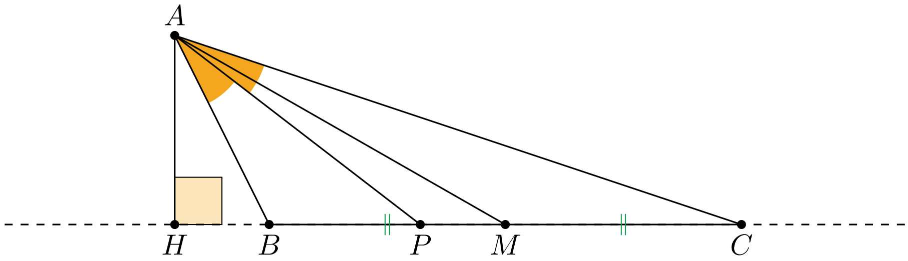


Segunda parte: $AB = AC$: então o triângulo ABC é isósceles de base BC. Sendo P o ponto médio de BC, vimos na demonstração da Proposição 9.3.2 que os triângulos APC e APB são congruentes. Logo, $BP = CP$ e $\angle APB = \angle APC$. Por fim, como tais ângulos somam $180°$, cada um deles vale $90°$.

Consequentemente, a reta AP é perpendicular ao segmendo BC em seu ponto médio, de forma que é a mediatriz de BC. ■

Obs

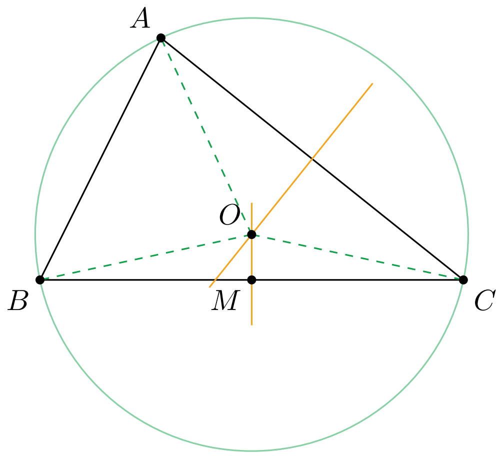
Em um triângulo, o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto é uma **mediana** do triângulo (veja a figura a seguir). O segmento que sai de um vértice e incide perpendicularmente no lado oposto é uma **altura** do triângulo. Por fim, o segmento que sai de um vértice a um ponto do lado oposto, dividindo ao meio o ângulo relativo ao vértice é uma **bissetriz interna** do triângulo. Assim, todo triângulo tem três medianas, três alturas e três bissetrizes internas (uma para cada vértice).



Dadas as definições acima, uma consequência direta da Proposição 9.3.3 é o fato que, em um triângulo isósceles, a altura, a mediatriz, a bissetriz e a mediana relativas à base coincidem.

A partir das caracterizações para mediatriz que acabamos de desenvolver, podemos justificar a existência de dois pontos notáveis de um triângulo: o **circuncentro** e o **ortocentro**.

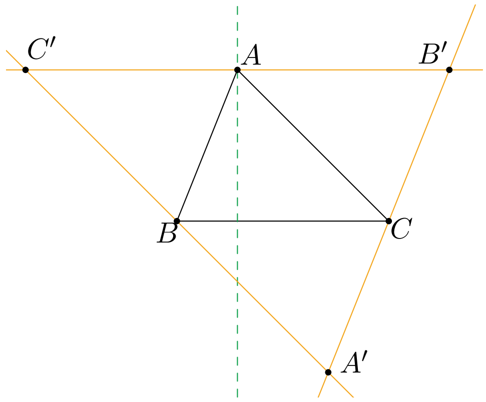
Proposição 9.3.4 Em um triângulo ABC, as mediatrizes dos lados AB, BC, CA encontram-se em um único ponto O, chamado de **circuncentro** do triângulo. Este ponto é o centro do **círculo circunscrito** ao triângulo ABC, isto é, do círculo que passa pelos vértices do triângulo.



Prova. Inicialmente, veja que as mediatrizes dos lados BC e AC não podem ser paralelas. Realmente, se o fossem, então, como elas são perpendiculares às retas BC e AC, teríamos que BC e AC também seriam paralelas, o que não é o caso. Portanto, podemos considerar o ponto de encontro O das mediatrizes dos lados BC e AC.

Uma vez que O pertence à mediatriz de BC, a Proposição 9.3.3 garante que $BO = CO$. Da mesma forma, como O pertence à mediatriz de AC, temos $AO = CO$. Então, $AO = BO$, de sorte que, novamente pela Proposição 9.3.3, O pertence à mediatriz de AB. Assim, as três mediatrizes se intersectam em um mesmo ponto O, com $AO = BO = CO$. Portanto, o círculo de centro O e raio igual a essa distância comum passa por A, B e C. ■

Proposição 9.3.5 Prove que as retas que contém as alturas de um triângulo se encontram-se em um único ponto, chamado de **ortocentro** do triângulo.



Prova. Por simplicidade, façamos a demonstração no caso de um triângulo ABC acutângulo. (A demonstração para triângulos retângulos ou obtusângulos é essencialmente a mesma, mas, no caso de um triângulo retângulo (resp. obtusângulo), o ortocentro estará localizado *em um vértice* (resp. *fora*) do triângulo. Faça figuras para se certificar dessas afirmações.)

Considere, pois, um triângulo acutângulo ABC. Trace (acompanhe na figura acima) as retas paralelas aos lados BC, CA e AB, passando pelos pontos A, B e C, respectivamente, e sejam A', B' e C' os pontos de interseção entre essas retas.

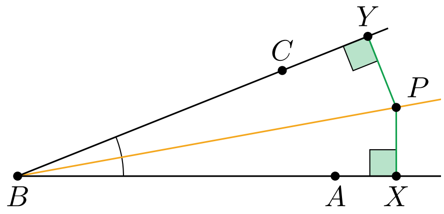
Note que $AB'CB$ é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados opostos paralelos. Com isso, a Proposição 9.3.1 garante que $BC = AB'$. De modo análogo, $ACBC'$ é paralelogramo, logo, $BC = AC'$. Assim, $AB' = AC'$, ou seja, A é ponto médio de $B'C'$. Também, uma vez que as retas BC e $B'C'$ são paralelas e a altura relativa ao lado BC é perpendicular à reta BC, ela também é perpendicular à reta $B'C'$. Então, tal altura do triângulo ABC é a mediatriz do segmento $B'C'$.

Da mesma forma, as demais alturas do triângulo ABC também são mediatrizes do triângulo $A'B'C'$. Mas, pela Proposição 9.3.4, as mediatrizes do triângulo $A'B'C'$ se encontram em um único ponto. Logo, as alturas do triângulo ABC também se encontram em um único ponto. ■

Exercício 9.4 Seja P um ponto no interior do ângulo $\angle ABC$. Sejam X e Y os pés das perpendiculares de P até as retas BA e BC, respectivamente. Prove que P está sobre a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ se e somente se $PX = PY$.

