Material Estruturado

MATEMÁTICA

Perímetros

Autores:
Ulisses Parente
Italândia F. de Azevedo
Angelo Papa Neto
Antonio Caminha M. Neto
Francisco Tadeu V. Celedon

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P441 Perímetros [recurso eletrônico] / Ulisses Lima Parente...[et.al.].-
Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43567-2 (E-book)

1. Perímetro. 2. Perímetro de polígonos. 3. Comprimento de circunferências. I. Parente, Ulisses Lima. II. Azevedo, Italândia Ferreira de. III. Papa Neto, Angelo. IV. Muniz Neto, Antonio Caminha. V. Celedônio, Francisco Tadeu Valente. VI. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). VII. Título.

CDD: 516

8 Perímetro de figuras planas

O **perímetro** de uma determinada região do plano é o comprimento da curva que delimita essa região. Neste módulo, vamos tratar de problemas que envolvem o cálculo do perímetro de diversas figuras planas, começando com as mais simples, como triângulos, retângulos, trapézios e polígonos regulares, e depois passando a figuras mais sofisticadas, como o círculo.

8.1 – Perímetro de polígonos

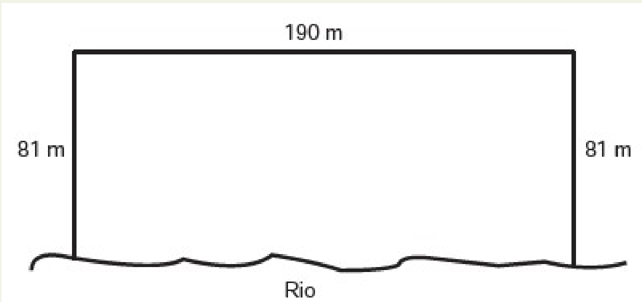
Iniciamos nossa discussão sobre perímetros resolvendo dois problemas simples, os quais envolvem o cálculo do perímetro de um retângulo.

Exercício 8.1 — SAEP 2013. Alfredo tem o costume de correr em torno de um parque de formato retangular. A dimensão do parque é de 500 metros de largura por 600 metros de comprimento. Sabendo que Alfredo dá quatro voltas em torno do parque todos os dias, podemos afirmar que ele percorre, todos os dias, um total de:

(a) 2,2 km (b) 4,4 km (c) 8,8 km (d) 300 km

Solução. O perímetro do parque é igual a $2 \cdot (500 + 600) = 2200$ metros. Contudo, essa é a distância que ele percorre ao dar uma única volta em torno do mesmo. Como ele dá quatro voltas, a distância que ele percorre é igual a $4 \cdot 2200 = 8800$ metros. Agora, observe que as respostas vêm dadas em quilômetros. Como 1000 metros correspondem a um quilômetro, temos que dividir o valor obtido em metros por 1000, a fim de obter o valor correspondente em quilômetros. Assim fazendo, concluímos que Alfredo percorre um total de 8,8 km; a resposta correta é o item (c). ■

Exercício 8.2 — ENEM 2013. Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é:

(a) 6. (b) 7. (c) 8. (d) 11. (e) 12.

Solução. Uma vez que um dos lados é margeado pelo rio, devemos desconsiderar esse lado ao calcular o perímetro do terreno, pois não utilizaremos tela alguma aí. Desse modo, a quantidade de tela utilizada para cercar todo o terreno é igual a $81 + 81 + 190 = 352$ metros. Por outro lado, a tela é vendida em rolos de 48 metros. Assim, para calcular a quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar o terreno, devemos começar dividindo 352 por 48:

$$\begin{array}{r|l} 352 & 48 \\ \hline 16 & 7 \end{array}$$

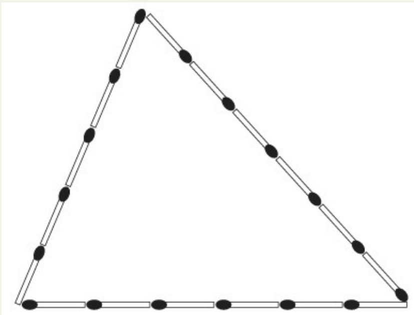
Veja que 7 rolos de tela não são suficientes para cercar o terreno, pois ainda ficariam 16 metros sem cerca. Assim, a quantidade mínima de rolos para cercar o terreno é $7+1 = 8$, embora o oitavo rolo não seja utilizado completamente. ■

Agora, vamos apresentar um exemplo que envolve o cálculo do perímetro de triângulos, o qual recorda um fato fundamental sobre os lados de um triângulo:

Desigualdade triangular: É possível construir um triângulo com três segmentos dados se, e somente se, a medida de cada um desses segmentos for menor que a soma das medidas dos outros dois.

Em particular, veja que, em todo triângulo a medida de cada lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Exercício 8.3 — Enem 2014. Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

(a) 3. (b) 5. (c) 6. (d) 8. (e) 10.

Solução. Veja que, utilizando um palito de fósforo como unidade de medida, o perímetro de cada triângulo satisfazendo as condições dadas no enunciado do problema deve ser igual a 17. Além disso, as medidas dos lados são números inteiros positivos de palitos de fósforo. Assim, pela desigualdade triangular, o maior lado de cada triângulo formado pelos palitos deve ter medida igual a, no máximo, 8 palitos, pois se a medida desse lado fosse, por exemplo, igual a 9 palitos, restariam somente $17 - 9 = 8$ palitos para compor a soma das medidas dos outros dois lados, o que não pode acontecer.

Recordando que um dos lados deve medir 6 palitos, temos as seguintes possibilidades para as medidas dos três lados dos triângulos que serão criados pela criança:

- Se o maior dos lados tiver medida igual a 8, os outros dois lados devem medir 6 e $17 - (8 + 6) = 17 - 14 = 3$ palitos.
- Se o maior dos lados tiver medida igual a 7, os outros dois devem medir 6 e $17 - (7 + 6) = 17 - 13 = 4$ palitos.
- Se o maior lado tiver medida igual a 6, os outros dois lados não poderão medir menos que 6, pois, do contrário, o perímetro conteria no máximo $6 + 5 + 5 = 16$ palitos de fósforo. Então, nesse caso teremos pelo menos dois lados com medidas iguais a 6, de sorte que o terceiro lado terá medida igual a $17 - 2 \cdot 6 = 17 - 12 = 5$ palitos.

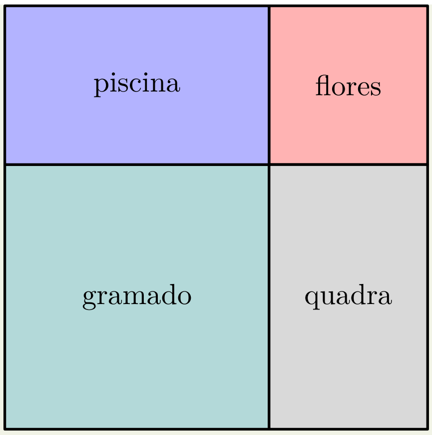
Assim, podemos montar a seguinte tabela com as medidas dos triângulos descritos acima:

maior lado	**segundo lado**	**terceiro lado**	**perímetro**
8	6	3	17
7	6	4	17
6	6	5	17

Portanto, há apenas 3 triângulos satisfazendo as condições dadas no enunciado do problema. A alternativa correta é a letra **(a)**. ■

Por vezes, em problemas envolvendo o cálculo de perímetros, pode-se ter a impressão de que o enunciado traz uma quantidade insuficiente de dados. Em geral, isso se deve ao fato de que os comprimentos não listados diretamente devem ser calculados com o auxílio de propriedades geométricas das figuras.

Exercício 8.4 — Prova Brasil. Um terreno quadrado foi dividido em quatro partes, como mostra o desenho abaixo. Uma parte foi destinada para piscina, uma para a quadra, uma parte quadrada para o canteiro de flores e outra, também quadrada, para o gramado. Sabe-se que o perímetro da parte destinada ao gramado é de 20 m, e o do canteiro de flores, é de 12 m.



Qual o perímetro da parte destinada à piscina?

