Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:
Jorge Lira
Annelise Maymone

Revisor:
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Razões, Proporções e Funções Afins
Parte I

Razões
Proporções

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L768r Lira, Jorge Herbert Soares de
Razões, proporções e funções afins - parte I [recurso eletrônico] / Jorge Herbert Soares de Lira, Annelise Maymone, Antonio Caminha Muniz Neto. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43575-7 (E-book)

1.Razões. 2. Proporções.3. Equações lineares. 4.Funções afins
I. Lira, Jorge Herbert Soares de. II. Maymone, Annelise. III. Muniz Neto, Antonio Caminha. IV.Título.

CDD: 510.07

10 Razões, Proporções e Funções Afins - Parte I

10.1 – Escalas, Razões e Proporções

Além de permitir visualizar o espaço em que vivemos e localizar ruas, cidades e regiões, mapas são úteis para estimarmos distâncias entre localidades. Podemos, por exemplo, usar o seguinte mapa para determinar, aproximadamente, as distâncias entre as cidades de Juazeiro do Norte, Farias Brito e Santana de Cariri, representadas, respectivamente, pelos pontos A, B e C no mapa. As distâncias entre os pontos do mapa A, B e C no mapa **não são**, obviamente, iguais às distâncias reais! No entanto, estão na mesma proporção das distâncias reais. Que quer dizer isso?

Observe a escala representada na parte de baixo do mapa. Os retângulos desenhados nesta escala nos dão uma informação essencial: o comprimento de cada um deles (digamos, 1 centímetro) corresponde, na realidade, a uma distância de 25 quilômetros. Ou seja, se dois pontos no mapa estão a uma distância igual a 1 centímetro, as duas localidades que estes pontos representam estarão distantes 10 quilômetros uma da outra na realidade.

Podemos verificar que a distância, no mapa, de A a B, por exemplo, é aproximadamente igual a 4,2 vezes o comprimento fixado na escala. Da mesma forma, a distância, no mapa, do ponto B ao ponto C é quase igual a 3,3 vezes o comprimento da escala. Finalmente, os pontos A a C, no mapa, estão distantes cerca de 4,7 vezes o comprimento da escala.

Portanto, podemos, com alguma margem de erro, dizer que as distâncias *reais* de Juazeiro do Norte a Farias Brito, de Farias Brito a Santana do Cariri e de Santana do Cariri a Juazeiro do Norte são, respectivamente, iguais a 42 quilômetros, 33 quilômetros e 47 quilômetros.

Portanto, a escala é o fator de comparação entre as distâncias no mapa e as distâncias reais. Neste nosso exemplo, a escala é dada por

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{10 \text{ quilômetros}}$$

Para simbolizar esta relação, digamos que x representa a distância real, em quilômetros, de Juazeiro do Norte (representada pelo ponto A) a uma localidade real representada por um ponto P no mapa. Assim, a distância, no mapa, entres os pontos A e P será dada, em centímetros, por

$$y = ax,$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{10}x.$$

Por exemplo, no mapa abaixo, o ponto P corresponde à cidade de Jardim, que fica a cerca de 46 quilômetros de Juazeiro do Norte. Logo, a distância representada no mapa é igual a

$$y = \frac{1}{10} \times 46 = 4{,}6 \text{ centímetros}.$$

Observamos que estas são as distâncias *geográficas*, não necessariamente as distâncias percorridas ao longo das estradas que ligam estas cidades.

Observação 10.1.1 Uma vez que

$$\begin{aligned} 10 \text{ quilômetros} &= 10.000 \text{ metros} = 10.000 \times 100 \text{ centímetros} \\ &= 1.000.000 \text{ centímetros}, \end{aligned}$$

a escala pode ser escrita comparando distâncias em centímetros, no mapa e na realidade:

$$a = \frac{1 \text{ centímetro}}{1.000.000 \text{ centímetros}},$$

ou seja

$$a = \frac{1}{1.000.000} = 1 : 1.000.000.$$

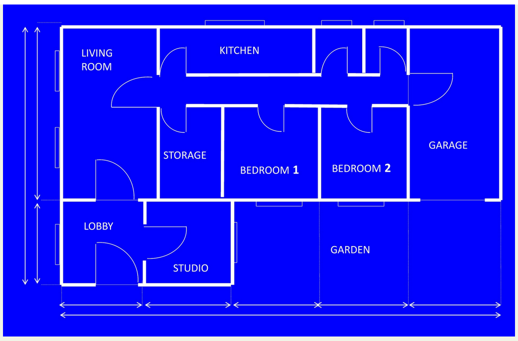
Esta última notação $1 : 1.000.000$ é bastante usada em Cartografia (Geografia) e apenas indica uma *razão*, isto é, uma comparação entre dois números: 1 centímetro no mapa equivale a 1.000.000 de centímetros na realidade. Observe que esta razão nada mais é do que a fração

$$\frac{1}{1.000.000},$$

também igual ao número decimal 0,000001 (um milionésimo). Ou seja, a distância no mapa é um milionésimo da distância real.

10.2 – Exercícios Resolvidos

Exercício 10.1 A planta baixa de uma casa está representada na figura abaixo:



© by Tumisi from Pixabay

A área que representa a cozinha ("kitchen") é cerca da metade da área que representa a sala de estar ("living room") na planta. Sabendo que a cozinha tem 25 metros quadrados de área, qual a área, na realidade, da sala de estar?

Solução. Segundo o enunciado, a razão entre a área da sala de estar e a área da cozinha é igual a

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Caso a área da cozinha seja igual a 25 metros quadrados, a área da sala de estar deve ser o dobro desta, ou seja, 50 metros quadrados.

Solução alternativa. Representando a área da sala de estar por x, temos a seguinte proporção (igualdade ou equivalência de frações):

$$\frac{x}{25} = \frac{2}{1}.$$

Multiplicando os dois lados desta igualdade por 25, obtemos

$$x = 25 \times 2.$$

Portanto, $x = 50$ metros quadrados.

Exercício 10.2 Ainda com relação à planta no exercício anterior, suponhamos que a escala usada nesta planta é 1 : 200, ou seja, 1 centímetro na planta corresponde a 200 centímetros (ou seja, 2 metros) na realidade. Sendo assim, estime:

1. as dimensões do jardim ("garden"), sabendo que, na planta, as dimensões são 7 centímetros e 2 centímetros;
2. as dimensões da garagem ("garage"), sabendo que, na planta, as dimensões são 2,5 centímetros e 4,5 centímetros;
3. as dimensões da casa, sabendo que, na planta, as dimensões são 11 centímetros e 6,5 centímetros;
4. as áreas do jardim e da garagem.

Solução. 1. A escala da planta é de 1 centímetro para cada 200 centímetros, ou seja, 2 metros na construção real. Assim, 2 centímetros na planta correspondem a

$$2 \times 200 \text{ centímetros} = 400 \text{ centímetros} = 4 \text{ metros}$$

na casa real, ao passo que 7 centímetros na planta correspondem a

$$7 \times 200 \text{ centímetros} = 1.400 \text{ centímetros} = 14 \text{ metros}$$

na realidade.
2. De modo similar, vemos que as dimensões reais da garagem são

$$2{,}5 \times 200 \text{ centímetros} = 500 \text{ centímetros} = 5 \text{ metros},$$
$$4{,}5 \times 200 \text{ centímetros} = 900 \text{ centímetros} = 9 \text{ metros}.$$

3. Com respeito às dimensões reais da casa, temos

$$11 \times 200 \text{ centímetros} = 2.200 \text{ centímetros} = 22 \text{ metros},$$
$$6{,}5 \times 200 \text{ centímetros} = 1.300 \text{ centímetros} = 13 \text{ metros}.$$

Em geral, se x representa um comprimento (em centímetros) no mapa e y representa o comprimento (em centímetros) correspondente na realidade, temos

$$y = 200x,$$

ou seja,

$$\frac{y}{x} = 200,$$

sempre que $x \neq 0$.

4. A área do jardim é calculada *multiplicando* suas dimensões reais, isto é,

$$4 \times 14 = 56 \text{ metros quadrados}.$$

Observe que o produto das dimensões na escala é

$$2 \times 7 = 14 \text{ centímetros quadrados}.$$

A razão entre a área real e a área do jardim na planta é igual a

$$\frac{56 \text{ metros quadrados}}{14 \text{ centímetros quadrados}} = \frac{56 \times 100 \times 100 \text{ centímetros quadrados}}{14 \text{ centímetros quadrados}}$$
$$= \frac{56 \times 10.000}{14} = \frac{4 \times 10.000}{1} = 40.000.$$

Note que esta razão é o *quadrado* da razão entre os comprimentos, isto é, o quadrado de 200.

Já a área do garagem é dada também multiplicando suas dimensões reais:

$$5 \times 9 = 45 \text{ metros quadrados}.$$

A área total da casa, por fim, é dada por

$$22 \times 13 = 286 \text{ metros quadrados}.$$

Exercício 10.3 Para atrair compradores, as construtoras exibem maquetes, isto é, modelos em miniaturas de edifícios de apartamentos residenciais. Sabendo que a escala, isto é, a razão entre as dimensões da maquete e do que ela representa, é igual a $\frac{1}{50}$,

Image by Anna Pan'šina from Pixabay

qual é a altura real do edifício, sabendo que a maquete tem 90 centímetros de altura?

Solução. A razão

$$\frac{1}{50}$$

significa que 1 centímetro na maquete corresponde a 50 centímetros no edifício real. Portanto, 90 centímetros na maquete correspondem a

$$90 \times 50 \text{ centímetros} = 4.500 \text{ centímetros} = 45 \text{ metros}$$

no edifício real. Logo, a altura real é dada por 45 metros.

Exercício 10.4 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do maior apartamento, sabendo que o menor tem 120 metros quadrados de área?

Solução. Representemos a área do maior apartamento, que não conhecemos, por x. Como as áreas da maquete devem ser *proporcionais* às áreas dos apartamentos reais, temos a mesma *razão* entre as áreas na maquete, ou seja, $\frac{4}{3}$, e as áreas reais, isto é, $\frac{x}{120}$. Logo,

$$\frac{x}{120} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 120, temos

$$x = 120 \times \frac{4}{3} = 40 \times 4 = 160 \text{ metros quadrados},$$

o que nos fornece a área do maior apartamento.

