Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:
Ulisses Parente
Italândia F. de Azevedo
Bruno Holanda
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Números Racionais
Volume 1
Frações

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

N971 Números racionais – volume 1[recurso eletrônico] / Ulisses Lima Parente...[et.al.].- Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

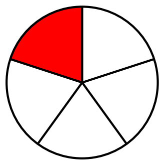
Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43572-6 (E-book)

1. Frações. 2. Frações equivalentes. 3. Comparação de frações. I. Parente, Ulisses Lima. II. Azevedo, Italândia Ferreira de. III. Holanda, Francisco Bruno de Lima. IV. Muniz Neto, Antonio Caminha. V. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). VI. Título.

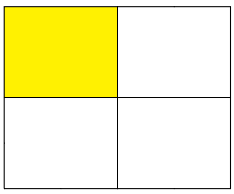
CDD: 513.26

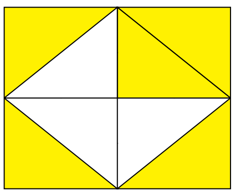
3 Frações

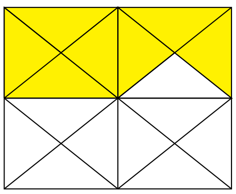
Várias situações em nosso cotidiano nos levam ao uso de *frações*. Por exemplo, imagine que você e outros quatro amigos foram a uma pizzaria, pediram uma pizza e todos comeram a mesma quantidade. Desse modo, cada um comeu, da pizza, exatamente *uma parte em cinco*. Representamos matematicamente essa *fração da pizza* que cada um comeu utilizando o **número fracionário** ou **fração** $\frac{1}{5}$ (lê-se *um quinto*). Na figura abaixo, temos uma representação geométrica da parte da pizza comida por cada um:

 $= \dfrac{1}{5}$

Observe outros exemplos de frações, juntamente com possíveis representações geométricas das mesmas:

 $= \frac{1}{4}$ (lê-se: um quarto)

 $= \frac{5}{8}$ (lê-se: cinco oitavos)

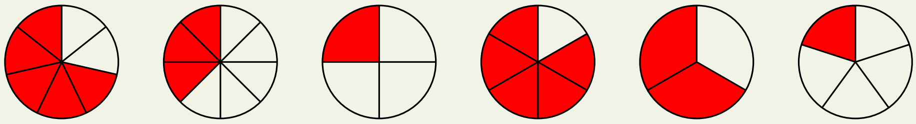
 $= \frac{7}{16}$ (lê-se: sete dezesseis avos)

De modo geral, temos que:

O conjunto das frações é formado por todos os números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais, sendo $b > 0$. Os números naturais a e b são chamados, respectivamente, de **numerador** e **denominador** da fração $\frac{a}{b}$. O denominador indica a *quantidade de partes em que um total* (*que geralmente é pensado com um inteiro*) *foi dividido* e o numerador indica a *quantidade de partes que foram tomadas*.

$$\frac{a \longleftarrow \text{numerador}}{b \longleftarrow \text{denominador}}$$

Exercício 3.1 Escreva a fração correspondente à região destacada em cada uma das figuras abaixo.

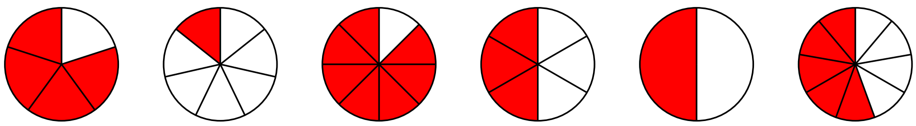


Solução. Na primeira figura, estão pintadas 5 das 7 partes nas quais o círculo foi dividido. Assim, temos uma representação da fração $\frac{5}{7}$. Na segunda, foram pintadas 3 das 8 partes, logo, temos uma representação de $\frac{3}{8}$. Seguindo o mesmo raciocínio, nas figuras seguintes temos representações geométricas para as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$, respectivamente. ■

Exercício 3.2 Dê uma representação geométrica para cada uma das frações a seguir:

(a) $\frac{4}{5}$. (b) $\frac{1}{7}$. (c) $\frac{7}{8}$. (d) $\frac{3}{6}$. (e) $\frac{1}{2}$. (f) $\frac{5}{9}$.

Solução. Representações geométricas para as frações acima são dadas nas seguintes figuras:



$\frac{4}{5}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{9}$

■

Agora, considere a seguinte situação-problema:

Exercício 3.3 Em uma prova, um aluno acertou 15 questões, o que corresponde a $\frac{5}{7}$ do total de questões. Nesta prova havia:

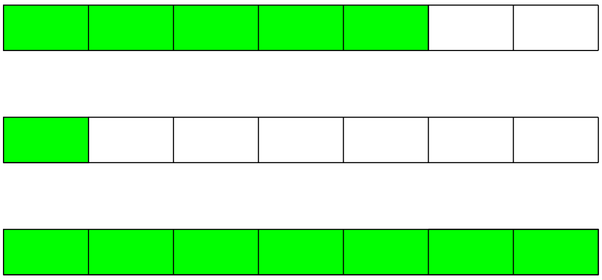
(a) 20 questões.
(b) 21 questões.
(c) 28 questões.

(d) 30 questões.
(e) 35 questões.

Solução. Vamos representar o total de questões da prova por uma barra. Assim, dividimos essa barra em 7 retângulos iguais e pintamos de verde 5 desses retângulos para representar o total de questões respondidas corretamente.

$= \frac{5}{7}$

Como 5 retângulos correspondem a 15 questões, 1 retângulo corresponde a $15 \div 5 = 3$ questões. Portanto, os 7 retângulos (que representam o total de questões da prova), correspondem a $7 \times 3 = 21$ questões (veja a próxima figura).



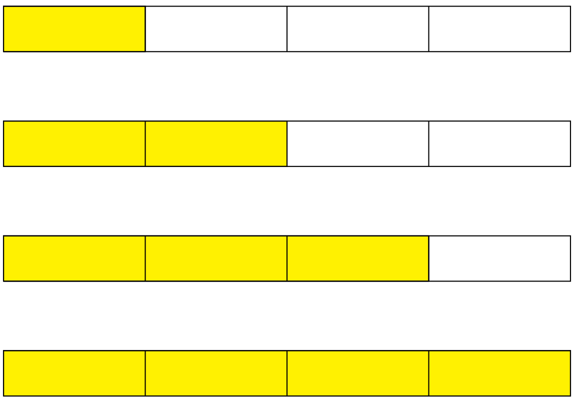
$= \frac{5}{7} \longleftrightarrow 15$ questões

$= \frac{1}{7} \longleftrightarrow 15 \div 5 = 3$ questões

$= \frac{7}{7} \longleftrightarrow 7 \times 3 = 21$ questões

■

A situação-problema a seguir traz outro exemplo de aplicação da ideia de fração. Para compreendê-la adequadamente, observamos que, em Fortaleza, existe uma lei que obriga os estacionamentos do centro da cidade a cobrarem o valor pago pelo estacionamento de forma *fracionada* nos períodos que excedem 1 hora. Antes da lei, o tempo de estacionamento era cobrado por hora, sem fracionamento. Assim, se alguém estacionasse o carro por 1 hora e 1 minuto, pagaria o valor referente a 2 horas de estacionamento. A partir do momento em que a lei começou a valer, os estacionamentos passaram a cobrar frações de $\frac{1}{4}$ de hora (ou seja, de 15 em 15 minutos), a partir da segunda hora. Por exemplo, se um carro ficar no estacionamento por um tempo de até 15 minutos, será cobrado $\frac{1}{4}$ do valor total de 1 hora de estacionamento, entre 15 e 30 minutos é cobrado $\frac{2}{4}$ do valor correspondente a 1 hora, entre 30 e 45 minutos, é cobrado $\frac{3}{4}$ do valor cobrado por 1 hora e, entre 45 minutos e 1 hora, é cobrado o valor total por 1 hora de estacionamento.