Solução. Como a parte delineada para gramado é um quadrado e possui perímetro 20, os lados desse quadrado medem $20/4 = 5$ metros. O canteiro de flores, também sendo um quadrado, e com perímetro 12, deverá possuir lados medindo $12/4 = 3$ metros. Pela figura, podemos observar que um dos lados da piscina coincide com um do gramado e outro lado da piscina coincide com um do canteiro de flores. Logo, a piscina tem dimensões 5×3. Então, temos que o perímetro da piscina é $2 \cdot (5 + 3) = 16$ metros. ■

No exercício anterior tivemos de utilizar propriedades da figura para calcular comprimentos não dados. Contudo, isso foi facilitado pelo fato de que a figura já vinha dividida em certas regiões cujos formatos tinham propriedades geométricas ditas explicitamente (eram quadrados).

A seguir, discutimos duas situações um pouco mais complicadas, no sentido de que temos de completar as figuras dadas de uma maneira adequada a informações geométricas dadas.

Na Figura 8.1 temos dois terrenos. O da esquerda, em forma de “L”, é tal que os ângulos internos formados por todos os pares de lados consecutivos são iguais a $90°$ ou $270°$. Por outro lado, o terreno da direita tem o formato de um *trapézio retângulo*, onde os lados de medidas $6\,\text{m}$ e $3\,\text{m}$ são paralelos e o lado de medida $4\,\text{m}$ é perpendicular a ambos.

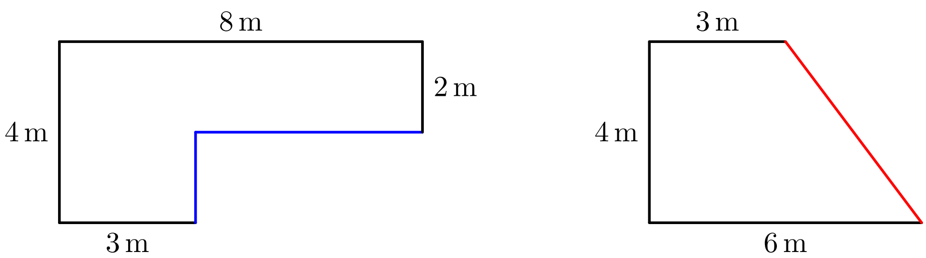


Figura 8.1: dois terrenos limitados por polígonos.

Note que, em ambos os terrenos, a princípio não conhecemos as medidas de alguns trechos da cerca, destacados de azul no terreno da esquerda e de vermelho no terreno da direita. Entretanto, conforme mencionamos anteriormente, podemos calcular seus comprimentos utilizando a geometria das figuras.

Para o terreno da Figura 8.1 à esquerda, é dito que todos os ângulos internos entre lados consecutivos medem $90°$ ou $270°$. Como um quadrilátero com todos os seus ângulos internos retos é um retângulo, não é difícil perceber que podemos dividir esse primeiro terreno em dois retângulos, conforme mostrado na Figura 8.2 (veja o segmento de reta tracejado BF):

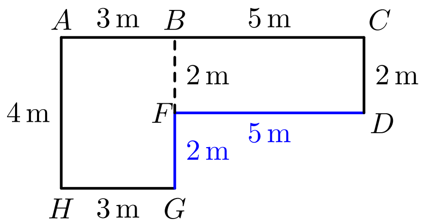
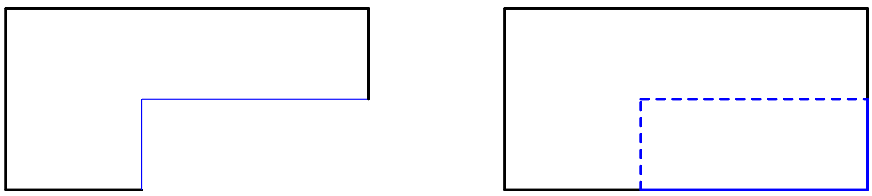


Figura 8.2: cálculo dos comprimentos dos lados remanescentes do "L".

Como os lados opostos de um retângulo têm as mesmas medidas, o segmento BF tem a mesma medida do segmento CD, ou seja, $\overline{BF} = 2\,\text{m}$. Da mesma forma, o segmento BG tem medida igual à do segmento AH, de forma que $\overline{BG} = 4\,\text{m}$ e, assim, $\overline{FG} = \overline{BG} - \overline{BF} = 4\,\text{m} - 2\,\text{m} = 2\,\text{m}$. Agora, observue que o lado horizontal maior AC, que mede $8\,\text{m}$, ficou dividido em dois segmentos, AB e BC. Novamente pelo fato de $ABGH$ ser um retângulo, temos $\overline{AB} = 3\,\text{m}$. Então, $\overline{DF} = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 8\,\text{m} - 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$. Portanto, o perímetro do terreno em forma de "L" é

$$4 + 8 + 2 + 5 + 2 + 3 = 24 \text{ metros.}$$

Outro modo de explorar a geometria da figura para calcular o perímetro do terreno em forma de "L" consiste em *explorar uma simetria escondida*, mais precisamente, perceber que esse perímetro é igual àquele do retângulo esboçado na figura abaixo, à direita:



Isto porque, nela, o quadrilátero em azul é um retângulo (novamente pela condição sobre os ângulos internos formados por lados consecutivos do "L"). Logo, a soma das medidas de dois lados consecutivos do mesmo é igual à soma das medidas dos outros dois lados. Desse modo, o perímetro pedido é igual a

$$2 \cdot (\overline{AH} + \overline{AC}) = 2 \cdot (4 + 8) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ metros.}$$

No terreno em forma de trapézio retângulo (Figura 8.1, à direita) é preciso calcular a medida do segmento vermelho. Fazemos isso traçando o segmento MK, perpendicular à base do trapézio, o qual divide o trapézio no retângulo $IJKM$ e no triângulo retângulo KLM (veja a Figura 8.3):

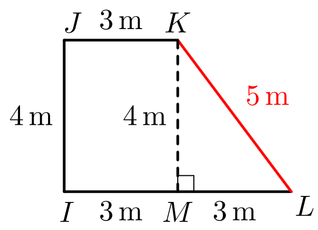


Figura 8.3: cálculo dos comprimento do lado oblíquo do trapézio retângulo.

Utilizando novamente o fato de que os lados opostos de um retângulo têm medidas iguais, obtemos $\overline{MK} = \overline{IJ} = 4\,\text{m}$ e $\overline{MI} = \overline{JK} = 3\,\text{m}$; logo, $\overline{ML} = \overline{IL} - \overline{MI} = 6\,\text{m} - 3\,\text{m} = 3\,\text{m}$. Por fim, uma vez que o triângulo KLM é retângulo em M, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa KL:

$$\overline{KL}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{LM}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

logo, $\overline{KL} = 5\,\text{m}$. Portanto, o perímetro do terreno em forma de trapézio retângulo é igual a

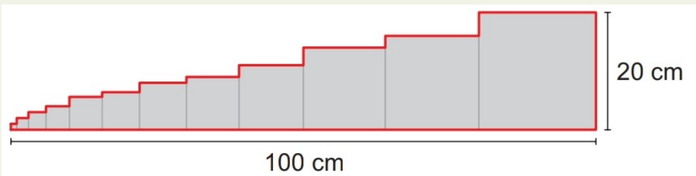
$$4 + 3 + 5 + 6 = 18 \text{ metros.}$$

Exercício 8.5 Considere o terreno em forma de “L”, à esquerda na Figura 8.1, e sua divisão em dois retângulos, mostrada na Figura 8.2. Calcule a soma dos perímetros dos dois retângulos, compare com o perímetro do terreno (24 metros) e explique a diferença entre os resultados obtidos.