Uma variação interessante deste exercício é a seguinte:

Exercício 10.5 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do menor apartamento, sabendo que a soma das áreas dos dois apartamentos, um de cada tipo, é igual a 210 metros quadrados?

Solução. Este é um exemplo de uma divisão em partes proporcionais. Observe que a área do menor apartamento é $\frac{3}{4}$ da área do maior. Assim, se dividíssemos a área total dos dois, que é igual a 210 metros quadrados, em sete partes iguais de 30 metros quadrados, o apartamento menor corresponderia a 3 destas partes, isto é, a

$$3 \times 30 = 90 \text{ metros quadrados},$$

enquanto que o apartamento maior corresponderia a 4 destas partes, isto é, a

$$4 \times 30 = 120 \text{ metros quadrados}.$$

A solução alternativa que propomos agora é mais algébrica e, portanto, também importante para o estudo das *equações lineares*, que faremos mais adiante.

Solução alternativa. Seja x a área do menor apartamento. Então, a área do maior é dada por $210 - x$, já que a área total dos dois é 210 metros quadrados. Logo, a razão entre a área do maior apartamento e a área do menor apartamento é

$$\frac{210 - x}{x} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando, agora, os dois lados por x, temos

$$210 - x = \frac{4}{3}x$$

Assim, somando x aos dois lados da equação, obtemos

$$210 = x + \frac{4}{3}x$$

Portanto

$$210 = \frac{7}{3}x.$$

Dividindo os dois lados da equação por 7, obtemos

$$30 = \frac{1}{3}x.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 3, concluímos que

$$x = 90 \text{ metros quadrados},$$

a área do apartamento menor.

Exercício 10.6 O custo para revestir o piso do apartamento de 90 metros quadrados com porcelanato é igual a R$ 4.500,00. Nestas mesmas condições, qual é o custo para revestir o piso do apartamento de 120 metros quadrados?

Solução. Como o custo para revestir 90 metros quadrados de piso é igual a R$ 4.500,00, cada metro quadrado de porcelanato custa

$$\frac{4.500}{90} = 50 \text{ reais}.$$

Portanto, o revestimento de 120 metros quadrados com o mesmo material custa

$$120 \times 50 = 6.000 \text{ reais}.$$

Solução alternativa. Podemos resolver este problema do seguinte modo: se x simboliza o custo do revestimento do apartamento de 120 metros quadrados, temos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{4.500} = \frac{120}{90},$$

o que significa que o custo varia na mesma proporção que a área a ser revestida. Ou seja, o custo x está para R$ 4.500 assim como a área 120 metros quadrados está para 90 metros quadrados.

Multiplicando os dois lados da equação por 4.500, obtemos

$$x = 4.500 \times \frac{120}{90},$$

donde concluímos que

$$x = 50 \times 120 = 6.000 \text{ reais}.$$

Podemos representar esta solução com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{90 metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ 4.500} \\ \downarrow & :90 & \downarrow \\ \text{1 metro quadrado} & \text{———} & \text{R\$ 50} \\ \downarrow & \times 120 & \downarrow \\ \text{120 metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ 6.000} \end{array}$$

Exercício 10.7 Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R$ 1.500,00 por metro quadrado, divididos, aproximadamente, do seguinte modo: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são relevantes. A partir destas informações, calcule

1. o custo médio, por metro quadrado, com material;

2. o custo médio, por metro quadrado, com mão-de-obra;
3. a razão, em média, entre o custo com material e o custo com mão-de-obra.

Observação 10.2.1 Lembramos que porcentagens são frações com denominador igual a 100. Por exemplo 40% é apenas uma *maneira de escrever* a fração $\frac{40}{100}$, que tem numerador 40 e denominador 100. Da mesma forma, 60% é, de fato, uma maneira alternativa de representar a fração $\frac{60}{100}$. Observe que quando escrevemos "40% de 120" queremos dizer

$$\frac{40}{100} \times 120 = \frac{40 \times 120}{100} = \frac{4800}{100} = 48.$$

Da mesma forma, "60% de 120' significa, apenas, a fração

$$\frac{60}{100} \times 120 = \frac{60 \times 120}{100} = 72.$$

Solução. 1 e 2. O custo com material por metro quadrado representa 40% do total, ou seja,

$$\frac{40}{100} \times 1.500 = 40 \times 15 = 600 \text{ reais},$$

ao passo que o custo com mão-de-obra por metro quadrado representa 60% do total, isto é,

$$\frac{60}{100} \times 1.500 = 60 \times 15 = 900 \text{ reais}.$$

3. Logo, a razão entre o custo com material e o custo com mão-de-obra é igual a

$$\frac{600}{900} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Exercício 10.8 Estima-se que, em 2019, o custo médio para construção civil foi de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A previsão é que este custo aumente 5% em 2020. Com base nestas informações, responda:

1. qual a previsão de custo médio por metro quadrado em 2020?
2. Quanto passará a custar a construção de uma casa com 300 metros quadrados?
3. Qual o aumento previsto, de 2019 para 2020, do custo de construção de uma casa de 300 metros quadrados?

Solução. 1. A expressão "aumento de 5%" significa que devemos adicionar 5% de R$ 1.500,00 ao custo médio anterior, ou seja, a R$ 1.500. Portanto, calculemos, inicialmente 5% de R$ 1.500. Temos

$$5\% = \frac{5}{100}$$

e, portanto,

$$5\% \text{ de R\$}\,1.500 = \frac{5}{100} \times 1.500 = 5 \times 15 = 75 \text{ reais}.$$

Logo, o novo custo médio é de

$$1.500 + 5\% \text{ de } 1.500 = 1.500 + 75 = 1.575,$$

ou seja, R$ 1.575,00.
2. Com o custo médio por metro quadrado ajustado para R$ 1.575,00, o custo da construção de uma casa de 300 metros quadrados passa a ser

$$300 \times 1.575 = 472.500 \text{ reais}.$$

3. Note que o custo para construção dos mesmos 300 metros quadrados seria, antes do aumento de 5%, igual a

$$300 \times 1.500 = 450.000 \text{ reais.}$$

Portanto, o acréscimo no custo total para construção da casa é de

$$300 \times 1.575 - 300 \times 1.500 = 300 \times 75 = 22.500 \text{ reais.}$$

Este aumento corresponde à seguinte fração do custo total, calculado antes do aumento:

$$\frac{22.500}{450.000} = \frac{22.500 : 45}{450.000 : 45} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%,$$

como seria de suspeitar.

Exercício 10.9 O custo total da construção de um imóvel tem a seguinte composição: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são consideradas relevantes. Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A partir destas informações, responda:

1. qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com material passassem dos atuais R$ 600,00 para R$ 540,00?
2. Qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com mão-de-obra passassem dos atuais R$ 900,00 para R$ 720,00?
3. Qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com material aumentassem 10%?
4. Qual seria o custo médio por metro quadrado caso os custos com mão-de-obra aumentassem 10%?
5. Quais seriam os custos com material e mão-de-obra, por metro quadrado, caso o custo total por metro quadrado aumentasse 10%?

Solução. 1. No enunciado, afirma-se que os custos com material representam 40% dos custos totais. Então

$$40\% \text{ do custo total} = \frac{40}{100} \text{ do custo total} = 540 \text{ reais.}$$

Portanto, dividindo cada um destes números por 4, deduzimos que

$$10\% \text{ do custo total} = \frac{10}{100} \text{ do custo total} = \frac{540}{4} = 135 \text{ reais.}$$

Logo, multiplicando cada um deste números por 10, concluímos que

$$100\% \text{ do custo total} = \frac{100}{100} \text{ do custo total} = 135 \times 10 = 1.350 \text{ reais.}$$

Portanto, o custo total do metro quadrado passa a ser de R$ 1.350,00, caso o custo com material reduza de R$ 600,00 para R$ 540,00.

Podemos resumir estes cálculos no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{40}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 540{,}00 \\
\downarrow & : 4 & \downarrow \\
\frac{10}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 135{,}00 \\
\downarrow & \times 10 & \downarrow \\
\frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 1.350{,}00
\end{array}$$

Observe que, na prática, para passarmos da primeira linha para a última, dividimos por 4 e multiplicamos por 10, isto é, multiplicamos por

$$\frac{10}{4}.$$

De fato,

$$540 \times \frac{10}{4} = \frac{5.400}{4} = 1.350.$$

Observação 10.2.2 Note que os custos com material passam de R$ 600,00 para R$ 540,00, ou seja, *diminuem* R$ 60,00. Observe que

$$\frac{60}{600} = \frac{60 : 6}{600 : 6} = \frac{10}{100} = 10\%.$$

Ou seja, o custo com material diminui o equivalente a 10% do custo inicial.

2. Da mesma forma que no item anterior, observamos que o enunciado afirma que os custos com mão-de-obra representam 60%, ou seja, $\frac{60}{100}$ dos custos totais da construção. Então

$$\begin{array}{ccc} \frac{60}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 720{,}00 \\ \downarrow & : 6 & \downarrow \\ \frac{10}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 120{,}00 \\ \downarrow & \times 10 & \downarrow \\ \frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 1.200{,}00 \end{array}$$

Observe que, na prática, para passarmos da primeira linha para a última, dividimos por 6 e multiplicamos por 10, isto é, multiplicamos por

$$\frac{10}{6}.$$

De fato,

$$720 \times \frac{10}{6} = \frac{7.200}{6} = 1.200 \text{ reais},$$

o novo custo médio por metro quadrado, neste caso.

