Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:
Fernando Pimentel
Annelise Maymone
Tadeu Celedônio

Revisores:
Antonio Caminha M. Neto
Fabrício S. Benevides

Colaboradores:
Eq. Cientista Chefe

Semelhança de Figuras Planas

A Relação de Semelhança
Proporcionalidade em Geometria
Teorema de Tales e Aplicações

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S471 Semelhança de figuras planas [recurso eletrônico] / Fernando Antônio Amaral Pimentel...[et.al.].- Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN 978-65-00-43577-1 (E-book)

1. Relação de semelhança. 2. Relação de congruência. 3. Escalas de mapas. I. Pimentel, Fernando Antônio Amaral. II. Maymone, Annelise. III. Celedônio, Francisco Tadeu Valente. IV. Muniz Neto, Antonio Caminha. V. Benevides, Fabricio Siqueira. VI. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). VII. Título.

CDD: 510.07

7 Semelhança de Figuras Planas

7.1 – A Relação de Semelhança

Figura 7.1: Apenas as formas de mesma cor são semelhantes! (Figura de Ylebru).

Quando dizemos que dois objetos são *semelhantes*, indicamos que esses objetos se parecem por compartilhar características importantes e podem até ser confundidos. Assim, afirmamos que duas figuras se parecem a ponto de serem semelhantes quando têm a mesma *forma*. É fato que todos compartilhamos uma noção de forma que nos permite concordar na maior parte das vezes sobre quando duas figuras são semelhantes nesse sentido. Esse é o caso, por exemplo, em relação a um retrato ou gravura e uma ampliação sua, como vemos abaixo:

Figura 7.2: Uma imagem e sua ampliação são semelhantes (Foto de Jan Kronies, Montanhas Rochosas no outono, disponível em https://unsplash.com).

Embora essa definição de semelhança seja satisfatória nas situações do cotidiano, só podemos trabalhar com a noção de semelhança em geometria se for possível caracterizá-la a partir de *propriedades geométricas*, que são aquelas que podem ser descritas em termos dos pontos e retas do plano por meio de relações envolvendo medidas de comprimentos e ângulos.

Por causa disso, a definição de semelhança em Geometria não emprega a noção de forma. Em vez disso, estabelece que duas figuras são *semelhantes*

Há correspondência biunívoca entre dois conjuntos quando cada elemento de um dos conjuntos corresponde a um único elemento do outro conjunto (assim, a correspondência entre cada inteiro e seu dobro é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos dos números inteiros e dos números inteiros pares).

quando existe um número positivo $r > 0$ e uma *correspondência biunívoca* entre elas, tais que quando um par de pontos na primeira figura corresponde a um par de pontos na segunda figura, então

$$\frac{\text{Distância entre o par de pontos na segunda figura}}{\text{Distância entre o par de pontos na primeira figura}} = r$$

A constante r é chamada de *razão de semelhança* ou *constante de proporcionalidade* entre as figuras. Quando a razão de semelhança entre duas figuras planas é igual a 1, dizemos que as figuras são *congruentes*.

A definição de semelhança que apresentamos acima parece excessivamente complicada por empregar terminologia técnica. Outro ponto negativo dessa definição é que é difícil enxergar nela a ideia concreta de que duas figuras são semelhantes quando têm a mesma forma. A seguir, vamos procurar esclarecer essa definição geral de semelhança por meio de exemplos, que também sirvam para mostrar que ela é, de fato, a maneira precisa de traduzir a noção intuitiva de que duas figuras têm a mesma forma.

Exemplo 1. Escalas de Mapas

O mapa de uma cidade como Fortaleza apresenta uma relação de semelhança com a cidade que representa.

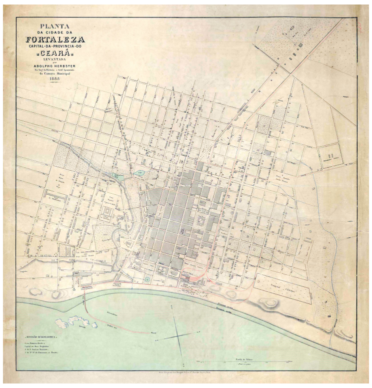


Figura 7.3: Mapa de Fortaleza (Adolfo Herbster, 1888).

A razão de semelhança entre um mapa e a região que ele representa é denominada a escala *do mapa. Assim, quando a distância entre dois pontos em um mapa na escala de 1:50.000 é igual a* 2 cm*, a distância real entre os locais representados pelos pontos do mapa é* 50.000 *vezes maior, ou seja* 50.000×2 *centímetros, que equivalem a* 1 km*.*

Exemplo 2. Critérios Gerais de Semelhança entre Figuras Planas

A definição de semelhança e o exemplo anterior deixam claro que duas figuras são semelhantes quando uma delas resulta de uma ampliação ou redução da outra. Assim, dois círculos quaisquer são semelhantes, conforme ilustrado na Figura 7.4.