$= \frac{1}{4}$

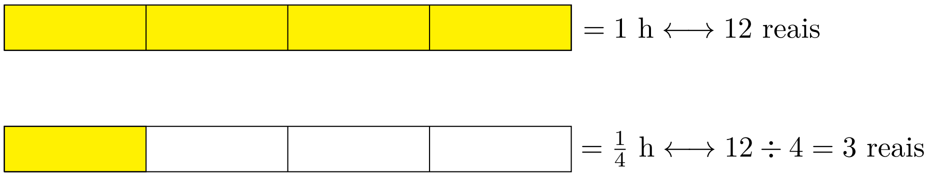
$= \frac{2}{4}$

$= \frac{3}{4}$

$= \frac{4}{4}$

Exercício 3.4 Joaquim deixou o seu carro em um estacionamento no Centro de Fortaleza, o qual cobra R$ 12,00 por cada hora. Sabendo que Joaquim retornou para pegar o carro 1h15min depois, quanto ele pagou pelo estacionamento?

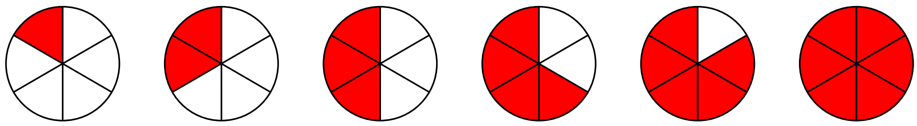
Solução. Perceba que Joaquim pagou apenas um quarto da segunda hora. Uma vez que, por 1 hora completa, o valor a ser pago é de 12 reais, por 15 minutos, que correspondem a $\frac{1}{4}$ da hora, o valor a ser pago é $12 \div 4 = 3$ reais. Então, Joaquim pagou $12 + 3 = 15$ reais de estacionamento.



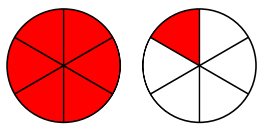
■

Até aqui, estudamos frações apenas como partes de um inteiro. No entanto, é muito útil apliarmos essa compreensão para uma quantidade de partes que supere o inteiro. Veja o exemplo abaixo:

1. As frações $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{6}$ podem ser representadas pela seguinte sequência de figuras.

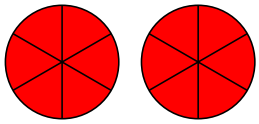


2. Note que, de uma fração para outra, é adicionada uma "fatia" que corresponde a $\frac{1}{6}$ do círculo.
3. Agora, vamos pensar um pouco: **o que poderia significar a fração $\frac{7}{6}$? Como poderíamos representar essa fração geometricamente?** Procurando manter o padrão que foi apresentado, seria necessário acrescentar uma outra fatia de $\frac{1}{6}$ aos $\frac{6}{6}$ já existentes. Como o disco já está completo, devemos desenhar um segundo disco, dividi-lo novamente em seis partes iguais e acrescentar uma dessas partes. Geometricamente, temos a seguinte representação:



Observação 3.0.1 Observe que, na representação acima, *utilizamos a convenção, dada pelo contexto que vimos discutindo, de que cada disco representa 1 inteiro.* Assim, você *não deve se confundir* e achar que, porque pintamos 7 partes em 12, representamos a fração $\frac{7}{12}$.

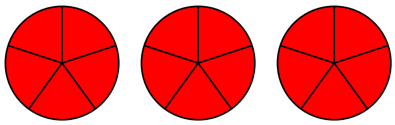
Seguindo o mesmo raciocínio, na próxima figura temos uma representação geométrica para a fração $\frac{12}{6}$.

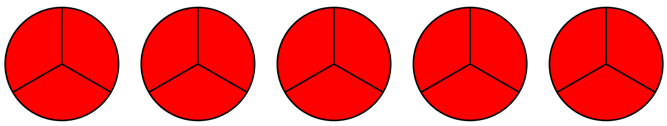


Observe que essa representação geométrica corresponde a exatamente 2 inteiros. Portanto, isso nos leva à igualdade

$$\frac{12}{6} = 2.$$

De fato, podemos ver a fração $\frac{12}{6}$ como $12 \div 6$, pois a cada 6 fatias correspondentes a $\frac{1}{6}$ temos 1 inteiro. De modo similar, temos $\frac{15}{5} = 3$ e $\frac{15}{3} = 5$ (veja as próximas figuras).





Observação 3.0.2 Chamamos sua atenção para o fato de que alguns livros ainda insistem em utilizar uma classificação (essecialmente inútil) para frações, na qual uma fração é **própria** quando o numerador é menor que o denominador e **imprópria** quando o numerador é maior que o denominador. Quando for possível dividir (com resto igual a zero) o numerador pelo denominador, também diz-se por vezes que a fração é **aparente** (e esse é mais um nome que deveria ter caído em desuso). As frações

$$\frac{5}{6}, \ \frac{1}{3} \ \text{e} \ \frac{13}{17}$$

são exemplos de frações próprias,

$$\frac{7}{6}, \ \frac{13}{12} \ \text{e} \ \frac{34}{15}$$

são exemplos de frações impróprias e

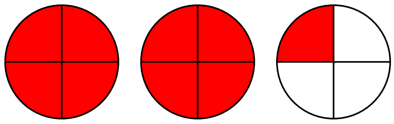
$$\frac{12}{4}, \ \frac{22}{11} \ \text{e} \ \frac{35}{5}$$

são exemplos de frações aparentes.

Vejamos o seguinte problema:

Exercício 3.5 A mãe de Tobias comprou 3 bolos de chocolate (idênticos) para comemorar o início das férias. Ele e outros 8 amigos dividiram cada bolo em 4 partes iguais, e cada uma das nove crianças comeu uma dessas partes. Que fração de um bolo os nove amigos comeram juntos?

Solução. Veja, na figura abaixo, a divisão dos bolos em 4 partes iguais e, em vermelho, a fração comida pelos 9 (Tobias e seus 8 amigos).



É fácil perceber que os amigos comeram, juntos, $\frac{9}{4}$ de um bolo. Também podemos representar essa fração sob a forma $2\frac{1}{4}$, para indicar que Tobias e seus amigos comeram 2 bolos inteiros mais $\frac{1}{4}$ do terceiro bolo. ■

Observação 3.0.3 Uma fração imprópria, por ter o numerador maior que o denominador, representa uma quantidade maior que um inteiro. Assim, sempre podemos representar uma fração imprópria como uma parte inteira mais uma fração própria, como fizemos no exemplo anterior. Essa representação é denominada **número misto** (um quarto nome que ainda aparece em vários livros, mas que deveria ter caído em desuso). Desse modo, um número misto é formado por uma parte inteira e uma parte fracionária. Na prática, para *transformar uma fração imprópria em número misto*, dividimos o numerador pelo denominador e observamos o quociente e o resto dessa divisão. O quociente é a parte inteira do número misto e o resto é o numerador da parte fracionária do número misto. Por fim, o denominador da parte fracionária do número misto é o mesmo da fração imprópria. Por exemplo,

$$\frac{35}{8} = {\color{blue}4}\frac{\color{red}3}{8},$$

pois

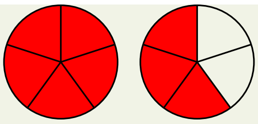
$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \cline{2-2} {\color{red}3} & {\color{blue}4} \end{array}$$

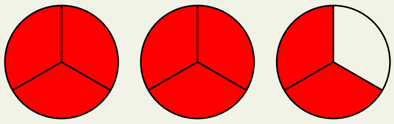
Para obter o numerador da fração imprópria que correspondente a um número misto dado, basta multiplicar a parte inteira do número misto pelo denominador e adicionar o numerador da sua parte fracionária. Por exemplo

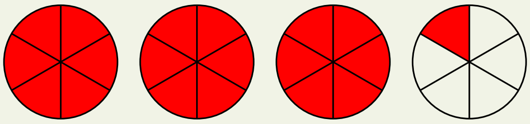
$$5\frac{3}{11} = \frac{5 \times 11 + 3}{11} = \frac{58}{11}.$$

Mais uma vez, chamamos sua atenção para o fato de que, apesar da inutilidade dos nomes *fração imprópria* e *número misto*, é importante lembrar como fazer a *mudança de representação de um fração*, de uma fração imprópria (isto é, uma fração com numerador maior que denominador) para um número misto (isto é, um inteiro somado a uma fração com numerador menor que o denominador), e vice-versa. O exercício a seguir treina essa mudança de representação.