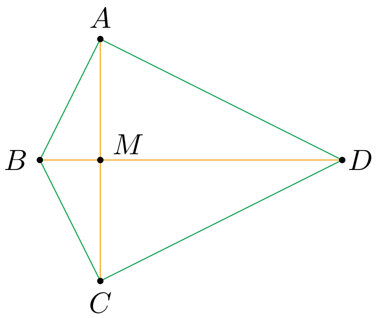
Prova.

Primeira parte: P está sobre a bissetriz do ângulo $\angle ABC$: note que os triângulos PBX e PYB são congruentes pelo caso LAA$_o$, pois BP é um lado em comum, $\angle PBX = \angle PBY$ e $\angle PXB = \angle PYB = 90°$. Logo, $PX = PY$.



Segunda parte: $\underline{PX = PY}$: então os triângulos retângulos BPX e BPY têm mesma hipotenusa e catetos PX e PY iguais. Logo, são congruentes pelo caso Cateto-Hipotenusa. Segue que $\angle ABP = \angle PBC$. ■

Exercício 9.5 Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB = BC$ e $AD = DC$. Mostre que suas diagonais são perpendiculares.



Prova. Como $AB = CB$ e $AD = CD$, a mediatriz do segmento AC passa pelos pontos B e D, logo, coincide com a reta BD. Portanto, a reta BD intersecta o segmento AC em seu ponto médio M, com BD perpendicular a AC. ■

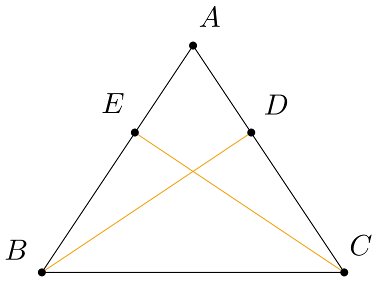
Exercício 9.6 Mostre que um triângulo que possui duas alturas de comprimentos iguais é isósceles.

Prova. Analisemos somente o caso em que ABC é acutângulo. Os casos em que ABC é retângulo ou obtusângulo podem ser tratados de modo análogo.

Considere, pois, um triângulo acutângulo ABC, com alturas iguais BD e CE, como mostrado na figura a seguir. Em primeiro lugar, veja que

$$\angle ECA = 90^\circ - \angle EAC = 90^\circ - \angle DAB = \angle DBA.$$

Portanto, para os triângulos AEC e ADB, temos $BD = CE$, $\angle ECA = \angle DBA$ e $\angle CAE = \angle BAD$, de forma que tais triângulos são congruentes pelo caso ALA. Consequentemente, $AB = AC$. ■



9.4 – O Teorema de Pitágoras

Uma das aplicações diretas mais importantes de congruências de triângulos é a demonstração do famoso Teorema de Pitágoras. Para enunciá-lo, recordemos que, em um triângulo retângulo, o maior lado (que é oposto ao ângulo reto) é chamado de *hipotenusa*, enquanto que os outros dois lados são chamados de *catetos*.

Teorema 9.4.1 — Pitágoras. Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Em símbolos, se ABC é um triângulo retângulo em C, então

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Prova. Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$ as medidas dos lados do triângulo ABC, retângulo em C. Construa um quadrado $PQRS$ de lado $a+b$ (acompanhe na figura 9.7) e considere pontos X, Y, Z e W sobre os lados deste quadrado de modo que $PX = QY = RZ = SW = a$.

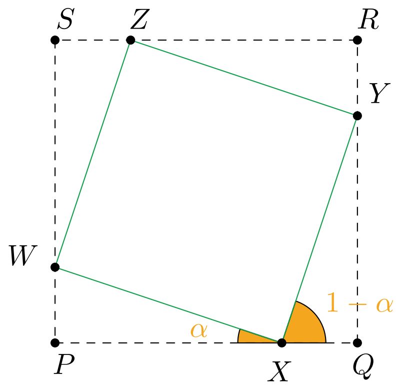


Figura 9.7: Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Dessa forma, $PW = PS - SW = (a + b) - a = b$ e, analogamente, $QX = RY = SZ = b$. Como $\angle WPX = \angle XQY = \angle YRZ = \angle ZSW = 90°$, concluímos que os triângulos PXW, QYX, RZY e SWZ são todos congruentes ao triângulo CBA, pelo caso LAL.

Portanto, os lados do quadrilátero $XYZW$ são iguais a c. Além disso, como $\angle QXY = \angle QWX$, temos

$$\angle WXP + \angle QXY = \angle WXP + \angle PWX = 180° - \angle XPW = 180° - 90° = 90°.$$

Segue, daí, que

$$\angle YXW = 180° - (\angle WXP + \angle QXY) = 180° - 90° = 90°.$$

De modo análogo, os demais ângulos do quadrilátero $XYZW$ são todos retos. Assim, $XYZW$, sendo um quadrilátero de ângulos retos e lados iguais, é um quadrado (de lado c).

Agora, observe que a área do quadrado $PQRS$ é igual à soma da área do quadrado $XYZW$ com as áreas dos triângulos retângulos congruentes PXW, QYX, RZY e SWZ. Isso nos dá a igualdade

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

ou, o que é o mesmo,

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

Cancelando a parcela $2ab$ em ambos os lados, obtemos a relação desejada,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

■

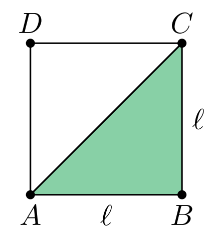
Duas consequências importantes do Teorema de Pitágoras são enunciadas nos exercícios a seguir.

Exercício 9.7 Mostre que a diagonal de um quadrado de lado ℓ tem medida $\ell\sqrt{2}$.

Prova. Se $ABCD$ é um quadrado de lado ℓ (veja a figura ao lado), então o triângulo ABC é retângulo em B e possui catetos de medida ℓ. Assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2 \Rightarrow AC = \ell\sqrt{2}.$$

■

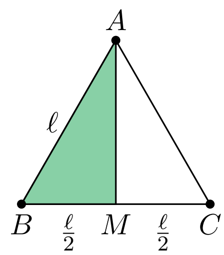


Exercício 9.8 Mostre que as alturas de um triângulo equilátero de lado ℓ têm medidas iguais a $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Prova. Seja ABC um triângulo equilátero de lado ℓ, conforme mostrado na figura ao lado. Sendo M o ponto médio do lado BC, já sabemos que AM também é altura de ABC. Portanto, o triângulo ABM é retângulo em M e possui um cateto de medida $\frac{\ell}{2}$ e a hipotenusa de medida ℓ. Sendo $AM = h$, segue do Teorema de Pitágoras que

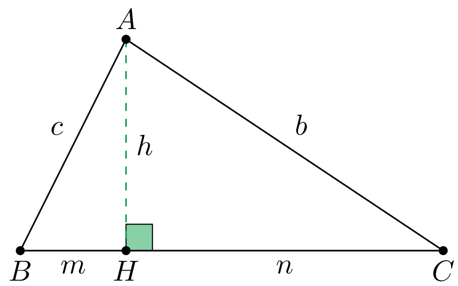
$$\ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

■



9.4.1 – Relações Métricas em Triângulos Retângulos

Continuando, consideremos agora um triângulo retângulo ABC com hipotenusa BC (acompanhe na próxima figura). Sendo H o pé da perpendicular baixada de A a BC, nosso objetivo nesta seção é calcular os comprimentos AH, BH e CH em função das medidas dos lados do ΔABC.