Ao contrário do que ocorre com círculos, dois retângulos nem sempre são semelhantes. De fato, a Figura 7.5 traz dois retângulos que não são semelhantes, pois enquanto um deles é um quadrado, o outro não o é. Isto porque é fácil

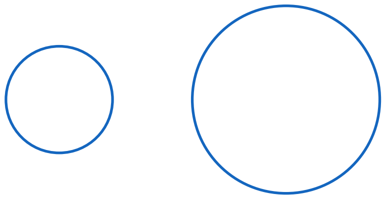


Figura 7.4: Dois círculos são sempre semelhantes.

ver que reduções e ampliações de quadrados são sempre quadrados, logo, um quadrado não pode ser semelhante a um retângulo cujos lados adjacentes têm comprimentos diferentes!

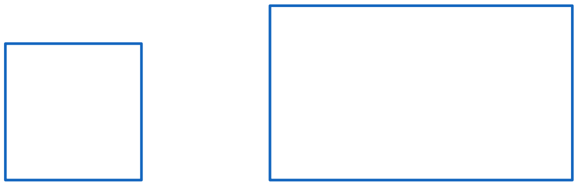


Figura 7.5: Dois retângulos podem não ser semelhantes.

Observe que, ao ampliarmos ou reduzirmos uma figura, distâncias são ampliadas ou reduzidas pelo fator de ampliação ou redução (o número que chamamos de razão de semelhança*). Contudo,* os ângulos entre segmentos são preservados*. Por conta disso, quadriláteros semelhantes têm ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais (ou seja, estão entre si em uma mesma proporção).*

Em outras palavras, se os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes pela correspondência natural (a que faz corresponder A a A', B a B', C a C' e D a D'), então devemos ter

$$i.\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}';$$

$$ii.\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}.$$

Também, pode ser mostrado que a validade das condições i. e ii. acima garante que os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são, de fato, semelhantes. Por conta disso, dizemos que a validade das condições i. e ii. se constitui num critério de semelhança *para os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$.*

Vamos aplicar o critério de semelhança acima para resolver o problema proposto no próximo exemplo.

Exemplo 3. Semelhança e Proporções Numéricas

Esse exemplo apresenta um problema típico de semelhança de polígonos cuja solução faz uso das relações entre os comprimentos dos lados dessas figuras planas. Temos, então, na Figura ??, dois trapézios semelhantes. Qual é o valor de x?

A razão de semelhança entre os trapézios é $r = \overline{A'B'}/\overline{AB} = 4/3{,}2$. Consequentemente,

$$\overline{C'D'} = r \times \overline{CD} = \frac{4 \times 6}{3{,}2}\,\text{cm} = 7{,}5\,\text{cm}.$$

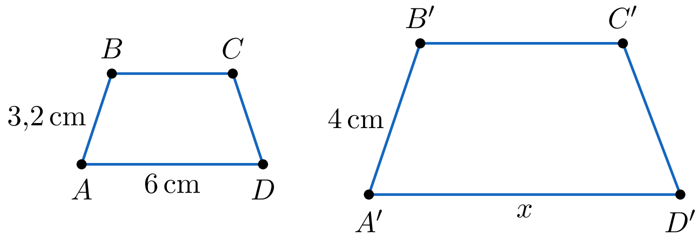


Figura 7.6: Trapézios semelhantes.

Decidir com rigor se duas figuras são semelhantes pode ser muito complicado, pois para isso deve-se calcular as proporções entre as distâncias de todos os pares de pontos correspondentes nas duas figuras. Na prática, a partir da definição de semelhança, pode-se chegar a *procedimentos mínimos* para verificar se duas figuras planas são semelhantes, os quais não envolvem uma aplicação direta da definição.

Assim é que, na discussão que precede o Exemplo 3, afirma-se que, quando dois quadriláteros são semelhantes, eles têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais; afirmou-se também que, se dois quadriláteros têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais, eles são semelhantes.

De modo geral, para que dois polígonos sejam semelhantes, basta que satisfaçam condições análogas àquelas (ter lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais). Quando os dois polígonos são triângulos, pode-se descobrir quando são semelhantes verificando se satisfazem condições ainda menos restritivas, as quais são usualmente denominadas *casos de semelhança de triângulos*. Por esses casos, dois triângulos são semelhantes quando:

1. têm dois ângulos correspondentes iguais (caso ângulo-ângulo ou AA);
2. têm dois pares de lados correspondentes proporcionais, sendo iguais entre si os ângulos formados pelos pares de lados em cada triângulo (caso lado-ângulo-lado ou LAL);
3. têm todos os pares de lados correspondentes proporcionais (caso lado-lado-lado ou LLL).

Observe que, como dissemos, é possível checar que dois triângulos são semelhantes verificando, para os mesmos, a validade de condições ainda menos restritivas do que as que valem para quaisquer polígonos, que são as de terem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais. Isso acontece porque triângulos são *rígidos*, ou seja, os comprimentos dos lados de um triângulo o determinam completamente, ao contrário do que ocorre com polígonos de quatro ou mais lados. Por exemplo, pense em um quadrado formado por quatro barras metálicas que se articulam em pinos localizados nos vértices; empurrando dois vértices opostos do quadrado na direção um do outro, ainda teremos um quadrilátero com quatro lados iguais (um losango), mas seus ângulos não serão mais todos iguais a 90°.