Exercício 3.6 Escreva a fração imprópria e o número misto que representam a parte pintada de vermelho em cada um dos seguintes itens.

(a) 

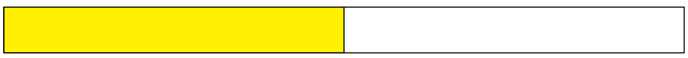
(b) 

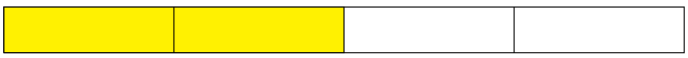
(a) 

Solução. No item (a), temos uma representação geométrica para a fração imprópria $\frac{8}{5}$, que corresponde ao número misto $1\frac{3}{5}$. No item (b), está representada a fração imprópria $\frac{8}{3}$, que corresponde ao número misto $2\frac{2}{3}$. Por fim, a figura do item (c) representa a fração imprópria $\frac{19}{6}$, que corresponde ao número misto $3\frac{1}{6}$. ■

3.1 – Frações equivalentes

Existem várias formas de representar uma mesma fração. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, que estão representadas geometricamente na figura abaixo, quantificam a mesma porção de um todo. Neste caso, dizemos que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **frações equivalentes**.

 $= \frac{1}{2}$

 $= \frac{2}{4}$

A esta altura, temos uma pergunta natural:

Como podemos obter frações equivalentes a uma fração dada?

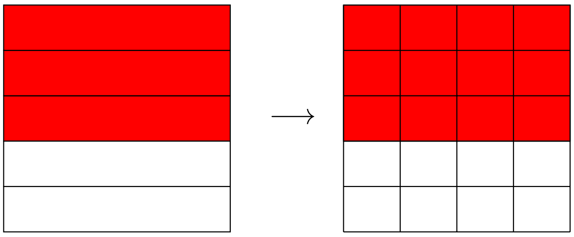
A resposta a essa pergunta é a seguinte:

— Sempre que multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração $\frac{a}{b}$ **por um mesmo número natural** maior que 1, obteremos uma fração equivalente a $\frac{a}{b}$.

Por exemplo, na fração $\frac{3}{5}$, multiplicando o numerador e o denominador por 4, obtemos:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}.$$

Na figura abaixo, o quadrado da esquerda representa a fração $\frac{3}{5}$, enquanto o da direita representa a fração $\frac{12}{20}$. Note que as áreas pintadas de vermelho nos dois quadrados são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações. De outra maneira, multiplicar o numerador e o denominador por 4 equivale a partir os retângulos da figura da esquerda em mais pedaços, de



tal maneira que, no final das contas, a porção correspondente aos retângulos vermelhos continua a mesma.

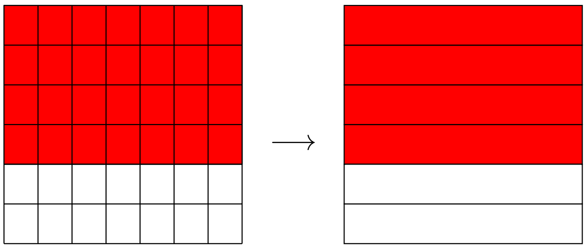
Para um outro exemplo, multiplicando o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{6}$ por 7, obtemos:

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \times 7}{6 \times 7} = \frac{28}{42}.$$

Então, veja que podemos entender as igualdades acima *da direita para a esquerda, utilizando divisões por um mesmo número, em vez de multiplicações*:

$$\frac{28}{42} = \frac{28 \div 7}{42 \div 7} = \frac{4}{6}.$$

Começando com a fração $\frac{28}{42}$, podemos interpretar geometricamente a equivalência entre ela e a fração $\frac{4}{6}$ como na figura abaixo, na qual o quadrado da esquerda representa a fração $\frac{28}{42}$ e o da direita representa $\frac{4}{6}$.

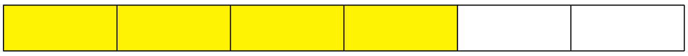


Recapitulando, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural maior que 1, aumentamos a quantidade de partes nas quais o todo foi dividido e a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural maior que 1, diminuímos essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial. No entanto, veremos que essa não é a única maneira de obter duas frações equivalentes, mas, para isso, precisamos primeiro falar de *frações irredutíveis*.

Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo natural maior que 1, estamos **simplificando** a representação da fração. Dessa forma, voltando ao exemplo anterior, temos que $\frac{4}{6}$ é uma **simplificação** da fração $\frac{28}{42}$ ou, ainda, que $\frac{4}{6}$ é uma **forma reduzida** da fração $\frac{28}{42}$.

Após chegar à fração $\frac{4}{6}$, podemos continuar simplificando, dessa vez dividindo o numerador e o denominador por 2 para obter a fração $\frac{2}{3}$. Contudo, observe que, agora, não podemos mais simplificar a fração $\frac{2}{3}$, já que não existe nenhum número natural maior que 1 que divida 2 e 3 ao mesmo tempo (isto acontece porque 2 e 3 são *primos entre si*, isto é, $\text{mdc}(2{,}3) = 1$). Neste caso, dizemos que $\frac{2}{3}$ é a **representação irredutível** da fração $\frac{28}{42}$, ou simplesmente que $\frac{2}{3}$ é uma **fração irredutível**.

Vejamos, geometricamente, por que $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes:

 $= \frac{4}{6}$

 $= \frac{2}{3}$

Observação 3.1.1 Pelo método das divisões sucessivas, temos:

	1	2
42	28	14
14	0	

Portanto, mdc(28,42) = 14, e poderíamos ter dividido o numerador e o denominador da fração $\frac{28}{42}$ diretamente por 14, em vez de primeiro dividir por 7 e depois por 2. Assim fazendo, obteríamos:

$$\frac{28}{42} = \frac{28 \div 14}{42 \div 14} = \frac{2}{3}.$$

De modo geral, quando dividimos o numerador e o denominador da fração $\frac{a}{b}$ por $d = \text{mdc}(a,b)$, obtemos a forma irredutível da fração. Realmente, após executar essa simplificação, não haverá outro fator comum maior que 1 pelo qual possamos dividir o númerador e o denominador, o que torna impossível uma outra simplificação.

Exercício 3.7 — OBM 2004. Simplificando a fração

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004},$$

obtemos:

(a) 2004. (b) $\frac{113}{355}$. (c) $\frac{1}{2004}$. (d) $\frac{2}{3}$. (e) $\frac{2}{7}$.

Solução. Observe que

$$2004 + 2004 = 2 \times 2004;$$

$$2004 + 2004 + 2004 = 3 \times 2004.$$

Daí,

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004} = \frac{2 \times \cancel{2004}}{3 \times \cancel{2004}} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a forma simplificada da fração dada no exercício é $\frac{2}{3}$ e a alternativa correta é a letra (d). ■

Exercício 3.8 O Clube de Regatas do Flamengo foi o campeão brasileiro de futebol do ano de 2019. Durante esse ano, o clube fez uma campanha incrível. Até a trigésima quinta rodada, havia feito 84 pontos, de um total de $35 \times 3 = 105$ pontos possíveis. Que fração representa o aproveitamento do Flamengo (número de pontos ganhos em relação ao número de pontos possíveis)?

