Material Estruturado

MATEMÁTICA

Números Racionais
Volume 3
Representação Decimal

Autores:
Ulisses Parente
Italândia F. de Azevedo
Bruno Holanda
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

N971 Números racionais – volume 3 [recurso eletrônico] / Ulisses Lima Parente...[et.al.].- Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43570-2 (E-book)

1. Números decimais. 2. Representação decimal. 3. Forma decimal. I. Parente, Ulisses Lima. II. Azevedo, Italândia Ferreira de. III. Holanda, Francisco Bruno de Lima. IV. Muniz Neto, Antonio Caminha. V. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). VI. Título.

CDD: 510.07

5 Números Decimais

5.1 – Representação Decimal

No Módulo 2, aprendemos que uma mesma fração pode ser representada de várias maneiras distintas. Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$, ou seja, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ são *formas equivalentes* de representar a mesma fração. A equivalência $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ é especialmente importante, porque o denominador da segunda fração é uma potência de 10. Qualquer fração cujo denominador seja uma potência de 10 é chamada **fração decimal**. Nesta seção, veremos que frações decimais são importantes porque podemos estender a elas a representação decimal de números naturais.

Iniciamos com um exemplo, recordando o que significa a representação decimal de um número natural. O número 3785 pode ser escrito como

$$3785 = 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1.$$

Para explicar como são as representações decimais das frações decimais, considere, por exemplo, a fração $\frac{378549}{100}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{378549}{100} &= \frac{300000 + 70000 + 8000 + 500 + 40 + 9}{100} \\
&= \frac{3 \times 100000 + 7 \times 10000 + 8 \times 1000 + 5 \times 100 + 4 \times 10 + 9 \times 1}{100} \\
&= \frac{3 \times 100000}{100} + \frac{7 \times 10000}{100} + \frac{8 \times 1000}{100} + \frac{5 \times 100}{100} + \frac{4 \times 10}{100} + \frac{9 \times 1}{100} \\
&= 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

Da última igualdade, segue que

$$\frac{378549}{100} = 3785 + 4 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{100}.$$

Utilizamos, então, a notação

$$3785{,}49$$

para representar a fração decimal $\frac{378549}{100}$, e dizemos que 3785,49 é a **representação decimal** de $\frac{378549}{100}$. Veja que a vírgula foi utilizada para separar os grupos de 1, 10, 100 e 1000 dos grupos de $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$.

Repetindo o raciocínio empregado no procedimento acima, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{68}{100} &= \frac{6 \times 10 + 8}{100} = \frac{6 \times 10}{100} + \frac{8}{100} \\
&= 6 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10^2} = 0{,}68.
\end{aligned}$$

Observe, agora, o que acontece com a fração decimal $\frac{349}{10000}$. Temos (verifique!)

$$\begin{aligned}
\frac{349}{10000} &= 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{10^3} + 9 \times \frac{1}{10^4} \\
&= 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{10^3} + 9 \times \frac{1}{10^4} \\
&= 0{,}0349.
\end{aligned}$$

Podemos obter facilmente a representação decimal de qualquer fração equivalente a uma fração decimal. Como ilustração, veja os dois exemplos abaixo:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5,$$

ou seja, 0,5 é a representação decimal da fração $\frac{1}{2}$. Da mesma forma,

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

As representações decimais das frações decimais são chamadas **números decimais**. As frações $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ e $\frac{1}{10000}$ são chamadas **um décimo**, **um centésimo**, **um milésimo** e **um décimo de milésimo**, respectivamente.

Observação 5.1.1 A vírgula, quando empregada na representação decimal das frações, é uma notação que significa o seguinte: o primeiro algarismo após a vírgula (da esquerda para a direita) representa a quantidade de décimos do número, o segundo algarismo após a vírgula (também da esquerda para a direita) representa a quantidade de centésimos, o terceiro a quantidade de milésimos e assim por diante.

Olhando uma a uma as representações decimais:

$$\frac{378549}{100} = 3785{,}49; \quad \frac{68}{100} = 0{,}68;$$

$$\frac{349}{10000} = 0{,}0349; \quad \frac{5}{10} = 0{,}5;$$

notamos que, para escrever a representação decimal de uma fração decimal, basta imaginar que o numerador da fração decimal tem uma vírgula , após o último algarismo e, em seguida, deslocar essa vírgula tantas casas para a esquerda quantos sejam os zeros do denominador da fração; além disso, devemos completar com zeros à esquerda do primeiro algarismo, caso a quantidade de zeros do denominador da fração decimal seja maior que a quantidade de algarismos do numerador (como ocorre em $\frac{349}{10000}$).

Agora, faremos alguns exercícios para fixar as ideias apresentadas até aqui.

Exercício 5.1 Qual é a representação decimal da fração $\frac{23}{100}$?

(a) 23. (b) 2,3. (c) 0,23. (d) 0,023.

Solução. Como estamos dividindo 23 por 100, que tem dois zeros, a vírgula imaginária após o 3 deve ser deslocada duas casas para a esquerda. Desse modo, a representação decimal de $\frac{23}{100}$ é 0,23, e a alternativa correta é a letra **(c)**. ■

Exercício 5.2 Encontre as representações decimais das frações abaixo, utilizando frações equivalentes a elas e cujos denominadores sejam potências de 10.

(a) $\frac{7}{2}$. (b) $\frac{3}{4}$. (c) $\frac{9}{25}$. (d) $\frac{13}{125}$.