Exemplo 4. Relações de Semelhança em um Triângulo Retângulo

A figura 7.7 traz um triângulo retângulo com ângulo reto $\angle BAC$ (isto é, igual a 90°) no ponto A. O ponto D é o pé da perpendicular baixada de A ao *segmento AB, ou seja, o segmento AD faz um ângulo de $90°$ com o segmento BC. Calcule o comprimento do segmento AD.*

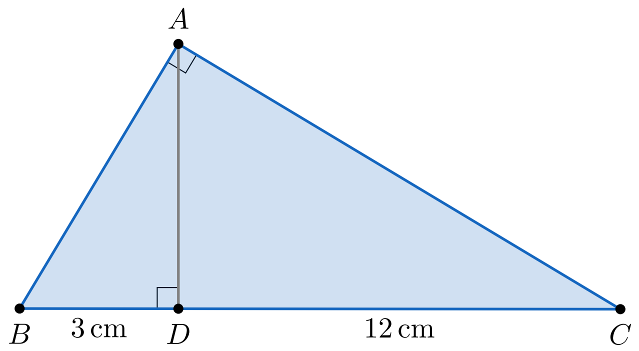


Figura 7.7

Nas condições acima, mostraremos no Exercício Resolvido 7.3, com a ajuda do caso de semelhança AA, que os triângulos retângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes entre si (com as correspondências naturais de vértices, isto é, $A \leftrightarrow D \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow B \leftrightarrow A$ e $C \leftrightarrow A \leftrightarrow C$). Vamos calcular o valor do comprimento do segmento AD a partir da relação de semelhança entre os triângulos ABD e CAD. Por essa relação, temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}.$$

Assim, $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$. Pela Figura 7.7, $\overline{BD} = 3\,\text{cm}$ e $\overline{CD} = 12\,\text{cm}$. Consequentemente, $\overline{AD} = 6\,\text{cm}$.

Obs No exemplo acima, usamos o fato de que os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes. A partir desse resultado, calcularemos, no Exercício Resolvido 7.4, o comprimento de todos os lados dos triângulos da Figura 7.7.

Exemplo 5. Teorema da Bissetriz Interna e Proporcionalidade

Na Figura 7.8, o segmento AD é a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. São conhecidos os comprimentos dos lados AB e AC e do segmento BD, como indicado na figura. Qual é o valor do comprimento x do segmento CD?

Nas notações da Figura 7.8, traçamos o círculo de centro C e raio x e, em seguida, prolongamos a segmento AD até ele encontrar esse círculo novamente, no ponto E. No Exercício Resolvido 7.6, mostraremos que os triângulos ABD e ACE são semelhantes (com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow E$). Assim,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

ou, como $\overline{CE} = \overline{CD}$,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}. \tag{7.1}$$

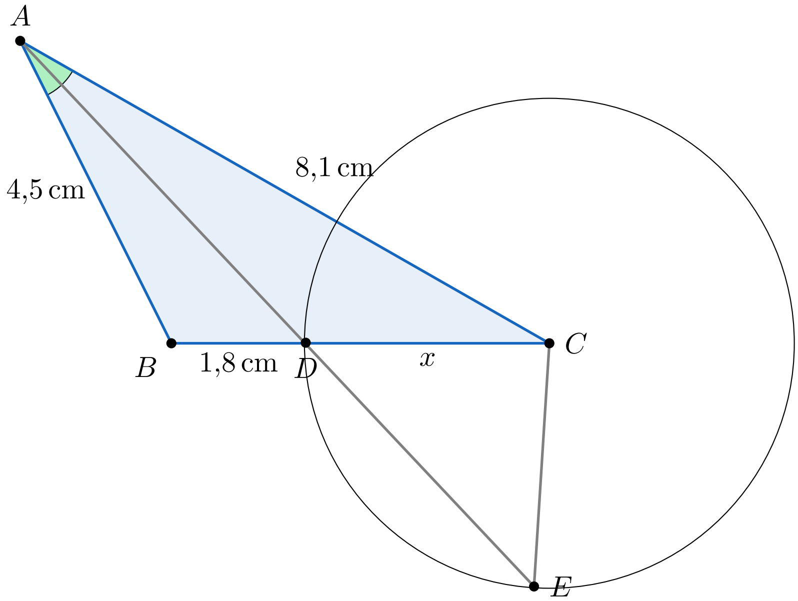


Figura 7.8: Triângulo dividido por uma bissetriz interna.

Substituindo $\overline{CD} = x$, obtemos (em centímetros):

$$x = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{8{,}1 \times 1{,}8}{4{,}5} = 3{,}24.$$

Obs

Nas notações da Figura 7.8, a solução acima deixa claro que a proporção (7.1) (entre as medidas lados de um triângulo e as medidas dos segmentos em que o terceiro lado é dividido pela bissetriz interna relativa a ele) é válida para todo triângulo ABC. Esse resultado de Geometria que pode ser guardado por você e utilizado livremente daqui em diante. Ele é conhecido como o *Teorema da Bissetriz Interna*.

7.2 – O Teorema de Tales

Tales de Mileto, que viveu entre 624 e 546 a.C., é tido como o primeiro filósofo do Ocidente. Ele também foi pioneiro na aplicação do raciocínio dedutivo para obter e provar resultados de Geometria na Grécia Antiga. O teorema discutido no exemplo abaixo recebe seu nome.