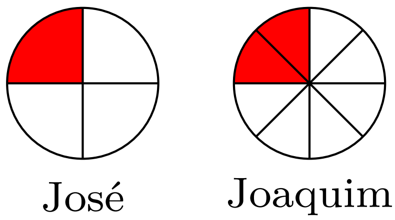
Solução. A fração que representa o aproveitamento do Flamengo com relação ao total de pontos disputados é
$$\frac{84}{105}.$$
Calculando mdc(84,105) pelo método das divisões sucessivas, obtemos

	1	4
105	84	21
21	0	

Assim, $\text{mdc}(84{,}105) = 21$, de forma que, dividindo o numerador e o denominador da fração $\frac{84}{105}$ por 21, obtemos:
$$\frac{84 \div 21}{105 \div 21} = \frac{4}{5}.$$
■

Exercício 3.9 Os amigos Joaquim e José foram a uma pizzaria e pediram uma pizza grande. Joaquim comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e José comeu $\frac{2}{8}$. Quem comeu mais pizza?

Solução. Na figura abaixo, temos uma representação geométrica das frações da pizza comidas pelos dois amigos:



Veja que, quando dividimos o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{8}$ por 2, obtemos
$$\frac{2 \div 2}{8 \div 2} = \frac{1}{4},$$
assim como, quando multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{4}$ por 2, obtemos
$$\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}.$$
Desse modo, concluímos que Joaquim e José comeram a mesma quantidade de pizza. ■

Observação 3.1.2 Ainda em relação ao exemplo anterior, note que não é preciso checar que $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são equivalentes passando de $\frac{1}{4}$ para $\frac{2}{8}$ multiplicando numerador e denominador por 2 e, em seguida, passando de $\frac{2}{8}$ para $\frac{1}{4}$ dividindo numerador e denominador por 2. Uma só dessas checagens é suficiente, e só fizemos as duas para lhe mostrar como poderíamos partir de

$\frac{1}{4}$ para $\frac{2}{8}$, ou vice-versa.

A maneira mais geral pela qual duas frações podem ser equivalentes (no sentido de representar a mesma parte de um todo) é a seguinte:

Duas frações são equivalentes se tiverem a mesma forma reduzida.

Por exemplo, as frações $\frac{10}{16}$ e $\frac{15}{24}$ são equivalentes, uma vez que ambas têm forma reduzida $\frac{5}{8}$. Realmente,

$$\frac{10}{16} = \frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad \frac{15}{24} = \frac{15 \div 3}{24 \div 3} = \frac{5}{8}.$$

Existe um critério simples para verificar se duas frações dadas são equivalentes sem precisar simplificá-las a frações reduzidas: basta fazer os dois produtos

"*numerador de uma fração* × *denominador da outra fração*"

e ver se esses produtos são iguais ou não: as frações são equivalentes se, e só se, esses produtos forem iguais.

Por exemplo, para as frações acima, como $\frac{10}{16} = \frac{5 \times 2}{8 \times 2}$ e $\frac{15}{24} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3}$, esses produtos valem

$$10 \times 24 = (5 \times 2) \times (8 \times 3) = 5 \times 8 \times 2 \times 3$$

e

$$15 \times 16 = (5 \times 3) \times (8 \times 2) = 5 \times 8 \times 2 \times 3;$$

logo, são iguais (a 240).

Exercício 3.10 Qual das frações abaixo não é equivalente a $\frac{12}{18}$.

(a) $\frac{6}{9}$. (b) $\frac{10}{16}$. (c) $\frac{4}{6}$. (d) $\frac{8}{12}$. (e) $\frac{2}{3}$.

Solução. Uma possibilidade é simplificar as frações dadas:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}.$$

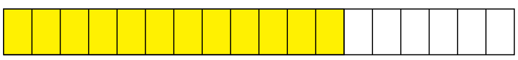
Logo, $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes a $\frac{12}{18}$. Por outro lado,

$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 2}{12 \div 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\frac{8}{12}$ também é equivalente a $\frac{12}{18}$. Finalmente,

$$\frac{10}{16} = \frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}.$$

Mas, como $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ são frações irredutíveis diferentes, concluímos que $\frac{10}{16}$ e $\frac{12}{18}$ não são equivalentes. Portanto, a alternativa que apresenta uma fração que não é equivalente a $\frac{12}{18}$ é a letra (b).


$= \frac{12}{18}$

$= \frac{6}{9}$

$= \frac{4}{6}$

$= \frac{2}{3}$

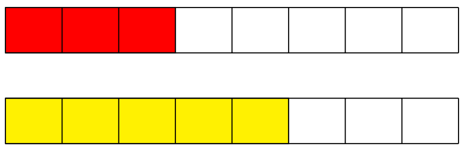
$= \frac{10}{16}$

Alternativamente, poderíamos ter verificado as equivalências de $\frac{12}{18}$ com $\frac{6}{9}$ (ou com as frações dos itens (c), (d), (e)) fazendo os produtos 12×9 e 6×18: como $12 \times 9 = 108 = 6 \times 18$, as frações $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes. Da mesma forma, $\frac{12}{18}$ não é equivalente a $\frac{10}{16}$ porque $12 \times 16 = 192$ e $10 \times 18 = 180$, logo, $12 \times 16 \neq 10 \times 18$. ■

3.2 – Comparando frações

Exercício 3.11 Joaquim e José ganharam uma barra grande de chocolate *Delícia* cada um. Joaquim comeu $\frac{3}{8}$ da barra que recebeu e José comeu $\frac{5}{8}$. Qual dos dois comeu mais?

Solução. Na figura abaixo, temos as duas barras, divididas em 8 partes iguais cada uma. Na barra de cima, estão pintadas de vermelho 3 das 8 partes, representando os $\frac{3}{8}$ comidos por Joaquim. Na de baixo, estão pintadas de amarelo 5 das 8 partes, representando os $\frac{5}{8}$ comidos por José. Assim, fica claro



$= \frac{3}{8} \longleftrightarrow$ Joaquim

$= \frac{5}{8} \longleftrightarrow$ José

que $\frac{5}{8}$, que é a fração comida por José, é maior que $\frac{3}{8}$, que é a fração comida por Joaquim. ■

Ainda em relação ao exemplo anterior, é muito importante que você saiba usar os símbolos $>$ ou $<$ para comparar as frações comidas por Joaquim e José. Podemos fazer isso escrevendo ou $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$ (lê-se "$\frac{5}{8}$ *é maior que* $\frac{3}{8}$") ou $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$ (lê-se "$\frac{3}{8}$ *é menor que* $\frac{5}{8}$"). Em ambos os casos (e da mesma forma que ocorre quando comparamos números naturais), veja que a "*boca*" do sinal ($>$ ou $<$) "*abre*" para o lado da fração maior, enquanto a "*ponta*" aponta para o lado da fração menor.

De modo geral, temos a seguinte regra de

Comparação de frações que têm o mesmo denominador: quando duas (ou mais) frações possuem o mesmo denominador, a maior delas é a que possui o maior numerador. Por exemplo,

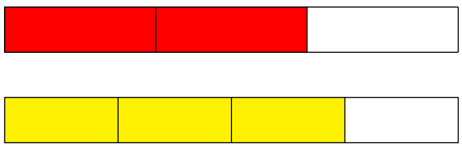
- $\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$ (lê-se: três quintos é maior que um quinto).
- $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$ (lê-se: sete nonos é maior que cinco nonos).
- $\frac{13}{20} > \frac{7}{20}$ (lê-se: treze vinte avos é maior que sete vinte avos).

Evidentemente, também podemos escrever as desigualdades entre as frações acima da seguinte maneira:

- $\frac{1}{5} < \frac{3}{5}$ (lê-se: um quinto é menor que três quintos).
- $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ (lê-se: cinco nonos é menor que sete nonos).
- $\frac{7}{20} < \frac{13}{20}$ (lê-se: sete vinte avos é menor que treze vinte avos).

Exercício 3.12 No final das férias, Joaquim e José receberam, novamente, uma barra grande de chocolate *Delícia* cada um. Joaquim dividiu a sua barra em 3 partes iguais e comeu 2 dessas partes, enquanto José dividiu a sua barra em 4 partes iguais e comeu 3 dessas partes. Qual dos dois comeu mais?

Solução. Neste caso, Joaquim comeu $\frac{2}{3}$ da sua barra e José comeu $\frac{3}{4}$ da sua. Veja, abaixo, representações geométricas dessas duas frações.



