Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:
Angelo Papa Neto
Marcelo Bessa

Revisor:
Antonio Caminha M. Neto

Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Raciocínio Geométrico

Distâncias no Plano

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P213r Papa Neto, Angelo
Raciocínio geométrico: distâncias no plano [recurso eletrônico] / Angelo Papa Neto, Marcelo José Tavares Bessa, Antonio Caminha Muniz Neto. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43569-6 (E-book)

1.Distância entre pontos. 2. Plano cartesiano. I. Papa Neto, Angelo. II. Bessa, Marcelo José Tavares III. Muniz Neto, Antonio Caminha. IV. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). V. Título.

CDD: 516

12 Distâncias no plano cartesiano e o Teorema de Pitágoras

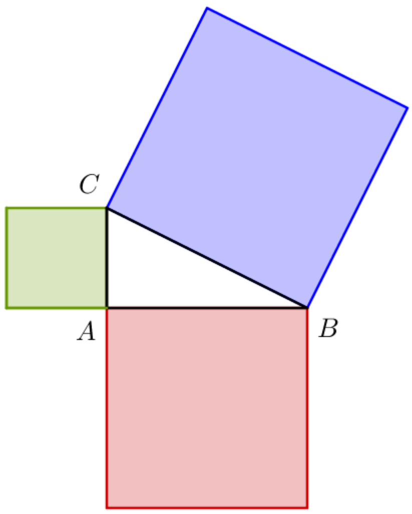
12.1 – O Teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos viveu entre cerca de 570a.C. e 490a.C. A única data aproximadamente determinada de sua vida é 530a.C., quanto ele deixou Samos e se estabeleceu em Crotona, cidade hoje localizada no Sul da Itália, onde fundou uma sociedade religiosa e filosófica que em pouco tempo passou a exercer considerável influência política nas cidades gregas situadas naquela região. Em torno de 500a.C. ele foi forçado a se retirar de Crotona, indo para a cidade de Metaponto, onde permaneceu até o fim da vida.

Os seguidores de Pitágoras eram chamados *pitagóricos*. Eles acabaram se espalhando pela Grécia continental e exerceram alguma influência até o final do século quinto a.C. Os últimos pitagóricos foram descritos, por volta de 350a.C., como peregrinos, andarilhos pobres e vegetarianos.

O teorema que tradicionalmente leva o nome de Pitágoras é, na verdade, uma propriedade dos triângulos retângulos conhecida desde uma antiguidade ainda mais remota.

Teorema 12.1.1 — Pitágoras. Seja ABC um triângulo retângulo, com o ângulo reto situado no vértice A. Então, a área do quadrado cujo lado é BC é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os dois outros lados do triângulo.



Observação 12.1.2 Dizemos que um triângulo é **retângulo** se um dos seus ângulos internos é **reto**, ou seja, mede $90°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, ou seja, $180°$, a soma das medidas dos dois outros ângulos internos de um triângulo retângulo é $180° - 90° = 90°$. Quando a soma de dois ângulos é igual a um ângulo reto, dizemos que esses ângulos são **complementares**.

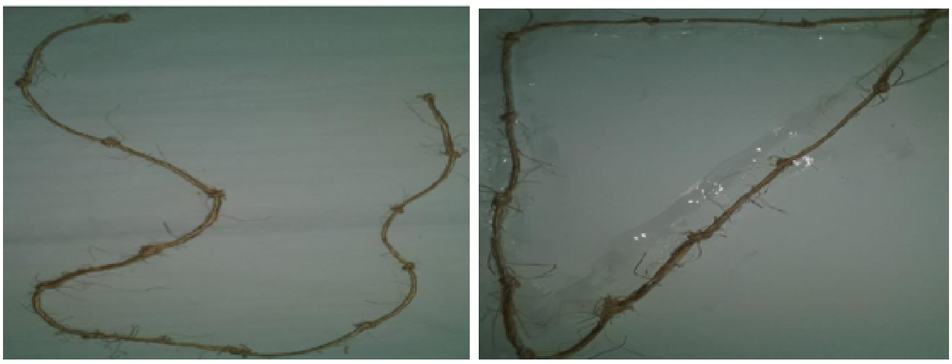
Observação 12.1.3 O lado maior de um triângulo retângulo é chamado **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados de **catetos**. O Teorema de Pitágoras afirma que, se o triângulo é retângulo, então a *soma (das áreas) dos quadrados dos catetos (ou seja, construídos sobre os catetos) é igual ao quadrado da hipotenusa (ou seja, da área do quadrado construído sobre a hipotenusa)*. Se $A\widehat{B}C = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então as áreas desses quadrados valem a^2, b^2 e c^2, sendo a^2 a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Assim, o resultado geométrico do Teorema de Pitágoras pode ser escrito algebricamente da seguinte forma:

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{12.1}$$

É importante notar também que **a recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida**, ou seja, a identidade (12.1) entre as medidas dos lados de um triângulo implica que ele é retângulo.

Essa propriedade notável dos triângulos retângulos aparece em escritos antigos, como nos *Sulvasutras* (manual hindu para a construção de altares e templos), nos *Nove Capítulos de Arte Matemática* (século II aC) onde o Teorema de Pitágoras aparece com o nome de *regra guogu*, ou seja, *regra base-altura*, no tablete de argila babilônico *Plimpton* 322 (cerca de 1800a.C.), no qual aparece uma lista de *trios pitagóricos*: números naturais que são lados de triângulos retângulos.

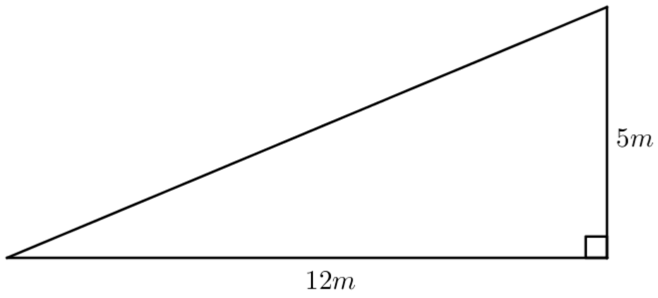
Um desses trios, o (3,4,5) ($3^2 + 4^2 = 5^2$) era conhecido e amplamente utilizado em várias partes do mundo antigo. No antigo Egito, por exemplo, os *Estiradores de Cordas* (em grego, *Harpedonaptae*) eram especialistas em medições e conseguiam produzir um triângulo retângulo da seguinte forma: uma corda, com 12 nós, situados a distâncias iguais uns dos outros, era estendida de modo a formar um triângulo com lados 3, 4 e 5, como ilustram as figuras a seguir (note que $3 + 4 + 5 = 12$).



O triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, de acordo com o que afirmamos na Observação 12.1.3.

A seguir, colecionamos três exemplos que trazem aplicações imediatas do Teorema de Pitágoras.