Por simplicidade de notação, sejam $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = h$, $BH = m$ e $CH = n$. Note que há duas formas de calcularmos a área do ΔABC: a primeira é considerando BC como base e a segunda é considerando AB como base. Comparando as fórmulas geradas por essas duas possibilidades, obtemos

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Simplificando as frações e isolando o termo h, chegamos a

$$h = \frac{b \cdot c}{a}. \tag{9.1}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AHB, temos que $m^2 + h^2 = c^2$. Substituindo o valor de h encontrado na equação (9.1) e isolando o termo m^2, obtemos:

$$m^2 = c^2 - h^2 = c^2 - \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = c^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{c^4}{a^2}.$$

(Note que, na última igualdade acima, utilizamos o Teorema de Pitágoras em ΔABC para obter $a^2 - b^2 = c^2$.)

Extraindo raízes quadradas em ambos os lados da igualdade $m^2 = \frac{c^4}{a^2}$, obtemos:

$$m = \frac{c^2}{a}. \tag{9.2}$$

De modo análogo, o Teorema de Pitágoras aplicad ao ΔAHC dá

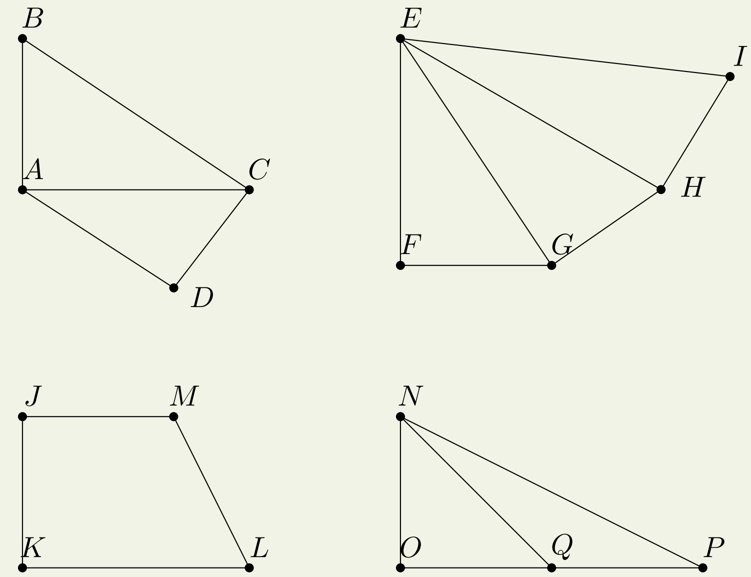
$$n = \frac{b^2}{a}. \tag{9.3}$$

As fórmulas (9.1), (9.2) e (9.3) são conhecidas como as *relações métricas do triângulo retângulo*. Elas também podem ser deduzidas utilizando semelhança de triângulos. Optamos por aplicar diretamente o conceito de área e o Teorema de Pitágoras para apresentar uma perspectiva diferente da maioria dos livros didáticos.

Obs O ideal é que, num primeiro momento, você não decore as fórmulas (9.1), (9.2) e (9.3). Melhor é deduzi-las sempre que houver a necessidade de utilizá-las para resolver algum problema. Ao fazer assim, aos poucos você as decorará naturalmente.

Exercício 9.9 Neste problema temos quatro itens, cada um correspondente a um dos quatro desenhos da figura. Em cada um deles, calcule o comprimento pedido.

(a) Ache BC, sabendo que $AB = 6$, $AD = 8$, $CD = 4$ e $\hat{A} = \hat{D} = 90°$.
(b) Ache EI, sabendo que $EF = 6$, $FG = 4$, $GH = 2$, $HI = 2\sqrt{5}$ e $\hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = 90°$.
(c) Ache JK, sabendo que $JM = 9$, $ML = 10$, $KL = 17$ e $\hat{J} = \hat{K} = 90°$.
(d) Ache OQ, sabendo que $NQ = 2\sqrt{13}$, $NP = 10$, Q é ponto médio de OP e $\hat{O} = 90°$.



Solução.

(a) Usando Pitágoras no ΔACD, temos que $AC^2 = 4^2 + 8^2 = 80$. Usando Pitágoras no ΔABC, temos que $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 80 = 116$. Assim, $BC = \sqrt{116}$.

(b) No ΔEFG, temos que $EG^2 = 6^2 + 4^2 = 52$. No ΔEGH, temos que $EH^2 = EG^2 + GH^2 = 52 + 4 = 56$. No ΔEHI, temos que $EI^2 = EH^2 + HI^2 = 56 + 20 = 76$. Logo, $EI = \sqrt{76}$.

(c) Seja P o pé da perpendicular de M até KL (faça uma figura para acompanhar). Note que o quadrilátero $KJMP$ tem todos os ângulos retos, logo, é um retângulo. Como todo retângulo é paralelogramo, tem lados opostos iguais (veja a Proposição 9.3.1), logo, $KP = JM = 9$. Também, MPL é um triângulo retângulo em P, com $PL = KL - KP = KL - JM = 17 - 9 = 8$. Usando Pitágoras no ΔMPL, temos que $MP^2 + PL^2 = ML^2$, ou seja, $MP^2 + 8^2 = 10^2$. Logo, $MP^2 = 36$ e, daí, $MP = 6$. Por fim, novamente pelo fato de $JMPK$ ser um retângulo, temos $JK = MP = 6$.

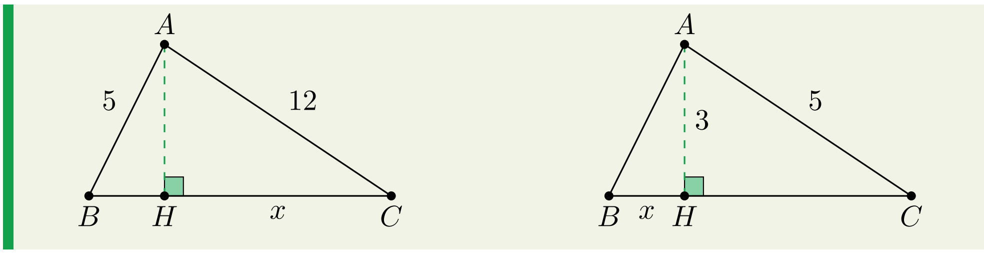
(d) Sejam $OQ = QP = x$ e $NO = y$. Usando Pitágoras nos triângulos NOQ e NOP, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52 \\ y^2 + 4x^2 = 10^2 = 100. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, vem que $3x^2 = 100 - 52 = 48$, logo, $x^2 = 48 \div 3 = 16$. Portanto, $x = 4$.