Exemplo 6. O Teorema de Tales

A Figura 7.9 mostra um par de retas (as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$) cortadas por três retas paralelas (as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$). Nessas condições, o Teorema de Tales diz que são válidas as igualdades abaixo, envolvendo relações de proporcionalidade entre os segmentos determinados pelos pontos em que as retas paralelas intersectam as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}. \tag{7.2}$$

Abaixo, explicamos como mostrar o Teorema de Tales aplicando os casos de semelhança de triângulos.

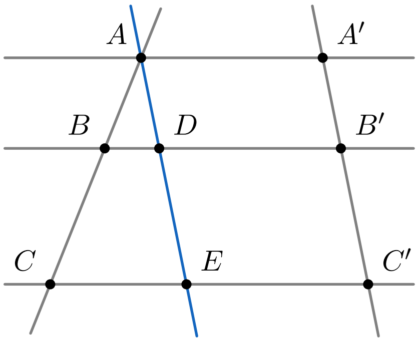


Figura 7.9: Duas retas cortadas por três retas paralelas.

7.3 – Leitura Complementar (opcional)

Obtendo Teorema de Tales a partir de semelhança de triângulos

A Geometria só se tornou uma ciência quando seus resultados puderam ser estudados sistematicamente. Segundo tradições muita antigas, foi Tales de Mileto quem sistematizou esse estudo ao aplicar o raciocínio lógico e o método dedutivo, que já eram empregados nos debates políticos do seu tempo, para obter resultados complexos a partir de resultados previamente conhecidos na Matemática e na Filosofia, criando, com isso, essas ciências.

Nos passos de Tales, vamos mostrar como obter as igualdades da equação (7.2) usando os casos de semelhança de triângulos. Para fazer isso, traçamos pelo ponto A *uma reta auxiliar*, paralela à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ (a reta em azul na Figura 7.9), que determina nas retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ os pontos D e E, respectivamente, como vemos na Figura 7.9.

Um quadrilátero de lados opostos paralelos é chamado de *paralelogramo*. Os quadriláteros $ADB'A'$, $AEC'A'$ e $DEC'B'$ são paralelogramos, porque têm lados opostos contidos em retas paralelas, logo, são eles mesmos paralelos. É um fato conhecido que os lados opostos de um paralelogramo têm comprimentos iguais. Assim, os segmentos AD e $A'B'$ têm a mesma medida, porque são lados opostos do paralelogramo $ADB'A'$. Observe, agora, que os triângulos ABD e ACE são semelhantes pelo caso AA de semelhança de triângulos. De fato, $\angle BAD$ e $\angle CAE$ são nomes diferentes de um mesmo ângulo. Além disso, os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACE$ são iguais, por serem ângulos correspondentes formados por uma mesma reta transversal a duas retas paralelas.

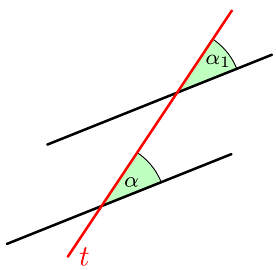


Figura 7.10: Uma transversal t a duas retas paralelas forma com essas retas ângulos correspondentes α e α_1 de mesma medida.

Em consequência dessas afirmações, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}, \tag{7.3}$$

em que a primeira igualdade decorre da relação de semelhança entre os triângulos ABD e ACE enquanto a segunda igualdade vem de serem iguais os lados opostos dos paralelogramos $ADB'A'$ e $AEC'A'$.

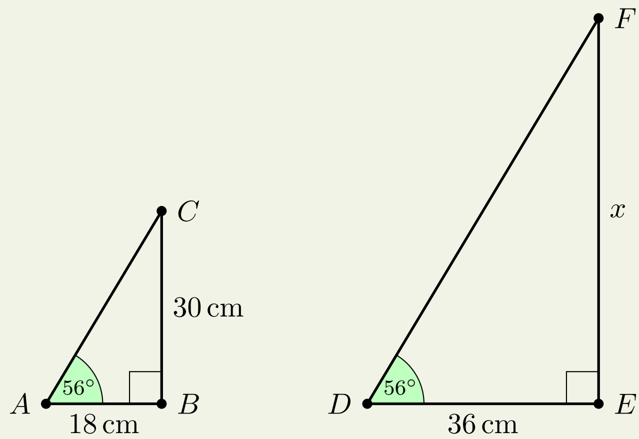
Aplicando, nas igualdades da equação (7.3), as propriedades de frações estudadas no módulo 3, levamos o numerador da última fração para o denominador da primeira fração, e o denominador da primeira fração para o numerador da última, concluindo que $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{AC}/\overline{A'C'}$.

Para mostrar que $\overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{AC}/\overline{A'C'}$, podemos adaptar o argumento acima traçando uma reta paralela a $\overleftrightarrow{A'C'}$ passando pelo ponto C. Outra maneira de verificar essa igualdade é aplicar os resultados de manipulação de frações estudados no módulo 3. Assim, visto que $(\overline{AB}/\overline{A'B'}) = (\overline{AC}/\overline{A'C'})$, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{\overline{A'C'} - \overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

7.4 – Exercícios Resolvidos

Exercício 7.1 Qual o valor de x no triângulo DEF:



(a) 36 cm.
(b) 48 cm.
(c) 50 cm.
(d) 70 cm.
(e) 72 cm.