■ **Exemplo 12.1** Encontre o comprimento da rampa, sabendo que ela foi construída conforme a ilustração abaixo:

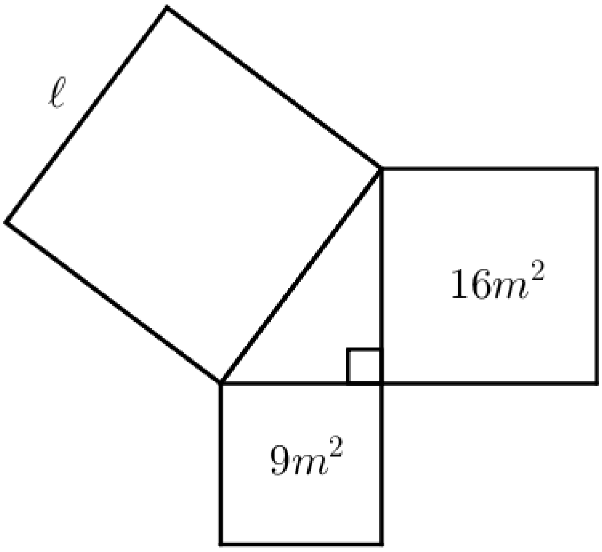


Solução. O comprimento r da rampa é igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo da figura. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$r^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169,$$

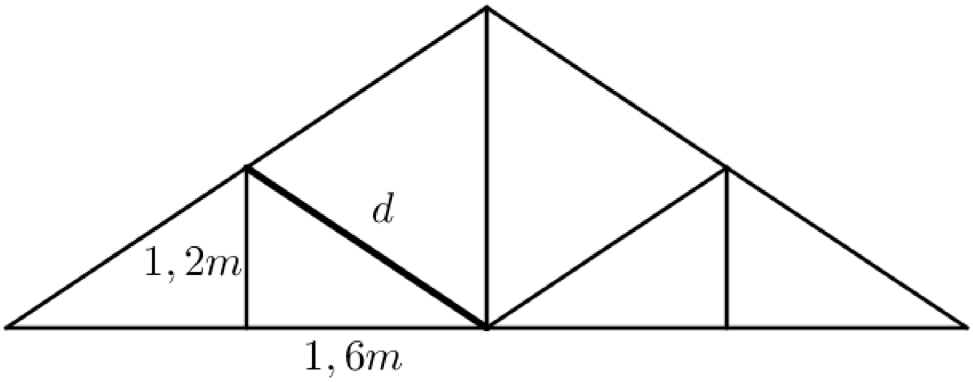
logo, $r = 13m$. ■

■ **Exemplo 12.2** Na figura abaixo, os quadriláteros são quadrados e o triângulo central é retângulo. Encontre o lado ℓ do quadrado maior.



Solução. Pelo Teorema de Pitágoras, a soma das áreas dos dois quadrados menores é igual à área do quadrado maior. Assim, essa área é igual a $16 + 9 = 25m^2$. Como a área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2, temos $\ell^2 = 25m^2$, logo, $\ell = 5m$. ■

■ **Exemplo 12.3** Uma das estruturas mais utilizadas para dar sustentação a telhados é a *treliça*, também conhecidas como *tesoura*. O desenho a seguir mostra uma treliça; nela, os triângulos que têm um lado horizontal são retângulos (e têm tais lados horizontais por catetos). Calcule o comprimento da travessa (parte inclinada destacada) da treliça.



Solução. Uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras fornece:

$$d^2 = 1{,}2^2 + 1{,}6^2 = 1{,}44 + 2{,}56 = 4.$$

Logo, $d = 2m$. ■

12.2 – Por que o Teorema de Pitágoras é válido?

O Teorema de Pitágoras é uma afirmação sobre triângulos retângulos que não é óbvia, ou seja, a princípio, não parece evidente que, em triângulos retângulos, o quadrado construído sobre a hipotenusa tenha área igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Para nos convencermos de que este resultado geométrico vale *para um triângulo retângulo específico*, podemos medir os catetos e a hipotenusa desse triângulo e, em seguida, podemos somar os quadrados desses catetos e verificar que o valor coincide com o quadrado de sua hipotenusa. Entretanto, esse procedimento não justifica o porquê de o resultado ser válido *para todos* os triângulos retângulos; ele trata apenas *desse* triângulo e de triângulos a ele congruentes.

É claro que não é possível verificar a validade do Teorema de Pitágoras triângulo retângulo por triângulo retângulo (pois há uma infinidade de triângulos retângulos não congruentes entre si). Assim sendo, para utilizá-lo tendo a certeza de que é correto, precisamos de um argumento que dependa apenas do fato de o triângulo ser retângulo e que valha para todos os triângulos retângulos de uma vez. Esse argumento geral é chamado de *demonstração*.

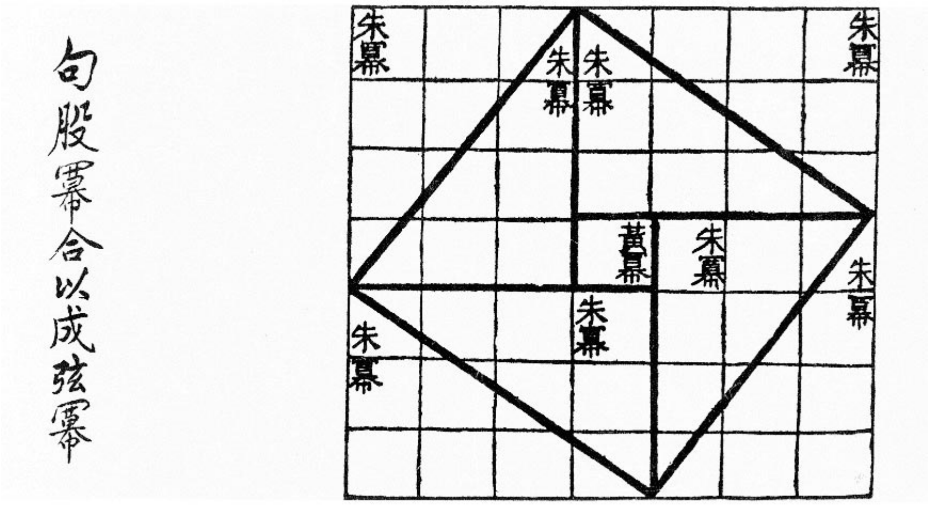
A figura da próxima página aparece no texto chinês *Chou Pei Suan Ching*, também conhecido como *Zhoubi Suanjing* (que pode ser traduzido como “Aritmética Clássica do Gnômon”[1]). Esse é um dos mais antigos tratados sobre Geometria, tendo sido escrito durante a Dinastia *Zhou*, que durou de 1046a.C. a 256a.C.

No tabuleiro da figura, de lado 7 unidades, encontra-se destacado um quadrado grande (marcado com uma linha preta mais espessa que as demais), o qual é composto por quatro triângulos retângulos congruentes (igualmente destacados), juntamente com um quadradinho central.