Solução. Os perímetros dos dois retângulos medem $3+4+3+4 = 14$ metros e $2+5+2+5 = 14$ metros. A soma dos dois perímetros é $14+14 = 28$ metros, de forma que é 4 metros superior ao perímetro do terreno. Isso se dá porque, ao calcularmos os perímetros dos dois retângulos separadamente, o segmento BE foi contado duas vezes, enquanto que, ao calcularmos o perímetro do terreno completo, esse segmento não é considerado (porque não faz parte dos limites do terreno). Como o segmento BE tem comprimento $2\,\text{m}$, isso provoca uma diferença de $2 \cdot 2 = 4$ metros entre os dois cálculos. ■

O próximo exercício explora um pouco mais a segunda estratégia de cálculo do perímetro do “L” (explorar uma simetria escondida).

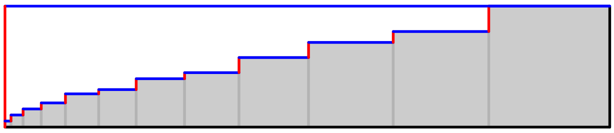
Exercício 8.6 — OBMEP. Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?



(a) 220 cm.
(b) 240 cm.

(c) 260 cm.
(d) 300 cm.
(e) 400 cm.

Solução. Inicialmente, completamos um retângulo cujos lados medem 100 cm e 20 cm, conforme mostrado a seguir:

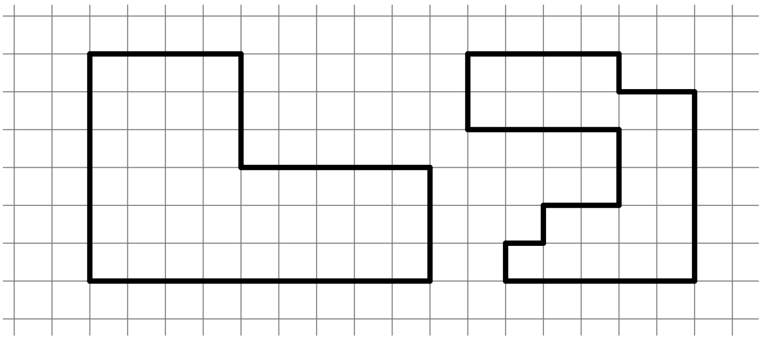


Na figura acima, a soma dos segmentos que fazem parte do contorno da figura e que estão pintados de vermelho é igual à medida do lado do retângulo que está pintado de vermelho. Do mesmo modo, a soma das medidas dos segmentos que estão pintados de azul é igual à medida do lado do retângulo que está pintado de azul. Assim, o seu perímetro que se quer calcular é igual a

$$2 \cdot (100 + 20) = 2 \cdot 120 = 240 \text{ cm}.$$

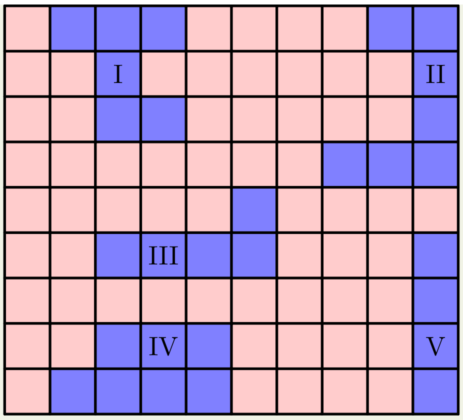
A alternativa correta é a letra **(b)**. ∎

Também podemos calcular perímetros de figuras desenhadas em malhas quadriculadas, como aquelas mostradas na figura abaixo:



Exploramos esse tipo de situação nos dois exercícios a seguir.

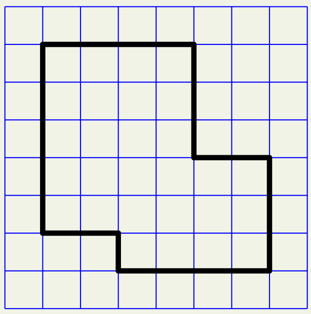
Exercício 8.7 — SARESP 2007. (Adaptada) A figura seguinte é composta de uma malha tal que os lados dos quadradinhos possuem uma mesma medida e algumas regiões, numeradas de I a V, estão destacadas. Assinale a alternativa que traz duas regiões com um mesmo perímetro:



(a) III e IV. (b) II e III. (c) II e IV. (d) I e II.

Solução. Medindo-se em unidades de lados dos quadradinhos, a região I possui perímetro 14, a II possui perímetro 16, a III possui perímetro 12, a IV possui perímetro 12 e a V possui perímetro 10. Logo, a resposta correta é o item **(a)**. ■

Exercício 8.8 — CMF–2017. Na malha quadriculada abaixo, a figura em destaque representa uma ciclovia. Um ciclista deu quatro voltas completas nessa pista, percorrendo um total de 288 metros. É correto afirmar que a área delimitada por essa pista, em metros quadrados, é igual a:



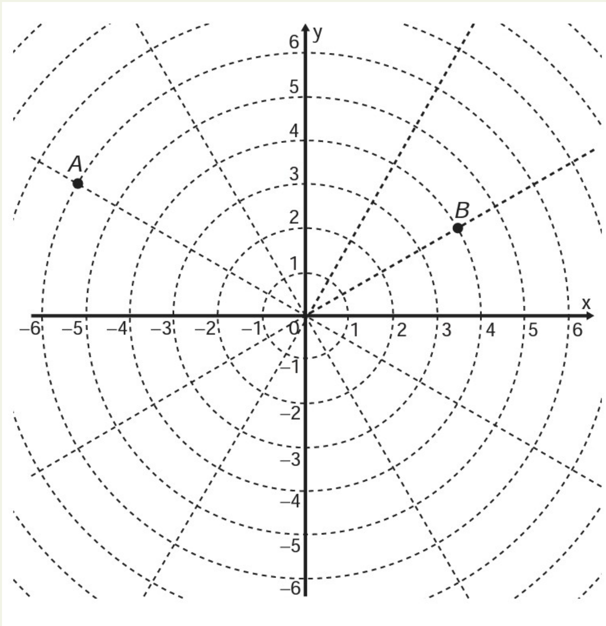
(a) 243. (b) 252. (c) 279. (d) 2016. (e) 4032.

Solução. O ciclista deu 4 voltas e percorreu 288 metros. Logo, em cada volta ele precorreu $\frac{288}{4} = 72$ metros. Contando diretamente na figura, observamos que, em cada volta, o ciclista passa por 24 lados de quadrados da malha. Assim, o lado de cada quadrado representa uma distância de $\frac{72}{24} = 3$ metros. Logo, a área de cada quadrado corresponde a $3^2 = 9\,\text{m}^2$. Por fim, também contando diretamente na figura, vemos que o número de quadrados na região delimitada pela ciclovia é 28. Portanto, a área dessa região é $28 \cdot 9 = 252\,\text{m}^2$. ■

8.2 – Polígonos regulares e o comprimento de circunferências

Iniciamos esta seção propondo o seguinte exercício, extraído do Enem 2018:

Exercício 8.9 — Enem 2018. Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por círculos de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de 30°, conforme mostrado na figura.



Suponha que um ponto material se desloque apenas pelas semirretas e pelos círculos da malha, não podendo passar pela origem (0,0). Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto A até o ponto B, um ponto material deve percorrer uma distância igual a:

(a) $\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3} + 8$.

(b) $\frac{2\cdot\pi\cdot 2}{3} + 6$.

(c) $\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{3} + 4$.

(d) $\frac{2\cdot\pi\cdot 4}{3} + 2$.

(e) $\frac{2\cdot\pi\cdot 5}{3} + 2$.

Para resolver o exercício 8.9, precisamos saber como calcular a circunferência de um círculo cujo diâmetro (ou raio) é conhecido. Comecemos fazendo algumas observações sobre polígonos regulares.

Um polígono convexo é chamado **regular** se todos os seus lados têm medidas iguais e todos os seus ângulos internos têm medidas iguais. A Figura 8.4 esboça polígonos regulares de n lados, para n variando de 3 a 8.