$= \frac{2}{3} \longleftrightarrow$ Joaquim

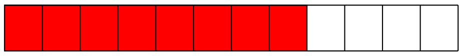
$= \frac{3}{4} \longleftrightarrow$ José

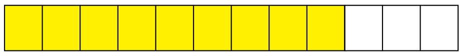
Observando a figura, fica claro que a fração da barra comida por José é maior que a comida por Joaquim. Entretanto, para fazermos uma comparação que não necessite de figuras bem desenhadas (você pode não ser muito bom desenhando...), a ideia é encontrar duas frações, uma equivalente a $\frac{2}{3}$ e outra equivalente a $\frac{3}{4}$, as quais possuam o mesmo denominador. Uma maneira simples de fazer isso é usar o produto $3 \cdot 4 = 12$ dos denominadores:

- Como $12 = 3 \times 4$, temos $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12}$.
- Como $12 = 4 \times 3$, temos $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{9}{12}$.

Então, Joaquim comeu $\frac{8}{12}$ da sua barra e José comeu $\frac{9}{12}$ da sua e, uma vez que $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$, concluímos que ($\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, ou seja) que José comeu uma fração da barra de chocolate maior que a fração comida por Joaquim.

É interessante perceber a que correspondem, geometricamente, os cálculos acima: Dividindo cada uma das 3 partes nas quais a barra do Joaquim foi dividida em outras 4 partes, obtemos um total de $3 \times 4 = 12$ partes, das quais Joaquim comeu $2 \times 4 = 8$. De modo semelhante, dividindo cada uma das 4 partes nas quais a barra de José foi dividida em 3 partes iguais, também obtemos um total de $4 \times 3 = 12$ partes, das quais José comeu $3 \times 3 = 9$. Acompanhe na próxima figura. ■

 $= \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \longleftrightarrow$ Joaquim

 $= \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \longleftrightarrow$ José

Exercício 3.13 Em uma pizzaria, todas as pizzas têm o mesmo sabor e o mesmo tamanho. Entretanto, cada pizza pode ser dividida em 8 ou em 12 pedaços iguais. Na semana passada, as amigas Gabi e Carol foram a essa pizzaria. Gabi pediu uma pizza dividida em 8 pedaços e comeu 5 desses pedaços. Carol pediu uma pizza dividida em 12 pedaços e também comeu 5 pedaços. Qual das duas comeu mais pizza?

Solução. Gabi comeu $\frac{5}{8}$ e Carol comeu $\frac{5}{12}$ de uma pizza. Como $8 \times 12 = 96$, temos que

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96} \quad \text{e} \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \times 8}{12 \times 8} = \frac{40}{96}.$$

Assim, $\frac{5}{8}$ é equivalente a $\frac{60}{96}$ e $\frac{5}{12}$ é equivalente a $\frac{40}{96}$. Portanto, como $\frac{60}{96} > \frac{40}{96}$, concluímos que $\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$, ou seja, Gabi comeu mais pizza que Carol. ■

Observação 3.2.1 No exemplo acima, observe que as duas amigas comeram o mesmo número de pedaços de pizza. Entretanto, os pedaços da pizza de Gabi eram maiores que os pedaços da pizza de Carol, pois a pizza de Gabi foi dividida em 8 pedaços mas a de Carol foi dividida em 12 pedaços. Portanto, sem fazer contas, podemos afirmar que $\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$. Esse fato é geral: quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior delas é a que possui o menor denominador.

Vejamos mais um exercício:

Exercício 3.14 Alan, Tiago e Isa disputaram um jogo de dardos. Terminado o jogo, Alan acertou $\frac{2}{5}$, Tiago $\frac{3}{4}$ e Isa $\frac{1}{2}$ do total de dardos que atingiram o alvo.

(a) Quem acertou mais dardos?
(b) Quem acertou menos dardos?

Solução. Para resolver esse exercício, devemos encontrar a maior e a menor dentre as frações $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Na figura abaixo, o retângulo da esquerda foi dividido em 5 partes iguais e 2 dessas partes foram pintadas de amarelo, para representar a fração $\frac{2}{5}$; o retângulo do centro foi dividido em 4 partes iguais e 3 dessas partes foram pintadas de vermelho, para representar a fração $\frac{3}{4}$; e o retângulo da direita foi dividido em 2 partes iguais e 1 dessas partes foi pintada de verde, para representar a fração $\frac{1}{2}$. Pelo desenho, fica claro que $\frac{3}{4}$ é a maior e $\frac{2}{5}$ é a menor das três frações.

Para confirmar o que já conseguimos deduzir a partir da figura, vamos novamente procurar três frações com um mesmo denominador, cada uma delas equivalente a uma dentre as frações $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Evidentemente, podemos usar como denominador comum o produto $5 \times 4 \times 2 = 40$ dos denominadores das frações dadas. No entanto, tudo o que

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

precisamos é de um denominador que seja múltiplo de 5, 4 e 2 ao mesmo tempo, e é mais econômico utilizarmos o mmc desses números. Como mmc(5,4,2) $= 20$, temos que

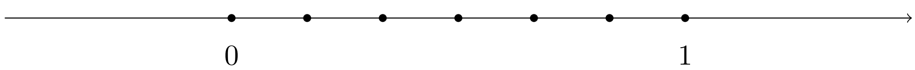
$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}, \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \times 10}{2 \times 10} = \frac{10}{20}.$$

Assim, uma vez que a maior fração dentre $\frac{8}{20}$, $\frac{15}{20}$ e $\frac{10}{20}$ é $\frac{15}{20}$, concluímos que Tiago foi quem acertou mais dardos. Essa é a resposta para o item (a). Por outro lado, como a fração $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ é a menor das três frações, Alan foi quem acertou menos dardos, o que responde o item (b). ■

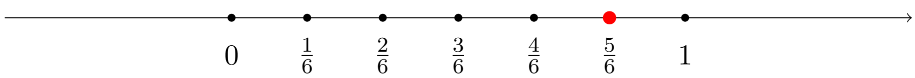
3.3 – Representando frações na reta numérica

As frações também podem ser representadas na reta númerica. Por exemplo, para representar o número $\frac{5}{6}$ executamos os seguintes passos:

1. Dividimos o intervalo [0,1] (que corresponde ao segmento de reta que liga os pontos 0 e 1) em 6 partes iguais.



2. Após o 0, o primeiro ponto marcado representará a $\frac{1}{6}$, o segundo representará $\frac{2}{6}$, o terceiro $\frac{3}{6}$ e assim por diante. Então, continuamos até chegar ao ponto que representa a fração $\frac{5}{6}$.



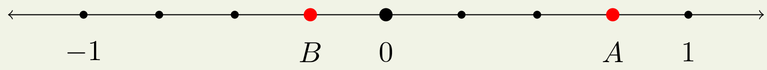
O procedimento feito para marcar a fração $\frac{5}{6}$ sobre a reta numérica pode ser repetido para qualquer outra fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números naturais diferentes de 0.

Aproveitando a reta numérica, podemos introduzir, de maneira natural, as frações negativas. Por exemplo, se quisermos marcar o ponto que representa a fração $-\frac{12}{7}$ sobre a reta, basta marcarmos o ponto que representa $\frac{12}{7}$ e tomarmos o seu simétrico com relação a 0. Seguindo esse raciocínio, podemos representar qualquer fração negativa.

Observação 3.3.1 Também podemos utilizar a reta numérica para comparar frações: na orientação usual da reta (da esquerda para a direita), quanto mais à direita uma fração estiver, maior ela será. Sendo assim, e observando o exemplo feito acima, temos:

$$0 < \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6} < \frac{5}{6} < 1.$$

Exercício 3.15 As frações representadas pelas letras A e B na reta numérica desenhada abaixo são, respectivamente, iguais a:



(a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

(b) $\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$.

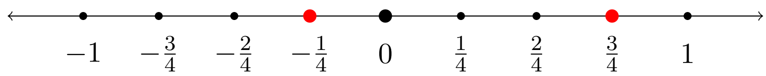
(c) $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$.