Para descobrir o comprimento do lado do quadrado destacado maior, vamos calcular sua área. Ela é a soma das áreas (iguais) dos quatro triângulos

[1] *Gnômon* é um antigo nome para ângulo reto. É também a parte de um relógio de sol que projeta sua sombra e permite a medição das horas.

retângulos destacados com a área do quadradinho central. Claramente, os quatro triângulos retângulos destacados podem ser reposicionados de modo a formarem dois retângulos de área $3 \cdot 4$. O quadradinho central, por sua vez, tem lado $4 - 3 = 1$, logo, tem área igual a $(4 - 3)^2 = 1$.

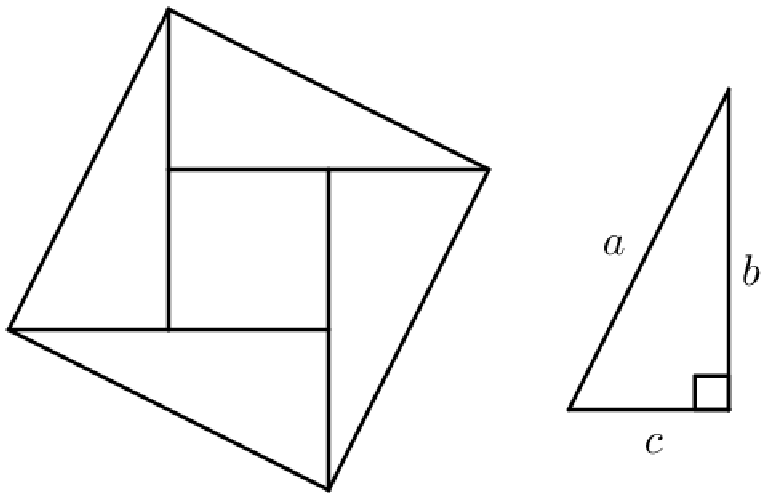


A área do quadrado maior é, portanto, igual a

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + (4 - 3)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3^2 = 4^2 + 3^2.$$

É óbvio que $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$, e isso implica que o lado do quadrado maior é igual a 5. No entanto, ao escrever essa área como $4^2 + 3^2$, mostramos que ela é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. (Esses quadrados não aparecem na figura!)

Veja que o argumento acima, embora tenha sido exibido para o triângulo particular de lados 3, 4 e 5, pode ser repetido para qualquer outro triângulo retângulo. Realmente, suponhamos que as medidas dos catetos do triângulo retângulo sejam b e c, e qua a medida de sua hipotenusa seja a. Supondo, sem perda de generalidade, que $b > c$, a mesma construção da figura anterior pode ser feita, bastando posicionarmos quatro triângulos retângulos de catetos b e c ao redor de um quadradinho central de lado $b - c$:



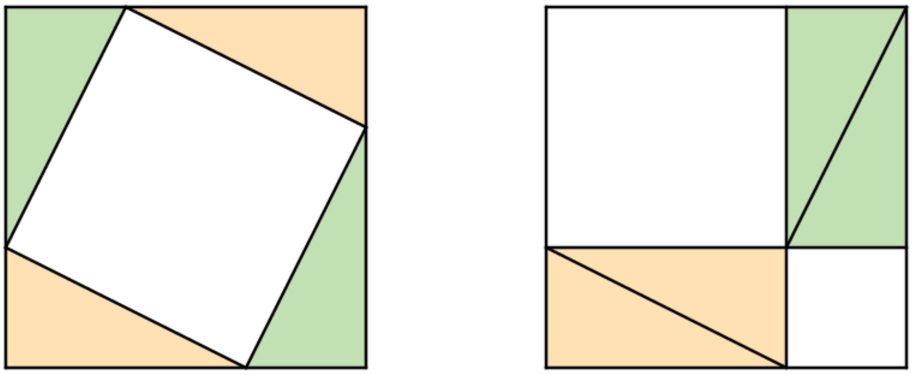
Evidentemente, o quadrilátero que formamos desse modo é um quadrado, pois todos os seus lados são iguais a a e cada um de seus ângulos internos é igual à soma dos ângulos agudos de um dos triângulos retângulos, que já observamos que vale $90°$.

Cada triângulo retângulo tem área $\frac{bc}{2}$. A soma das áreas dos quatro triângulos é, portanto, $4 \cdot \frac{bc}{2} = 2bc$. A área do quadradinho central é $(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$. Como a soma das áreas dos quatro triângulos e do quadradinho central é igual à área a^2 do quadrado maior, obtemos a igualdade a seguir:

$$a^2 = 2bc + (b^2 - 2bc + c^2) = b^2 + c^2.$$

Veja que o argumento é o mesmo que usamos anteriormente, mas agora o empregamos em um triângulo retângulo qualquer, usando letras para indicar os comprimentos dos lados. Quando essas letras são substituídas por números de modo que o triângulo seja retângulo, a construção funciona e o teorema é válido. Então, obtiveoms uma demonstração de que o Teorema de Pitágoras é válido para qualquer triângulo retângulo.

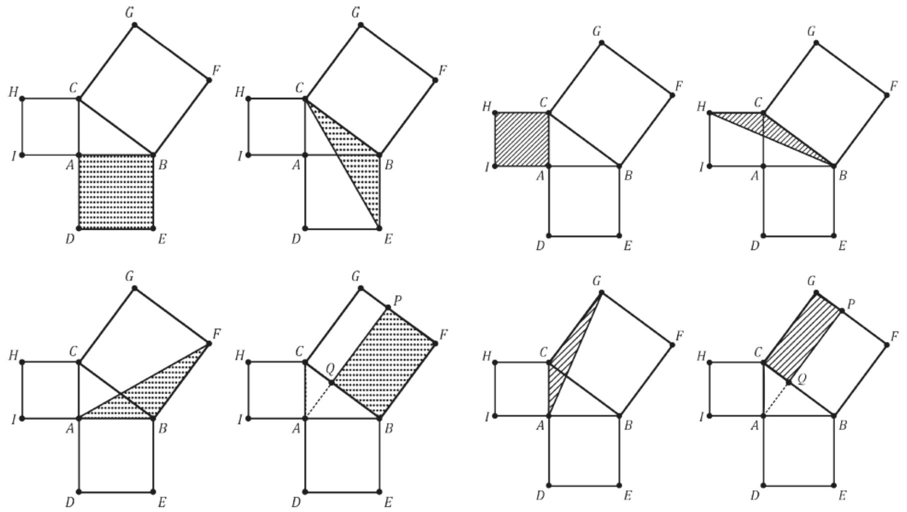
■ **Exemplo 12.4** As duas figuras abaixo são formadas pelos mesmos triângulos retângulos e por um ou dois quadrados.



Use estas duas figuras para obter outra demonstração do Teorema de Pitágoras.

Solução. Na figura da esquerda, os quatro triângulos retângulos, junto com o quadrado construído sobre suas hipotenusas, formam um quadrado maior. Na figura da direita, o mesmo quadrado maior é formado pelos mesmos quatro triângulos retângulos, dispostos de modo diferente, juntamente com dois quadrados menores, construídos sobre catetos dos triângulos. Retirando-se os triângulos das duas figuras, vemos que o quadrado que sobra na figura da esquerda tem área igual à soma das áreas dos quadrados que sobram na figura da direita. ■

■ **Exemplo 12.5** Utilize as figuras a seguir para encontrar mais uma demonstração do Teorema de Pitágoras.