■

Exercício 9.10 Nas figuras a seguir, temos o desenho de um triângulo retângulo e da altura relativa à hipotenusa. Calcule o valor x.



Solução.

(a) Usando Pitágoras no triângulo ABC, temos que $BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Logo, $BC = 13$. Agora, usando a relação (9.3), temos que $x = \frac{12^2}{13} = \frac{144}{13}$.

(b) Usando Pitágoras no triângulo AHC, temos que $HC^2 + 3^3 = 5^2$. Logo, $HC^2 = 25 - 9 = 16$. Assim, $HC = 4$. Seja $BC = a$. Pela relação (9.3), $HC = \frac{AC^2}{BC}$. Assim, $4 = \frac{25}{a}$. Portanto, $a = \frac{25}{4}$. Por fim, $x + HC = BC$. Assim, $x = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$.

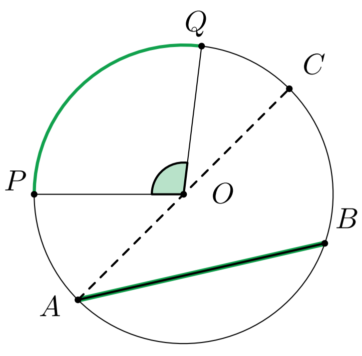
■

9.5 – Ângulos no Círculo

Considere um ponto O no plano. Um círculo de **centro** O é o conjunto de todos os pontos que estão a uma mesma distância fixada de O, distância esta denominada de **raio** do círculo. Assim, se os pontos P e Q estão sobre um mesmo círculo de centro O, então $OP = OQ$; também, por vezes dizemos que os próprios segmentos OP e OQ são *raios* do círculo.

Se P e Q são dois pontos sobre um círculo de centro O, o segmento PQ é uma **corda** do círculo. Toda corda divide o círculo em dois arcos $\overset{\frown}{PQ}$ (um maior e outro menor, mas eventualmente iguais).

Um tipo especial de corda, chamada de **diâmetro**, é aquela que passa pelo centro do círculo. Nesse caso (e somente nele), a corda divide o círculo em dois arcos iguais. Evidentemente, o comprimento de um diâmetro de um círculo é igual ao dobro da medida do raio.



Considere um círculo Γ de centro O e dois pontos A e B sobre ele. Dizemos que o arco $\overset{\frown}{AB}$, percorrido de A para B no sentido anti-horário, corresponde ao **ângulo central** $\angle AOB$ (também percorrido no sentido anti-horário – veja a figura a seguir). Nesse caso, com um certo abuso de notação, escreveremos $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$.

Na discussão do parágrafo anterior, o adjetivo *central* refere-se ao fato de que o vértice do ângulo é o centro do círculo Γ. Por outro lado, se P é um ponto de Γ que não está sobre o arco $\overset{\frown}{AB}$ (percorrido no sentido anti-horário), dizemos que $\angle APB$ é um **ângulo inscrito**. Assim, o vértice de um ângulo inscrito em um círculo é um ponto do mesmo.

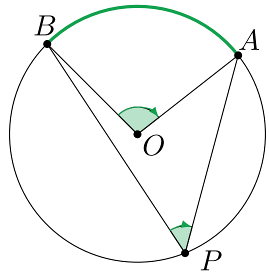


Figura 9.9: Ângulo central $\angle AOB$ e ângulo inscrito $\angle APB$.

O resultado (muito importante) a seguir relaciona as medidas de ângulos centrais e inscritos relativos a um mesmo arco de círculo.

Teorema 9.5.1 — Ângulo inscrito. O ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente.

Prova. Vamos dividir a demonstração em três casos, de acordo com as três situações apresentadas na Figura 9.10.
i. O está sobre AP: nesse caso, $\angle BPO = \angle PBO = \alpha$ (pois $OP = OB$) e $\angle AOB = 2\alpha$ (pois $\angle AOB$ é ângulo externo do ΔPOB). Assim, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

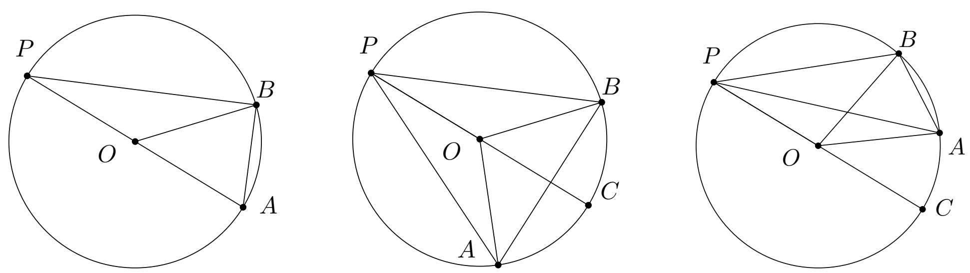
ii. O está no interior do ângulo $\angle APB$: neste caso, seja C o segundo ponto de encontro da reta PO com o círculo. Pelo item anterior, temos $\angle BOC = 2\angle BPO$ e $\angle COA = 2\angle OPA$. Daí,

$$\angle BOA = \angle AOC + \angle COB = 2(\angle APC + \angle BPC) = 2\angle BPA.$$

iii. O está no exetrior do ângulo $\angle APB$: neste caso, seja C o segundo ponto de encontro da reta PO com o círculo. Pelo item (a), já sabemos que $\angle BOC = 2\angle BPO$ e $\angle COA = 2\angle OPA$. Daí,

$$\angle BOA = \angle BOC - \angle AOC = 2(\angle BPC - \angle APC) = 2\angle BPA.$$

■



(a) Caso $O \in PA$. (b) Caso $O \in \Delta APB$. (c) Caso $O \notin \Delta APB$.

Figura 9.10: Casos de ângulos inscritos.

A partir da noção de ângulo inscrito, podemos estudar outros dois tipos de ângulos notáveis no círculo.

I. O **ângulo interior** $\angle APC$ é construído da seguinte forma: dado um ponto P no interior do círculo Γ, traçamos duas cordas AB e CD de Γ que se intersectam em P (veja a figura 9.11(a)). Tem-se

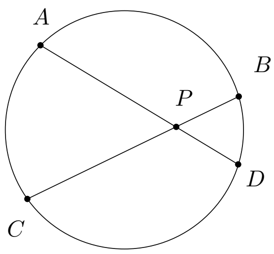
$$\angle APC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DB}}{2}.$$

(Novamente, ângulos medidos no sentio anti-horário.) Use os fatos de que $\angle APC$ é externo ao triângulo APB, $\angle BAP = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ e $\angle ABP = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

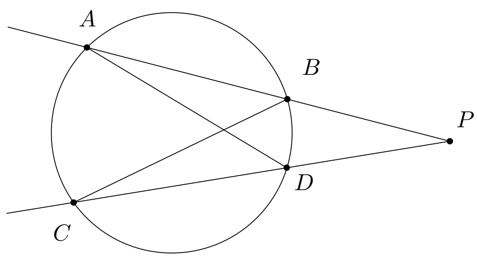
II. O **ângulo exterior** $\angle APC$ é construído da seguinte forma. A partir de um ponto externo P ao círculo Γ, traçamos duas retas r e s secantes a Γ nos pares de pontos A, B e C, D, respectivamente, com B situado sobre o segmento AP e D situado sobre o segmento CP (veja a figura 9.11(b)). Tem-se

$$\angle APC = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2}.$$

Use os fatos de que $\angle ADC$ é externo ao triângulo APD, $\angle DAP = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ e $\angle ADC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

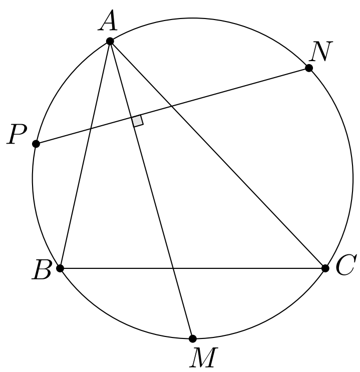


(a) Ângulo interior.