Dizemos que um polígono está **inscrito** em um círculo quando todos os vértices do polígono pertencem ao círculo (em particular, o polígono está

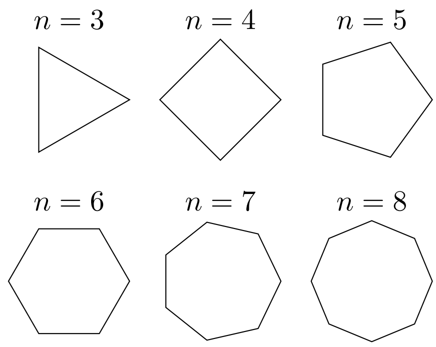


Figura 8.4: polígonos regulares de até 8 lados.

dentro do disco delimitado pelo círculo). Dizemos também que um polígono está **circunscrito** a um círculo quando todos os seus lados são tangentes ao círculo (neste caso, o círculo é que está situado na região limitada pelo polígono). A Figura 8.5 mostra (à esquerda) um hexágono inscrito e (à direita) um quadrado circunscrito a um círculo de raio r.

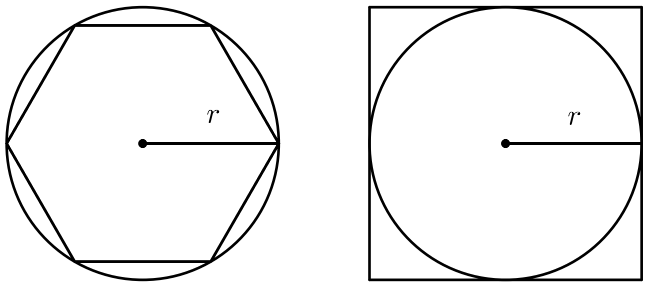


Figura 8.5: hexágono inscrito (à esquerda) e quadrado circunscrito (à direita) a um círculo de raio r.

> **Observação 8.2.1** Dizer que um o polígono está inscrito em um círculo é o mesmo que dizer que este círculo está circunscrito ao polígono. Da mesma forma, dizer que o polígono está circunscrito a um círculo equivale a dizer que este círculo está inscrito no polígono.

A razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro (o dobro do raio) é uma constante, que chamamos de π. Assim, se C denota a circunferência de um círculo de raio r, temos que $\pi = C/(2r)$.

Em sua obra *Sobre a Medida de um Círculo*, Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C.) encontrou valores aproximados para π usando os perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a um círculo de raio 1. Ele começou com hexágonos regulares, um inscrito e outro circunscrito a um círculo de raio 1 e, a partir desses polígonos, construiu outros polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo, mas agora com 12, 24, 48 e 96 lados. Assim fazendo, ele conseguiu obter estimativas por falta e por excesso para π, as quais ficavam cada vez melhores quando o número de lados do polígono era duplicado (veja uma ilustração desse processo na figura abaixo).

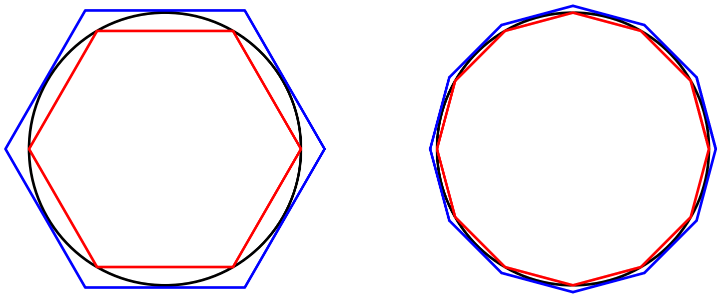


Figura 8.6: hexágonos e dodecágonos regulares inscrito e circunscrito a um círculo.

Como resultado das medições dos perímetros dos últimos polígonos inscrito e circunscrito (os de 96 lados), Arquimedes obteve as estimativas

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}$$

ou, o que é o mesmo,

$$3{,}140845<\pi<3{,}142857.$$

Na Idade Moderna, com o passar dos anos foram obtidas aproximações cada vez melhores para π. Apesar disso, somente em 1768 o matemático suíço Johann Heinrich Lambert provou que π é um número irracional, ou seja, que sua representação decimal é infinita e não periódica.

Observação 8.2.2 Na prática, quando desejamos encontrar o comprimento C de um círculo e conhecemos a medida r de seu raio (ou seu diâmetro d), utilizamos a fórmula

$$C=\pi d=\pi\cdot 2r=2\pi r.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exercício 8.10 Joaquim fez uma marca em um dos pneus de sua bicicleta utilizando tinta fresca. Ele pedalou por alguns metros em linha reta e percebeu que o contato do pneu com o chão deixou marcas no chão e que a distância entre duas marcas consecutivas era sempre a mesma. Joaquim mediu essa distância e encontrou o valor de 1,63 m. Qual das opções abaixo apresenta a medida, em centímetros, que mais se aproxima da medida do diâmetro da roda da bicicleta de Joaquim? (utilize $\pi=3{,}14$.)

(a) 40. (b) 44. (c) 48. (d) 52. (e) 56.

Solução. Veja que a distância entre duas marcas consecutivas é igual à circunferência C das rodas da bicicleta de Joaquim. Desse modo, uma vez que $C=\pi d$, obtemos

$$d=\frac{C}{\pi}\cong\frac{1{,}63}{3{,}14}\cong 0{,}519\,\mathrm{m}.$$

Portanto, a opção que traz a melhor aproximação para a circunferência da roda é **(d)** 52 cm. ■

Exercício 8.11 Para realizar o teste físico em determinado concurso militar, os candidatos devem correr ao redor de uma praça circular cujo diâmetro mede 110 m. Quantos metros percorre, aproximadamente, um candidato que dá 15 voltas ao redor dessa praça?

Solução. Uma vez que a praça tem formato circular com diâmetro igual a 110 m, depois de uma volta, esse candidato terá percorrido aproximadamente

$$3{,}14 \cdot 110 = 345{,}4\,\text{m}.$$

Portanto, depois de 15 voltas, o candidato terá percorrido um total de

$$15 \cdot 345{,}4 = 5181\,\text{m}.$$

■

Exercício 8.12 Uma empresa quer encomendar uma mesa circular para realizar as reuniões mensais de seu conselho de administração. Sabendo que a empresa possui 12 conselheiros (contando com o presidente) e estimando que o espaço ocupado por cada pessoa sentada à mesa seja de 60 cm, qual das medidas abaixo mais se aproxima da menor medida possível do diâmetro da mesa que a empresa deve encomendar? (Utilize $\pi \cong 3{,}14$.)

(a) 2,1 m.
(b) 2,2 m.
(c) 2,3 m.
(d) 2,4 m.
(e) 2,5 m.

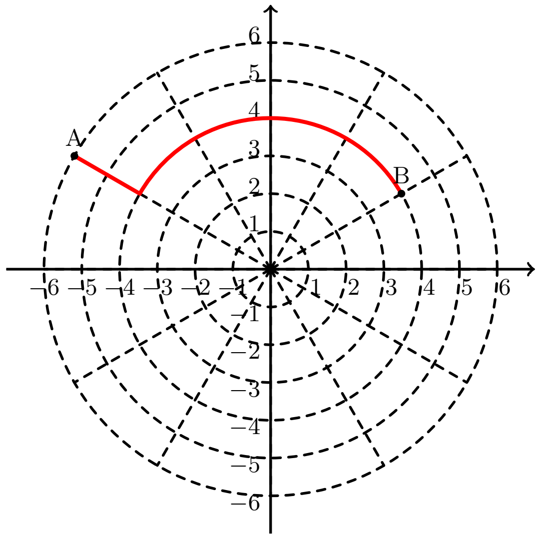
Solução. Inicialmente, perceba que a circunferência do círculo que forma o bordo da mesa deve ser maior ou igual a $12 \cdot 60 = 720$ cm, pois são 12 lugares e cada um ocupa um espaço de 60 cm. Desse modo, o diâmetro da mesa deve ser maior ou igual a