Solução.
(a) Inicialmente, observe que qualquer potência de 10 é formada pelo produto de potências de 2 e 5 de mesmos expoentes. Assim, para achar uma fração equivalente a $\frac{7}{2}$ e cujo denominador seja uma potência de 10, é suficiente multiplicar seus termos (numerador e denominador) por 5. Portanto,

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{35}{10} = 3{,}5.$$

(b) Em relação à fração $\frac{3}{4}$, como seu denominador $4 = 2^2$ tem dois fatores 2, devemos multiplicá-lo por $25 = 5^2$ para obter uma potência de 10 (no caso, $100 = 10^2$). Assim,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

(c) Do mesmo modo,

$$\frac{9}{25} = \frac{9 \times 4}{25 \times 4} = \frac{36}{100} = 0{,}36.$$

(d) Finalmente, como $125 = 5^3$ e $2^3 = 8$, temos

$$\frac{13}{125} = \frac{13 \times 8}{125 \times 8} = \frac{104}{1000} = 0{,}104.$$

■

Exercício 5.3 Considere as representações decimais abaixo:

I. $\frac{3}{10} = 0{,}3$;

II. $\frac{4}{5} = 0{,}4$;

III. $\frac{1}{4} = 0{,}25$;

IV. $\frac{49}{1000} = 0{,}049$.

Estão corretas:

(a) apenas I e II.
(b) apenas I e III.
(c) apenas II e III.
(d) apenas I, III e IV.
(e) I, II, III e IV.

Solução.

- É claro que $\frac{3}{10} = 0{,}3$, pois, nesse caso, a vírgula deve ser deslocada uma casa para a esquerda. Assim, a igualdade em I está **correta**.
- Veja que

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Logo, a igualdade apresentada em II está **incorreta**.

- Utilizando a mesma ideia empregada no item anterior, temos

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

  Assim, a igualdade apresentada em III está **correta**.
- Finalmente, para encontrar a representação decimal da fração $\frac{49}{1000}$, devemos deslocar a vírgula após o 9 três casas para a esquerda, completando com um zero à esquerda do 4 para obter 0,049. Portanto, a igualdade em IV também está **correta**.

Desse modo, concluímos que a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

Exercício 5.4 — OBM. Qual é o primeiro algarismo não nulo, após a vírgula, na representação decimal do número $\frac{1}{5^{12}}$?

Solução. Utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido para resolver o exercício anterior, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por $2^{12} = 4096$. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{1}{5^{12}} = \frac{2^{12}}{5^{12} \times 2^{12}} = \frac{4096}{10^{12}} = 0{,}000000004096.$$

Portanto, o primeiro algarismo não nulo após a vírgula é igual a 4. ■

Observação 5.1.2 Suponha que o denominador de uma fração irredutível possua algum fator primo diferente de 2 e de 5. (Como é o caso de $\frac{5}{12}$, cujo denominador tem, além do fator primo 2, um fator primo 3). No próximo módulo, que trata dos números reais, veremos que ainda será possível obter uma representação decimal para a fração. No entanto, esta será dada por uma **dízima periódica**.

5.2 – Comparando Números Decimais

Em nossas vidas, desde muito cedo, aprendemos naturalmente a comparar números. Por exemplo, quando fazemos uma lista com os nomes e as idades dos membros de nossa família, a partir do mais jovem até o mais velho, estamos comparando as idades dessas pessoas. Veja que, quando dois desses membros viveram uma mesma quantidade de anos, teremos de verificar quem tem mais meses de vida a fim de saber quem é mais velho. Se eles também possuírem a mesma quantidade de meses de vida, então teremos de verificar quem tem mais dias, e assim por diante, passando a comparar horas, minutos, segundos e frações do segundo, caso seja necessário.

Para **comparar dois números decimais**, procedemos de maneira semelhante: inicialmente comparamos as partes inteiras dos números, e será maior o número que tiver a maior parte inteira. Mas, se as partes inteiras forem iguais, o maior dos números será o que tiver o maior algarismo na casa dos décimos. Permanecendo a igualdade, será maior o número que tiver o maior algarismo na casa dos centésimos. Se a igualdade ainda permanecer, o maior número será o que tiver o maior algarismo na casa dos milésimos, e assim por diante. Vejamos alguns exemplos:

Exercício 5.5 Qual dos números decimais é maior: 45,956 ou 45,965?

Solução. Veja que os números possuem a mesma parte inteira (45) e a mesma quantidade de décimos (9). Entretanto, o algarismo dos centésimos do número 45,965 é igual a 6, enquanto o algarismo dos centésimos do número 45,956 é igual a 5. Portanto, o número 45,965 é maior que o número 45,956, o que denotamos em símbolos escrevendo

$$45{,}965 > 45{,}956.$$

■

Exercício 5.6 A tabela a seguir mostra as alturas (em metros) dos cinco atletas que compõem o time de basquete do terceiro ano do Colégio Matemágico.

Aluno	**Altura**
André	1,89
Pedro	1,97
Fernando	1,93
Gabriel	2,03
Miguel	1,85

Construa uma tabela, similar a que foi apresentada acima, dos alunos com as suas respectivas alturas em ordem crescente.