(d) $-\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

(e) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

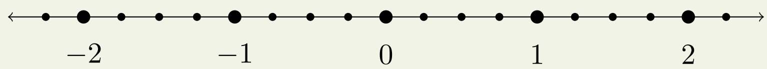
Solução. Veja que o intervalo $[0,1]$ foi dividido em 4 intervalos de mesmo tamanho. Assim, os pontos marcados sobre a reta e pertencentes ao intervalo $[0,1]$ representam as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.

Como o intervalo $[-1,0]$ também foi dividido em 4 intervalos de mesmo tamanho, os pontos marcados na reta e pertencentes ao intervalo $[-1,0]$ representam as frações $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{4}$ (veja a figura abaixo).

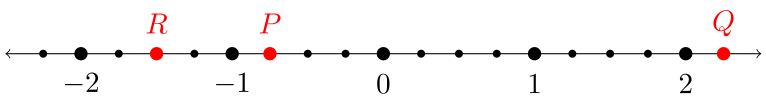


Logo, $A = \frac{3}{4}$ e $B = -\frac{1}{4}$, ou seja, a alternativa correta é a letra (b). ■

Exercício 3.16 Localize os pontos $P = -\frac{3}{4}$, $Q = \frac{9}{4}$ e $R = -\frac{3}{2}$ na reta numérica abaixo.



Solução. Outra vez, temos que os intervalos unitários estão subdivididos, cada um, em 4 intervalos de mesmo comprimento. Assim, a distância entre dois pontos consecutivos é sempre igual a $\frac{1}{4}$. Desse modo, para marcar o ponto $P = -\frac{3}{4}$ basta contar, a partir do zero, 3 passos de tamanho $\frac{1}{4}$ para a esquerda. Para marcar $\frac{9}{4}$, basta contar 9 passos de tamanho $\frac{1}{4}$ para a direita. Já para o ponto $R = -\frac{3}{2}$, primeiro obcervamos que $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4}$; assim, para marcar R, basta contar 6 passos de tamanho $\frac{1}{4}$ para a esquerda.

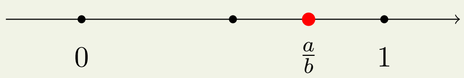


Note que

$$\begin{array}{c|c} 9 & 4 \\ \hline \color{red}{1} & \color{blue}{2} \end{array}$$

Logo, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Desse modo, podemos dar 1 passo de tamanho $\frac{1}{4}$ à direita do 2 para chegar ao ponto $\frac{9}{4}$. De maneira similar, $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4} = -1\frac{2}{4}$, ou seja, dando dois passos de tamanho $\frac{1}{4}$ à esquerda, a partir de -1, chegamos ao ponto $-\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. ■

Exercício 3.17 — OBM. A fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais, representa um número entre 0 e 1, na posição indicada no desenho a seguir. Qual é um possível valor para a soma $a+b$?



(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

Solução. Resolveremos esse exercício por exclusão de itens. Observe que a fração $\frac{a}{b}$ é maior que $\frac{1}{2}$.

(a) $a+b=1$ implica $a=0$ e $b=1$, ou seja, $\frac{a}{b}=0$, o que é incompatível com o desenho.
(b) $a+b=2$ implica $a=0$ e $b=2$ ou $a=1$ e $b=1$, ou seja, $\frac{a}{b}=0$ ou $\frac{a}{b}=1$, também incompatíveis com o desenho.
(c) $a+b=3$ implica $\frac{a}{b}=0$, ou $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{1}=2>1$, todos incompatíveis.
(d) Os casos em que $a+b=4$ são: $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{2}=1$ ou $\frac{a}{b}=\frac{3}{1}=3>1$, todos incompatíveis.

Como todas as quatro primeiras alternativas são falsas, a alternativa (e) deve ser a verdadeira. De fato, $a+b=5$ nos seguintes casos: $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$, ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, ou $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$, ou $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}=4>1$. Assim, podemos concluir que o único caso compatível com o desenho é $a=2$ e $b=3$, o que nos dá a fração $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. ■

3.4 – Exercícios Propostos

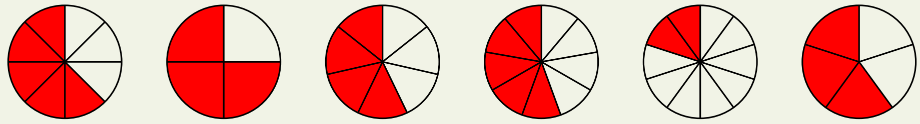
Nível 1

Exercício 3.18 Na fração $\frac{4}{7}$:

(a) Que número é o numerador?
(b) Que número é o denominador?

(c) O que representa o denominador?
(d) O que representa o numerador?

Exercício 3.19 Escreva a fração correspondente à região pintada de vermelho em cada uma das figuras abaixo.



Exercício 3.20 Dê uma representação geométrica para cada uma das frações a seguir:

(a) $\frac{2}{9}$. (b) $\frac{4}{7}$. (c) $\frac{6}{5}$. (d) $\frac{3}{8}$. (e) $\frac{7}{10}$. (f) $\frac{4}{5}$.

Exercício 3.21

(a) Que fração do dia representa o período de 5 horas que Joaquim passa na escola?
(b) Que fração do mês de janeiro representa a primeira semana do mês (7 dias)?
(c) Que fração do ano corresponde a um trimestre (período de três meses)?
(d) Que fração de uma década representa um período de 3 anos?
(e) Que fração de um século corresponde a um período de 25 anos?

Exercício 3.22 Qual das frações abaixo é equivalente a $\frac{3}{15}$?

(a) $\frac{1}{5}$. (b) $\frac{3}{5}$. (c) $\frac{2}{3}$. (d) $\frac{15}{5}$.

Exercício 3.23 Mariana foi até a feira comprar farinha. Para brincar com o vendedor, ela pediu $\frac{1}{4}$ de um quilo. Quantos gramas de farinha Mariana pretendia comprar?

(a) 200 g.
(b) 250 g.
(c) 400 g.
(d) 450 g.
(e) 500 g.

Exercício 3.24 (ANRESC) Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas de preto representa $\frac{1}{3}$ do total de bolinhas?

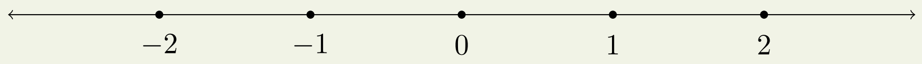
(a) ●●○○○○
(b) ●●●○○○
(c) ●●●●○○
(d) ●●●●●○

Exercício 3.25 Dona Francisca tem uma dúzia de ovos (12 ovos) e vai usar $\frac{1}{3}$ deles para fazer um bolo. Quantos ovos ela vai usar?

Exercício 3.26 João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu 1/3 desse percurso. Quantos quilômetros João já percorreu?

Nível 2

Exercício 3.27 Localize (aproximadamente) os pontos $P = -\frac{7}{3}$, $Q = \frac{5}{4}$, $R = -\frac{6}{5}$ e $S = \frac{5}{2}$ na reta numérica desenhada abaixo.



Exercício 3.28 Uma coleção tem 300 selos.

(a) 100 selos correspondem a que fração da coleção?
(b) 200 selos correspondem a que fração da coleção?
(c) 60 selos correspondem a que fração da coleção?
(d) 180 selos correspondem a que fração da coleção?

Exercício 3.29 Numa prova de matemática havia 15 exercícios.

(a) José errou 4 exercícios dessa prova. Escreva a fração que representa o número de erros cometidos por José em relação ao total de questões da prova.
(b) Obtenha também a fração que representa o número de acertos de José.
(c) Henrique errou $\frac{1}{5}$ dos exercícios dessa prova. Quantos exercícios ele acertou?

Exercício 3.30 Sabe-se que $\frac{2}{5}$ da superfície territorial do Brasil correspondem a aproximadamente a 3.400.000 km^2. Qual é a superfície territorial brasileira, aproximadamente?