Solução. Os triângulos ABC e DEF da Figura são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, porque têm dois ângulos ordenadamente congruentes. De fato, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem ambos 56° e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos. Agora, observe que a razão de semelhança entre os triângulos DEF e ABC é 2, pois o comprimento do lado DE no triângulo DEF (isto é, 36 cm) é o dobro da medida $\overline{AB} = 18\,\text{cm}$ do lado correspondente no outro triângulo. Assim,

$\overline{FE}/\overline{BC} = 2$. Substituindo nessa última igualdade os valores das medidas dos segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{BC}$, obtemos $x = 60\,\text{cm}$. ■

Exercício 7.2 O triângulo ABC é cortado por uma reta $\overleftrightarrow{MN}$, paralela ao lado BC. Sabendo que M e N são pontos em AB e AC, respectivamente, que $(\overline{AM}/\overline{MB}) = 3/2$ e $\overline{AN} = 27$, calcule o valor de $\overline{NC}$.

Solução. Pelo Teorema de Tales, discutido no Exemplo 6,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}.$$

Assim,

$$\frac{27}{\overline{NC}} = \frac{3}{2},$$

logo, $\overline{NC} = 18$.

Exercício 7.3 Justifique a afirmação: os triângulos ABC, DBA e DAC da Figura 7.7 são semelhantes entre si.

Solução. Iniciamos destacando o fato que cada um desses triângulos tem um ângulo reto, pois os ângulos $\angle BAC$, $\angle BDA$ e $\angle ADC$ medem todos $90°$. Agora, afirmamos que os ângulos $\angle ABC$, $\angle DBA$ e $\angle DAC$ nos triângulos ABC, DBA e DAC, respectivamente, são congruentes, ou seja, têm uma mesma medida. Para mostrar isso, começamos observando que $\angle ABC$ e $\angle DBA$ são nomes diferentes para um mesmo ângulo. Em seguida, como a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a $180°$, temos

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°;$$
$$\measuredangle ADC + \measuredangle DAC + \measuredangle DCA = 180°.$$

(Veja que a primeira equação acima afirma que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a $180°$, enquanto a segunda equação diz o mesmo sobre os ângulos internos do triângulo DAC.) Como vimos acima, $\measuredangle BAC = \measuredangle ADC = 90°$. Além disso, $\angle ACB$ e $\angle DCA$ são nomes diferentes de um mesmo ângulo. Portanto,

$$\measuredangle ABC = 180° - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ADC - \measuredangle DCA = \measuredangle DAC.$$

Logo, os ângulos $\angle ABC$, $\angle DBA$ e $\angle DAC$ têm uma mesma medida. Consequentemente, quaisquer dois dos triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes com mesmas medidas.

Exercício 7.4 Calcule as medidas dos lados de todos os triângulos da Figura 7.7.

Solução. No Exemplo 4 calculamos o valor de $\overline{AD} = 6\,\text{cm}$. Usando as relações obtidas a partir da semelhança entre os triângulos ABC e DBA, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Assim, $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC} = 3 \times 15 = 45$, de sorte que $\overline{AB} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Da mesma maneira, mostramos que $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC} = 12 \times 15$, logo, $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$.

Solução alternativa. Como o valor de $\overline{AD}$ é conhecido e os triângulos da Figura 7.7 são todos retângulos (ou seja, um dos ângulos internos de cada um deles mede 90°), uma solução alternativa desse problema emprega duas vezes o *Teorema de Pitágoras*, o qual afirma que o quadrado da hipotenusa (o maior lado, oposto ao ângulo reto) de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados de seus catetos (os outros dois lados do triângulo retângulo). Assim,

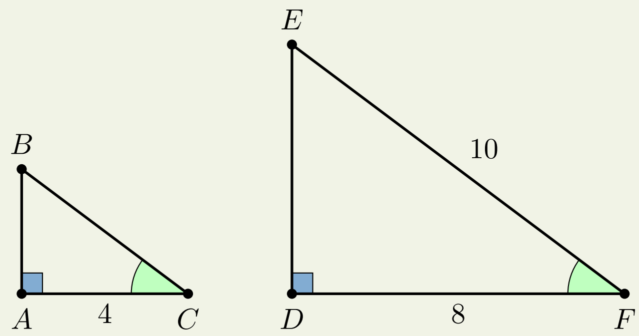
$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 36 + 9 = 45; \tag{7.4}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 36 + 144 = 180. \tag{7.5}$$

Assim, $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ e $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$.

Obs No Exercício 7.4 pode-se entrever a relação do Teorema de Pitágoras com as aplicações dos casos de semelhança de triângulos ao estudo do triângulo retângulo. De fato, o Teorema de Pitágoras é consequência desses casos de semelhança, como veremos oportunamente, e problemas envolvendo semelhança de triângulos muitas vezes fazem uso do Teorema de Pitágoras em sua solução, como é o caso do próximo exercício.

Exercício 7.5 Qual é a medida do segmento AB no triângulo menor da figura a seguir, dado que os triângulos são semelhantes?



(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.

Solução. Aplicando o Teorema de Pitágoras (veja a solução alternativa do Exercício 7.4) ao triângulo da direita, obtemos que $\overline{DE}^2 + 64 = 100$, ou seja, $\overline{DE}^2 = 100 - 64 = 36$. Assim, $\overline{DE} = 6$.