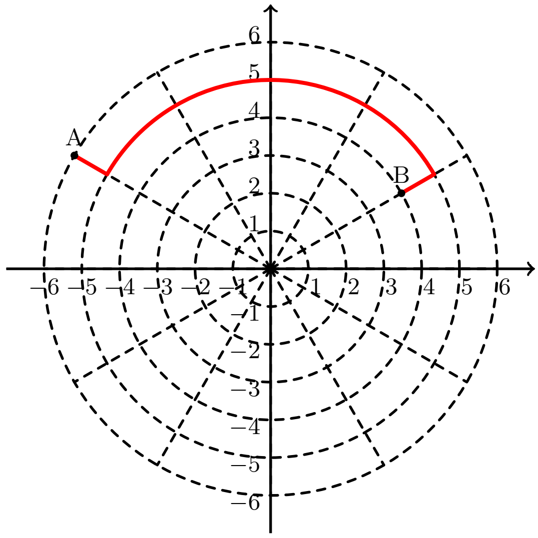
$$\frac{720}{3{,}14} \cong 229{,}3\,\text{cm}.$$

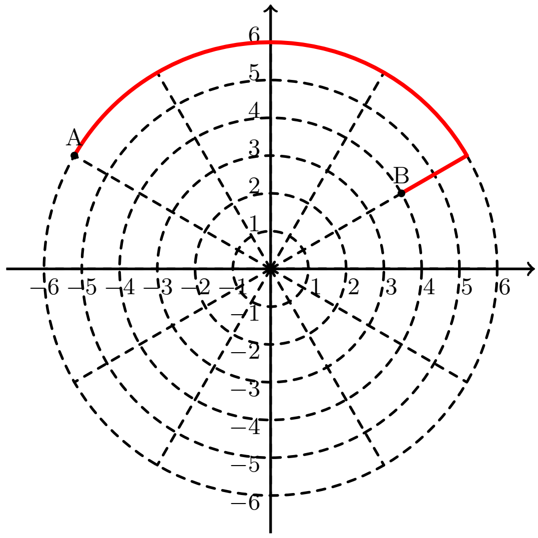
Como 229,3 cm é o mesmo que 2,293 m, concluímos que o item **(c)** é o que melhor aproxima a menor medida possível do diâmetro da mesa que a empresa deve encomendar. ■

Agora que já fixamos a fórmula que relaciona π à circunferência de um círculo, podemos voltar e discutir a solução do exercício proposto.

Solução do exercício 8.9. Observe os três percursos destacados nas figuras abaixo.





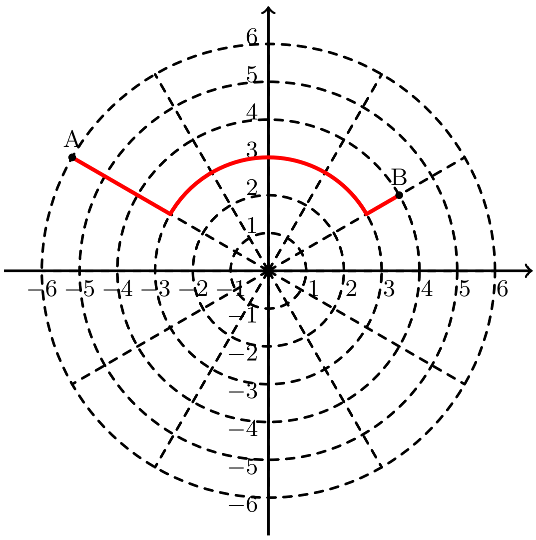


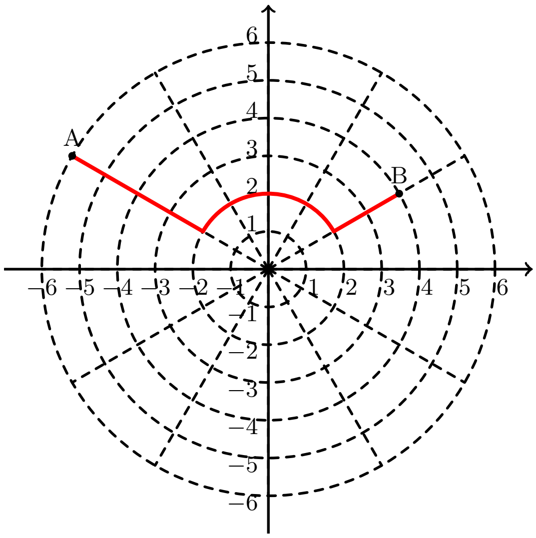
Em cada semirreta, os segmentos determinados por círculos consecutivos têm medidas iguais a 1. Comparemos esses três percursos para um ponto material se deslocar de A até B: No primeiro percurso, o ponto material tem de descer do círculo de raio 6 para o de raio 4, percorrendo dois segmentos unitários, além de percorrer um arco desse segundo círculo correspondente a um ângulo central de 120°. Como o comprimento do círculo aumenta (ou diminui) na mesma proporção do raio (pois $\frac{C}{r} = 2\pi$), temos que o arco de menor comprimento dentre os que têm raios 4, 5 e 6 é o que tem raio 4. Assim, os percursos destacados nas duas últimas figuras certamente têm comprimento maior do que o percurso destacado na primeira figura. Este último, por sua vez, tem comprimento é igual a

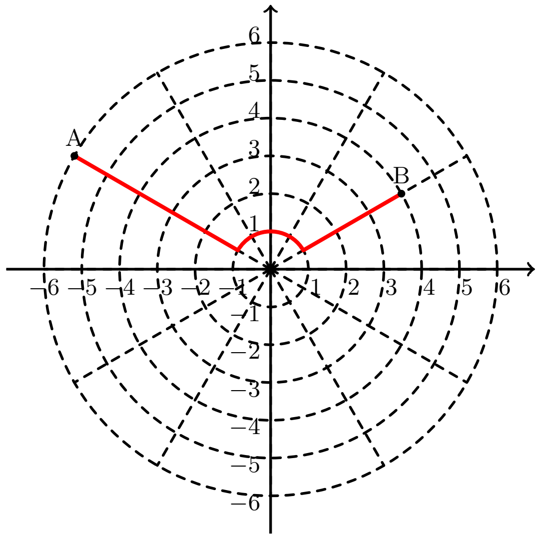
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2,$$

pois o arco correspondente a um ângulo central de 120° tem comprimento igual a $\frac{1}{3}$ do comprimento total do círculo, uma vez que $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, também existe a possibilidade do ponto material descer para um círculo de raio menor do que 4, percorrer um arco sobre esse círculo e, em seguida, subir até o círculo de raio 4. Veja as figuras a seguir:







Esses percursos têm comprimentos respectivamente iguais a

$$\frac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4,\quad \frac{2\cdot\pi\cdot 2}{3}+6 \quad\text{e}\quad \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8.$$

Uma vez que $\pi > 3$, temos que $\frac{2\cdot\pi}{3} > \frac{6}{3} = 2$. Desse modo, é fácil ver que $\frac{2\cdot\pi}{3}+8$ é o menor dos três percursos acima. Por exemplo,

$$\frac{2\cdot\pi}{3}+8 < \frac{4\cdot\pi}{3}+6 \Leftrightarrow 2 < \frac{4\cdot\pi}{3} - \frac{2\cdot\pi}{3} \Leftrightarrow 2 < \frac{2\cdot\pi}{3},$$

o que é verdade exatamente porque $\frac{\pi}{3} > 1$. Por fim, para comparar os números $\frac{8\cdot\pi}{3}+2$ (a possibilidade obtida anteriormente) e $\frac{2\cdot\pi}{3}+8$, temos

$$\frac{8\cdot\pi}{3}+2 > \frac{2\cdot\pi}{3}+8 \Leftrightarrow \frac{8\cdot\pi}{3} - \frac{2\cdot\pi}{3} > 6 \Leftrightarrow 2\cdot\pi > 6,$$

o que também é verdade por conta da desigualdade $\pi > 3$.

Logo, o menor percurso tem comprimento $\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8$ e a opção correta é a letra **(a)**.

■

8.3 – Lista de exercícios

Nível 1

Exercício 8.13 Carlos murou toda a extensão do perímetro de um terreno quadrado de lado igual a 90 metros. Quantos metros tem o muro construído por Carlos?