Solução. Comparando as alturas conforme discutido anteriormente, notamos que a lista correta das alturas dos alunos em ordem crescente é: 1,85; 1,89; 1,93; 1,97; 2,03. Desse modo, organizando os alunos em uma tabela de acordo com as suas alturas em ordem crescente, obtemos

Aluno	**Altura**
Miguel	1,85
André	1,89
Fernando	1,93
Pedro	1,97
Gabriel	2,03

■

5.3 – Multiplicação e Divisão por Potências de 10

Nos primeiros anos da escola, aprendemos que, ao multiplicar um número natural por 10, o resultado é obtido acrescentando-se um zero à direita do número original. Por exemplo,

$$7298 \times 10 = 72980.$$

De forma análoga, quando **multiplicamos** um número decimal por 10, o resultado é obtido deslocando-se a vírgula *uma casa* para a direita. Por exemplo,

$$895{,}32 \times 10 = 8953{,}2.$$

Por outro lado, quando **dividimos** um número decimal por 10, o resultado é obtido deslocando-se a vírgula *uma casa* para a esquerda. Por exemplo,

$$159{,}23 \div 10 = 15{,}923.$$

A justificativa para a validade de tais regras é dada pelas representações decimais dos números envolvidos. Por exemplo, temos:

$$895{,}32 = 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times \frac{1}{10^1} + 2 \times \frac{1}{10^2},$$

de forma que

$$895{,}32 \times 10 = \left(8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10^2}\right) \times 10.$$

Então, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos:

$$895{,}32 \times 10 = 8 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10} = 8953{,}2.$$

Da mesma forma, como

$$159{,}23 = 1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10^1} + 3 \times \frac{1}{10^2},$$

temos

$$\begin{aligned}
159{,}23 \div 10 &= \left(1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10^1} + 3 \times \frac{1}{10^2}\right) \div 10 \\
&= \left(1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10^1} + 3 \times \frac{1}{10^2}\right) \times \frac{1}{10} \\
&= 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 9 \times \frac{1}{10^1} + 2 \times \frac{1}{10^2} + 3 \times \frac{1}{10^3} \\
&= 15{,}923.
\end{aligned}$$

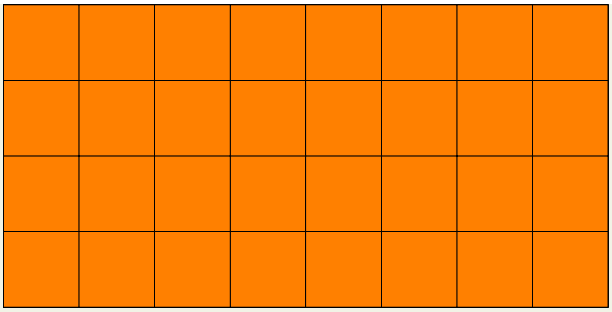
Exercício 5.7 Arthur tem um pedaço de fita amarela de 16 metros de comprimento, o qual deseja dividir em 100 pedaços de mesmo tamanho, para decorar caixas de presente que serão postas à venda no armarinho de sua mãe. Qual o comprimento de cada pedaço, admitindo-se que não haverá perda de material?

Solução. Para calcular o comprimento de cada pedaço, devemos efetuar a divisão $16 \div 100$. Repetindo o raciocínio utilizado acima, devemos deslocar a vírgula, que se encontra à direita do 6, duas casas para a esquerda. Assim, obtemos

$$16 \div 100 = 0{,}16.$$

Logo, cada pedaço deve ter 0,16 metro, que é o mesmo que 16 centímetros. ■

Exercício 5.8 Um muro é formado por 10 fileiras horizontais de tijolos. Na figura abaixo, podemos ver um pedaço desse muro.



Sabendo que os tijolos têm a forma de quadrados de 25 centímetros de lado e que a primeira fileira horizontal é formada por exatamente 100 tijolos, calcule o comprimento e a altura do muro, em metros.

Solução. Inicialmente, veja que 25 cm correspondem a 0,25 metro. Assim, para calcular a altura do muro, devemos calcular $0{,}25 \times 10$ e, para calcular o comprimento do muro, devemos calcular $0{,}25 \times 100$. Portanto, o muro tem $0{,}25 \times 10 = 2{,}5$ metros de altura e $0{,}25 \times 100 = 25$ metros de comprimento. ■

5.4 – Algoritmo da Divisão e Representação Decimal

Outra maneira de descobrir a forma decimal de uma fração equivalente a uma fração decimal é através do uso do algoritmo da divisão. Para entendermos essa afirmação, considere o seguinte

Exercício 5.9 A festa de aniversário de Joaquim será realizada no próximo sábado. Dona Sônia, mãe de Joaquim, comprou 25 pacotes de balas para distribuir com os convidados no dia da festa. Sabendo que todos os pacotes tiveram o mesmo preço e que Dona Sônia gastou um total de 23 reais com as balas, calcule o preço de cada pacote.

Solução. É claro que cada pacote custou $\frac{23}{25}$ de 1 real; desse modo, precisamos encontrar a forma decimal da fração $\frac{23}{25}$. Inicialmente, observe que não podemos efetuar a divisão ordinária, pois $23 < 25$. Então, transformamos 23 em $230 \times \frac{1}{10}$ (230 décimos) e, em seguida, dividimos 230 por 25 utilizando o algoritmo da divisão, obtendo

$$230 = 25 \times 9 + 5.$$

Logo,

$$23 = 230 \times \frac{1}{10} = \frac{25 \times 9 + 5}{10} = 25 \times \frac{9}{10} + \frac{5}{10},$$

e pensamos em $\frac{9}{10} = 0{,}9$ como quociente parcial e $\frac{5}{10} = 0{,}5$ como resto parcial da divisão de 23 por 25.