Note, agora, que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes iguais (os ângulos retos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ e os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$, como vemos na figura acima). Então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Assim, $\overline{AB} = \overline{DE}/2 = 3$. ■

Exercício 7.6 Os triângulos ACE e ABD na Figura 7.8 são semelhantes? Justifique sua resposta.

Solução. Os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ têm medida igual à metade da medida do ângulo $\angle BAC$, logo, são iguais.

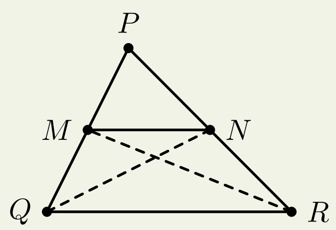
Também temos que o triângulo DCE é isósceles, ou seja, tem dois lados iguais. Observe que o triângulo DCE é congruente, pelo caso LAL, ao mesmo triângulo ECD – tomando os vértices em outra ordem – pois os lados CD e CE têm o mesmo comprimento e, obviamente, DCE e $\angle ECD$ são o mesmo ângulo. Assim, $\measuredangle CDE = \measuredangle CED$, pois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais.

Ainda na Figura 7.8, vemos que $\measuredangle CDE = \measuredangle ADB$, pois são as medidas de ângulos opostos pelo vértice. Consequentemente, $\measuredangle CED = \measuredangle ADB$.

A discussão acima concluiu que os triângulos ACE e ABD têm dois pares de ângulos correspondentes iguais (os pares de ângulos $\angle BAD$, $\angle CAD$ e $\angle ADB$, $\angle AEC$). Portanto, tais triângulos são semelhantes. ∎

Obs O segundo parágrafo da solução do exercício anterior mostra um fato importante, que deve ser incorporado aos resultados de Geometria que você conhece: em um triângulo isósceles (isto é, com dois lados iguais), os ângulos entre a base (isto é, o terceiro lado, que não os dois sabidamente iguais) e os lados iguais têm medidas iguais. Esse fato pode ser utilizado livremente, daqui em diante.

Exercício 7.7 Na figura abaixo, M e N são pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. Sabendo que QR mede 18 cm, calcule a medida do segmento MN.



Solução. Primeiramente, uma vez que M e N são pontos médios dos lados PQ e PR, respectivamente, temos

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{PN}}{\overline{PR}} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{PR}}.$$

Agora, note que $\angle MPN$ e $\angle QPR$ são dois nomes para um mesmo ângulo. Portanto, os triângulos MPN e QPR são semelhantes (com a correspondência natural de vértices) pelo caso LAL, com razão de semelhança $1/2$. Segue que

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}$$

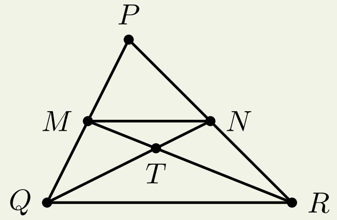
e, como $\overline{QR} = 18\,\text{cm}$, temos $\overline{MN} = 9\,\text{cm}$. ∎

Obs A solução do exercício anterior mostrou que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo tem medida igual à metade da medida do terceiro lado do triângulo. De fato, esse segmento também é paralelo ao terceiro lado; nas notações da figura acima, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{QR}$. Isso porque a semelhança entre os triângulos PMN e PQR garante que $\measuredangle PMN = \measuredangle PQR$. Então, as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, sendo cortadas pela reta $\overleftrightarrow{PQ}$ segundo ângulos correspondentes iguais, devem ser paralelas (como na Figura 7.10 da Seção 7.3).

O fato de que, em todo triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados tem medida igual à metade do terceiro lado e é a ele paralelo é mais um resultado de Geometria que deve ser incorporado a seu repertório de teoremas. Ele é conhecido como o *Teorema da Base Média*.

Exercício 7.8 (UFF) Na figura abaixo, M e N são pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. Sabendo que QR mede 18,0 cm e que a altura do triângulo PQR relativa a este lado mede 12,0 cm, a altura do triângulo MNT relativa ao lado MN mede:

(a) 4,0 cm.
(b) 3,5 cm.
(c) 3,0 cm.
(d) 2,0 cm.
(e) 1,5 cm.



Solução. Na solução do exercício anterior, vimos que os triângulos PMN e PQR são semelhantes, com razão de semelhança $1/2$. Também, na observação anterior vimos que as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ são paralelas.

Agora, note que os ângulos $\angle MTN$ e $\angle RTQ$ são opostos pelo vértice, logo, têm uma mesma medida. Por outro lado, os ângulos $\angle NMR$ e $\angle MRT$ são iguais, pois são ângulos *alternos internos* formados pelas retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ com a transversal $\overleftrightarrow{MR}$ (veja a Figura 7.11).

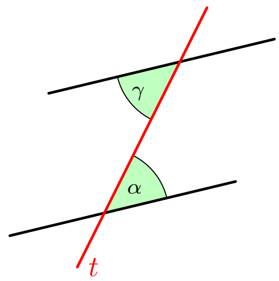


Figura 7.11: Uma reta transversal t corta duas retas paralelas determinando os ângulos α e γ. Esses ângulos são *alternos* porque estão em diferentes lados da reta transversal e são *internos* porque estão entre as retas paralelas. Sabe-se que ângulos alternos internos (assim como os alternos externos) são congruente.