Exercício 8.14 Fernanda mora em frente a uma praça retangular que mede 120 metros de comprimento e 80 metros de largura. Todos os dias pela manhã Fernanda caminha ao redor da praça, dando 3 voltas completas. Quantos metros Fernanda caminha ao todo?

Exercício 8.15 Qual é o perímetro de um hexágono regular cujo lado mede 6 cm.

Exercício 8.16 Uma sala de reuniões foi construída em forma de um pentágono regular. Uma empresa foi contratada para fazer uma moldura roda-teto de gesso entre as paredes e o teto da sala ao longo de toda a sua extensão. Se foram utilizados 35 metros de moldura, qual o comprimento de cada uma das cinco paredes que formam a sala?

Exercício 8.17 Um agricultor comprou uma nova propriedade e, como medida de segurança, resolveu cercá-la totalmente. Sabe-se que o terreno tem forma retangular, com 25 metros de largura por 30 metros de comprimento. Se o agricultor cercou o terreno com 4 fiadas de arame, quantos metros de arame ele gastou?

Exercício 8.18 Marcos é professor de Educação Física. Sempre que leva seus alunos para praticar esportes, o professor inicia a aula com um alongamento e uma corrida ao redor da quadra. Sabe-se que Marcos sempre pede que todos os alunos dêem 3 voltas ao redor da quadra, que tem formato retangular, com 16 metros de largura por 27 metros de comprimento. Ao final da corrida, quantos metros cada aluno terá percorrido?

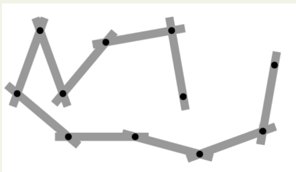
Exercício 8.19 Calcule o perímetro de um triângulo equilátero cujo lado mede 12 cm.

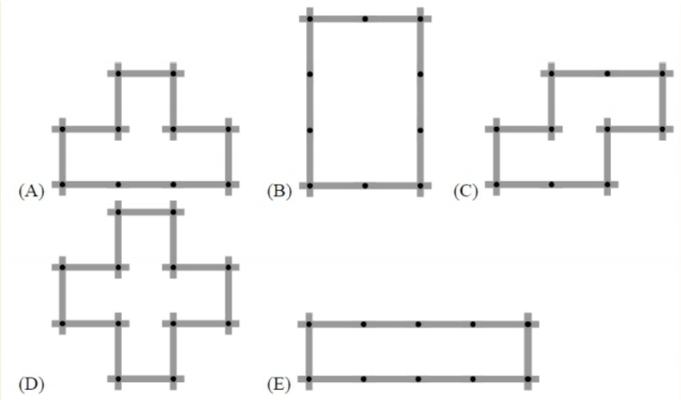
Exercício 8.20 Sabendo que um losango tem 4 cm de lado, quanto mede seu perímetro?

Exercício 8.21 Calcule o comprimento aproximado da circunferência de um círculo cujo diâmetro mede 6 cm (utilize $\pi \cong 3{,}14$).

Exercício 8.22 Mauro caminha todos os dias em torno de uma lagoa de formato circular. Ao todo, ele dá 6 voltas no local, percorrendo um total de 6 quilômetros. Qual a medida aproximada, em metros, da circunferência da lagoa (utilize $\pi \cong 3{,}14$)?

Exercício 8.23 Lia forma figuras com o metro de carpinteiro de seu pai, mostrado ao lado. Qual das formas abaixo não pode ser feita com esse metro?





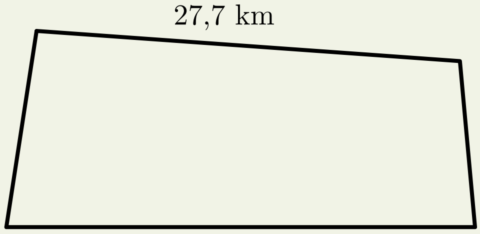
Nível 2

Exercício 8.24 — UEM - PR. Uma pista de atletismo tem formato circular, com diâmetro de 80 m. Um atleta, treinando nessa pista, deseja correr 10 km diariamente. Calcule o número mínimo de voltas completas que ele deve dar nessa pista a cada dia.

Exercício 8.25 O proprietário da fazenda "Rasta Pé" pediu a um de seus funcionários para calcular a quantidade de arame necessária para cercar o terreno correspondente à área da fazenda. Um esboço da fazenda está desenhado na figura abaixo.

27,7 km

12,9 km



11,3 km

30,5 km

Sabendo que a cerca terá 6 níveis de arame, qual a quantidade mínima de arame necessária para construí-la?

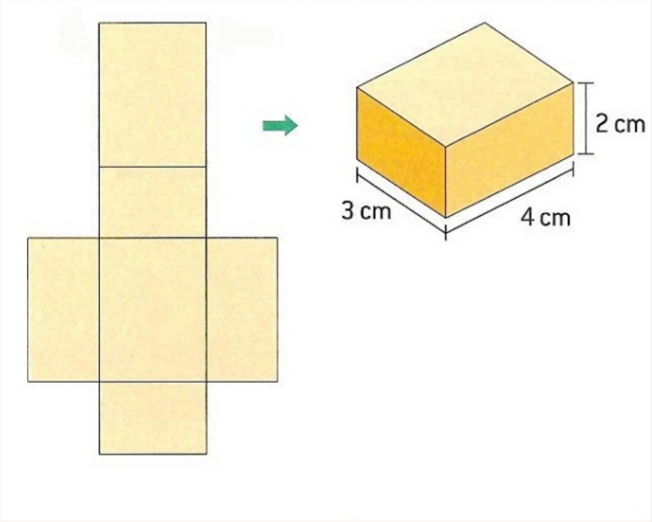
Exercício 8.26 — SARESP 2005. Um carpinteiro utilizou 72 metros de arame para cercar um canteiro retangular. As medidas dsse canteiro podem ser:

(a) 9m por 8 m.
(b) 9 m por 7,2 m.
(c) 15 m por 22 m.
(d) 20 m por 16 m.
(e) 22 m por 10 m.

Exercício 8.27 Um arquiteto colocou rodapé em toda a extensão de uma sala de estar que tem a forma de um quadrado. Sabe-se que a sala tem duas portas, cada uma delas com 1,2 m de largura, e que foram usados 13,6 metros de rodapé. Qual o comprimento de cada uma das paredes da sala?

Exercício 8.28 A pista do autódromo de Interlagos tem 4309 metros. Nas provas de Fórmula 1, os pilotos devem percorrer 71 voltas. Qual é a distância total, em km, percorrida por um piloto que consegue completar a prova?

Exercício 8.29 A figura a seguir mostra um paralelepípedo reto retângulo à direita e uma planificação sua à esquerda. Qual o perímetro dessa planificação?



Exercício 8.30 Sabe-se que um quadrado tem 32 cm de perímetro. Sabe-se também que um retângulo tem um lado que mede o dobro do lado do quadrado e outro lado que mede a quarta parte do lado do quadrado. Qual o perímetro desse retângulo?

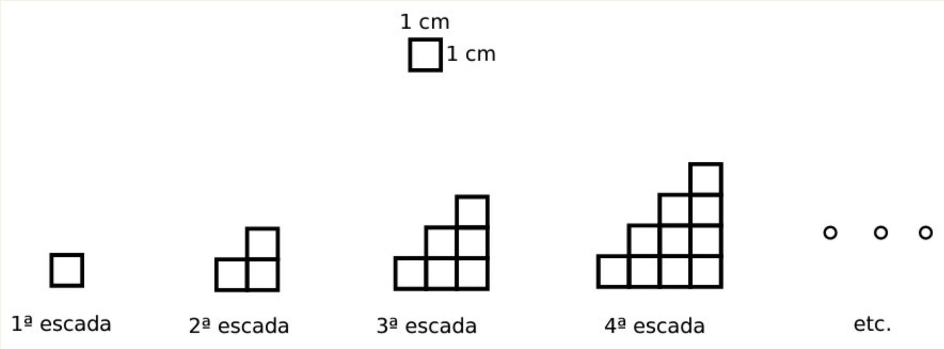
Exercício 8.31 As diagonais de um losango medem 8 cm e 26 cm. Calcule seu perímetro.