Ainda restam 5 décimos para dividir por 25. Como não é possível efetuar a divisão ordinária de 5 por 25, observamos que $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$, ou seja, 5 décimos são iguais a 50 centésimos. Agora, podemos efetuar a divisão por 25: como

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{25 \times 2}{100} = 25 \times \frac{2}{100},$$

encontramos $\frac{2}{100} = 0{,}02$ como quociente e 0 como resto. Logo,

$$\frac{23}{25} = 0{,}9 + 0{,}02 = 0{,}92.$$

Portanto, cada pacote de balas custou R\$ 0,92. ■

Observação 5.4.1 Para efetuarmos essa divisão na prática, executamos os passos descritos a seguir:

1. Começamos efetuando a divisão inteira de 23 por 25, cujo quociente é 0 e cujo resto é o próprio 23.
2. Em seguida, acrescentamos um 0 à direita do resto (que é 23) e, ao mesmo tempo, uma vírgula após o quociente 0.
3. Continuamos, efetuando a divisão inteira de 230 por 25, obtendo quociente 9 (que é escrito logo após a vírgula colocada no item anterior) e resto 5.
4. Novamente, como não podemos efetuar imediatamente uma divisão inteira de 5 por 25, acrescentamos um 0 à direita do resto 5.
5. Executamos a divisão inteira de 50 por 25, obtendo quociente 2 (que é escrito logo após o 9 obtido como quociente anterior) e resto 0.
6. Como chegamos a um resto igual a 0, o processo para, e obtivemos o *quociente decimal* 0,92.

Esquematicamente, temos o seguinte diagrama que resume os passos acima:

$$\begin{array}{r|l} 23 & 25 \\ \hline 23\textcolor{red}{0} & 0{,}92 \\ 5\textcolor{red}{0} & \\ 0 & \end{array}$$

Vejamos mais um exemplo

Exercício 5.10 Carlos fez um total de 7 litros de suco de caju e distribuiu tudo em 8 garrafas idênticas, as quais ficaram completamente cheias. Qual é a capacidade de cada garrafa?

Solução. A capacidade de cada garrafa é igual a $\frac{7}{8}$ de 1 litro. Efetuando a divisão, obtemos

$$\begin{array}{l|l} 7 & 8 \\ \hline 7\textcolor{red}{0} & 0{,}875 \\ 6\textcolor{red}{0} & \\ 4\textcolor{red}{0} & \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, a capacidade de cada garrafa é 0,875 litro ou, o que é o mesmo, 875 mililitros. ■

5.5 – Frações como Porcentagens

Na seção anterior, vimos que frações cujos denominadores são potências de 10 admitem representações decimais que generalizam as representações decimais dos números naturais. Agora, vamos nos concentrar em frações de um tipo ainda mais particular, aquelas que possuem **denominador igual a 100**. Faremos uso do símbolo %, que é denominado símbolo de **porcentagem** (ou

percentagem), para denotar tais frações. O símbolo % pode ser pensado como outra representação para a fração $\frac{1}{100}$. Assim, por exemplo,

$$\frac{50}{100} = 50 \times \frac{1}{100} = 50\%$$

e

$$100\% = 100 \times \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1.$$

As porcentagens têm uso difundido em diversos tipos de situações do cotidiano. De fato, é comum escutarmos, no dia-a-dia, frases como:

A) A loja *Tudo Barato* está realizando uma promoção na qual todos os seus produtos estão sendo vendidos com **um desconto de 30%**.
B) Cerca de **40%** das pessoas entrevistadas disseram que lêem mais de um livro por mês.
C) Joaquim fez um teste e obteve **80%** de acertos.

Perceba que, em todos esses casos, estamos trabalhando com frações. Especificamente, vejamos a seguir o que cada uma das frases acima significa *em termos de frações*:

A') Na situação descrita pela frase A), o *desconto* de 30% no preço de uma mercadoria de preço 50 reais, por exemplo, significa que, ao comprá-la durante a promoção, o consumidor pagará

$$30\% \times 50 = \frac{30}{100} \times 50 = 15$$

reais *a menos* que o preço original. Assim, ele pagará $50 - 15 = 35$ reais pela mercadoria.

B') A situação descrita na frase B) pode ser interpretada da seguinte maneira: se, por exemplo, 260 pessoas foram entrevistadas, então cerca de

$$40\% \times 260 = \frac{40}{100} \times 260 = 104$$

delas afirmaram que lêem mais de um livro por mês.

C') Por fim, suponha, novamente a título de ilustração, que o teste que Joaquim fez tinha 35 questões. Então, ele acertou

$$80\% \times 35 = \frac{80}{100} \times 35 = 28$$

questões.

> **Observação 5.5.1** Quando calculamos uma porcentagem, a operação que deve ser realizada é a multiplicação.

A seguir, resolvemos mais alguns exercícios sobre este assunto, aproveitando para introduzir outros tantos conceitos importantes.

> **Exercício 5.11** Enquanto esperava o download de um aplicativo em seu celular, Gabriel notou que 30% do total de 70 megabytes já haviam sido baixados. Quantos megabytes foram baixados até aquele momento?