Assim, os triângulos MTN e RTQ também são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes iguais. A razão de semelhança entre eles é

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}.$$

Agora, é fato que, em dois triângulos semelhantes, *a razão entre os comprimentos das alturas baixadas a partir de vértices correspondentes é igual à razão de semelhança*. (Essa afirmação requer uma justificativa, mas pode ser compreendida por meio das considerações a seguir: Inicialmente, lembramos que quando duas figuras são semelhantes, a distância entre pontos correspondentes nas figuras são proporcionais à razão de semelhança. Depois, observamos que expansões ou contrações, que transformam um triângulo em um triângulo semelhante, levam a altura do primeiro triângulo na altura do segundo, pois expansões ou contrações são apenas mudanças de escala – vide Exemplo 1). Assim, o comprimento H da altura do triângulo PMN relativa ao lado MN é a metade da altura do triângulo PQR relativa ao lado QR. Como essa segunda altura mede 12,0cm, temos que $H = 6\text{cm}$.

A distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ então é igual a 6cm também. Contudo, veja que essa distância entre as paralelas é igual à soma das alturas dos triângulos MTN e RTQ, baixadas a partir do vértice comum T. Por outro lado, se h é a altura do triângulo MTN, então a altura do triângulo RTQ é igual a $2h$ (aqui, estamos utilizando novamente a discussão do parágrafo anterior: a razão de semelhança entre essas duas alturas é igual à razão de semelhança entre os triângulos, que é $1/2$, como vimos acima). Logo, $h+2h = 6$, ou seja, $h = 2\text{cm}$.

A alternativa correta é a letra d). ■

7.5 – Exercícios Propostos

Nível 1

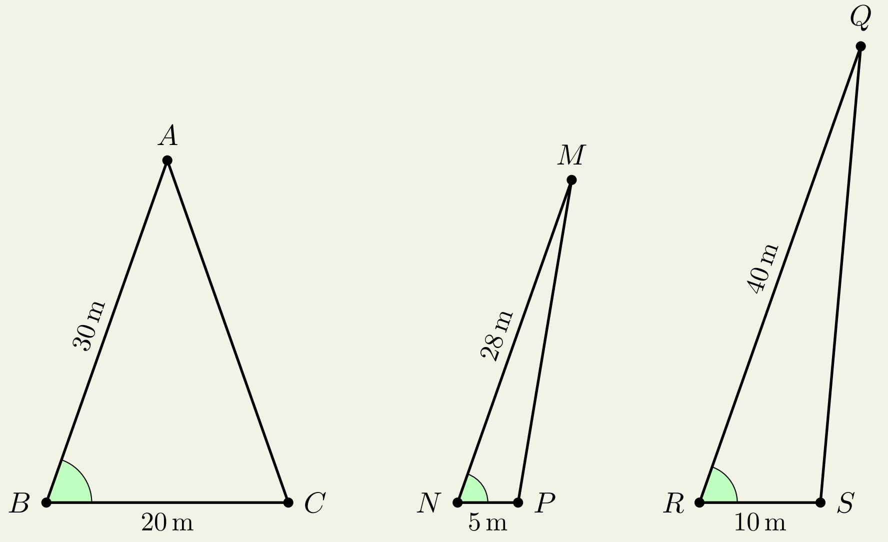
Exercício 7.9 Dois retângulos são semelhantes. O primeiro deles mede 10 centímetros de largura por 8 centímetros de comprimento e o segundo mede 20 centímetros de largura por 16 centímetros de comprimento. Qual é a razão de semelhança entre a área do polígono maior e a área do polígono menor?

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.

Exercício 7.10 (Cesgranrio) Certa noite, uma moça, de 1,50 m de altura, estava a dois metros de distância de um poste de luz de 4 m de altura. O comprimento da sombra da moça no chão era de:

(a) 0,75 m
(b) 1,20 m
(c) 1,80 m
(d) 2,40 m
(e) 3,20 m

Exercício 7.11 Nos triângulos da figura, os ângulos marcados têm medidas iguais. Assinale a alternativa correta:



(a) Os triângulos ABC e MNP são semelhantes.
(b) Os triângulos ABC e QRS são semelhantes.
(c) Os triângulos MNP e QRS são semelhantes.
(d) Os triângulos ABC, MNP e QRS são semelhantes.
(e) Nenhum triângulo é semelhante a qualquer outro.

Exercício 7.12 Com o objetivo de descobrir a altura de uma construção, Pedro mediu a sombra do edifício e, logo após, mediu sua própria sombra. A sombra da construção tinha 7 metros e a de Pedro, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura dessa construção?

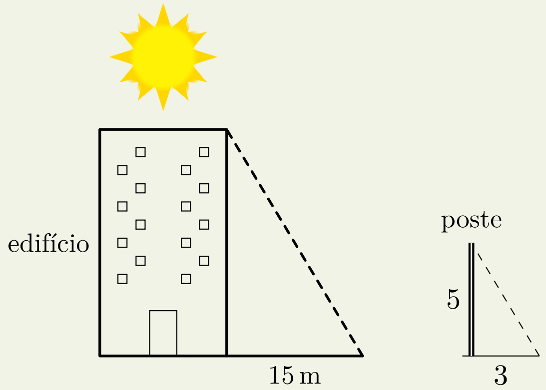
(a) 56 m.
(b) 72 m.
(c) 144 m.
(d) 40 m.
(e) 30 m.