Exercício 8.32 Juliano pretende telar alguns canteiros retangulares em seu jardim. Sabendo que todos os canteiros têm 1,2 m de largura e 0,3 m de comprimento, quantos canteiros Juliano consegue cercar com os 20 metros de tela que possui?

Exercício 8.33 Um retângulo tem lados medindo 10 e 12 metros. Calcule a medida do lado desse quadrado cujo perímetro é o dobro do perímetro do retângulo.

Nível 3

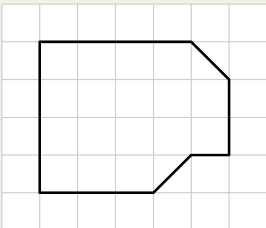
Exercício 8.34 — Banco OBMEP. Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:



(a) Calcule o perímetro da quinta escada construída.
(b) Qual das escadas tem 100 cm de perímetro?

Exercício 8.35 Um hexágono regular tem lados medindo 8 cm. Calcule a diferença entre a circunferência do círculo circunscrito e o perímetro desse hexágono (use $\pi = 3{,}14$).

Exercício 8.36 — SPAECE 2008. A figura abaixo mostra um polígono desenhado em uma malha quadriculada, em que todos os quadradinhos têm o mesmo tamanho e o lado de cada um deles corresponde à unidade de medida de comprimento.



Se duplicarmos as medidas dos lados desse polígono, o perímetro do novo polígono ficará:

(a) dividido por 2.
(b) dividido por 4.
(c) multiplicado por 2.
(d) multiplicado por 4.
(e) multiplicado por 3.

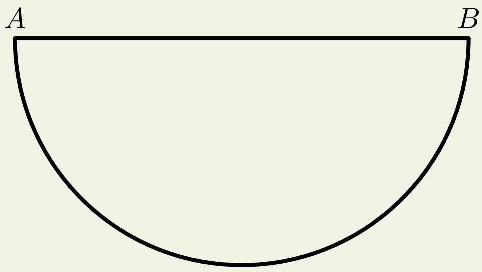
Exercício 8.37 — ENEM 2011. Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular, devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

- Terreno 1: 55 m por 45 m.
- Terreno 2: 55 m por 55 m.
- Terreno 3: 60 m por 30 m.
- Terreno 4: 70 m por 20 m.
- Terreno 5: 95 m por 85 m.

Para optar pelo terreno de maior área e que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno:

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

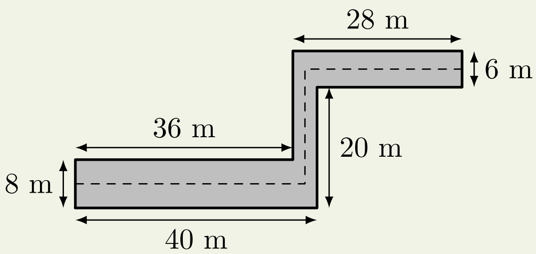
Exercício 8.38 — IFBA 2013. Num parque de diversões, um carrinho vai do ponto A ao ponto B em linha reta e, em seguida, volta ao ponto A percorrendo um semicírculo (veja a figura abaixo).



Usando a aproximação $\pi \cong 3{,}14$ e sabendo que a distância de ida entre os pontos A e B é igual a 10 m, é correto afirmar que o percurso na volta é:

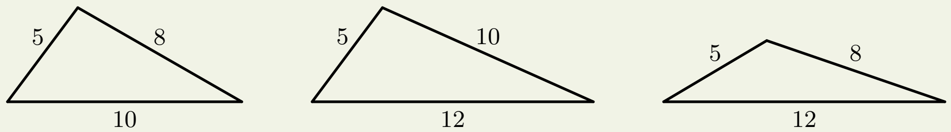
(a) Igual ao percurso da ida.
(b) 20% maior do que na ida.
(c) 48% maior do que na ida.
(d) O dobro do caminho da ida.
(e) 57% maior do que na ida.

Exercício 8.39 — Canguru 2019. Um corredor tem as dimensões mostradas na figura. Um gato andou por toda a linha tracejada no meio do corredor. Quantos metros o gato andou?

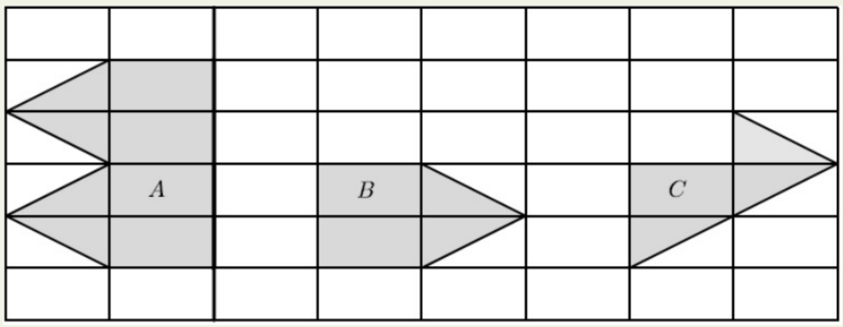


(a) 63. (b) 68. (c) 69. (d) 71. (e) 83.

Exercício 8.40 — Banco OBMEP. Pedrinho está brincando com três peças triangulares de lados (5, 8, 10), (5, 10, 12) e (5, 8, 12), como mostra o desenho abaixo. Ele pode juntar duas peças se colar exatamente os lados de mesmo tamanho delas. Por exemplo, ele pode juntar o lado 10 da primeira peça com o lado 10 da segunda, mas não pode juntar o lado 10 da primeira peça com o lado 8 da terceira, pois tais lados não possuem mesmo tamanho. Qual é o maior perímetro que Pedrinho pode obter juntando as três peças?

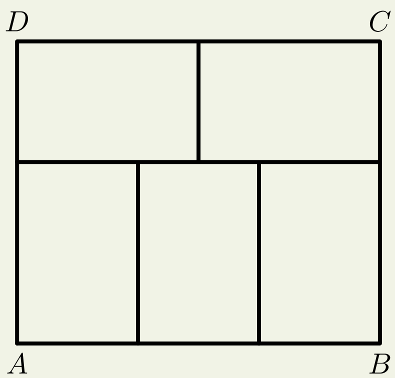


Exercício 8.41 No desenho abaixo, três prédios foram construídos em um terreno dividido em lotes retangulares. Os perímetros dos prédios A e B valem 400 m e 240 m, respectivamente. Quanto mede o perímetro do prédio C?

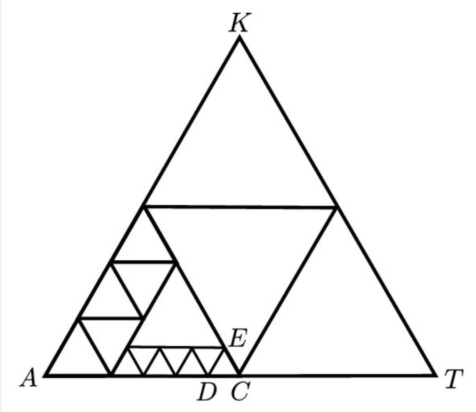


Nível 4

Exercício 8.42 — Banco OBMEP. Na figura a seguir, o retângulo $ABCD$ está dividido em cinco retângulos iguais. Se o perímetro de $ABCD$ é igual a 20 cm, calcule a sua área.



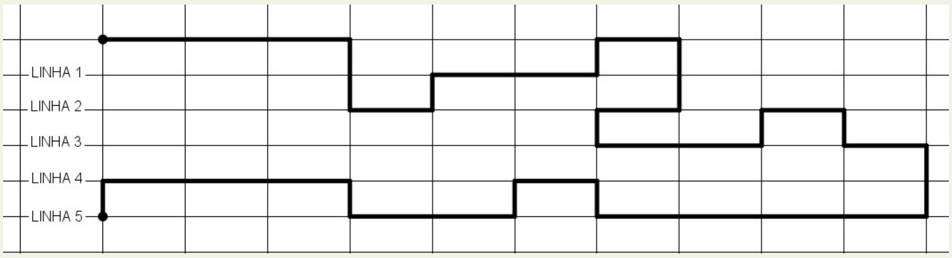
Exercício 8.43 — Banco OBMEP. Na figura abaixo, todos os triângulos são equiláteros.