Exercício 3.31 (SARESP) Dois terços da população de um município correspondem a 36.000 habitantes. Pode-se afirmar que esse município tem:

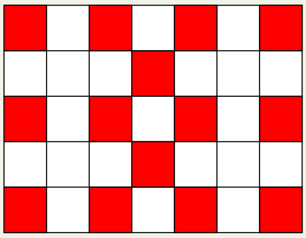
(a) 18.000 habitantes.
(b) 36.000 habitantes.
(c) 48.000 habitantes.
(d) 54.000 habitantes.

Exercício 3.32 Para encher $\frac{3}{4}$ de uma piscina são necessários 30.000 litros de água. Qual é a capacidade da piscina?

Exercício 3.33 Vinte amigos resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. O valor do aluguel deveria ser dividido igualmente entre todos eles. No entanto, no dia do passeio, dois dos vinte amigos desistiram, de forma que o valor do aluguel teve de ser dividido igualmente apenas entre aquelas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada um dos amigos que compareceu é:

(a) $\frac{1}{20}$. (b) $\frac{18}{20}$. (c) $\frac{1}{10}$. (d) $\frac{1}{18}$. (e) $\frac{2}{18}$.

Exercício 3.34 Qual a forma irredutível da fração correspondente à região pintada de vermelho na bandeira representada abaixo?



Exercício 3.35 Mateus e Guilherme trabalham na mesma empresa e recebem o mesmo salário. Mateus economiza $\frac{1}{6}$ do seu salário, enquanto Guilherme economiza $\frac{2}{11}$. Qual dos dois consegue economizar mais?

Exercício 3.36 Em cada um dos itens abaixo, ponha as frações em ordem crescente:

(a) $\frac{9}{7}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{9}{20}$ e $\frac{9}{13}$.

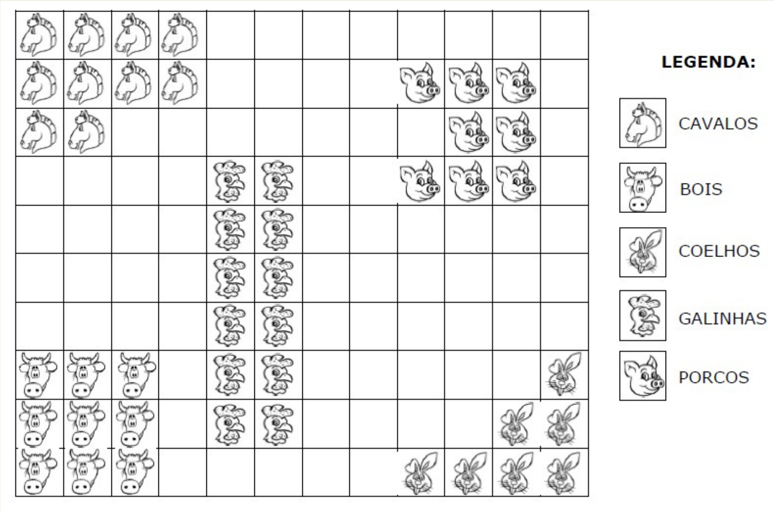
(b) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{13}$.

(c) $\frac{8}{20}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{15}$ e $\frac{20}{25}$.

(d) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$.

Nível 3

Exercício 3.37 (CMPA) A área total de uma fazenda está representada pela malha quadriculada abaixo. Nela, são destinadas regiões para a criação de cavalos, porcos, galinhas, bois e coelhos, conforme a figura.



É correto afirmar que a área da região destinada à criação de

(a) cavalos corresponde a $\frac{1}{10}$ da área total da fazenda.
(b) porcos corresponde a $\frac{1}{15}$ da área total da fazenda.
(c) galinhas corresponde a $\frac{1}{6}$ da área total da fazenda.
(d) bois corresponde a $\frac{1}{10}$ da área total da fazenda.
(e) coelhos corresponde a $\frac{1}{20}$ da área total da fazenda.

Exercício 3.38 (CMPA) Os gatos são animais fascinantes. São espertos, brincalhões, companheiros e não exigem muita atenção. Além disso, sua inteligência é surpreendente. No mundo, há 5 raças que se destacam pela inteligência: Angorá Turco, Siamês, Sphynx, Balinês e Bangal. Em um centro de treinamento, existem apenas essas 5 raças de gatos e sabe-se que, do total de gatos, $\frac{1}{8}$ é da raça Angorá Turco, $\frac{3}{10}$ são da raça Siamês, $\frac{13}{40}$ são da raça Sphynx, $\frac{1}{16}$ é da raça Balinês e $\frac{3}{16}$ são da raça Bangal. É correto afirmar que, nesse centro:

(a) a maioria dos gatos é da raça Siamês.
(b) há mais gatos da raça Balinês que da raça Bangal.
(c) existe a mesma quantidade de gatos das raças Angorá Turco e Sphynx.
(d) a raça que tem o menor número de gatos é a Angorá Turco.
(e) há menos gatos da raça Siamês que da raça Sphynx.

Exercício 3.39 César gastou $\frac{1}{3}$ da mesada na compra de um livro e $\frac{2}{5}$ na compra de duas revistas.

(a) Qual das compras foi a mais cara?
(b) Se César tinha 120 reais, com quantos reais ele ficou?

Exercício 3.40 Encontre uma fração, equivalente a $\frac{7}{8}$, tal que a soma do numerador com o denominador é igual a 120.

Exercício 3.41 Se $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{3}{5}$ e $c = \frac{4}{9}$, então:

(a) $a < b < c$.
(b) $a < c < b$.
(c) $b < a < c$.
(d) $b < c < a$.
(e) $c < a < b$.

Exercício 3.42 Fernando comprou $\frac{5}{13}$ de uma coleção de selos. Ainda faltam 48 selos para completar a coleção. Quantos selos tem a coleção, ao todo?

Exercício 3.43 Na última eleição para a prefeitura da cidade de Numerópolis, os candidatos Antonio e Cícero obtiveram, respectivamente, $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{8}$ do total de votos válidos. Sabendo que o restante do total de votos foi dado a Maurício, pergunta-se: qual dos três candidatos foi eleito?

Exercício 3.44 (Banco OBMEP - adaptada) Em um país com 14 milhões de habitantes, $\frac{15}{10.000}$ da população contraiu um certo tipo de gripe. Quantos habitantes não contraíram essa gripe?

(a) 13.979.000.
(b) 1.397.900.
(c) 139.790.
(d) 13.979.
(e) 139.790.000.

Exercício 3.45 Um colégio organizou uma olimpíada de Matemática composta de três fases. Um total de 96 alunos se inscreveram nessa olimpíada. Sabe-se, ainda, que:

I. $\frac{3}{8}$ dos alunos inscritos não obtiveram a pontuação necessária para realizar a segunda fase.
II. $\frac{1}{3}$ dos alunos que participaram da segunda fase foram classificados para a terceira fase.
III. $\frac{3}{4}$ dos alunos que participaram da terceira fase não conseguiram concluí-la.

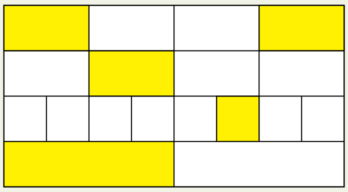
Desse modo, o número de alunos que completou as três fases da maratona foi de:

(a) 36. (b) 60. (c) 20. (d) 5. (e) 15.

Exercício 3.46 (Banco OBMEP) Qual dos números a seguir está situado entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{6}$. (b) $\frac{4}{3}$. (c) $\frac{5}{2}$. (d) $\frac{4}{7}$. (e) $\frac{1}{4}$.

Exercício 3.47 Uma bandeira está dividida em 4 faixas horizontais de igual largura e cada faixa está dividida em duas, quatro ou oito partes iguais, conforme indicado na figura abaixo. Qual é a fração correspondente à área pintada de amarelo?