3 e 4. Caso os custos com material aumentassem em $10\% = \frac{10}{100}$, passariam de R$ 600,00 para

$$600 + \frac{10}{100} \times 600 = 600 + 60 = 660 \text{ reais}.$$

Caso o custo com mão-de-obra permanecesse o mesmo, o custo total por metro quadrado passaria a ser igual a

$$660 + 900 = 1.560 \text{ reais}.$$

Por sua vez, se o custo com mão-de-obra aumentasse em $10\% = \frac{10}{100}$, passaria de R$ 900,00 para

$$900 + \frac{10}{100} \times 900 = 900 + 90 = 990 \text{ reais}.$$

Com isto, supondo, desta vez, que o custo com material continuasse o mesmo, o custo por metro quadrado passaria a ser, em média,

$$600 + 990 = 1.590 \text{ reais}.$$

5. Por fim, o aumento de 10% é, agora, aplicado sobre o custo total por metro quadrado: temos

$$1.500 + \frac{10}{100} \times 1.500 = 1.500 + 150 = 1.650 \text{ reais}.$$

Neste caso, os novos custos médios de material e de mão-de-obra por metro quadrado seriam, respectivamente,

$$40\% \times 1.650 = \frac{40}{100} \times 1.650 = 660 \text{ reais}$$

e

$$60\% \times 1.650 = \frac{60}{100} \times 1.650 = 990 \text{ reais}.$$

Observação 10.2.3 Observe que, nos itens 3, 4 e 5 deste exercício, nos referimos sempre a aumento de 10%, mas sobre coisas diferentes: em 3, sobre os custos com material; em 4, sobre os custos com mão-de-obra; em 5, o aumento foi relativo aos custos totais. Por esta razão, obtivemos valores finais diferentes para os novos custos totais. No primeiro caso, temos 10% de aumento sobre algo que representa 40% do custo total, isto é,

$$\frac{10}{100} \times \frac{40}{100} \times 1.500 = 60 \text{ reais.}$$

No item 4, o aumento de 10% é sobre mão-de-obra, que representa 60% do custo total, ou seja,

$$\frac{10}{100} \times \frac{60}{100} \times 1.500 = 90 \text{ reais.}$$

Por fim, no item 5, o aumento de 10% incide diretamente sobre os 100% do custo total. Portanto,

$$\frac{10}{100} \times 1.500 = 150 \text{ reais.}$$

Exercício 10.10 O custo total da construção de um imóvel tem a seguinte composição: 40% do custo total com material, 60% com mão-de-obra. As demais despesas (administrativas e com equipamentos) não são consideradas relevantes. Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A partir destas informações, responda:

1. qual seria o custo médio por metro quadrado, caso os custos com mão-de-obra representassem 50% do custo total, mantidos os custos com material?
2. Qual seria o custo médio por metro quadrado, caso os engenheiros conseguissem diminuir os custos com material para 25% do custo total, mantidos os custos com mão-de-obra?

Solução. 1. Já vimos que os custos com material por metro quadrado totalizam R$ 600,00. Se estes custos passarem a representar

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \text{ do custo total,}$$

então o custo total passa a ser

$$2 \times 600 = 1.200 \text{ reais,}$$

ou seja, R$ 1.200,00.

2. A redução é feita nos custos com material, mas ainda são mantidos os mesmos R$ 900,00 de custos com mão-de-obra, por metro quadrado. Este valor representa agora, com as mudanças feitas pelos engenheiros, $100\% - 25\% = 75\%$ do custo médio por metro quadrado. Assim

$$\begin{array}{ccc}
\frac{75}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 900{,}00 \\
\downarrow & : 75 & \downarrow \\
\frac{1}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 12{,}00 \\
\downarrow & \times 100 & \downarrow \\
\frac{100}{100} \text{ do custo total} & \text{———} & \text{R\$ } 1.200{,}00
\end{array}$$

Portanto, o custo médio por metro quadrado passaria a ser de R$ 1.200,00.

Observação 10.2.4 Reunindo os cálculos que fizemos no item 2), temos

$$\frac{900 \times 100}{75},$$

fração igual a

$$12 \times 100 = 1.200 \text{ reais}.$$

Esta solução pode ser representada no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 75\% \text{ do custo total} & \text{———} & 900 \text{ reais} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{———} & x \text{ reais} \end{array}$$

onde

$$\frac{x}{900} = \frac{100}{75},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 900,

$$x = \frac{900 \times 100}{75} = 1.200 \text{ reais}.$$

Exercício 10.11 Na construção de um condomínio de casas, os engenheiros responsáveis conseguiram modernizar as técnicas de construção, o que permite dispensar 10% da mão-de-obra, mantendo o mesmo cronograma e qualidade da empreita. Com isto, a construção passou a ter 450 empregados. Quantos empregados havia antes da dispensa de mão-de-obra?

Solução. Esses 450 empregados representam, de acordo com o enunciado

$$100\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100}$$

do total de empregados que havia antes da dispensa de mão-de-obra. Logo, podemos arranjar estes dados no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 90\% \text{ do custo total} & \text{———} & 450 \text{ empregados} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% \text{ do custo total} & \text{———} & x \text{ empregados} \end{array}$$

onde x é o número de empregados antes da dispensa de mão-de-obra. Portanto,

$$\frac{x}{450} = \frac{100}{90},$$

ou, multiplicando ambos os lados desta igualdade por 100,

$$x = \frac{450 \times 100}{90} = 5 \times 100 = 500 \text{ empregados}.$$

Exercício 10.12 (EsSA – 1988) Doze pedreiros fizeram 5 barracões em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia. O número de horas por dia que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazer 10 barracões em 20 dias é:

A) 8.
B) 9.
C) 10.
D) 12.
E) 15.

Solução. Observamos, inicialmente, que os doze pedreiros trabalham

$$30 \times 6 = 180 \text{ horas},$$

ou seja, 6 horas por dia, durante 30 dias, para construir 5 barracões. Portanto, para construir um barracão apenas, os mesmos doze pedreiros trabalhariam cinco vezes menos, ou seja,

$$\frac{180}{5} = 36 \text{ horas}$$

apenas. Logo, um pedreiro sozinho teria que trabalhar doze vezes mais, isto é,

$$12 \times 36 = 432 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Obviamente, dezoito pedreiros gastariam um tempo 18 vezes menor que um pedreiro, ou seja,

$$\frac{1}{18} \times 432 = \frac{12 \times 36}{18} = \frac{2}{3} \times 36 = 24 \text{ horas}$$

para construir um barracão. Logo, os dezoito pedreiros utilizariam

$$10 \times 24 = 240 \text{ horas}$$

para construir 10 barracões. Este é o total de horas trabalhadas pelos 18 pedreiros em 20 dias. Portanto, esta equipe de 18 pedreiros trabalharia

$$\frac{240}{20} = 12 \text{ horas}$$

por dia, trabalhando durante 20 dias.

Observação 10.2.5 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos

$$\frac{30 \times 6 \times 12 \times 10}{5 \times 18 \times 20},$$

fração igual a

$$\frac{10 \times 12 \times 10}{5 \times 20} = 12 \text{ horas.}$$

Esta solução pode ser representada no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
12 \text{ pedreiros} & \text{———} & 5 \text{ barracões} & \text{———} & 30 \text{ dias} & \text{———} & 6 \text{ horas} \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
18 \text{ pedreiros} & \text{———} & 10 \text{ barracões} & \text{———} & 20 \text{ dias} & \text{———} & x \text{ horas}
\end{array}$$

onde

$$\frac{x}{6} = \frac{30 \times 10 \times 12}{20 \times 5 \times 18}$$

Logo,

$$x = 12 \text{ horas},$$

como já havíamos calculado. Deste modo, obtemos a resposta da questão, a alternativa D).

Exercício 10.13 (Colégio Militar de Brasília – 2008) Uma montadora recebeu uma encomenda de 40 carros. Para entregá-los, a montadora trabalhou 5 dias, utilizando 6 robôs, de mesmo rendimento, que trabalham 8 horas por dia cada um. Uma outra encomenda foi feita, dessa vez para montar 60 carros. Contudo, um dos robôs apresentou um defeito e não pôde ser usado no trabalho. Para atender o cliente, a montadora precisou, então, trabalhar 12 horas por dia, por alguns dias. O número de dias que a fábrica trabalhou para entregar o segundo pedido foi igual a:

A) 5.
B) 6.
C) 11.

D) 12.
E) 13.

Solução. De acordo com o enunciado, são usados 6 robôs para montar 40 carros em um total de

$$5 \times 8 = 40 \text{ horas.}$$

Portanto, os seis rôbos montam 40 carros em 40 horas, ou seja, montam

$$\frac{40}{40} = 1 \text{ carro por hora.}$$

Assim, gastariam

$$60 \times 1 = 60 \text{ horas}$$

para montar 60 carros. Sendo assim, um robô, apenas, consumiria seis vezes mais tempo para montar os 60 carros, isto é, consumiria

$$6 \times 60 = 360 \text{ horas}$$

para montar os 60 carros. Logo, cinco robôs levariam cinco vezes menos tempo para montar esses 60 carros, quer dizer,

$$\frac{360}{5} = 72 \text{ horas.}$$

Utilizando os robôs 12 horas por dia, seriam necessários

$$\frac{72}{12} = 6 \text{ dias.}$$

Concluímos, que seriam necessários 6 dias para que 5 robôs, funcionando 12 horas por dia, montassem 60 carros.

Observação 10.2.6 Reunindo os cálculos que fizemos em cada um dos passos na solução acima, temos

$$\frac{5 \times 8 \times 60 \times 6}{40 \times 5 \times 12},$$

fração igual a

$$\frac{60 \times 6}{5 \times 12} = 6 \text{ dias.}$$

Montamos o seguinte diagrama a partir dos dados no enunciado:

$$\begin{array}{ccccccc}
6 \text{ robôs} & \text{———} & 40 \text{ carros} & \text{———} & 8 \text{ horas} & \text{———} & 5 \text{ dias} \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
5 \text{ robôs} & \text{———} & 60 \text{ carros} & \text{———} & 12 \text{ horas} & \text{———} & x \text{ dias}
\end{array}$$

onde

$$\frac{x}{5} = \frac{8 \times 60 \times 6}{12 \times 40 \times 5}.$$

Portanto,

$$x = \frac{5 \times 8 \times 60 \times 6}{12 \times 40 \times 5} = \frac{60 \times 6}{12 \times 5} = 6.$$

Assim, concluímos que

$$x = 6 \text{ dias,}$$

como já havíamos calculado. Somados aos 5 dias anteriores, temos 11 dias. Assim, obtém-se a resposta da questão, a saber, a alternativa C).