Se o perímetro do triângulo AKT é igual a 108 cm, calcule o perímetro do triângulo DEC.

Exercício 8.44 — CMF - 2017. Na figura abaixo, temos a representação dos trajetos percorridos por dois caracóis em uma parede com azulejos idênticos, todos de medidas $7\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$. O primeiro caracol parte de A para B e o segundo parte de B para A, ambos saindo no mesmo momento, com a mesma velocidade e sem parar. Onde os dois caracóis se encontrarão?

(a) Entre as linhas 1 e 2.
(b) Na linha 2.
(c) Entre as linhas 2 e 3.
(d) Na linha 3.
(e) Entre as linhas 3 e 4.



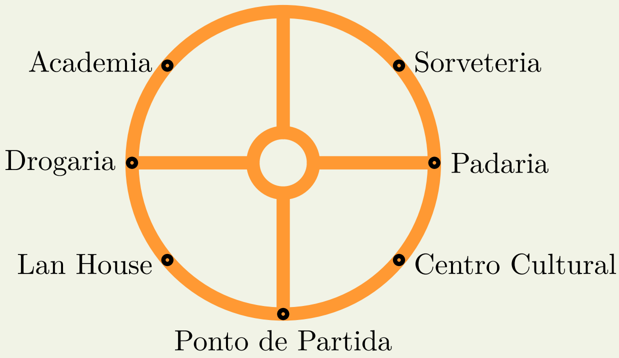
Exercício 8.45 — Polícia Militar ES – 2013. Donato, patrulheiro militar, utiliza uma bicicleta no exercício da sua função, que é patrulhar uma região turística de Vitória-ES. Sabe-se que o pneu dessa bicicleta possui formato circular de diâmetro medindo 70 cm. Considerando que na última quinta-feira Donato percorreu 21,4 km com essa bicicleta em serviço de patrulhamento, é correto afirmar que o pneu dessa bicicleta deu: (utilize $\pi \cong 3$)

(a) menos de 10000 voltas.
(b) entre 10000 e 10060 voltas.
(c) entre 10060 e 10120 voltas.
(d) entre 10120 e 10180 voltas.
(e) mais de 10180 voltas.

Exercício 8.46 — UNESP 2018. O perímetro de um pátio retangular é 4 vezes o perímetro de uma sala quadrada de lado igual a 8 m. Sabendo-se que o comprimento do pátio é 14 m maior que sua largura, podemos afirmar que o comprimento do pátio é:

(a) 43 m.
(b) 39 m.
(c) 34 m.
(d) 28 m.
(e) 25 m.

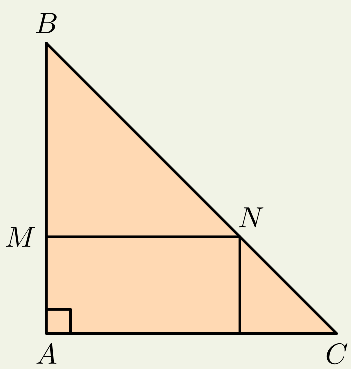
Exercício 8.47 Camila gosta de caminhar em uma calçada em torno de uma praça circular que possui 500 metros de extensão, localizada perto da sua casa casa. A praça, bem como alguns locais ao seu redor e o ponto de onde Camila inicia a caminhada estão representados na figura a seguir:



Em uma tarde, Camila caminhou 4125 metros, no sentido anti-horário, e parou. Qual dos locais indicados na figura é o mais próximo de sua parada?

(a) Centro cultural.
(b) Drogaria.
(c) Lan house.
(d) Ponto de partida.
(e) Padaria.

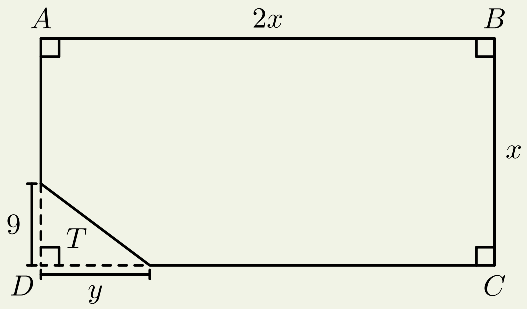
Exercício 8.48 — Fatec SP. Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo e isósceles e o retângulo nele inscrito tem lados que medem 4 cm e 2 cm.



O perímetro do triângulo MBN é:

(a) 8 cm.
(b) 12 cm.
(c) $8+\sqrt{2}$ cm.
(d) $8+2\sqrt{2}$ cm.
(e) $4(2+\sqrt{2})$ cm.

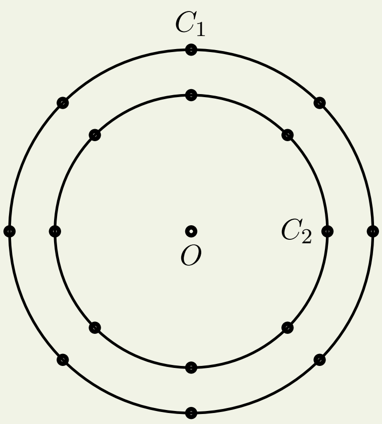
Exercício 8.49 — UNESP 2018. Na figura a seguir, cujas dimensões indicadas estão em metros, a região triangular T representa a parte do terreno retangular $ABCD$ que foi desapropriada para possibilitar melhorias viárias no entorno. Da área original do terreno $ABCD$, igual a 1250 m^2, foram desapropriados 54 m^2.



Com a desapropriação, o perímetro do terreno ABCD foi reduzido em

(a) 21 m.
(b) 16 m.
(c) 14 m.
(d) 10 m.
(e) 6 m.

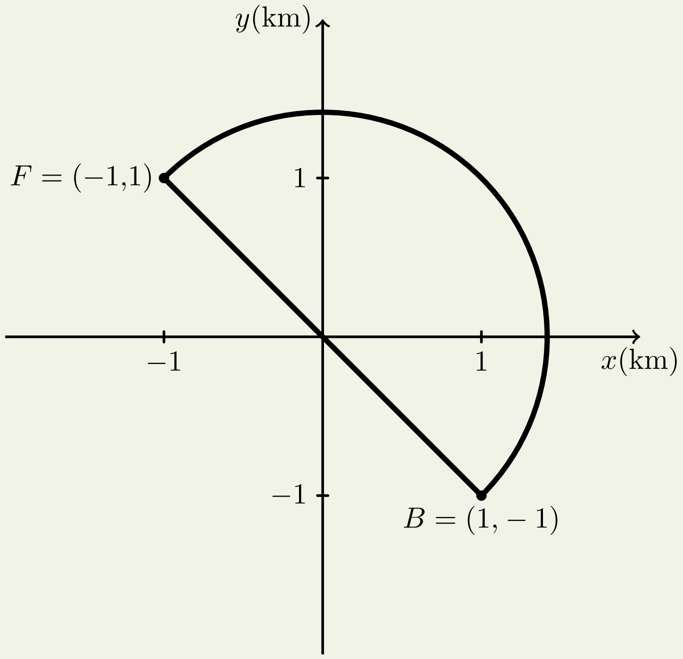
Exercício 8.50 — ENEM 2015. A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam posições situadas em círculos de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambos centrados no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

(a) 55,5.
(b) 60,0.
(c) 175,5.
(d) 23 5,5.
(e) 240,0.

Exercício 8.51 — Enem 2016. Em uma cidade, será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água, de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou um semicírculo que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto a construção de 1 m de galeria ao longo do semicírculo demora 0,6 h. Usando 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$, assinale a opção que traz o menor tempo possível, em horas, para a conclusão da construção da galeria.

(a) 1260.
(b) 2520.
(c) 2800.
(d) 3600.
(e) 4000.