(b) Ângulo exterior

Proposição 9.5.2 Em todo triângulo ABC, as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ encontram-se em um único ponto I chamado de **incentro** do triângulo.



Prova. Considere o círculo Γ que passa pelo três vértices A, B e C e sejam M, N e P os pontos médios, respectivamente, dos arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ e $\overset{\frown}{CA}$ que não contêm os vertices opostos. Veja que $\overset{\frown}{AP} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \angle ACB$. De modo análogo, $\overset{\frown}{MC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \angle BAC$ e $\overset{\frown}{CN} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \angle ABC$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{MN}) &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{CN}) \\ &= \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Assim, o ângulo interior determinado pelas cordas AM e PN mede 90°, de sorte que elas são perpendiculares.

O raciocínio acima mostra que, se por um lado AM é uma bissetriz do triângulo ABC, por outro é uma altura do triângulo MNP. Da mesma forma, BN e CP são as outras duas alturas desse triângulo e, como já sabemos que as alturas de todo triângulo são concorrentes, concluímos que AM, BN e CP são concorrentes. ■

Para o que segue, dizemos que uma reta é **tangente** a um círculo se tiver um único ponto em comum com o círculo. Nesse caso, tal ponto é o **ponto de tangência** entre a reta e o círculo.

Teorema 9.5.3 Considere um círculo Γ de centro O e um ponto A sobre esse círculo. Se uma reta r passando por A é perpendicular a AO, então r é tangente à Γ.

Prova. Sendo B outro ponto de B (faça uma figura para acompanhar), temos que ΔAOB é retângulo em A. Logo, a hipotenusa OB é o maior lado do triângulo, de forma que $OB > OA$ =raio do círculo. Em particular, B não pertence ao círculo. Assim, A é o único ponto em comum entre r e Γ, de modo que r é tangente a Γ. ■

O próximo resultado diz que a reta tangente a um círculo por um ponto do mesmo é única.

Teorema 9.5.4 Considere um círculo Γ de centro O e um ponto A sobre esse círculo. Se uma reta r passa por A e é tangente a Γ, então $r \perp AO$.

Prova. Basta mostrar que se r é uma reta que passa por A mas não é perpendicular a AO, então r não é tangente a Γ (novamente, faça uma figura para acompanhar). Sendo t a reta que passa por A e é perpendicular a AO, sabemos do teorema anterior que t é tangente a Γ, e estamos supondo que $r \neq t$. Se α é a medida do ângulo agudo formado por r e t, marque sobre r o ponto B tal que $\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \alpha$. Então, B também pertence a Γ e r, de forma que r não é tangente a Γ. ■

A partir dos dois resultados anteriores, podemos apresentar um outro ângulo notável: o *ângulo semi-inscrito* (acompanhe com a figura a seguir): temos um círculo de centro O e dois pontos B e C sobre ele. Um reta BD é tangente ao círculo no ponto B, de modo que C e D estejam no mesmo semiplano em relação à reta OB. Nessa configuração, dizemos que $\angle CBD$ é um **ângulo semi-inscrito** ao arco $\overset{\frown}{BD}$.

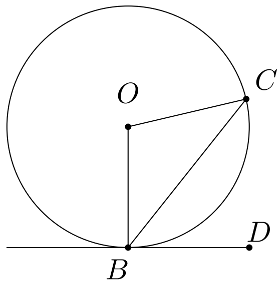
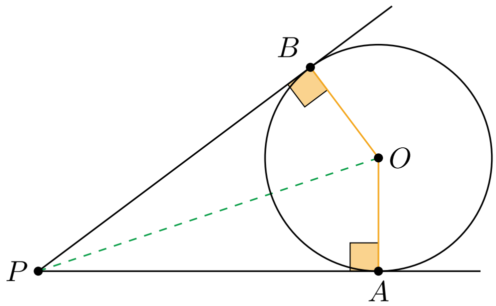


Figura 9.12: Ângulo semi-inscrito.

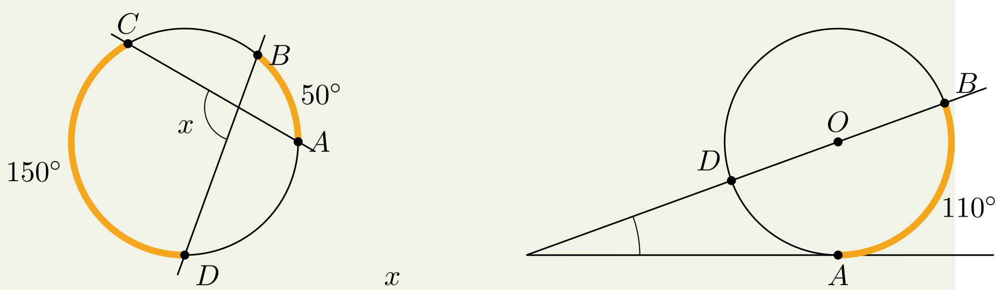
Veja que $\angle OBC = \angle OCB$, pois $OB = OC$. Daí, se $\angle COB = 2\alpha$, temos $\angle OBC = 90^\circ - \alpha$ e, por conseguinte, $\angle CBD = \alpha$. Assim, $\angle CBD = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

Teorema 9.5.5 — do Bico. Seja P um ponto fora de um círculo Γ de centro O. Sejam A e B pontos sobre Γ tais que PA e PB sejam tangentes ao círculo. Então, $PA = PB$.



Prova. Pelo Teorema 9.5.4, temos que $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$. Além disso, $OA = OB$, pois ambos esses segmentos são raios do círculo. Logo, $\Delta APO \equiv \Delta PBO$ pelo caso Cateto-Hipotenusa, de sorte que $PA = PB$. ■

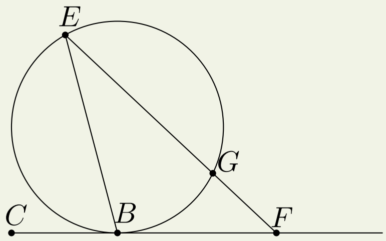
Exercício 9.11 Nas figuras a seguir, calcule o valor de x.