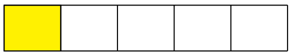
Solução. Devemos calcular 30% de 70, ou seja,

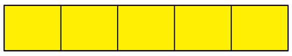
$$\frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times 70 = \frac{3 \times 70}{10} = \frac{21\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 21.$$

Portanto, o percentual de 30% do total do aplicativo que foi baixado até aquele momento corresponde a 21 megabytes. ■

Exercício 5.12 Um zoológico tem 14 araras. A quantidade de araras corresponde a 20% do total de aves do zoológico. Qual é a quantidade total de aves do zoológico?

Solução. Inicialmente, note que $\frac{20}{100} = \frac{20 \div 20}{100 \div 20} = \frac{1}{5}$. Desse modo, temos

 $= \frac{1}{5} \longleftrightarrow$ 14 aves.

 $= \frac{5}{5} \longleftrightarrow 5 \times 14 = 70$ aves.

Portanto, o zoológico possui um total de 70 aves. ■

Exercício 5.13 Do total de 200 trufas produzidas ontem pela chocolateria de Dona Dulce, 30 eram de morango, 80 de cupuaçu, 50 de maracujá e as demais eram de limão. Qual a porcentagem de trufas de limão?

(a) 60%. (b) 40%. (c) 25%. (d) 20%. (e) 15%.

Solução. Veja que a quantidade de trufas de limão é igual a

$$200 - (30 + 80 + 50) = 200 - 160 = 40.$$

Desse modo, devemos encontrar a porcentagem que corresponde a 40 trufas, em um total de 200. Assim, temos:

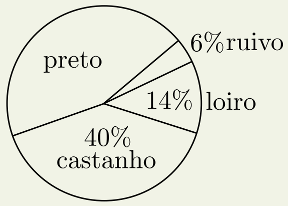
$$\frac{100}{100} \longrightarrow 200 \text{ trufas}$$
$$\frac{1}{100} \longrightarrow 200 \div 100 = 2 \text{ trufas.}$$

Como cada 2 trufas correspodem a 1% do total de trufas, as 40 trufas de limão correspondem a $40 \div 2 = 20\%$. Assim, a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

Observação 5.5.2 No exercício 5.13 poderíamos calcular a fração de trufas de limão em relação ao total de trufas e depois transformar essa fração em uma fração com denominador igual a 100. Isso nos daria diretamente o percentual de trufas de limão. De fato, a fração de trufas de limão é igual a

$$\frac{40}{200} = \frac{40 \div 2}{200 \div 2} = \frac{20}{100} = 20\%.$$

Exercício 5.14 Uma pesquisa levantou as cores dos cabelos de 1200 pessoas. Os resultados obtidos são mostrados no diagrama a seguir:



Pergunta-se: quantas das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto?

Solução. Para resolver este exercício, começamos observando que $100\% = \frac{100}{100}$ representa o total de pessoas entrevistadas, isto é, 1200 pessoas. Agora, veja que

$$6\% + 14\% + 40\% = \frac{6}{100} + \frac{14}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Logo, o percentual de pessoas com cabelo preto é:

$$100\% - 60\% = \frac{100}{100} - \frac{60}{100} = \frac{40}{100} = 40\%,$$

ou seja, 40% de uma total de 1200 pessoas. Consequentemente,

$$\frac{40}{100} \times 1200 = 480$$

das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto. ■

Observação 5.5.3 Um diagrama circular como o do exercício anterior, no qual várias porcentagens estão representadas por *setores circulares* de *aberturas* proporcionais às mesmas, é conhecido como um **gráfico de pizza** ou, ainda, um **gráfico de setores**. Uma grande vantagem dos gráficos de setores reside no fato de que eles transmitem rapidamente uma ideia das porcentagens envolvidas. Metodologicamente, esse é um bom momento para definir gráficos de setores, uma vez que eles são simplesmente uma outra maneira de representar porcentagens.

Exercício 5.15 — OBM. Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, o qual era composto de 20% de polpa de fruta e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é de polpa?

Solução. Em $1\,l = 1000\,ml$ de suco temos $20\% = \frac{1}{5}$ de polpa, logo, $\frac{1}{5} \times 1000\,ml = 200\,ml$ de polpa. Agora, uma vez que a mistura terá volume total de $4\,l = 4000\,ml$, concluímos que a fração que representa a quantidade de polpa nessa mistura deve ser igual a

$$\frac{200}{4000} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

Portanto, 5% do volume final corresponde à polpa de fruta. ■

Exercício 5.16 Após o Natal, a dona de uma loja de roupas resolveu fazer uma liquidação e vender todas as suas peças com 20% de desconto. Maria cuida de um orfanato e, por isso, foi à loja comprar uma grande quantidade de roupas. Sabendo da causa social, a dona da loja lhe ofereceu um desconto extra de 10%. Em relação ao preço original, qual a porcentagem de desconto recebido por Maria?

Solução. Seja p o preço inicial de uma peça de roupa. Após o primeiro desconto, o valor da roupa passou a ser de $80\%\,p = \frac{80}{100} \times p$. O segundo desconto é de 10% sobre o preço após a aplicação do desconto ordinário. Portanto, Marta pagou $100\% - 10\% = 90\%$ do preço anunciado após a aplicação do desconto ordinário. Assim, o valor final da roupa será

$$\frac{90}{100} \times \frac{80}{100}p = \frac{72}{100}p = 72\%\,p.$$

Portanto, em relação ao preço original, Maria receberá um desconto total de $100\% - 72\% = 28\%$ (e não $20\% + 10\% = 30\%$, como se poderia pensar a princípio). ■

Observação 5.5.4 No exercício 5.16, outra estratégia válida é atribuir um preço qualquer, digamos 100 reais, à peça de roupa e, a partir daí, calcular os descontos sucessivos sobre esse preço.