Solução alternativa. Neste problema, a quantidade de carros montada (que indicaremos pela letra Q) depende de três *variáveis*: o número n de robôs em funcionamento, a quantidade de dias d em que estes robôs operam e o total t de horas por dia em que funcionam.

Portanto, Q aumenta *na mesma proporção* em que aumentam n, d ou t. Por exemplo, se tivermos mais robôs operando, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável n, aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (d e t) forem mantidas constantes.

Da mesma forma, se tivermos mais dias de funcionamento dos robôs, teremos proporcionalmente mais carros. Isto é, aumentando a variável d, aumentamos a variável Q na mesma proporção, se as outras duas variáveis (n e t) forem mantidas constantes.

Podemos escrever tudo isto de forma mais abreviada, dizendo que existe um número a fixo tal que

$$Q = a \times n \times d \times t,$$

ou seja, de modo que a razão

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = a$$

é sempre constante e igual ao número a.

Voltando à resolução do problema, observamos que, na primeira encomenda, tivemos

$$Q = 40 \text{ carros}$$

com os seguintes valores das variáveis n, d e t:

$$\begin{aligned} n &= 6 \text{ robôs} \\ d &= 5 \text{ dias} \\ t &= 8 \text{ horas.} \end{aligned}$$

Assim, na primeira encomenda, tivemos

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = \frac{40}{6 \times 5 \times 8}$$

Sobre a segunda encomenda, sabemos que

$$Q = 60 \text{ carros}$$

e que

$$\begin{aligned} n &= 5 \text{ robôs} \\ t &= 12 \text{ horas.} \end{aligned}$$

No entanto, devemos calcular o valor correspondente da variável d (o número de dias), o qual não foi informado desta vez. Para isso, usamos o fato de que a razão nas duas encomendas foi a mesma, ou seja, que a razão (ou fração)

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

não muda, embora os valores das variáveis mudem! Assim, igualando estas razões nas duas encomendas, temos

$$\frac{40}{6 \times 5 \times 8} = \frac{60}{5 \times d \times 12}$$

Logo, simplificando o lado direito da igualdade, temos

$$\frac{40}{6 \times 5 \times 8} = \frac{1}{d},$$

ou seja,

$$d = \frac{6 \times 5 \times 8}{40} = 6 \text{ dias.}$$

Exercício 10.14 Com a tecnologia atual, 15 profissionais executam 810 metros quadrados de construção em seis dias, em uma jornada diária de 9 horas de trabalho. Nestas mesmas condições, calcule:

1. quantos profissionais seriam necessários para construir 3.240 metros quadrados em seis jornadas diárias de 9 horas;
2. quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em duas jornadas diárias de 9 horas;
3. quantos profissionais seriam necessários para construir 810 metros quadrados em seis jornadas diárias de 3 horas;
4. quantos profissionais seriam necessários para construir 3.600 metros quadrados em quatro jornadas diárias de 6 horas;
5. quantos metros quadrados podem ser construídos com o trabalho de 50 profissionais em quatro jornadas diárias de 6 horas.

Solução. Segundo o enunciado, 15 trabalhadores constroem 810 metros quadrados em seis dias, trabalhando 9 horas por dia. É natural *supor* que a quantidade Q de metros construídos dependa *proporcionalmente* das variáveis

$$\begin{aligned} n &= \text{ número de profissionais,} \\ d &= \text{ número de dias de trabalho,} \\ t &= \text{ número de horas por dia ou jornada.} \end{aligned}$$

isto significa que, fixadas duas destas variáveis, a quantidade Q aumenta (respectivamente, diminui) à mesma proporção em que a variável restante aumenta (respectivamente, diminui). Em termos matemáticos, existe um número fixo a, a razão entre essas variáveis, tal que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = a.$$

Com os dados do enunciado, sabemos que

$$Q = 810 \text{ metros quadrados}$$

se

$$\begin{aligned} n &= 15 \text{ profissionais,} \\ d &= 6 \text{ dias de trabalho,} \\ t &= 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Calculada esta razão, podemos determinar os valores das variáveis em cada uma das situações nos itens do problema.

1. Nesta primeira situação, são informados os valores das seguintes variáveis

$$Q = 3.240 \text{ metros quadrados,}$$

se

$$\begin{aligned} d &= 6 \text{ dias de trabalho,} \\ t &= 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.} \end{aligned}$$

O problema é determinar n, o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos o total d de dias e o número t de horas por dia, serão necessários 4 vezes mais profissionais, já que a quantidade Q de metros quadrados é também 4 vezes maior, isto é,

$$3.240 = 4 \times 810.$$

Portanto, serão necessários

$$4 \times 15 = 60 \text{ profissionais}$$

para esta nova quantidade de metros quadrados.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{3.240}{n \times 6 \times 9} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}$$

Note que os valores $d = 9$ e $t = 6$ foram mantidos. Multiplicando os dois lados da igualdade por estes valores comuns, temos

$$\frac{3.240}{n} = \frac{810}{15},$$

Portanto, multiplicando os dois lados por n e por 15 e dividindo o resultado por 810, obtemos

$$n = \frac{3.240}{810} \times 15 = 4 \times 15 = 60.$$

2. Nesta segunda situação, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e } t = 9 \text{ número de horas por dia ou jornada.}$$

No entanto, passamos a ter

$$d = 2 \text{ dias de trabalho.}$$

O problema é, uma vez mais, determinar n, o novo número de profissionais para esta situação. Já poderíamos dizer que, como foram mantidos os valores Q e t e o novo número de dias corresponde a $\frac{1}{3}$ do anterior, isto é,

$$2 \text{ jornadas diárias} = \frac{1}{3} \times 6 \text{ jornadas diárias},$$

serão necessários 3 vezes mais profissionais, ou seja,

$$3 \times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para esta nova (e menor) quantidade de jornadas diárias.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{810}{n \times 2 \times 9} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}$$

Note que os valores $Q = 810$ e $t = 9$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n \times 2} = \frac{1}{15 \times 6},$$

Concluímos que

$$2n = 15 \times 6,$$

ou seja

$$n = 15 \times 3 = 45 \text{ profissionais},$$

como já havíamos calculado.

3. Desta vez, são mantidos os valores

$$Q = 810 \text{ metros quadrados e } d = 6 \text{ jornadas diárias.}$$

No entanto, passamos a ter

$$t = 3 \text{ dias de trabalho},$$

ou seja, $\frac{1}{3}$ ou 3 vezes menos horas por jornada. Como os valores das demais variáveis foram mantidos, podemos deduzir que serão necessários 3 vezes mais profissionais, ou seja

$$3 \times 15 = 45 \text{ profissionais}$$

para esta nova (e menor) quantidade de horas por jornada diária.

Em termos da razão que calculamos acima, vemos que, igualando as razões na situação anterior e na nova, temos

$$\frac{810}{n \times 6 \times 3} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9}.$$

Note que os valores $Q = 810$ e $d = 6$ foram mantidos. Simplificando os dois lados da igualdade, temos

$$\frac{1}{n \times 3} = \frac{1}{15 \times 9},$$

Concluímos que

$$3n = 15 \times 9,$$

ou seja

$$n = 15 \times 3 = 45 \text{ profissionais},$$

como já havíamos calculado.

4. Nesta situação, são alterados os valores das variáveis Q, d e t. Temos:

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	3.600	n	4	6

Assim, igualando as razões

$$\frac{Q}{n \times d \times t}$$

nas duas situações, obtemos

$$\frac{3.600}{n \times 4 \times 6} = \frac{810}{15 \times 6 \times 9} = 1.$$

Deste modo, deduzimos que

$$\frac{1}{n} = 1 \times \frac{4 \times 6}{3.600}$$

ou

$$n = \frac{3.600}{4 \times 6} = \frac{900}{6} = 150 \text{ profissionais}.$$

5. Por fim, neste último caso, são alterados os valores das variáveis n, d e t. Temos:

	Valores de Q	Valores de n	Valores de d	Valores de t
Situação anterior	810	15	6	9
Situação nova	Q	50	4	6

Já vimos que

$$\frac{Q}{n \times d \times t} = 1$$

em *qualquer* cenário. Logo,

$$Q = 6 \times n \times d \times t.$$

Portanto, na nova situação exposta no enunciado, calculamos

$$Q = 6 \times 50 \times 4 \times 6 = 6 \times 6 \times 2 \times 100 = 7.200 \text{ metros quadrados}.$$

10.3 – Velocidades, Razões e Proporções

As linhas vermelhas no mapa abaixo indicam os trajetos de ônibus urbanos que ligam o centro de Fortaleza ao terminal rodoviário do Papicu. Um destes ônibus segue pela Avenida Santos Dumont, passando pelo cruzamento com a Avenida Dom Manuel às 6:00 da manhã e pelo cruzamento com a Avenida Virgílio Távora às 6:15. A distância percorrida total é igual a cerca de 3 quilômetros. Observe que o tempo decorrido neste percurso é igual a 15 minutos, ou seja,

$$\frac{1}{4} \text{ de hora.}$$

Portanto, a velocidade média do ônibus é igual a

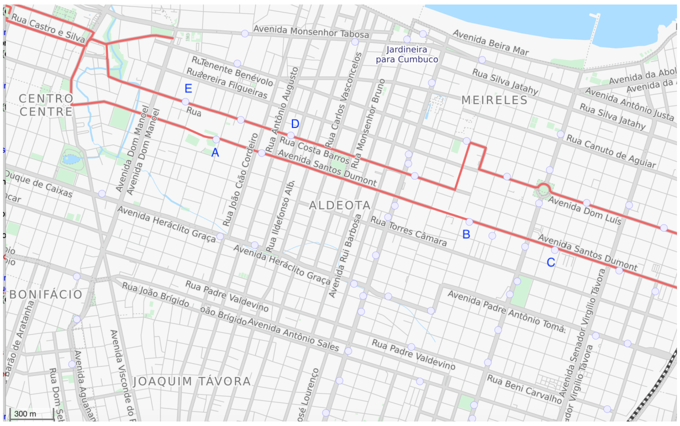
$$v = \frac{3 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{4} \text{ hora}} = \frac{3 \times 4 \text{ quilômetros}}{1 \text{ hora}} = 12\, \frac{\text{quilômetros}}{\text{hora}}.$$

Isto significa que, neste itinerário, o ônibus percorre, em média, 12 quilômetros a cada hora (sessenta minutos) ou 6 quilômetros a cada meia hora (trinta minutos) ou, ainda, 3 quilômetros a cada um quarto de hora (quinze minutos). Ou seja, a velocidade média do ônibus é dada por

$$v = \frac{12 \text{ quilômetros}}{1 \text{ hora}} = \frac{6 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{2} \text{ hora}} = \frac{3 \text{ quilômetros}}{\frac{1}{4} \text{ hora}}$$

ou

$$v = \frac{12 \text{ quilômetros}}{60 \text{ minutos}} = \frac{6 \text{ quilômetros}}{30 \text{ minutos}} = \frac{3 \text{ quilômetros}}{15 \text{ minutos}}.$$



Usando a escala no mapa, observamos que os pontos A e B estão a uma distância real de 1,8 quilômetros. Com esta informação, podemos estimar o tempo t, em minutos, esperado para que o ônibus percorra a distância entre estes pontos da Avenida Santos Dumont.