Solução.
(a) Veja que x é um ângulo interior. Portanto, sua medida é a média aritmética das medidas dos arcos, ou seja, $x = \frac{50^\circ + 150^\circ}{2} = 100^\circ$.

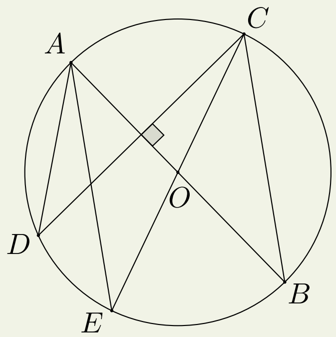
(b) Note que $\widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{AB} = 70^\circ$. Veja que x é um ângulo exterior. Portanto, sua medida é metade da diferença das medidas dos arcos que ele determina. Assim, $x = \frac{110^\circ - 70^\circ}{2} = 20^\circ$. ■

Exercício 9.12 — OBM 2005 - adaptado. Na figura a seguir, CF é tangente ao círculo em B. Se $\angle EBC = 70°$ e $EB = EG$, qual é o valor de $\angle EFB$?



Solução. Note que $\widehat{EB} = 140°$, pois $\angle EBC$ é semi-inscrito. Assim, $\angle EGB = 70°$, pois esse ângulo está inscrito no arco $\widehat{EB}$. Como BEG é isósceles, temos $\angle EBG = 70°$. Sendo C, B e F colineares, vem que $\angle GBF = 180° - \angle CBE - \angle EBG = 180° - 70° - 70° = 40°$. Agora, em relação ao triângulo GBF, $\angle EGB$ é ângulo externo. Logo $\angle EGB = \angle GBF + \angle GFB$. Assim, $\angle GFB = \angle EGB - \angle GBF = 70° - 40° = 30°$. ■

Exercício 9.13 — OBM 2013. Na figura a seguir, o ponto O é o centro do círculo que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35°$, calcule o valor em graus do ângulo $\angle DAE$.



Solução. Uma vez que $\angle ECB = 35°$ é inscrito, temos $\widehat{EB} = 70°$. Note que $\angle EOB = 70°$ pois é oângulo central correspondente ao arco $\widehat{EB}$. Agora, veja que $\angle AOC = \angle EOB = 70°$ pois tais ângulos são opostos pelo vértice O. Seja P o ponto de encontro de CD e AB. No triângulo retângulo CPO, $\angle PCO = 90° - \angle POC = 90° - 70° = 20°$. Agora note que tanto o ângulo $\angle DAE$ quanto o ângulo $\angle DCE$ $(= \angle PCO = 20°)$ são inscritos no arco $\widehat{DE}$. Portanto, ambos possuem a mesma medida (igual à metade da medida do arco $\widehat{DE}$), de forma que $\angle DAE = 20°$. ■

9.6 – Exercícios Propostos

9.6.1 – Nível 1

Exercício 9.14 A soma dos quadrados dos três lados de um triângulo retângulo é igual a 32. Quanto mede a hipotenusa do triângulo?

Exercício 9.15 A respeito dos elementos de um triângulo retângulo, assinale a alternativa correta.

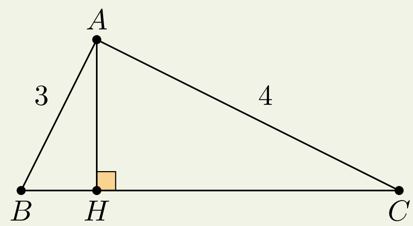
(a) O triângulo retângulo é assim conhecido por possuir pelo menos dois lados iguais.
(b) O triângulo retângulo é assim conhecido por possuir pelo menos um ângulo de 180°, também conhecido como ângulo reto.
(c) A hipotenusa é definida como o maior lado de um triângulo qualquer.
(d) A hipotenusa é definida como o lado que se opõe ao maior ângulo de um triângulo qualquer.
(e) A hipotenusa é definida como o lado que se opõe ao ângulo reto de um triângulo retângulo.

Exercício 9.16 Classifique os itens a seguir como verdadeiros ou falsos.

( ) Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.
( ) As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.
( ) Dois triângulos que têm dois lados e um ângulo respectivamente congruentes são triângulos congruentes.
( ) Dois triângulos que têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes são triângulos congruentes.

Exercício 9.17 — FUVEST 2006. Na figura abaixo, tem-se $AB = 3$, $AC = 4$ e $BC = 6$. O valor de BH é:

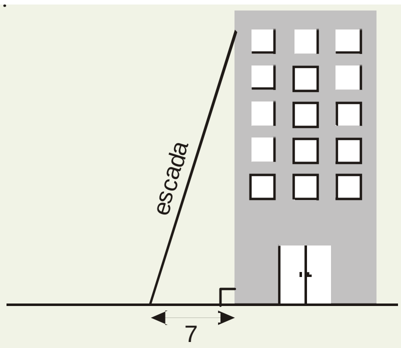
(a) 17/12.
(b) 19/12.
(c) 23/12.
(d) 25/12.
(e) 29/12.



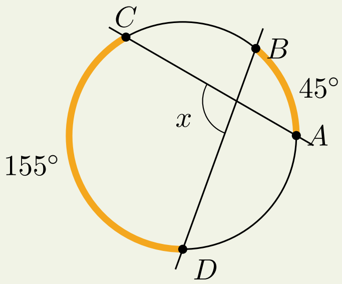
Exercício 9.18 Em um triângulo retângulo, os catetos medem b e c. Seja h a medida da altura relativa à hipotenusa. Prove que

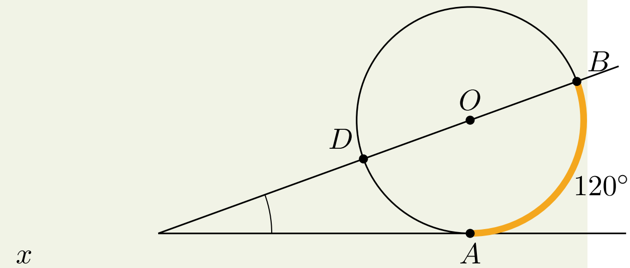
$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Exercício 9.19 — OBMEP 2005. O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como mostrado na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?



Exercício 9.20 Nas figuras a seguir, calcule o valor de x.





Exercício 9.21 — FUVEST 1985. Os pontos A, B e C pertencem a um círculo de centro O. Sabe-se que o raio OA é perpendicular ao raio OB e forma com a corda BC um ângulo de $70°$. Então, a tangente ao círculo no ponto C forma com a reta OA um ângulo de:

(a) $10°$.
(b) $20°$.
(c) $30°$.
(d) $40°$.
(e) $50°$.

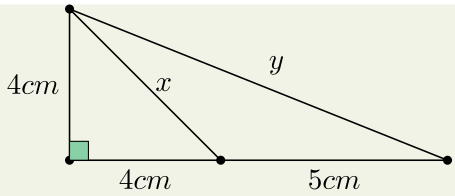
Exercício 9.22 — UFMG 1982. Um ponto exterior a um círculo é tal que a menor distância dele ao círculo mede 3m, e o segmento da tangente ao círculo traçada a partir dele mede 5m. O raio do círculo, em metros, mede:

(a) $5/2$.
(b) $8/3$.
(c) $9/4$.
(d) $14/5$.
(e) $17/8$.