Exercício 5.17 — OBM - adaptado. Películas protetoras para vidros são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Se colocarmos uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, calcule a redução de radiação solar para quem se encontra no interior do ambiente.

Solução. Argumentando de maneira análoga à solução do exemplo anterior, temos que o vidro, com a aplicação da película, deixa passar um percentual de

$$\frac{70}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{63}{100} = 63\%$$

do total de radiação solar percebido ao ar livre. Portanto, quem se encontra no interior do ambiente recebe a radiação solar com uma redução de $100\% - 63\% = 37\%$. ■

Observação 5.5.5 Descontos ou acréscimos sucessivos sempre devem ser considerados como operações de multiplicação. Assim, **é um erro comum pensarmos que descontos ou acréscimos sucessivos devem ser somados**. Os exemplos 5.16 e 5.17 têm o papel de esclarecer esse fato.

5.6 – Exercícios Propostos

Nível 1

Exercício 5.18 A leitura correta de 0,021 é:

(a) vinte e um décimos.
(b) vinte e um centésimos.
(c) vinte e um décimos de milésimos.
(d) vinte e um milésimos.

Exercício 5.19 O número 0,0001 é o mesmo que:

(a) um centésimo.
(b) $\frac{1}{1000}$.
(c) $\frac{1}{10000}$.
(d) um centésimo de milésimo.

Exercício 5.20 Dentre as operações listadas abaixo, a única que apresenta resultado correto é a opção:

(a) $58987 \div 1000 = 589{,}87$.
(b) $0{,}502 \div 1000 = 502$.
(c) $68{,}53 \times 10 = 6{,}853$.
(d) $145{,}3 \times 100 = 14530$.
(e) $500{,}03 \div 1000 = 5{,}0003$.

Exercício 5.21 Utilize algarismos para representar cada um dos números decimais abaixo.

(a) Nove inteiros e quatro décimos.
(b) Quarenta e dois inteiros e trinta e oito milésimos.
(c) Sessenta e nove centésimos.
(d) Cento e vinte e quatro centésimos.
(e) Vinte inteiros e cinco milésimos.
(f) Trezentos e trinta e cinco milésimos.
(g) Setenta e seis centésimos.

Exercício 5.22 Que alternativa traz a representação decimal da fração $\frac{35}{1000}$?

(a) 0,35.
(b) 3,5.
(c) 0,035.
(d) 35.

Exercício 5.23 Encontre a representação decimal de cada uma das frações abaixo:

(a) $\frac{3}{5}$.
(b) $\frac{8}{16}$.
(c) $\frac{3}{25}$.
(d) $\frac{9}{6}$.
(e) $\frac{12}{150}$.
(f) $\frac{6}{60}$.
(g) $\frac{90}{125}$.
(h) $\frac{180}{750}$.
(i) $\frac{1}{625}$.
(j) $\frac{144}{15}$.

Exercício 5.24 Escreva os números decimais abaixo em forma de fração irredutível.

(a) 0,4.
(b) 1,25.
(c) 1,4.
(d) 12,5.
(e) 0,52.
(f) 12,25.
(g) 3,75.
(h) 14,625.
(i) 0,125.
(j) 100,13.

Exercício 5.25 Classifique cada uma das afirmações abaixo, sobre o número decimal 495,8732, como verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique suas respostas.

( ) O algarismo 7 ocupa a ordem dos décimos, ou seja, seu valor corresponde a $7 \times \frac{1}{10}$.

( ) O valor do algarismo 9 corresponde a $9 \times 10 = 90$ unidades.

( ) O número é formado por 4 centenas, 9 dezenas, 5 unidades, 8 décimos, 7 centésimos e 2 milésimos.

( ) O algarismo 2 representa $2 \times \frac{1}{10000}$.

( ) $495{,}8732 = 400 + 90 + 5 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10000}$.

Exercício 5.26 Fábio e Gregório são sócios em uma empresa de transporte de cargas. De acordo com o capital investido, Fábio fica com 60% dos lucros e Gregório com 40%. Se, no ano de 2019, a empresa teve um lucro total de 80 mil reais, que valor coube a cada sócio?

Exercício 5.27 Juca está participando de uma corrida de bicicleta e já percorreu um quinto da distância prevista. A fração do percurso que Juca já percorreu pode ser representada pelo número decimal:

(a) 0,2.
(b) 0,5.
(c) 1,2.
(d) 1,5.

Exercício 5.28 Qual das expressões numéricas abaixo corresponde ao número decimal 200,805?

(a) $2 \times 100 + 8 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$.

(b) $2 \times 10 + 8 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{1000}$.

(c) $2 \times 100 + 8 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{1000}$.

(d) $2 \times 10 + 8 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}$.

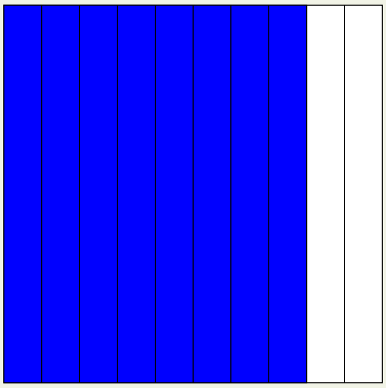
(e) $2 \times 100 + 8 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{10000}$.