Usamos um argumento de proporção: se o ônibus leva trinta minutos para percorrer 6 quilômetros, deve levar um décimo deste tempo para percorrer 0,6 quilômetro. Logo, deve levar *três décimos* deste tempo para percorrer 1,8 quilômetros. Portanto, o ônibus leva três décimos de trinta minutos, ou seja, 9 minutos, para percorrer a distância de 1,8 quilômetros entre os pontos representados por A e B.

O argumento pode ser escrito algebricamente da seguinte forma

$$\frac{6}{30} = \frac{1{,}8}{t}.$$

As frações do lado esquerdo e do lado direito são equivalentes. Dizemos que 6 *está para* 30, *assim como* 1,8 *está para t minutos*. Uma vez que

$$\frac{6}{30} = \frac{6 : 10}{30 : 10} = \frac{0{,}6}{3} = \frac{0{,}6 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1{,}8}{9},$$

$$
\begin{array}{ccc}
30 \text{ minutos} & \text{———} & 6 \text{ quilômetros} \\
\downarrow & : 10 & \downarrow \\
3 \text{ minutos} & \text{———} & 0{,}6 \text{ quilômetro} \\
\downarrow & \times 3 & \downarrow \\
9 \text{ minutos} & \text{———} & 1{,}8 \text{ quilômetros}
\end{array}
$$

concluímos que

$$\frac{6}{30} = \frac{1{,}8}{9}$$

e, portanto, $t = 9$ minutos. Logo, o ônibus deve levar cerca de 9 minutos para percorrer a distância entre os pontos na Avenida Santos Dumont representados por A e B no mapa.

Da mesma forma, podemos usar a escala para comprovar que a distância, no mapa, entre os pontos B e C é igual a cerca de 0,6 quilômetro. Sendo assim, o tempo t que o ônibus deve levar para percorrer esta distância é dado por

$$\frac{6}{30} = \frac{0{,}6}{t}.$$

Uma vez que

$$\frac{6}{30} = \frac{6 : 10}{30 : 10} = \frac{0{,}6}{3},$$

concluímos que o tempo esperado para que o ônibus realize este segundo percurso é igual a 3 minutos.

Com estas estimativas, podemos montar a seguinte tabela de horários aproximados para esta linha de ônibus em seu trajeto ao longo da Avenida Santos Dumont:

Parada	Horário previsto
Dom Manuel	6:00
Ponto A	6:02
Ponto B	6:11
Ponto C	6:14
Virgílio Távora	6:15

Observação 10.3.1 Em resumo, se denotarmos por s a distância percorrida desde a posição inicial, no cruzamento com a Avenida Dom Manuel, e por t o intervalo de tempo decorrido desde o instante inicial 6 horas da manhã, a velocidade média do ônibus neste trajeto é igual a

$$\frac{s}{t} = v.$$

Portanto, multiplicando os dois lados desta equação por t, temos

$$s = vt.$$

No exemplo acima, vimos que

$$v = 12 \text{ quilômetros por hora.}$$

Exercício 10.15 Estime o tempo necessário para que o ônibus, com $\frac{3}{4}$ da velocidade média que calculamos antes, percorra o trecho entre os pontos D e E do mapa na figura.

10.4 – Razões e Proporções: Aplicações

Os problemas nesta seção demonstram como razões e proporções aparecem nas mais variadas aplicações, tanto na vida cotidiana quanto nas Ciências que estudamos no

Ensino Médio ou na universidade. Portanto, aprecie a importância do aprendizado que este módulo proporciona!

Exercício 10.16 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um estacionamento cobrava R$ 18,00 por três horas de utilização e agora passou a cobrar R$ 18,00 por duas horas. O percentual de aumento do preço cobrado pelo estacionamento, em relação ao preço inicial, foi:

- 0%.
- 1%.
- 3%.
- 18%.
- 50%.

Solução. Houve um aumento do preço por hora do estacionamento: antes, o preço por hora era igual a

$$\frac{18 \text{ reais}}{3 \text{ horas}} = 6 \text{ reais por hora},$$

ao passo que, agora, o preço por hora foi ajustado para

$$\frac{18 \text{ reais}}{2 \text{ horas}} = 9 \text{ reais por hora}$$

Portanto, o aumento absoluto do preço por hora foi igual a

$$9 - 6 = 3 \text{ reais por hora}.$$

Logo, o aumento relativo ao preço que era cobrado é igual a

$$\frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o aumento relativo em termos de porcentagem é dado por

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%.$$

Exercício 10.17 Em 2019, a inflação acumulada de preços para famílias de baixa renda (i.e, as que têm renda de até R$ 1.643,78 por mês) foi de 4,43%. Para estas famílias, 70% da inflação se deve às altas dos preços de alimentos e habitação. Uma família que gastava R$ 840,00 com esses dois itens, no início de 2019, teve que gastar quanto a mais no fim do ano, para continuar atendendo suas necessidades no mesmo nível de antes?
Fontes: IPEA, IBGE e Agência Brasil

Solução. Inflação, neste caso, significa alta de preços ao consumidor: para calculá-la, comparamos os preços de vários itens no fim e no começo de um certo período (um ano, neste caso) e calculamos a *variação percentual*:

$$\frac{\text{preços finais} - \text{ preços iniciais}}{\text{preços iniciais}}.$$

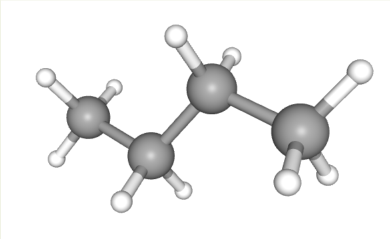
A inflação específica com alimentos e habitação foi, no ano de 2019, segundo os dados, igual a

$$70\% \text{ de } 4{,}43\% = \frac{70}{100} \times 4,43\% = 3{,}101\% \cong 3{,}1\%$$

Portanto, despesas com alimentos e habitação, que totalizavam R$ 840,00 no início do ano, passaram a ser, corrigidas por esta inflação, iguais a

$$840 + \frac{3{,}1}{100} \times 840 \cong 840 + 26{,}05 = 866{,}05 \text{ reais}.$$

Exercício 10.18 O gás butano é o composto orgânico usado como gás de cozinha. Sua fórmula química é C_4H_{10}, o que significa que uma molécula deste gás é composta por 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio.



Disponível em https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/Butane

Uma das mais belas leis da Química afirma que a massa (em gramas) de um mol de átomos de um elemento químico é *numericamente* igual à massa atômica desse elemento, isto é, ao número de prótons e nêutrons deste átomo, aproximadamente. Sabendo que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio, determine a massa, em gramas, do carbono presente em 1.740 gramas de gás butano.

Lembrete: *um mol de uma substância química é igual a, aproximadamente,* 6×10^{23} *moléculas desta substância.*

Solução. Em cada molécula de gás butano há um total de 14 átomos: 4 átomos de carbono e 10 átomos de hidrogênio. Portanto, em um mol de moléculas de gás butano, há 4 moles de átomos de carbono e 10 moles de átomos de hidrogênio. Logo, se a massa de um mol de átomos de hidrogênio é igual a x gramas, então, a massa total de um mol de moléculas de gás butano é

$$4 \times 12x + 10x = 58x.$$

(O fator 12, no cálculo acima, vem de que a massa atômica do carbono é, aproximadamente, 12 vezes maior que a massa atômica do hidrogênio.) Portanto, a massa de carbono presente em um mol de moléculas de gás butano corresponde a

$$\frac{48}{58}$$

da massa deste mol (uma razão fixa). Assim, em 1.740 gramas de gás butano, temos

$$\frac{48}{58} \times 1.740 = 48 \times 30 = 1440 \text{ gramas}$$

de carbono.

Exercício 10.19 (Canguru 2014 - Nível J, Questão 9) Numa cidade, a razão entre os números de homens adultos e de mulheres adultas é $2 : 3$ e a razão entre os números de mulheres adultas e de crianças é $8 : 1$. Qual é a razão entre os números de adultos (homens e mulheres) e de crianças?

A) $5 : 1$.
B) $10 : 3$.
C) $13 : 1$.
D) $12 : 1$.
E) $40 : 3$.

Solução. De acordo com o enunciado, para cada criança na cidade há 8 mulheres adultas. Assim, para cada 3 crianças, há 3×8 mulheres adultas. Como para cada 3 mulheres adultas, há 2 homens adultos, segue que para 3×8 mulheres adultas, há 2×8 homens adultos.

Concluímos que, para cada 3 crianças na cidade, há $3 \times 8 = 24$ mulheres adultas e $2 \times 8 = 16$ homens adultos. Ou seja, para cada 3 crianças, há $24 + 16 = 40$ adultos (homens e mulheres). Assim, a razão entre adultos e crianças é $\frac{40}{3}$, ou seja,

$$40 : 3,$$

o que corresponde à alternativa E).