Solução. Esta é a demonstração que aparece nos *Elementos* de Euclides (Proposição 47 do Livro I). Trata-se de mais uma comparação entre áreas.

Nos quatro diagramas que aparecem à esquerda, o quadrado $ABED$ e o triângulo CBE têm mesma base e mesma altura, logo, a área do triângulo é metade da área do quadrado. O triângulo CBE, por sua vez, é congruente ao triângulo ABF (veja o primeiro triângulo da segunda linha); portanto, esses dois triângulos têm a mesma área. Essa congruência se dá pelo caso de congruência lado-ângulo-lado. Enfim, o triângulo ABF tem base BF, a mesma do retângulo $BFPQ$. Além disso, sua altura em relação a essa base também é igual à altura de $BFPQ$ em relação á mesma base. Portanto, a área do retângulo $BFPQ$ é o dobro da área do triângulo ABF e, por isso, igual à área do quadrado $ABDE$, construído sobre um dos catetos.

Oa quatro diagramas à direita da figura explicam, de modo totalmente análogo, como o quadrado construído sobre o outro cateto (o quadrado $ACHI$) tem área igual à do retângulo $CGPQ$.

Agora, observe que as áreas dos dois retângulos, somadas, resultam na área do quadrado $BCGF$, construído sobre a hipotenusa. Isso significa que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. ■

12.3 – Distâncias no Plano Cartesiano

A **distância** entre dois pontos *distintos* A e B é o comprimento do segmento AB cujas extremidades são esses dois pontos. Escrevemos $\overline{AB}$ para indicar esse comprimento. Nesta seção, vamos aprender a calcular a distância entre dois pontos a partir de suas coordenadas, primeiro na reta numérica e depois no plano cartesiano.

12.3.1 – Distâncias entre pontos em uma reta numérica

Recordamos que, uma reta é chamada de *eixo* ou de *reta orientada*, ou ainda de *reta numérica*, se cada ponto A da reta estiver associado a um número real x_A, dito a *coordenada* de A, da seguinte forma:

1. Inicialmente, associamos um ponto O da reta ao número 0 e um ponto U da reta ao número 1 (de forma que $x_O = 0$ e $x_U = 1$).

2. Em seguida, associamos os pontos da semirreta $\overrightarrow{OU}$ (exceto o próprio O) aos números reais positivos e os pontos da semirreta oposta a $\overrightarrow{OU}$ (novamente, exceto o próprio O) aos números reais negativos, como descrito a seguir:
   i. Se o ponto V estiver na semirreta $\overrightarrow{OU}$, associamos V ao número real x_V de forma que $x_V = \overline{OV}$.
   ii. Se o ponto V estiver na semirreta oposta a $\overrightarrow{OU}$, associamos V ao número real x_V de forma que $x_V = -\overline{OV}$.

Observação 12.3.1 O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x, é o número real $|x|$, dado por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}. \tag{12.2}$$

O valor absoluto de um número real pode ser interpretado como o "número sem sinal". Por exemplo: $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-5| = 5$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-\pi| = \pi$.

Outras maneiras de se escrever o valor absoluto de x são $|x| = \sqrt{x^2}$, ou ainda, $|x| = \max\{-x,x\}$, onde "$\max\{a,b\}$" indica o maior dos números a e b.

Também, se a e b são dois números reais, então $|a-b| = |b-a|$. Por exemplo, $|7-4| = |3| = 3$ e $|4-7| = |-3| = 3$.

Se r é um eixo, A e B são dois de seus pontos, e x_A e x_B são as coordenadas de A e B, respectivamente, a distância entre A e B, isto é, o comprimento do segmento de reta AB, pode ser calculado, em termos de suas coordenadas, como o valor absoluto da diferença entre x_A e x_B:

$$\overline{AB} = |x_A - x_B|. \tag{12.3}$$

■ **Exemplo 12.6** Calcule a distância entre os pontos A e B, cujas coordenadas são dadas como em cada item abaixo:

(a) $x_A = 1$ e $x_B = 3$;
(b) $x_A = 2$ e $x_B = 9$;
(c) $x_A = -1$ e $x_B = -5$;
(d) $x_A = 1/2$ e $x_B = 1/3$;
(e) $x_A = 0$ e $x_B = -4$.

Solução.
(a) $d(A,B) = |x_A - x_B| = |1-3| = |-2| = 2$;

(b) $d(A,B) = |x_A - x_B| = |2-9| = |-7| = 7$;

(c) $d(A,B) = |x_A - x_B| = |-1-(-5)| = |-1+5| = |4| = 4$;

(d) $d(A,B) = |x_A - x_B| = |1/2 - 1/3| = |3/6 - 2/6| = |\frac{3-2}{6}| = |\frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$;

(e) $d(A,B) = |x_A - x_B| = |0-(-4)| = |0+4| = |4| = 4$. ■

■ **Exemplo 12.7** A distância entre os pontos P e Q, pertencentes à reta numérica r, é igual a 2. Sabendo que a coordenada do ponto Q é $x_Q = 5$, descubra os possíveis valores para a coordenada de P.

Solução. Pensando geometricamente, temos o real 5 e queremos descobrir os reais que estão à distância 2 do 5. Como tais reais podem estar "*à frente*" ou "*atrás*" do 5, as possibilidades são $5 + 2 = 7$ ou $5 - 2 = 3$.

Alternativamente, raciocinando de uma maneira mais algébrica, sabemos que $\overline{PQ} = 2$, ou seja, $|x_P - x_Q| = 2$. Como $x_Q = 5$, temos $|x_P - 5| = 2$, logo, $x_P - 5 = 2$, ou $x_P - 5 = -2$. Isso significa que $x_P = 7$ ou $x_P = 3$. ■

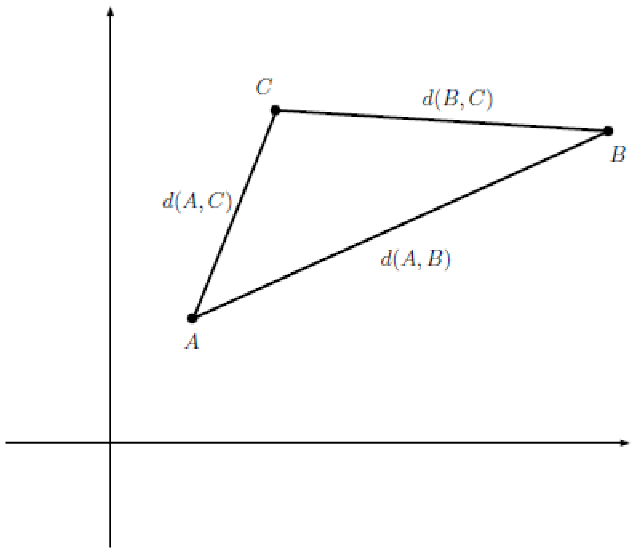
12.3.2 – Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Como sabemos, a distância $d(A,B)$ entre dois pontos do quaisquer A e B do plano tem três propriedades básicas:

(1) Ela é sempre *não negativa*, e só é zero se os pontos forem iguais.
(2) Ela é *simétrica*, isto é, $d(A,B) = d(B,A)$.
(3) Ela *satisfaz a desigualdade triangular*: se C é um terceiro ponto, então

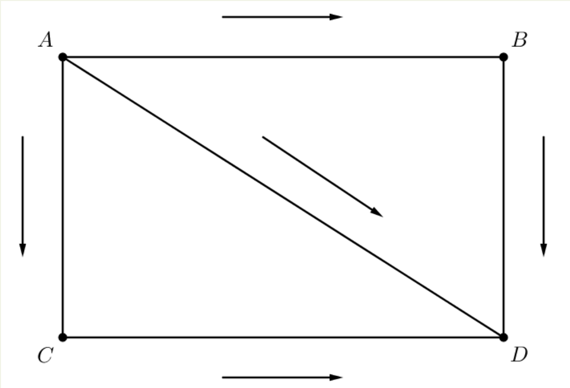
$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B). \tag{12.4}$$

com a igualdade ocorrendo somente se o ponto C estiver sobre o segmento AB.



A figura acima ilustra o significado da desigualdade triangular. Imagine que é preciso ir do ponto A ao ponto B e, para esse deslocamento, dispõe-se de dois caminhos: um em linha reta, indo de A para B ao longo do segmento de reta AB, cujo comprimento é a distância $d(A,B)$ entre A e B, e o outro passando por C, um ponto diferente de A e de B. O comprimento desse caminho é a soma de distâncias $d(A,C) + d(C,B)$. O caminho mais curto é o que vai diretamente de A até B, e isso significa que, se C não estiver sobre o segmento AB, então $d(A,B)$ é menor do que a soma $d(A,C) + d(C,B)$.

Exercício 12.1 Em uma aula de Educação Física, Pedro, Luiz e Miguel saíram juntos de um canto A da quadra. Pedro correu em diagonal pelo meio da quadra, até o canto oposto D. Luiz e Miguel correram pelas bordas da quadra: Luiz foi em linha reta até o ponto B e, de lá, em linha reta até o ponto D; Miguel foi em linha reta até o ponto C e, de lá, em linha reta até o ponto D. Se os três chegaram ao ponto D juntos, pode-se afirmar que:



(a) Luiz foi mais rápido que Miguel.
(b) Pedro foi mais rápido que Miguel, mas não foi mais rápido que Luiz.
(c) Luiz e Miguel foram mais rápidos que Pedro.
(d) Pedro foi mais rápido que Luiz.
(e) Miguel foi mais rápido que Luiz.

Solução. Como os três saíram ao mesmo tempo do ponto A e chegaram ao mesmo ao ponto D, eles levaram o mesmo intervalo de tempo para percorrer seus caminhos. Aquele que percorre a distância maior em um mesmo intervalo de tempo, o faz a uma velocidade maior. Assim, será mais rápido aquele que tiver percorrido a maior distância.

Dos três, Pedro foi o que percorreu a menor distância, pois $d(A,D) < d(A,B) + d(B,D)$ e $d(A,D) < d(A,C) + d(C,D)$, pela desigualdade triangular. Como $d(A,B) = d(C,D)$ e $d(A,C) = d(B,D)$, temos que $d(A,C) + d(C,D) = d(A,B) + d(B,D)$. Assim, as distâncias percorridas por João e Miguel são iguais. Podemos, então, concluir que as velocidades médias de João e Miguel são iguais e a velocidade média de Pedro é menor do que as outras duas velocidades.

Dessa forma, o único item correto é o (c). ■

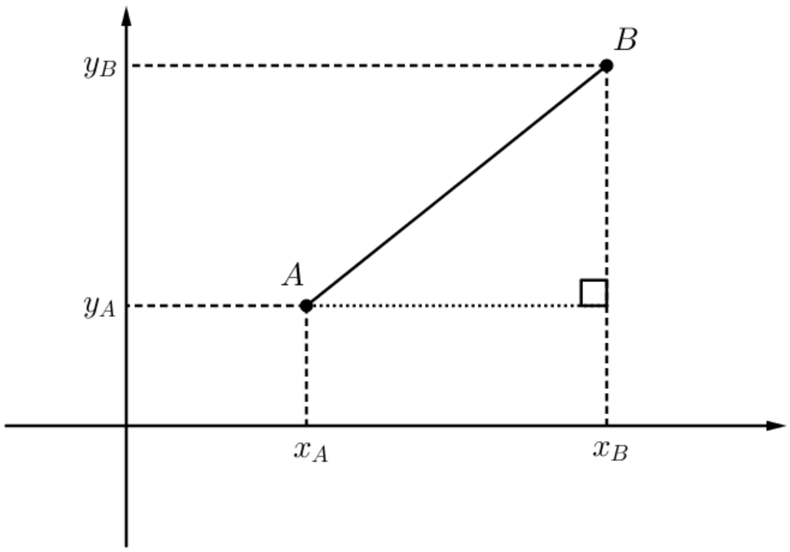
Para relacionar distâncias com coordenadas, suponhamos que foi escolhido e fixado um sistema cartesiano de eixos em um plano. Lembramos que, essencialmente, isso corresponde à escolha de duas retas numéricas perpendiculares em um ponto O, o qual está associado ao número 0 em cada uma delas. Lembramos ainda que, assim sendo, dois pontos quaisquer A e B do plano passam a ser identificados por suas coordenadas: $A = (x_A,y_A)$ e $B = (x_B,y_B)$. A seguir, vamos aprender como calcular a distância entre os pontos A e B a partir de x_A, y_A, x_B, y_B.

A situação mais geral possível, em que $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, é representada na figura a seguir. Neste caso, o segmento AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são segmentos com medidas $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a esse triângulo de hipotenusa AB, vemos que

$$\overline{AB}^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2,$$

logo,

$$d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \qquad (12.5)$$



Esta é a fórmula que permite o cálculo da distância entre dois pontos do plano a partir de suas coordenadas. Vejamos como aplicá-la em alguns exemplos simples.