Nível 2

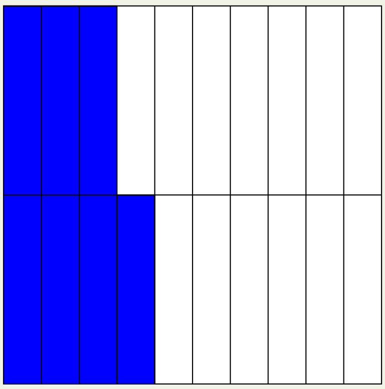
Exercício 5.29 Em cada uma das figuras a seguir, admita que as larguras e os comprimentos de todos os retângulos menores são iguais. Para cada figura, expresse a área pintada de azul como:

(a) uma fração irredutível.
(b) um número decimal.
(c) uma porcentagem.

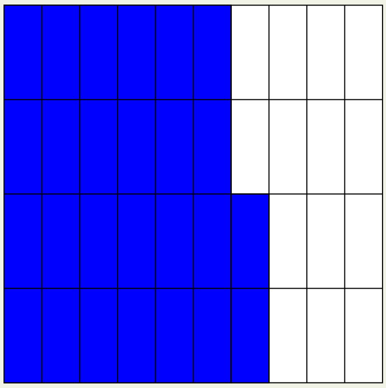
I



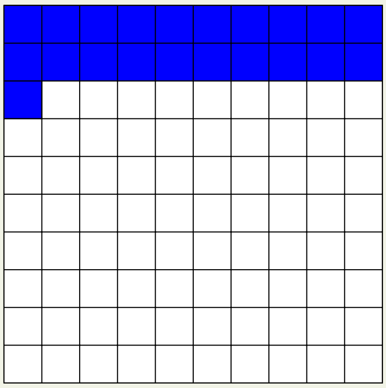
II



III



IV



Exercício 5.30 Escreva cada número decimal abaixo na forma de número misto.

(a) 8,3.
(b) 4,67.
(c) 12,31.
(d) 1,329.
(e) 48,2347.

Exercício 5.31 Estima-se que, em cada grupo de 10 habitantes do planeta Terra, uma pessoa seja canhota. Qual o percentual de canhotos na população mundial?

Exercício 5.32 Ponha os números listados na tabela abaixo em ordem crescente.

4,325	4,333	3,231	2,964	4,523
3,512	2,946	3,219	2,899	3,521

Exercício 5.33 Por quanto devemos multiplicar o valor representado pelo algarismo 8 no número 38,472 para obtermos o valor representado pelo algarismo 8 no número 235,98?

(a) 1000. (b) 100. (c) 10. (d) $\frac{1}{10}$. (e) $\frac{1}{100}$.

Exercício 5.34 Quais das representações abaixo são equivalentes a cinco décimos?

( ) $\frac{5}{10}$. ( ) 0,50%. ( ) 0,5.

( ) $\frac{5}{100}$. ( ) 5%. ( ) 5.

( ) $\frac{1}{2}$. ( ) 50%. ( ) 50.

Exercício 5.35 Em uma questão da prova de Matemática, a professora Amélia pediu para que os alunos representassem o número 0,05 em forma de fração. Mariana respondeu $\frac{5}{10}$, Fabiano $\frac{10}{5}$, Fernanda $\frac{5}{100}$ e Marcela respondeu $\frac{5}{1000}$. Qual deles respondeu corretamente?

Exercício 5.36 A fração $\frac{3}{4}$ também pode ser representada por:

(a) 0,3.
(b) 0,4.
(c) 0,63.
(d) 0,75.

Exercício 5.37 Uma representação para número decimal 0,025 é:

(a) 2,5%.
(b) 25%
(c) 0,25%.
(d) 0,025%.

Exercício 5.38

(a) Quantos décimos possui o número decimal 1,2?
(b) Duas unidades correspondem a quantos centésimos?
(c) Trezentos e vinte mil milésimos correspondem a quantas unidades?
(d) Duzentos e dez centésimos correspondem a quantos décimos?

Nível 3

Exercício 5.39 Em um zoológico há 300 animais. Sabe-se que 30% dos animais do zoológico são mamíferos e que 10% dos mamíferos são macacos. Quantos macacos há no zoológico?

Exercício 5.40 Fernando levou 15% menos tempo do que Tobias para dar uma volta completa na pista de atletismo do colégio em que estudam. Se

Tobias conseguiu completar a sua volta em 2 minutos e 20 segundos, quanto tempo Fernando levou para completar a volta?

Exercício 5.41 Observe as desigualdades abaixo:

(I) $10{,}001 < 9{,}99$.
(II) $2{,}09 > 1{,}9$.
(III) $9{,}01 < 0{,}901$.
(IV) $\frac{1}{4} > 0{,}28$.

Podemos afirmar que:

(a) I e II estão corretas.
(b) II está errada.
(c) apenas I e III estão erradas.
(d) apenas II está correta.
(e) II e III estão corretas.

Exercício 5.42 Joaquim foi ao supermercado fazer compras com seu pai. Ele perguntou ao pai se ainda faltavam muitos itens para finalizar a lista de compras, após o que o pai respondeu: "nós já pegamos 35% dos itens da nossa lista". Joaquim olhou para o carrinho e contou 21 itens. Quantos itens constavam da lista de compras?

Exercício 5.43 (CMF) Um funcionário da Empresa Delta, por ter sido o destaque do ano, recebeu, em fevereiro de 2017, um aumento de 25% em seu salário. Esse funcionário, por ter sido promovido de cargo, recebeu, em fevereiro de 2018, mais um aumento de 25% sobre o salário atual. Após esses dois aumentos, seu salário de janeiro de 2017 teve um acréscimo percentual total de:

(a) 50%.
(b) 52,55%.
(c) 56,25%.
(d) 57,75%.
(e) 58%.