Exercício 10.20 Os trens de alta velocidade que ligam Paris e Londres atravessam um túnel submarino de cerca de 50 quilômetros sob o Canal da Mancha, que separa a França da Inglaterra, a uma velocidade média de 160 quilômetros por hora. Sabendo que a distância de aproximadamente 500 quilômetros entre Paris e Londres é percorrida por estes trens a uma velocidade média de 200 quilômetros por hora, em quanto tempo é percorrido o trecho em terra, ou seja, fora do Canal?

Solução. Observe que o tempo t gasto no trajeto total pode ser calculado da seguinte forma

$$\frac{500}{t} = 200.$$

Portanto

$$\frac{500}{200} = t,$$

ou seja,

$$t = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ horas.}$$

Como 0,5 de uma hora são $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ minutos, concluímos que o tempo total do percurso é, em média, 2 horas e 30 minutos. O trecho do túnel é percorrido em

$$\frac{50}{160} = \frac{5}{16} = 0{,}3125 \cong 0{,}3\text{hora},$$

ou seja, 3 *décimos* de hora, que equivalem a 18 minutos. Assim, o trecho do percurso fora do túnel leva cerca de 2 horas e 12 minutos.

Exercício 10.21 Uma estrela de nêutrons tem, tipicamente, 1,4 vezes a massa do Sol e um raio de cerca de 20 quilômetros, apenas. Sabendo que o Sol tem um raio de quase 700.000 quilômetros, calcule quantas vezes uma estrela de nêutrons é mais densa que o Sol.

Solução. Observe que o raio (aproximado) do Sol (em quilômetros) pode ser escrito em *notação científica* como

$$7 \times 10^5.$$

Se m denota a massa do Sol, então sua densidade é *proporcional* a

$$\frac{m}{7^3 \times 10^{15}} \text{ quilogramas por quilômetro}$$

De fato, *densidade* é definida como a razão

$$\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

e o volume do Sol (e da estrela de nêutrons) é *proporcional* ao cubo de seus respectivos raios.

Logo, a densidade da estrela de nêutrons, que tem massa igual a 1,4 vezes a massa do Sol, é proporcional a

$$\frac{1{,}4\,m}{20^3} = \frac{7m}{4 \times 10^4} \text{ quilogramas por quilômetro.}$$

Portanto, a comparação das densidades da estrela de nêutrons e da densidade do Sol resulta em

$$\frac{\frac{7m}{4\times 10^4}}{\frac{m}{7^3\times 10^{15}}} = \frac{7m}{m} \times \frac{7^3 \times 10^{15}}{4 \times 10^4} = 7^4 \times 25 \times 10^9 = 60.025 \times 10^9 \cong 6 \times 10^{13}.$$

Portanto, uma estrela de nêutrons é cerca de 10^{13} vezes mais densa que o Sol. Esta é a *ordem de grandeza* da comparação entre essas densidades.

Observação 10.4.1 Por sua vez, a densidade do Sol é cerca de 1,4 gramas por centímetro cúbico, enquanto a densidade da água é de cerca de 1 grama por centímetro cúbico (a depender, sempre, de condições como a temperatura e pressão). Assim, a densidade de uma estrela de nêutrons é, tipicamente,

$$6 \times 10^{13} \times 1{,}4 = 8{,}4 \times 10^{13} \cong 8 \times 10^{13}$$

vezes a densidade da água. Portanto, em um centímetro cúbico de uma estrela de nêutrons há tanta massa quanto na quantidade de água de 4 Castanhões cheios. Se ficou curioso sobre o assunto, veja

https://www.youtube.com/watch?v=FRftmkRBUxQ

Esse exercício explora a noção de ordens de grandeza. Em particular, vimos algumas das impressionantes *diferenças de escala* que existem no Universo e na Natureza. Para entender visualmente as escalas com as quais a Ciência trabalha, veja, por exemplo,

https://www.youtube.com/watch?v=8Are9dDbW24

Para entender melhor como razões e proporções são fundamentais para estimar distâncias astronômicas, assista

https://www.youtube.com/watch?v=CWMh61yutjU

e outros vídeos do mesmo tipo.

Exercício 10.22 Segundo o Banco Central do Brasil, a *taxa de câmbio* entre o dólar americano e o real, no dia 13 de março de 2020, foi, aproximadamente,

$$1 \text{ dólar americano} = 4{,}88 \text{ reais}.$$

Fixada esta taxa, quantos dólares americanos equivaleriam a R$ 1.220,00?

Solução. A taxa de câmbio nada mais é do que a razão

$$\frac{1 \text{ dólar americano}}{4{,}88 \text{ reais}}.$$

Portanto, o número x de dólares que podem ser comprados com R$ 1.220,00 é dada pela seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{x \text{ dólares americanos}}{1.220 \text{ reais}} = \frac{1 \text{ dólar americano}}{4{,}88 \text{ reais}},$$

ou seja,

$$x = 1.220 \times \frac{1}{4{,}88} = 250 \text{ dólares americanos}.$$

10.5 – Razões e Proporções: Variáveis Diretamente Proporcionais

Na seção anterior, vimos exemplos de variáveis que dependem proporcionalmente uma da outra, ou seja, de variáveis diretamente proporcionais. Isto significa que a razão entre estas variáveis é sempre a mesma:

$$\frac{y}{x} = \text{constante}$$

Ou seja, dividindo-se os valores da variável y pelos valores *correspondentes* da variável x, encontramos sempre uma constante, a razão entre estas variáveis. Escrevemos

$$\frac{y}{x} = a$$

ou

$$y = ax.$$

Supomos, sempre, que a razão a é um número diferente de zero.

Em outras palavras, as variáveis x e y são diretamente proporcionais quando, aumentando (respectivamente, diminuindo) o valor da variável x, o valor da variável y aumenta (respectivamente, diminui) *na mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela:

Valores de x	3	4	5	6	10	35
Valores de y	9	12	15	18	30	105

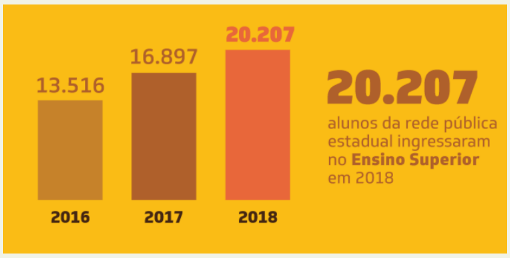
Observemos que, dividindo os valores de y pelos valores correspondentes de x, sempre obtemos o mesmo resultado:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{30}{10} = \frac{105}{35} = 3.$$

Portanto, a razão entre as variáveis y e x é constante e igual a 3. Como esta razão é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 40$ é $y = 3 \times 40 = 120$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 135$ é $x = \frac{1}{3} \times 135 = 45$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos de problemas envolvendo variáveis que são diretamente proporcionais.

Exercício 10.23 Nas últimos anos, tem crescido o número de alunos da escola pública estadual (vocês!) no ensino superior. Veja o quadro abaixo, com dados dos anos de 2016 a 2018:



Percebemos que o número de alunos aumenta cerca de 3.300 a cada ano. Se esta tendência persistir, quantos alunos da rede pública estadual se espera que entrem no ensino superior em 2021?

Solução. Supondo que a tendência seja mantida, isto é, que a cada ano ingressem *mais* 3.300 alunos da rede pública no ensino superior, o número *a mais* de ingressos (y) dependeria linearmente do número de anos desde 2016 (x) da seguinte forma

$$y = 3.300x.$$

Dada esta tendência, em 2021, ou seja, quando $x = 2021 - 2016 = 5$, deveremos ter

$$y = 3.300 \times 5 = 16.500$$

alunos *a mais* do que em 2016. Portanto, o número total deve ser, em 2021, cerca de

$$13.516 + 16.500 = 30.016$$

alunos da rede pública estadual nas universidades.

Exercício 10.24 Dois amigos, professores de Matemática, foram almoçar em um restaurante *self-service*. Um deles serviu-se de 360 gramas e pagou R$ 14,40, enquanto o outro pagou R$ 16,80 por 420 gramas de comida. Qual o valor de um quilograma de comida neste restaurante?

Solução. O valor pago depende proporcionalmente, ou linearmente, do peso. A razão entre o valor pago e o peso é dada por

$$\frac{14{,}40}{360} = \frac{16{,}80}{420} = 0{,}04,$$

ou seja, 4 centavos de real por grama de comida. Assim, o preço de uma quilograma de comida é $0{,}04 \times 1.000 = 40$ reais. De modo geral, se x representa o peso da comida em gramas e y o valor a ser pago, temos

$$y = 0{,}04x.$$

10.5.1 – Variáveis Inversamente Proporcionais

Veremos, agora, situações em que duas variáveis são inversamente proporcionais. Isto significa apenas que o produto (e não a razão) destas variáveis permanece constante. Ou seja, multiplicando o valor de uma dessas variáveis (digamos, a variável x) pelo valor correspondente da outra (a variável y, digamos), obtém-se sempre a mesma constante, isto é,

$$yx = \text{constante}$$

De outra forma, existe um número real não nulo k tal que

$$yx = k$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{\frac{1}{x}} = k.$$

Assim, as variáveis x e y são inversamente proporcionais quando, aumentando (respectivamente, diminuindo) o valor da variável x, o valor de variável y diminui (respectivamente, aumenta) na *mesma proporção*. Vejamos um exemplo na seguinte tabela:

Valores de x	4	5	6	10	12	24
Valores de y	30	24	20	12	10	5

Observemos que, multiplicando os valores de y pelos valores correspondentes de x, obtemos sempre o mesmo resultado:

$$4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 10 \times 12 = 12 \times 10 = 24 \times 5 = 120.$$

Portanto, o produto das variáveis x e y é constante e igual a 120. Como este produto é constante, podemos deduzir que o valor de y correspondente a $x = 30$ é $y = 120 \times \frac{1}{30} = 4$. Da mesma forma, concluímos que o valor de x correspondente ao valor $y = 6$ é $x = 120 \times \frac{1}{6} = 20$.

Vejamos, nos exercícios a seguir, alguns exemplos e problemas envolvendo variáveis que são inversamente proporcionais.