9.6.2 – Nível 2

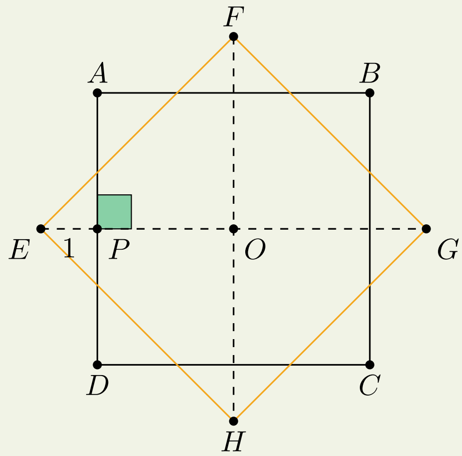
Exercício 9.23 — IFRS 2016. Na figura abaixo, o valor de x e y, respectivamente, são:

(a) $4\sqrt{2}$ e $\sqrt{97}$.
(b) $2\sqrt{2}$ e 97.
(c) $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{27}$.
(d) $4\sqrt{2}$ e $2\sqrt{27}$.
(e) $4\sqrt{2}$ e 97.

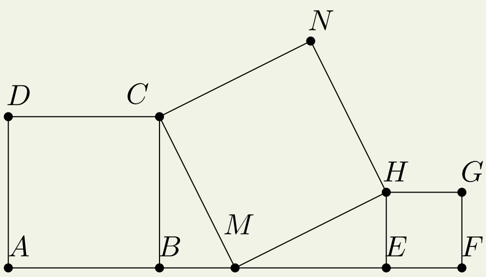


Exercício 9.24 — FUVEST 2001. Na figura abaixo, os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm lado ℓ e centro O. Se $EP = 1$, então ℓ mede:

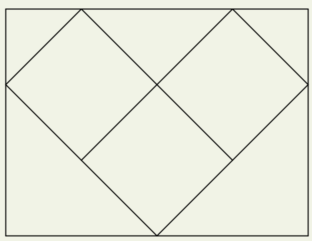
(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.
(b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(d) 2.
(e) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$.



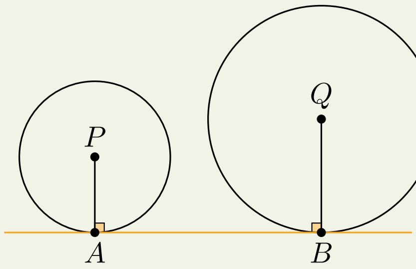
Exercício 9.25 — OBM. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de área $64cm^2$ e $EFGH$ um quadrado de área $36cm^2$. Determine a área do quadrado $CMHN$.



Exercício 9.26 — OBM. Na figura a seguir, temos três quadrados des áreas iguais a 1. Quanto mede a área do retângulo que os contorna?



Exercício 9.27 Na figura a seguir AB é a tangente comum aos círculos de centros P e Q. Sabe-se que o raio do círculo menor mede 3cm e o raio do círculo maior mede 5cm. Se a medida do segmento PQ é 10cm, calcule a medida do segmento AB.



Exercício 9.28 Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos de medidas 5 e 12.

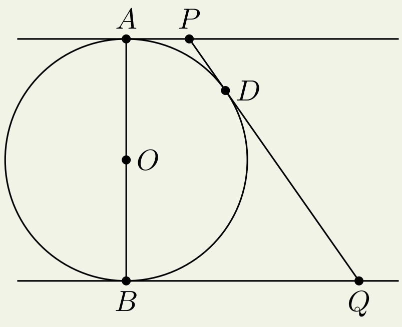
Exercício 9.29 Se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo são diâmetros de dpis círculos, prove que o outro ponto comum aos círculos está situado sobre o lado $\overline{BC}$.

Exercício 9.30 Mostre que todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo.

Exercício 9.31 Prove que o incentro de um triângulo é o centro de um círculo tangente aos lados do triângulo. Tal círculo é denominado o **círculo inscrito** no triângulo.

Exercício 9.32 — FCM STA.CASA 1977. Na figura abaixo, O é o centro do círculo, AP, PQ e BQ são tangentes ao círculo, $AP = a$ e $BQ = b$. O valor de AB é:

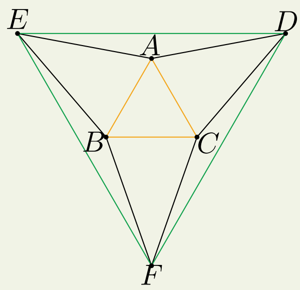
(a) $\sqrt{b+a}$.
(b) $\sqrt{2ab}$.
(c) $2\sqrt{ab}$.
(d) $2a\sqrt{b+a}$.
(e) $2\sqrt{ab+2a}$.



9.6.3 – Nível 3

Exercício 9.33 Na figura a seguir, ΔABC é equilátero e $AE = EB = BF = CF = AD = CD$ de modo que o ΔABC é interno ao ΔDEF. Prove que

ΔDEF é equilátero.



Exercício 9.34 — ENEM 2016. A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a figura 2.

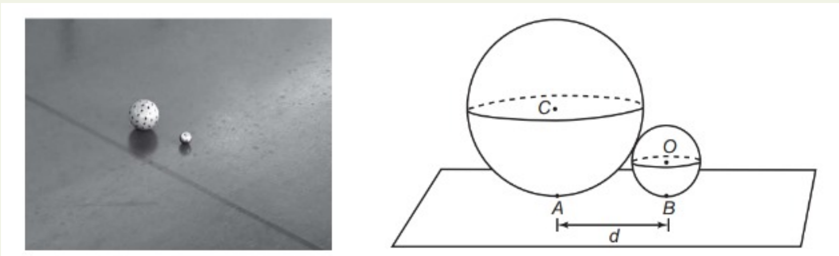
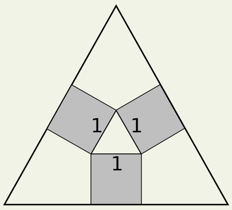


Figura 1 Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d. Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

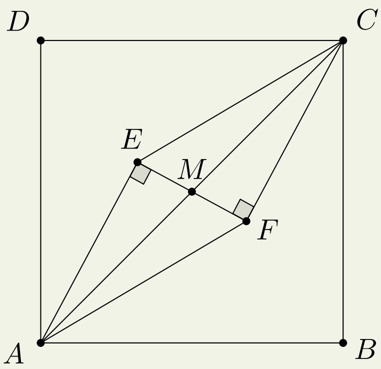
(a) 1.
(b) $2\sqrt{10}/5$.
(c) $\sqrt{10}/2$.
(d) 2.
(e) $\sqrt{10}$.