Exercício 5.44 Por orientação de uma nutricionista, pelo menos 30% dos carboidratos que compõem a dieta diária de Giselle devem ser formados por grãos integrais. Hoje ela ingeriu 210 gramas de carboidratos, dos quais 52,5 gramas eram compostos por grãos integrais.

(a) Giselle cumpriu a meta estabelecida pela nutricionista?
(b) Quantos gramas de carboidratos compostos por grãos integrais Giselle ingeriu a mais (ou a menos) do que a meta estabelecida pela nutricionista?

Exercício 5.45 Uma piscina tem 10 metros de largura, 25 metros de comprimento e 3 metros de profundidade. No início da semana, a piscina encontrava-se totalmente cheia. No final da mesma semana, parte da água evaporou e a piscina ficou com apenas 600 mil litros de água. Que porcentagem da água evaporou?

Exercício 5.46 Por causa do baixo movimento durante o mês de outubro de 2019, uma loja ofereceu um desconto de 30% no preço de determinado video-game. Em dezembro, com o aquecimento das vendas gerado pelo Natal, o dono da loja resolveu reajustar em 30% o preço praticado em outubro. Em relação ao preço original (antes do desconto aplicado em outubro) o preço praticado pela loja em dezembro é:

(a) Igual, pois primeiro foi aplicado um desconto de 30% e depois um reajuste de 30%.
(b) 9% menor.
(c) 9% maior.
(d) 91% menor.
(e) 91% maior.

Exercício 5.47 Antonio almoça na cantina da repartição em que trabalha e o custo diário de sua refeição é R$ 26,00. Ele sempre pede um copo de suco de laranja para acompanhar o almoço, no valor de R$ 4. Pelo serviço, Antonio sempre deixa uma gorjeta de 10% sobre o valor total consumido. Se Antonio almoça na cantina de segunda a sexta-feira, sempre repetindo o mesmo cardápio, qual é seu gasto semanal, incluindo a gorjeta?

Nível 4

Exercício 5.48 (CMF) Uma fábrica produz parafusos de 2,6 cm de medida. Podem ser comercializados os parafusos que, por algum problema no processo de produção, tiverem no mínimo 2,47 cm e no máximo 2,73 cm de medida. Em um certo dia, verificou-se que uma máquina estava desregulada e foram produzidos parafusos com cinco tamanhos diferentes: 2,7 cm; 2,49 cm; 2,66 cm; 2,08 cm e 2,5 cm. Os parafusos que não poderão ser comercializados por essa fábrica, por não estarem dentro das medidas estabelecidas, são os que possuem medida igual a:

(a) 2,7 cm.
(b) 2,49 cm.
(c) 2,66 cm.
(d) 2,08 cm.
(e) 2,5 cm.

Exercício 5.49 O campo de futebol da Arena Castelão tem as seguintes dimensões: 106 metros de comprimento por 68 metros de largura. O campo de futebol foi coberto, em 2012, por placas de grama de formato retangular, com dimensões 200 centímetros de comprimento e 100 centímetros de largura. O trabalho de colocação das placas de grama ocorreu em 20 dias. Nos 5 primeiros dias, foram colocadas 25% das placas utilizadas para cobrir o gramado. Quantas placas de grama foram colocadas nos últimos 15 dias?

(a) 2577.
(b) 2652.
(c) 2703.
(d) 2754.
(e) 2763.

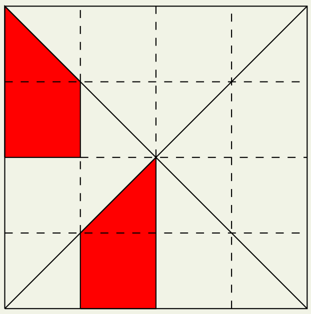
Exercício 5.50 (CMF) Dos 2000 funcionários de uma empresa multinacional, 60% são do sexo feminino. Além disso, 640 homens são de nacionalidade brasileira e 25% das mulheres são estrangeiras. O total de funcionários da empresa, de ambos sexos, que são estrangeiros é um número múltiplo de:

(a) 12. (b) 17. (c) 23. (d) 30. (e) 50.

Exercício 5.51 (Banco OBMEP) Em um certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

(a) 2%. (b) 4%. (c) 10%. (d) 12%. (e) 12,2%.

Exercício 5.52 (Banco OBMEP) Na figura a seguir, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Que porcentagem do quadrado maior a região pintada cobre?



Exercício 5.53 (Banco OBMEP) Na cidade de Trocalândia, 20% dos gatos pensam que são cachorros e 25% dos cachorros pensam que são gatos. Certo dia, um psicólogo veterinário resolve testar todos os gatos e cachorros de Trocalândia, verificando que 30% do total pensava ser gato. Que proporção dos animais testados era de cães?

Exercício 5.54 (ENEM) O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações [a].

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:

(a) R$ 900,00.
(b) R$ 1200,00.
(c) R$ 2100,00.
(d) R$ 3900,00.
(e) R$ 5100,00.

[a] Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 de abril 2010 (adaptado).

Exercício 5.55 (ENEM) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

(a) 15,00.
(b) 14,00.
(c) 10,00.
(d) 5,00.
(e) 4,00.