Exercício 10.25 (Colégio Militar de Fortaleza – 2006, adaptado) Um pai resolve premiar seus dois filhos com R$ 140,00. Este valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais ao número de faltas de cada um dos filhos na escola, que foram 2 e 5. Então, a quantia a ser recebida pelo filho com menos faltas é:

A) R$ 7,00.
B) R$ 20,00.
C) R$ 40,00.

D) R$ 100,00.

Solução. Pelo enunciado, essas partes são inversamente proporcionais a 2 e 5. Portanto, são *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{5}$. Logo, a soma destas partes, ou seja, os 140 reais, são *diretamente* proporcionais à soma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}.$$

Logo, a primeira parte está para o todo, isto é, para 140 reais, como $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Portanto, é igual a

$$140\times\frac{\frac{5}{10}}{\frac{7}{10}}=140\times\frac{5}{7}=20\times 5=100 \text{ reais.}$$

Da mesma forma, a segunda parte está para 140 reais como $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ está para $\frac{7}{10}$. Logo, é dada por

$$140\times\frac{\frac{2}{10}}{\frac{7}{10}}=140\times\frac{2}{7}=20\times 2=40 \text{ reais.}$$

Solução alternativa. Sejam a e b as partes dadas pelo pai aos filhos. Sendo assim, temos

$$a+b=140 \tag{10.1}$$

e

$$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}},$$

ou seja

$$2a=5b. \tag{10.2}$$

Note que, multiplicando os dois lados de (10.1) por 2, obtém-se

$$2a+2b=280.$$

Agora, levando em conta a igualdade em (10.2), deduz-se que

$$5b+2b=280,$$

logo,

$$7b=280.$$

Assim, a parte menor (que cabe ao filho que faltou mais) é igual a $b=40$ reais. Por conseguinte, a parte maior (que cabe ao filho que faltou menos) é dada por $a=100$ reais. A alternativa correta é D).

De modo geral, dividir um número, digamos, 140, em partes *inversamente* proporcionais a dois números (positivos) m e n significa dividi-lo em partes *diretamente* proporcionais a $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$. A soma destas partes é, portanto, diretamente proporcional a

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{mn}{m+n}$$

Portanto, as partes são diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{1}{m}}{\frac{mn}{m+n}}=\frac{n}{m+n} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{mn}{m+n}}=\frac{m}{m+n},$$

nesta ordem.

Exercício 10.26 (Canguru 2014, Nível J, Questão 10) O perímetro da roda maior de uma bicicleta é 4,2 metros e o perímetro da menor é 0,9 metro. Num certo momento, as duas válvulas dos pneus estão em seu ponto mais baixo e a bicicleta caminha para a esquerda. Depois de quantos metros as duas válvulas estarão novamente em sua posição mais baixa?

A) 4,2.
B) 6,3.
C) 12,6.
D) 25,2.

Solução. O produto da circunferência (o perímetro) pelo número de voltas de cada roda é igual à distância percorrida pela bicicleta. Assim, a condição do enunciado impõe que tenhamos

$$4{,}2 \times m = 0{,}9 \times n,$$

onde m e n são números (inteiros de voltas) das rodas, maior e menor, respectivamente, até que as válvulas estejam em suas posições mais baixas. Logo,

$$42 \times m = 9 \times n$$

ou, simplificando,

$$14 \times m = 3 \times n.$$

A igualdade anterior pode ser reescrita como

$$2 \times 7 \times m = 3 \times n.$$

Os menores valores (inteiros positivos) para os quais esta igualdade ocorre são $m = 3$ e $n = 2 \times 7 = 14$, de modo que

$$2 \times 7 \times 3 = 3 \times 2 \times 7$$

Assim, a distância percorrida até que as válvulas voltem às posições mais baixas pela primeira vez é $4{,}2 \times 3 = 12{,}6$ metros, o que corresponde à alternativa C).

Exercício 10.27 (UNICAMP) A quantia de R$ 1.280,00 será dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

a. a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
b. A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

Solução. a) Dizer que as três partes são *diretamente proporcionais* a $8, 5$ e 7 significa que são proporcionais a

$$\frac{8}{8+5+7} = \frac{8}{20}, \qquad \frac{5}{8+5+7} = \frac{5}{20} \quad \text{e} \quad \frac{7}{8+5+7} = \frac{7}{20}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{8}{20} \times 1.280 = 512, \qquad \frac{5}{20} \times 1.280 = 320 \quad \text{e} \quad \frac{7}{20} \times 1.280 = 448$$

reais.

b) Dizer que as três partes são *inversamente proporcionais* a $5, 2$ e 10 significa que são diretamente proporcionais a $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{10}$, respectivamente. Portanto, a soma dessas partes é diretamente proporcional a

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}.$$

Logo, as partes são, respectivamente, diretamente proporcionais a

$$\frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{2}{8}, \quad \frac{\frac{5}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, são respectivamente iguais a

$$\frac{2}{8} \times 1.280 = 320, \quad \frac{5}{8} \times 1.280 = 800 \quad \text{e} \quad \frac{1}{8} \times 1.280 = 160$$

reais.

Exercício 10.28 Uma corrente elétrica de 20 Ampères percorre um fio condutor que se bifurca em dois, o primeiro ligado a uma resistência de 4 Ohms e o outro a uma resistência 6 Ohms. Que proporções da corrente total passarão por cada um destes dois fios?

Solução. Aqui, trata-se um problema de divisão em partes inversamente proporcionais. De fato, a corrente que passa por um fio condutor é (ao menos para valores pequenos) *inversamente proporcional* à chamada *resistência* do material deste fio. Portanto, as proporções da correntes nos fios com resistências 4 e 6 Ohms, respectivamente, são iguais a

$$20 \times \frac{6}{4+6} = 12 \text{ Ampères}$$

e

$$20 \times \frac{4}{4+6} = 8 \text{ Ampères}.$$

10.6 – Equivalência de frações e propriedades das proporções

Veja os módulos sobre Números Racionais

Em nosso estudo de Aritmética de números racionais, aprendemos que frações como $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ são equivalentes ou iguais:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

De fato

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}.$$

Outra forma de justificar a equivalência (ou igualdade) destas duas frações é a seguinte: multiplicando cada uma das frações pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores que, neste caso, é igual a 12, obtemos

$$12 \times \frac{3}{4} = 12 \times \frac{9}{12}.$$

Cancelando um fator 4 no primeiro membro e um fator 12 no segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$3 \times 3 = 9.$$

De modo similar, verifiquemos se as frações

$$\frac{6}{9} \quad \text{e} \quad \frac{8}{12}$$

são equivalentes. Neste caso, multiplicamos cada uma das frações pelo produto dos dois denominadores, isto é, 12×9, e checamos se a igualdade

$$12 \times 9 \times \frac{6}{9} = 12 \times 9 \times \frac{8}{12}$$

é realmente verdadeira. Cancelando um fator 9 no lado esquerdo e um fator 12 no lado direito, chegamos a

$$12 \times 6 = 9 \times 8.$$

Como essa última igualdade é verdadeira (os dois produtos valem 72), concluímos que, de fato, as frações $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ são iguais.

Assim como neste exemplo particular, o seguinte *teste* é válido para provar que duas frações *quaisquer* são equivalentes:

Teorema 10.6.1 As frações

$$\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d}$$

são iguais ou equivalentes se, e somente, se

$$a \times d = b \times c.$$

Dizemos, portanto, que essas frações são iguais se, e somente, se o produto dos *meios* b e c for igual ao produto dos *extremos* a e d.

Demonstração. Se as frações são iguais, então, multiplicando os dois lados da igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

pelo produto $b \times d$, temos

$$\frac{a}{b} \times b \times d = b \times d \times \frac{c}{d}.$$

Portanto, dividindo b por b do lado esquerdo e d por d do lado direito, obtém-se

$$a \times d = b \times c,$$

ou seja, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Na direção contrária, se o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja, se

$$a \times d = b \times c,$$

então, dividindo os dois lados desta igualdade pelo produto $b \times d$, obtém-se

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}.$$

Portanto, dividindo d por d do lado esquerdo e b por b do lado direito, chegamos à igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

■

Exercício 10.29 Calcule o valor de x para o qual as frações

$$\frac{x}{8} = \frac{9}{12}$$

são equivalentes (ou seja, iguais).

Solução. Estas frações são iguais se, e somente se, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, isto é,

$$12 \times x = 8 \times 9.$$

Dividindo os dois lados desta expressão por 12, concluímos que as frações são iguais se, e somente se,

$$x = \frac{8 \times 9}{12},$$

isto é, se e somente se,

$$x = 6.$$

Sendo assim, a igualdade entre frações é escrita como

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12}.$$

Estas frações são, de fato, equivalentes, uma vez que

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}.$$

Conforme veremos nos exercícios subsequentes, as duas equivalências listadas no teorema a seguir são muito úteis para lidarmos *aritmeticamente* com frações.

Teorema 10.6.2 Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

e

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração. Sendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Isso é o mesmo que

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Por outro lado, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica

$$ad = bc$$

e, portanto,

$$ad + cd = bc + cd.$$

Assim,

$$(a+c)d = (b+d)c,$$

o que equivale a

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d},$$

como queríamos demonstrar. ∎

Exercício 10.30 A razão entre a soma e a diferença de dois números positivos, distintos um do outro, é 2. Quais a razão entre esses números?

Solução. Sendo a e b os dois números, temos

$$\frac{a+b}{a-b} = 2.$$

Aplicando o Teorema 10.6.1, obtemos

$$2(a-b) = a+b,$$

ou seja,

$$a = 3b.$$

Assim, a razão entre esses números é

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Exercício 10.31 As idades de pai e filho somam 60 anos, sendo que a razão entre essas idades é igual a 3. Calcule as idades dos dois.

Solução. Sejam a e b as idades de pai e filho, respectivamente. Sendo assim, temos

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Portanto, pela primeira parte do Teorema 10.6.2, temos

$$\frac{a+b}{b} = \frac{3+1}{1},$$

ou seja

$$\frac{60}{b} = 4.$$

Logo,

$$b = \frac{60}{4} = 15 \text{ anos}$$

(a idade do filho), de onde segue que a idade do pai é

$$a = 60 - 15 = 45 \text{ anos}.$$

Exercício 10.32 As proporções de rapazes e moças em duas turmas da segunda série de uma escola de tempo parcial são ambas iguais a $\frac{3}{4}$. Sabendo que o total de alunos nestas turmas é de 84 alunos, calcule quantas moças há nas duas turmas, ao todo.