Nível 4

Exercício 3.48 (CMPA - adaptada) As girafas são animais que se alimentam muito bem. Quando adultas, podem passar até 20 horas por dia se alimentando. Os machos adultos consomem, por dia, cerca de 80 quilogramas de comida, sendo que $\frac{1}{4}$ dessa comida é composto de material seco (folhas secas, galhos, cascas de árvores) e o restante de material fresco (folhagens). Já as fêmeas adultas consomem, diariamente, aproximadamente 75 quilogramas de comida, sendo que $\frac{1}{5}$ dessa comida é composto de material seco e o restante de material fresco. Considerando a alimentação diária de 2 girafas adultas, sendo um macho e uma fêmea, é correto afirmar que

(a) $\frac{4}{31}$ dessa alimentação são compostos de material seco.

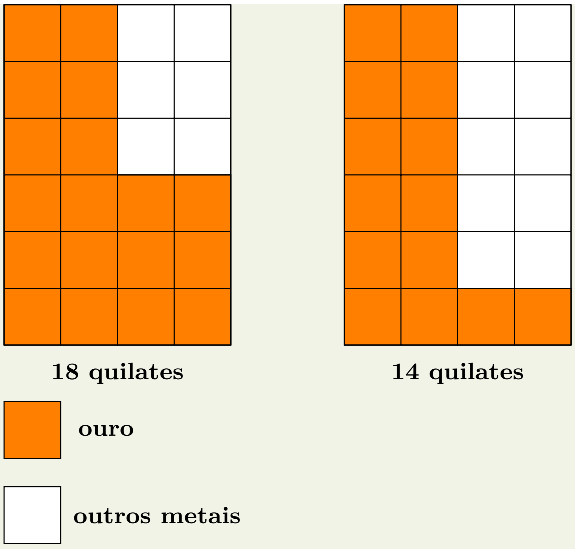
(b) $\frac{7}{31}$ dessa alimentação são compostos de material seco.

(c) $\frac{24}{31}$ dessa alimentação são compostos de material seco.

(d) $\frac{12}{31}$ dessa alimentação são compostos de material fresco.

(e) $\frac{16}{31}$ dessa alimentação são compostoa de material fresco.

Exercício 3.49 (CMPA - adaptada) Nas joalherias, é possível encontrar joias feitas de ouro de diferentes quilates. No Brasil, são mais comuns as de 18 quilates; nos Estados Unidos, são comuns também as de 14 quilates.



Baseado nas informações contidas na figura acima, considere as afirmativas:

I. As joias de 18 quilates têm $\frac{3}{4}$ de ouro.
II. Comparando joias de mesma massa, as de 14 quilates têm $\frac{7}{9}$ da quantidade de ouro das joias de 18 quilates.
III. Em 600 g de joias de 14 quilates, existem 250 g de outros metais.

Qual alternativa indica a(s) afirmativa(s) correta(s)?

(a) Apenas I e II.
(b) Apenas III.
(c) Apenas I e III.
(d) I, II e III.
(e) Apenas I.

Exercício 3.50 (CMF - adaptado) A 2ª fase de uma maratona de Matemática de uma escola será realizada no próximo sábado. Os alunos classificados para essa fase são aqueles que, na primeira fase, acertaram no mínimo 16 das 20 questões da prova. Observe os resultados obtidos por alguns alunos na 1ª fase:

(I) Augusto não respondeu $\frac{1}{10}$ das questões da prova e errou o dobro do número de questões que não respondeu.
(II) Daniela acertou $\frac{3}{5}$ das questões da prova.
(III) Francisco acertou metade das questões de 1 a 10. No restante da prova, seu desempenho foi melhor: ele acertou $\frac{4}{5}$ das questões de 11 a 20.
(IV) Jorge errou $\frac{3}{20}$ das questões da prova.
(V) Carolina acertou 4 questões a mais do que Augusto.

Pode-se afirmar que os únicos alunos classificados para a 2ª fase da maratona foram:

(a) Augusto e Francisco.

(b) Daniela e Jorge.
(c) Jorge e Carolina.
(d) Augusto e Daniela.
(e) Francisco e Carolina.

Exercício 3.51 (CMF) Um fabricante de perfumes resolveu fazer uma pesquisa para verificar a preferência do público feminino sobre os perfumes por ele comercializados. Cada mulher entrevistada poderia escolher apenas um perfume. O resultado da pesquisa encontra-se na tabela a seguir:

Perfume	20 a 29 anos	30 a 39 anos	40 a 49 anos
Cheiro Bom	30	12	36
Aroma Suave	27	16	24
Fragrância Forte	15	52	28

Com base nos resultados obtidos, é correto afirmar que:

(a) $\frac{1}{8}$ das mulheres entrevistadas preferem o perfume Cheiro Bom.

(b) $\frac{1}{3}$ das mulheres entrevistadas têm de 30 a 39 anos.

(c) $\frac{5}{8}$ das mulheres de 30 a 39 anos preferem o perfume Fragrância Forte.

(d) $\frac{1}{4}$ das mulheres de 40 a 49 anos preferem o perfume Aroma Suave.

(e) $\frac{2}{3}$ das mulheres entrevistadas têm de 20 a 29 anos.

Exercício 3.52 Uma lata cheia de tinta pesa 13 kg. Se retirarmos metade da tinta contida na lata, ela passará a pesar 8 kg. Qual é o peso da lata vazia?

(a) 5 quilogramas.
(b) 10 quilogramas.
(c) 2 quilogramas.
(d) 3 quilogramas.
(e) 21 quilogramas.

Exercício 3.53 (CMF) Ao ser perguntado por suas duas filhas em que ano havia nascido, o professor Crocker respondeu-lhes com o seguinte problema: o numerador da fração irredutível equivalente à fração $\frac{12066}{222}$ representa o ano em que completei 43 anos. Assim, podemos afirmar que o professor Crocker nasceu:

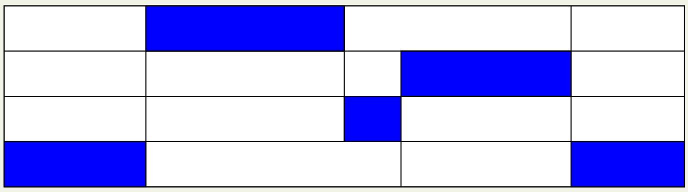
(a) antes de 1965.
(b) entre 1965 e 1970.
(c) entre 1970 e 1974.
(d) entre 1974 e 1980.
(e) após 1980.

Exercício 3.54 (CMF) Na Copa do Mundo de 2010, Augusto comprou um álbum de figurinhas dos jogadores das seleções que participaram do torneio. O valor do álbum, sem nenhuma figurinha, foi R\$ 5,00. O álbum tinha 600 figurinhas, sendo que $\frac{2}{3}$ delas ele adquiriu gastando R\$ 120,00. Como estava ficando difícil completar o álbum, ele resolveu solicitar as figurinhas restantes diretamente da editora que publicou o álbum. A editora enviou pelos Correios todas as figurinhas solicitadas sem nenhuma repetição. Elas foram enviadas em pacotes com cinco unidades e, por cada pacote, foram cobrados R\$ 1,75. Desse modo, o total que foi gasto por Augusto, desde a compra do álbum até completá-lo, foi de:

(a) R\$ 175,00.
(b) R\$ 180,00.
(c) R\$ 185,00.
(d) R\$ 190,00.
(e) R\$ 195,00.

Exercício 3.55 (Banco OBMEP) Encontre uma fração irredutível tal que o produto de seu numerador por seu denominador seja $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times 10$. Quantas dessas frações irredutíveis existem?

Exercício 3.56 (Banco OBMEP) A figura mostra um retângulo maior dividido em 18 retângulos menores, todos com a mesma largura. Que fração do retângulo maior representa a parte pintada de azul?



Exercício 3.57 (Banco OBMEP - adaptada) Uma fração é irredutível quando o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum, ou seja, quando eles são primos entre si. Por exemplo, $\frac{6}{7}$ é a forma irredutível da fração $\frac{12}{14}$.

(a) Encontre a forma irredutível da fração $\frac{111111}{14}$.

(b) Encontre a forma irredutível da fração $\frac{111111111}{18}$.

(c) Encontre a forma irredutível da fração $\frac{111\ldots111}{15}$, onde o algarismo 1 se repete 2019 vezes no numerador.