Exercício 9.35 — Olimpíada de Matemática da Holanda 2009. Na figura a seguir, temos três quadrados de lado 1 e dois triângulos equiláteros. Calcule o lado do triângulo equilátero maior.



Exercício 9.36 No interior do quadrado $ABCD$ são escolhidos dois pontos E e F de modo que $AE = FC = 7$, $EF = 2$ e $\angle AEF = \angle EFC = 90°$.

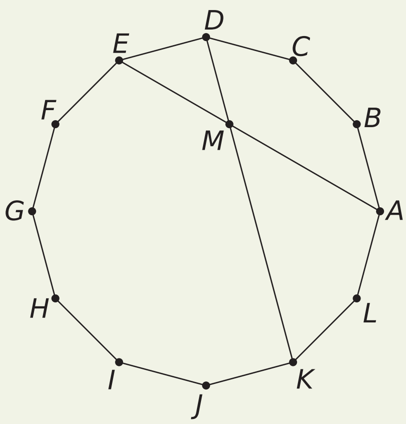
(a) Mostre que $AECF$ é um paralelogramo.
(b) Calcule a área do quadrado $ABCD$.



Exercício 9.37 Sejam A, B, C e D pontos sobre um círculo. Prove que $AB = CD$ se e somente se $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (arcos medidos no sentido anti-horário).

Exercício 9.38 Sejam r e R os raios dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo retângulo de catetos a e b. Prove que $a + b = 2(R + r)$

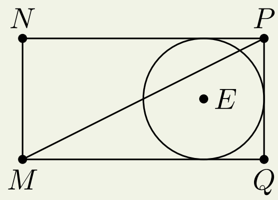
Exercício 9.39 — OBMEP 2009. O polígono $ABCDEFGHIJKL$ é regular e tem doze lados.



(a) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?
(b) O ponto M é a interseção das diagonais AE e DK. Quais são as medidas dos ângulos $\angle MDE$ e $\angle DME$?
(c) Qual é a medida do ângulo $\angle CBM$?
(d) Prove que os pontos B, M e F estão alinhados.

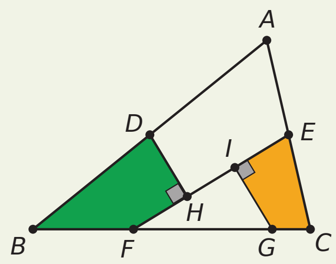
Exercício 9.40 — UECE 1992. Na figura abaixo, $MNPQ$ é um retângulo e o ponto E é o centro do círculo tangente aos lados NP, PQ e MQ. Se $MN = 4\text{cm}$ e $NP = 8\text{cm}$, então a distância do ponto E à diagonal MP, em centímetros,vale:

(a) $\frac{\sqrt{12}}{5}$.
(b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.
(c) $\frac{\sqrt{18}}{5}$.
(d) $\frac{\sqrt{20}}{5}$.

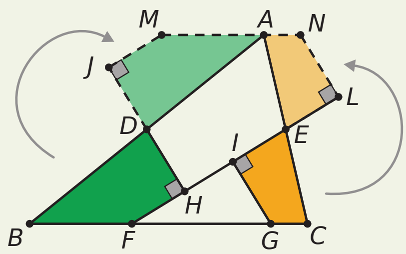


9.6.4 – Nível 4

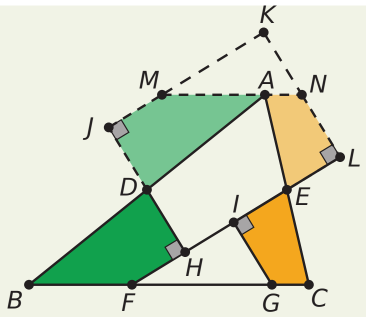
Exercício 9.41 — OBMEP 2011. Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$



(a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $\angle MAN$ é igual a 180°.

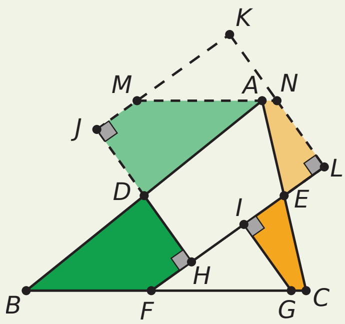


(b) Na próxima figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

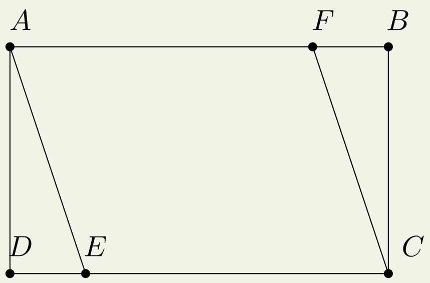
(c) Mostre que $LH = EF$.
(d) Na figura a seguir, o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.



Exercício 9.42 Sejam E e F pontos sobre os lados BC e CD, respectivamente, de um quadrado $ABCD$, de modo que AEF seja um triângulo equilátero. Sejam P, Q e R os pés das perpendiculares baixadas de B, C e D aos lados AE, EF e FA, também respectivamente. Mostre que $CQ = BP + DR$.

Exercício 9.43 — Teorema de Thébault. Seja $ABCD$ um quadrado e ADE e DCF triângulos equiláteros construídos exteriormente ao quadrado. Mostre que EBF também é um triângulo equilátero.

Exercício 9.44 Nos lados AB e DC do retângulo $ABCD$, os pontos F e E são escolhidos de modo que $AFCE$ seja um losango. Se $AB = 16$ e $BC = 12$, ache EF.



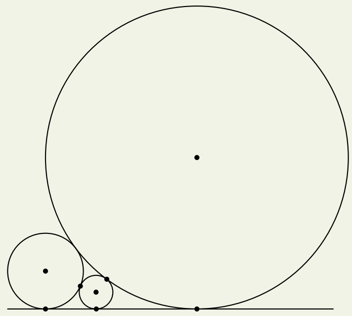
Exercício 9.45 No ΔABC, I é o incentro e P o ponto de interseção de AI com o círculo circunscrito ao ΔABC. Mostre que $PB = PI = PC$.

Exercício 9.46 No ΔABC, O é o centro co círculo circunscrito ao triângulo e H o ortocentro. Mostre que $\angle BAH = \angle OAC$.

Exercício 9.47 O ΔABC está inscrito em um círculo Γ. Sabendo que H é o ortocentro, D é o pé da altura baixada a partir de A e T é o ponto de interseção de AD com o círculo circunscrito ao ΔABC, mostre que $HD = DT$.

Exercício 9.48 Três circulos são tangentes externamente entre si e a uma reta ℓ, como mostrado na figura a seguir. Se a e b são os raios dos círculos maiores e c é o raio do círculo menor, prove que

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$



Exercício 9.49 Considerando os axiomas básico da Geometria Plana apresentados no módulo anterior, prove que os casos de congruência **LLL**, **LAL**, **LAA**$_o$ e **ALA** são equivalentes. Ou seja, que se assumirmos um deles como verdadeiro, podemos demonstrar que os outros são verdadeiros usando apenas os axiomas de Euclides.