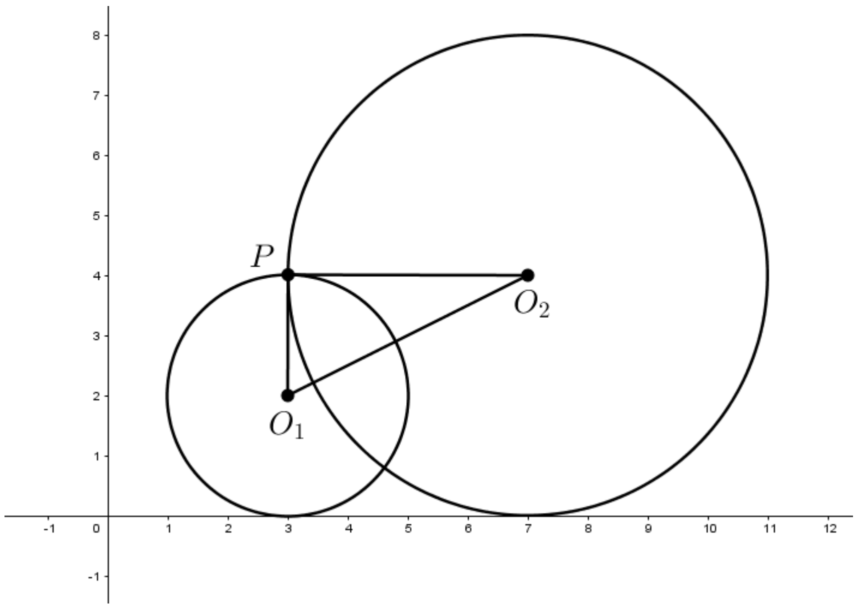
■ **Exemplo 12.8** Calcule a distância entre os pontos $A = (3,2)$ e $B = (-1,5)$.

Solução. Aplicando (12.5) diretamente, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-5)^2} \\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 12.9** Na figura a seguir são dadas as coordenadas dos seguintes pontos: $O_1 = (3,2)$, $O_2 = (7,4)$ e $P = (3,4)$.



(a) Encontre os raios dos dois círculos.
(b) Calcule a distância entre os centros O_1 e O_2.
(c) É possível concluir que o triângulo PO_1O_2 é retângulo? Por quê?

Solução. (a) Os raios r_1 e r_2 dos dois círculos são as distâncias $r_1 = \overline{PO_1}$ e $r_2 = \overline{PO_2}$. Podemos calcular essas distâncias usando a fórumla (12.5):

$$\overline{PO_1} = \sqrt{(3-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2,$$

$$\overline{PO_2} = \sqrt{(3-7)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4.$$

(b) A distância $\overline{O_1O_2}$ entre os centros também pode ser calculada com a mesma fórmula:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

(c) Os três lados do triângulo PO_1O_2 verificam a identidade do Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PO_1}^2 + \overline{PO_2}^2 = 4 + 16 = 20 = \overline{O_1O_2}^2.$$

Portanto, de acordo com o último parágravo da Observação 12.1.3, isso implica que o triângulo PO_1O_2 é retângulo em P. ■

No Exemplo 12.9, os pontos P e O_1 têm a mesma abscissa e os pontos P e O_2 têm a mesma ordenada. Nestes casos, a fórmula da distância pode ser escrita de um modo mais simples: se $A = (x_A,y_A)$ e $B = (x_B,y_B)$, temos duas situações:

(1) Quando $x_A = x_B$, ou seja, quando os pontos A e B têm a mesma abscissa, temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|.$$

(2) Quando $y_A = y_B$, ou seja, quando A e B têm a mesma ordenada, temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|.$$

Observe que, no caso (1) (resp. (2)), a expressão para $\overline{AB} = d(A,B)$ concorda com (12.3), quando vemos a reta vertical (resp. horizontal) passando por A e B como uma reta numérica.

12.4 – Exercícios

Nível 1

Exercício 12.2 Em um triângulo retângulo, os catetos medem 5cm e 12cm. Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

Exercício 12.3 Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 48m e a hipotenusa mede 50m. Calcule a medida do outro cateto.

Exercício 12.4 Nesta questão, considere que $\sqrt{3}$ vale, aproximadamente, 1,73. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 100cm e a hipotenusa desse mesmo triângulo mede 200cm. Encontre o valor aproximado da medida do outro cateto.

Exercício 12.5 Em cada item abaixo, calcule a distância entre os pares de pontos dados:

(a) $(1,1)$ e $(4,5)$.
(b) $(20,22)$ e $(8,17)$.
(c) $(1,2)$ e $(2,1)$.
(d) $(-1,7)$ e $(3,-2)$.
(e) $(-3,-4)$ e $(-1,-5)$.
(f) $(0,0)$ e $(1,10)$.

Exercício 12.6 Dados dois vértices consecutivos $A = (1,3)$ e $B = (5,4)$ de um quadrado, encontre sua área.

Exercício 12.7 Dados dois vértices opostos $A = (3,5)$ e $C = (1,-3)$ de um quadrado, calcule sua área.

Exercício 12.8 Os pontos $A = (-3,2)$ e $B = (1,6)$ são vértices de um triângulo equilátero. Encontre a área desse triângulo.

Exercício 12.9 O triângulo ABC, cujos vértices são $A = (1,1)$, $B = (2,3)$ e $C = (5,-1)$, é retângulo? Por quê?

Exercício 12.10 Qual dos pontos a seguir é o mais próximo da origem?

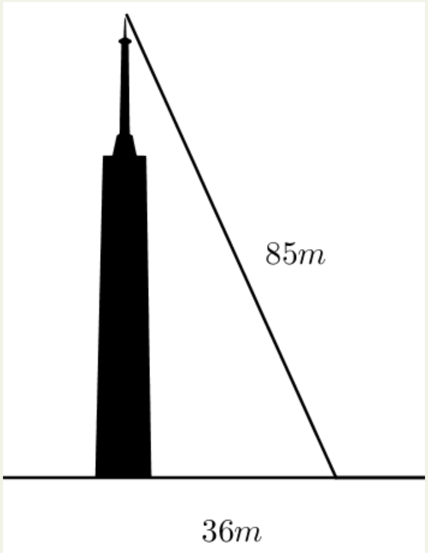
(a) $(1,9)$.
(b) $(2,8)$.
(c) $(3,7)$.
(d) $(4,6)$.
(e) $(5,5)$.

Exercício 12.11 Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela em que os pares de pontos dados estão mais próximos um do outro:

(a) $(1,1)$ e $(3,1)$.
(b) $(1,0)$ e $(0,3)$.
(c) $(9,7)$ e $(8,8)$.
(d) $(-2,3)$ e $(-1,1)$.
(e) $(4,5)$ e $(5,7)$.

Nível 2

Exercício 12.12 Um fio de 85 metros de comprimento é estendido do topo de uma torre vertical ao solo e é preso, a uma distância de 36 metros da base da torre, de modo que o fio permaneça totalmente esticado.



Calcule a altura da torre.

Exercício 12.13 Um pedreiro deseja fazer um "esquadro", ou seja, um ângulo reto. Ele tem uma régua que mede 1 metro. Com a ajuda dessa régua, ele corta duas ripas de madeira, uma medindo $60cm$ e e a outra medindo $80cm$. Então, ele junta as duas ripas e a régua, de modo a formar um triângulo. Explique como esse procedimento pode ajudar o pedreiro a construir um esquadro.