Solução. Sejam a e b as quantidades de rapazes e moças, respectivamente, na primeira turma; e c e d as quantidades de rapazes e moças, respectivamente, na segunda turma. O enunciado informa que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$$

Portanto, pela segunda parte do Teorema 10.6.2, temos

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$$

Como a quantidade total de alunos é 84, temos

$$(a+c) + (b+d) = 84.$$

A quantidade total de moças é $b + d$. Para calculá-la, usamos novamente a segunda parte do Teorema 10.6.2:

$$\frac{(a+c)+(b+d)}{b+d} = \frac{3+4}{4}$$

ou, ainda,

$$\frac{84}{b+d} = \frac{7}{4}.$$

Logo,

$$7(b+d) = 84 \times 4,$$

ou seja,

$$b + d = \frac{84 \times 4}{7} = 48.$$

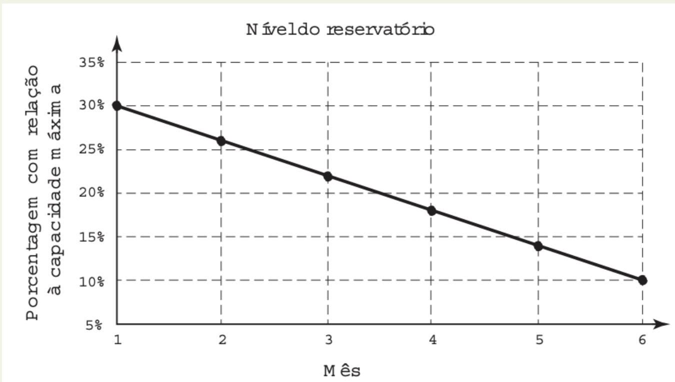
10.7 – Relações lineares entre grandezas

O Ceará tem boa parte de seu território em um região semiárida, com chuvas irregulares. As estações de *seca* têm se tornado cada vez mais frequentes. Já no ano de 1901, em *Os Sertões*, Euclides da Cunha mencionava este fenômeno, falando do centenário açude do Cedro em Quixadá:

> *As cisternas, poços artesianos e raros, ou longamente espaçados lagos como o de Quixadá, têm um valor local, inapreciável. Visam, de um modo geral, atenuar a última das consequências da seca – a sede.*

Os nossos reservatórios precisam repor suas cargas de água para abastecer o consumo humano, a agricultura industrial e de subsistência e o saneamento básico. A propósito deste contexto da importância do manejo adequado de recursos hídricos, consideremos o seguinte problema, retirado de uma dos cadernos do ENEM 2016.

Exercício 10.33 (ENEM 2016, Questão 158, Caderno Azul) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, especialmente os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por certo período, sendo o resultado mostrado no gráfico abaixo. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

Antes de passarmos à solução, cumpre fazermos algumas observações. Inicialmente, o *gráfico*, ou seja, a linha reta inclinada na figura, passa pelos seis pontos destacados com círculos. Um destes pontos corresponde ao *mês* 1 e à *porcentagem* $30\% = \frac{30}{100}$ da capacidade máxima do reservatório. Outro destes pontos corresponde ao mês 6 e à porcentagem $10\% = \frac{10}{100}$ da capacidade máxima do reservatório.

Portanto, as observações foram feitas em um intervalo de tempo de

$$6 - 1 = 5 \text{ meses},$$

durante o qual a porcentagem da capacidade máxima do reservatório *variou negativamente*, isto é, diminuiu

$$10\% - 30\% = -20\% = -\frac{20}{100}.$$

Podemos *inferir* que, a cada mês, neste período de 5 meses, a porcentagem da capacidade máxima diminuiu

$$\frac{-20\%}{5} = -4\% = -\frac{4}{100},$$

ou seja $-\frac{4}{100}$ a cada mês. Sendo assim, no mês 2, ou seja, passado 1 mês, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} = \frac{26}{100}.$$

Da mesma forma, no mês 3, isto é, passados 2 meses, a porcentagem da capacidade máxima seria

$$30\% - 4\% \times 2 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 2 = \frac{22}{100}.$$

Procedendo de forma similar, vemos que, passados 3 meses e 4 meses, ou seja, nos meses 4 e 5, respectivamente, as porcentagens da capacidade máxima seriam

$$30\% - 4\% \times 3 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 3 = \frac{18}{100}$$

e

$$30\% - 4\% \times 4 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 4 = \frac{14}{100},$$

respectivamente. Finalmente, no mês 6, isto é, após 5 cinco meses, a porcentagem da capacidade máxima ainda disponível no reservatório seria dada por

$$30\% - 4\% \times 5 = \frac{30}{100} - \frac{4}{100} \times 5 = \frac{10}{100},$$

como já havíamos observado. Podemos organizar estes dados na seguinte tabela

Mês	Porcentagem da capacidade máxima
1	30%
2	26%
3	22%
4	18%
5	14%
6	10%

De modo geral, se indicamos por x a variável *mês*, cujos valores estão exibidos na coluna da esquerda, então os números na coluna da direita representam os valores da variável

$$y = 30\% - 4\% \times (x - 1)$$

ou seja

$$y = \frac{30}{100} - \frac{4}{100}(x - 1). \tag{10.3}$$

Esta variável representa a *porcentagem da capacidade máxima* do reservatório no mês x. A expressão (10.3) significa que y *depende linearmente* de x. Reagrupando os termos, podemos escrever

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x.$$

Essa dependência linear pode ser vista na tabela: de uma linha para outra, temos um *incremento* (ou seja, um aumento) de um mês. Portanto, a variável x aumenta uma unidade de uma linha para a seguinte. Esta variação de x implica uma variação de y: de uma linha para outra da tabela, a variável y *diminui* 4 pontos percentuais, isto é, 4%. Portanto, passados x meses, a *variação* correspondente de y neste período é igual a

$$y - \frac{30}{100} = -\frac{4}{100}(x - 1).$$

Logo, a *variação* de y, dividida (ou comparada) com a *variação* de x, é dada por

$$\frac{y - \frac{30}{100}}{x - 1} = -\frac{4}{100}.$$

Portanto, a razão entre as *variações* de y e de x é constante e igual a $-\frac{4}{100}$.

Pela análise da figura, percebemos que os valores nas duas colunas da tabela correspondem às coordenadas dos pontos destacados na linha reta inclinada. Estes pontos, alinhados sobre a reta inclinada, têm coordenadas

$$(x, y),$$

onde

$$y = \frac{34}{100} - \frac{4}{100}x. \tag{10.4}$$

Portanto, as coordenadas desses pontos são, exatamente, os números da tabela: o primeiro número do par ordenado, o valor da variável x, é lido na primeira coluna da tabela. O segundo número do par ordenado, o valor da variável y (correspondente ao valor de x) é informado na coluna da direita.

O enunciado da questão faz referência à *tendência linear* observada no gráfico: isto significa, justamente, que as coordenadas dos pontos dependem linearmente uma da outra. Vimos acima que esta relação linear é dada por (10.4).

Finalizando estes comentários, observamos, pela figura do enunciado, que o gráfico da relação entre x e y, ou seja, a linha inclinada, determina um triângulo ABC (acompanhe na próxima figura) com lados BC de "comprimento"

$$30\% - 10\% = 20\% = \frac{20}{100}$$

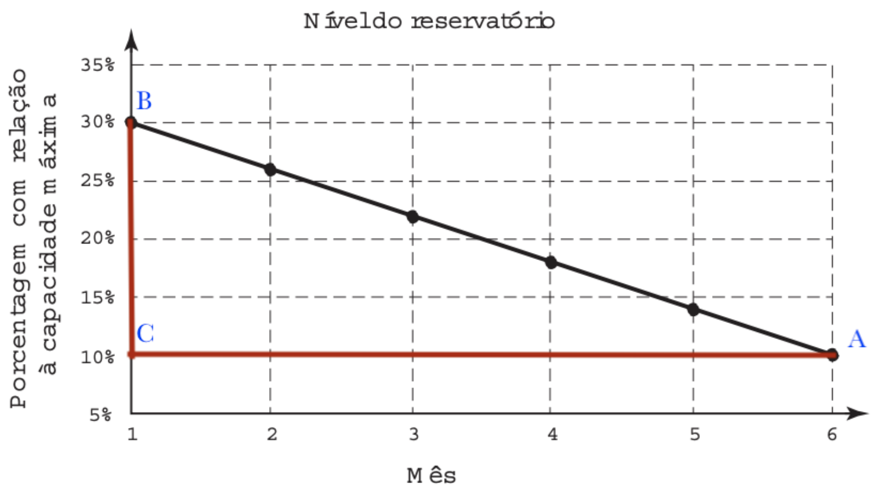
no eixo vertical, e AC de comprimento

$$6 - 1 = 5$$

no eixo horizontal. Portanto, a *inclinação* desta reta pode ser medida como a seguinte razão

$$\frac{\frac{20}{100}}{5} = \frac{4}{100}.$$

Esta razão é a *tangente* do ângulo no vértice A, oposto ao lado BC, conforme a figura.



Note ainda que, trocando o sinal deste valor, obtemos o coeficiente $-\frac{4}{100}$ que multiplica a variável x na expressão (10.4)

Por fim, apresentamos a resolução da questão, utilizando boa parte da discussão anterior.

Solução. Devemos calcular em qual mês (ou seja, para qual valor da variável x) teremos "zerado" toda a capacidade do reservatório, isto é, teremos

$$y = 0.$$

Considerando a expressão (10.4), vemos que isto ocorre quando

$$\frac{34}{100} - \frac{4}{100}x = 0,$$

ou seja, quando

$$x = \frac{\frac{34}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{34}{4} = \frac{32}{4} + \frac{2}{4} = 8 + \frac{1}{2} = 8{,}5.$$

Logo, mantida a tendência observada no gráfico, o reservatório atingirá o nível zero de sua capacidade entre o mês 8 e o mês 9, dois meses e meio depois do mês 6.