Exercício 12.14 A distância entre duas das paredes opostas de uma piscina retangular é exatamente 8 metros. Se a diagonal do piso dessa piscina mede 10 metros, assinale a alternativa que traz a distância entre o outro par de paredes opostas:

(a) 6 metros.
(b) 8 metros.
(c) 10 metros.
(d) 12 metros.
(e) 20 metros.

Exercício 12.15 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um dos catetos. Encontre a razão entre as medidas do maior cateto e do menor cateto, nessa ordem.

Exercício 12.16 Calcule os ângulos internos do triângulo ABC, onde $A = (5{,}0)$, $B = (0{,}1)$ e $C = (3{,}3)$.

Exercício 12.17 Em cada item a seguir, são dadas as coordenadas dos três vértices de um triângulo. Pede-se a classificação de cada triângulo quanto aos lados: se escaleno, isósceles ou equilátero:

(a) $A = (1{,}1)$, $B = (4, -1)$, $C = (5{,}2)$.
(b) $A = (3{,}3)$, $B = (-3, -3)$, $C = (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$.
(c) $A = (2{,}3)$, $B = (6{,}1)$, $C = (7{,}8)$.
(d) $A = (10{,}4)$, $B = (15, -5)$, $C = (26{,}7)$.
(e) $A = (0{,}0)$, $B = (1, -1)$, $C = (2{,}7)$.

Exercício 12.18 São dados os pontos $B = (2{,}2)$ e $C = (5, -2)$. Encontre um ponto A sobre o eixo das abscissas tal que o ângulo $\angle BAC$ seja reto.

Exercício 12.19 A distância entre o ponto P e a origem $O = (0{,}0)$ é igual a 2. A soma das coordenadas de P também é igual a 2. Calcule as possíveis coordenadas de P.

Exercício 12.20 — UFJF - 2016. Considere os pontos $A = (2{,}0)$, $B = (-1, \sqrt{3})$ e $C = (-1, -\sqrt{3})$ em um plano cartesiano. Calcule a medida do ângulo $\angle ABC$.

Nível 3

Exercício 12.21 Para separar animais maiores dos menores, um fazendeiro resolveu construir uma cerca dentro de seu curral retangular. Essa cerca deve ser construída na diagonal do retângulo, de modo a dividir o curral em dois triângulos congruentes. Sabe-se que o curral tem comprimento 60 metros e largura 45 metros. Se a nova cerca deve ter 5 fios de arame, quantos metros de arame serão necessários para sua construção?

(a) $210m$.
(b) $375m$.
(c) $525m$.
(d) $900m$.
(e) $1050m$.

Exercício 12.22 (UERJ- adaptada) Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

Às folhas tantas de um livro de Matemática,
um Quociente apaixonou-se um dia doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base: uma figura ímpar;
olhos rombóides, boca trapezóide,
corpo retangular, seios esferóides.

Fez da sua uma vida paralela à dela,
até que se encontraram no Infinito.
"Quem és tu?" – indagou ele em ânsia radical.
"Sou a soma dos quadrados dos catetos.
Mas pode me chamar de hipotenusa."
(Millôr Fernandes. Trinta Anos de Mim Mesmo.)

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dizer qual das frases a seguir?

(a) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa."
(b) "Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa."
(c) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa."
(d) "Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa."
(e) "Sou a diferença entre os quadrados dos catetos, ou hipotenusa."

Exercício 12.23 Se somarmos os quadrados da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo obteremos como resultado o número 450. Quanto é a medida da hipotenusa desse triângulo?

(a) 9.
(b) 12.
(c) 15.
(d) 18.
(e) 25.

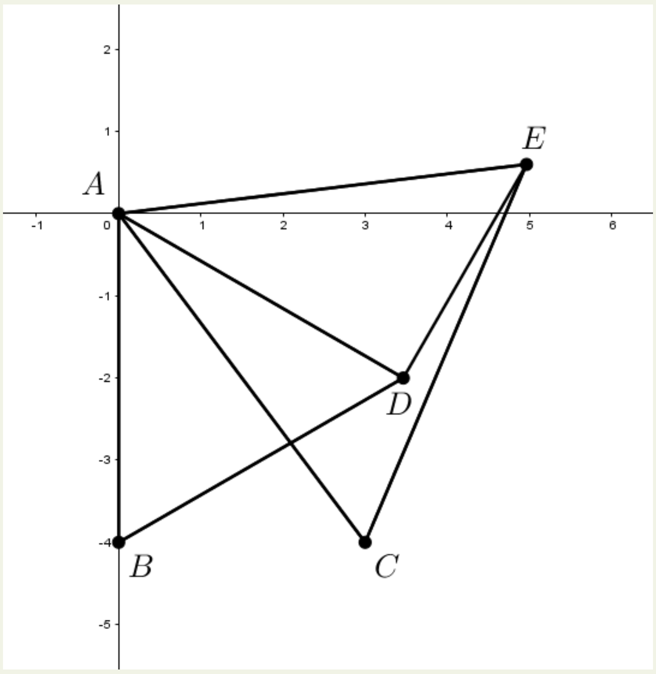
Exercício 12.24 Considere os números reais a e b, com $b < a$. Os catetos de um triângulo retângulo medem $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ e $\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

Exercício 12.25 São dados os pontos $A = (3,-6)$, $B = (-2,4)$ e $C = (1,-2)$. Verifique que $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$. O que podemos concluir sobre a posição relativa dos pontos A, B e C?

Exercício 12.26 — FGV - 2012. Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices consecutivos são, respectivamente, $(1,4)$, $(-2,6)$ e $(0,8)$. A soma das coordenadas do quarto vértice é:

(a) 8.
(b) 9.
(c) 10.
(d) 11.
(e) 12.

Exercício 12.27 Considere os pontos $A = (0{,}0)$, $B = (0, -4)$ e $C = (3, -4)$. Os pontos D, no quarto quadrante, e E, no primeiro quadrante, são tais que os triângulos ABD e ACE são equiláteros.



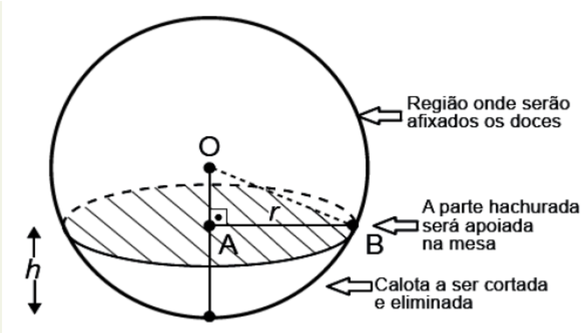
(a) Encontre a distância entre D e E.
(b) O triângulo ADE é retângulo? Justifique sua resposta.

Nível 4

Exercício 12.28 — UFRN. Um objeto desloca-se $10m$ no sentido Oeste-Leste sobre um plano, a partir de uma posição inicial. Em seguida, percorre mais $20m$ no sentido Sul-Norte, $30m$ no sentido Leste-Oeste, $40m$ no sentido Norte-Sul, $50m$ no sentido Oeste-Leste e $50m$ no sentido Sul-Norte. A distância entre a posição inicial e a posição final é:

(a) $60m$.
(b) $40m$.
(c) $50m$.
(d) $30m$.
(e) $20m$.

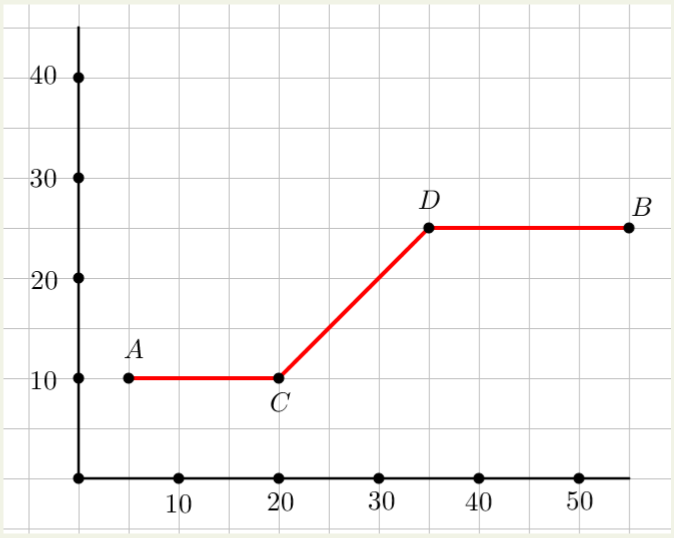
Exercício 12.29 — ENEM - 2017. Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo $10cm$, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos $3cm$. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetros, igual a:

(a) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$.
(b) $10 - \sqrt{91}$.
(c) 1.
(d) 4.
(e) 5.

Exercício 12.30 — IFSP-2015 adaptado. O transporte alternativo é uma maneira de se locomover usando um meio diferente dos mais tradicionais. A bicicleta é um exemplo disso. Em alguns lugares, como no interior do Brasil e em países como a Índia e China, ela é usada porque é mais barata. Outras pessoas escolhem andar de bicicleta por uma questão ideológica, porque elas não agridem o meio ambiente e não causam tantos transtornos quanto os carros. Usando uma bicicleta, uma pessoa sai do ponto A e se dirige ao ponto B. O percurso, dado em km, representado pelos segmentos AC, CD e DB está esboçado no gráfico abaixo.

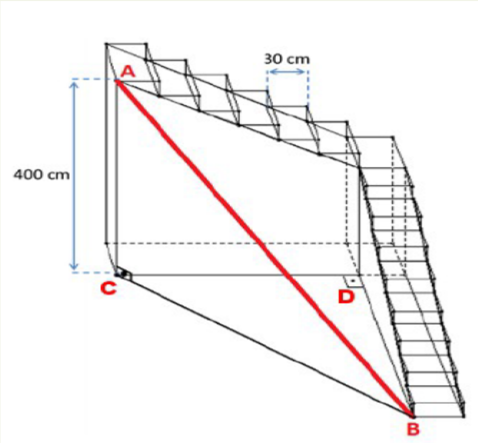


Considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, assinale a alternativa que traz a melhor aproximação para a distância percorrida pela pessoa do ponto A ao ponto B.

(a) $56km$.
(b) $21km$.

(c) $20km$.
(d) $15km$.
(e) $10km$.

Exercício 12.31 — IFSC - 2015. Para acessar o topo de uma plataforma de saltos a 4m de altura, um atleta deve subir uma escadaria que possui 8 degraus no primeiro lance e 6 degraus no segundo lance, conforme mostra a figura a seguir. Sabendo que cada degrau possui 30cm de profundidade, é correto afirmar que o comprimento da haste metálica AB utilizada para dar sustentação à plataforma é igual a:

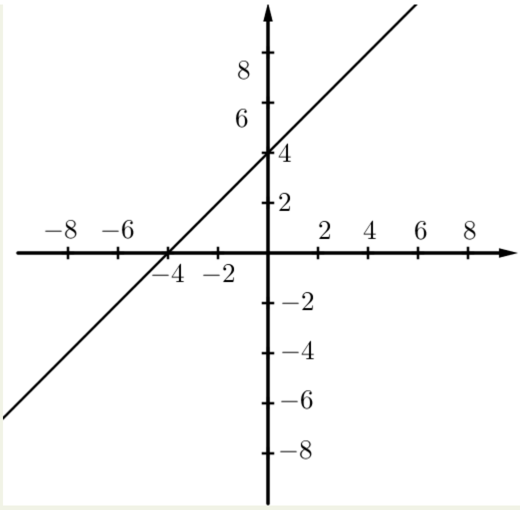


(a) 3m.
(b) 4m.
(c) 5m.
(d) 2m.
(e) 1m.

Exercício 12.32 — Unioeste - 2012. Dado o ponto $A = (-2, 4)$, assinale a opção que traz as coordenadas dos pontos P e Q, respectivamente situados sobre as retas $y = 3x$ e $y = -x$ de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ:

(a) $P = (1, 3)$ e $Q = (-5, 5)$.
(b) $P = (2, 6)$ e $Q = (4, -4)$.
(c) $P = (0, 0)$ e $Q = (-5, 5)$.
(d) $P = (1, 3)$ e $Q = (4, -4)$.
(e) $P = (2, 6)$ e $Q = (0, 0)$.

Exercício 12.33 Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



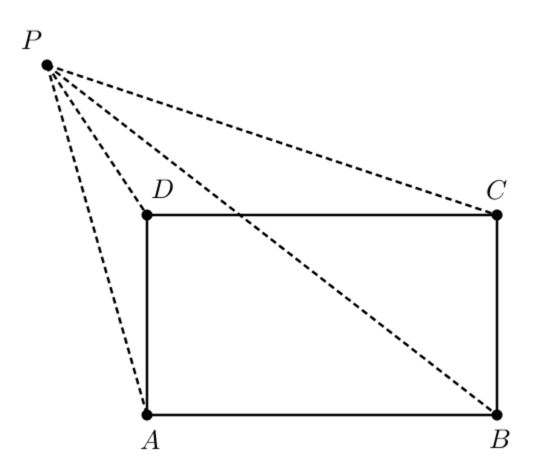
A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que $5km$. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

(a) $(-5{,}0)$.
(b) $(-3{,}1)$.
(c) $(-2{,}1)$.
(d) $(0, 4)$.
(e) $(2, 6)$.

Exercício 12.34 Os pontos $A = (1{,}2)$ e $B = (5{,}5)$ são vértices consecutivos de um quadrado. Se um dos outros dois vértices é $C = (a{,}b)$, calcule os possíveis valores de $8a + 6b$.

Exercício 12.35 Seja $ABCD$ um retângulo e P um ponto no mesmo plano do retângulo, como na figura a seguir. Mostre que

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2.$$



(Sugestão: escolha o sistema de coordenadas de forma que $A = (0{,}0)$, $B = (a{,}0)$, $D = (0{,}b)$. Em seguida, encontre as coordenadas de C em termos de a e b, escreva $P = (x{,}y)$ e calcule $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2$ e $= \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$.)