Exercício 7.13 (Escola de Aprendizes de Marinheiro - 2017) Um prédio projeta no solo uma sombra de 30 m de extensão no mesmo instante em que uma pessoa de 1,80 m projeta uma sombra de 2,0 m. Pode-se afirmar que a altura do prédio vale:

(a) 27 m.
(b) 30 m.
(c) 33 m.
(d) 36 m.
(e) 40 m.

Exercício 7.14 (Unesp) A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. A altura do prédio, em metros, é:

(a) 25.
(b) 29.
(c) 30.
(d) 45.
(e) 75.



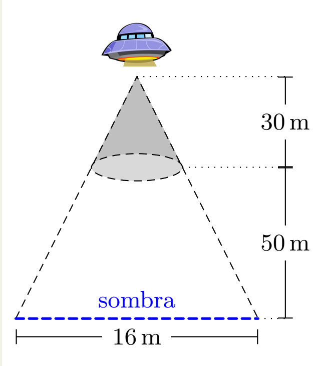
Nível 2

Exercício 7.15 A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, 2,2 metros de altura. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

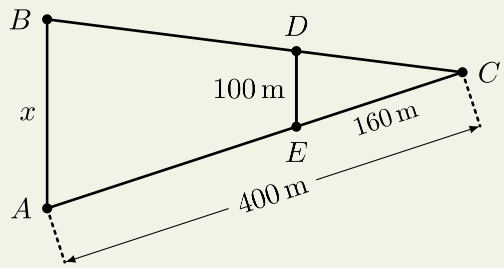
(a) 1,16 metros.
(b) 3,00 metros.
(c) 5,40 metros.
(d) 5,60 metros.
(e) 7,04 metros.

Exercício 7.16 (UNIRIO-adaptada) Numa cidade do interior, surgiu à noite um objeto voador não identificado, em forma de disco plano, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um disco voador, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura abaixo. Pode-se afirmar que o raio do disco plano mede, em metros, aproximadamente:

(a) 3,0.
(b) 3,5.
(c) 4,0.
(d) 4,5.
(e) 5,0.



Exercício 7.17 Na figura abaixo, os segmentos BA e DE são paralelos. Se $\overline{AC} = 400\,\text{m}$ e $\overline{CE} = 160\,\text{m}$, qual é o valor de x?



(a) 144 m.
(b) 250 m.
(c) 225 m.
(d) 275 m.
(e) 370 m.

Exercício 7.18 Qual é a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes cujas áreas medem $36\,\text{cm}^2$ e $25\,\text{cm}^2$, respectivamente?

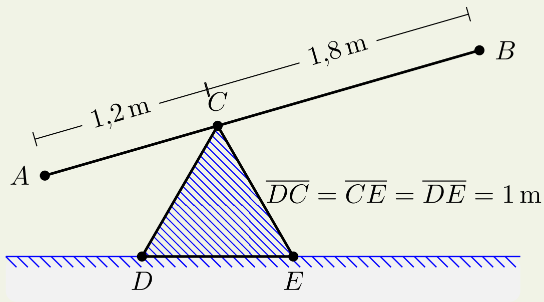
(a) 1,0.
(b) 1,1.
(c) 1,2.
(d) 1,3.
(e) 1,4.

Exercício 7.19 Dados dois polígonos semelhantes, assinale a opção que traz a área do menor, sabendo que a área do maior é igual a $64\,\text{cm}^2$ e que a razão de semelhança entre eles é de 0,5.

(a) $32\,\text{cm}^2$.
(b) $16\,\text{cm}^2$.
(c) $8\,\text{cm}^2$.
(d) $4\,\text{cm}^2$.
(e) $2\,\text{cm}^2$.

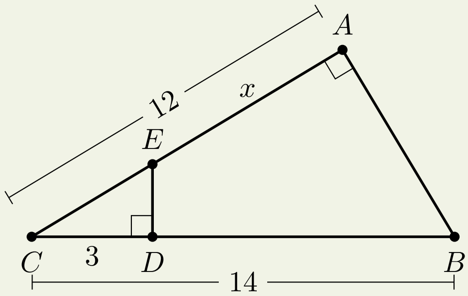
Nível 3

Exercício 7.20 (Unesp) Uma gangorra é formada por uma haste rígida AB, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto C, como mostrado na figura. Quando a extremidade B da haste toca o chão, a altura da extremidade A em relação ao chão é de:



(a) $\sqrt{3}\,\text{m}$.
(b) $\frac{3}{\sqrt{3}}\,\text{m}$.
(c) $\frac{6\sqrt{3}}{5}\,\text{m}$.
(d) $\frac{5\sqrt{3}}{6}\,\text{m}$.
(e) $2\sqrt{2}\,\text{m}$.

Exercício 7.21 Em relação à figura a seguir, assinale a opção que traz o valor de x:



(a) 5,0.
(b) 8,5.
(c) 10,0.
(d) 12,0.
(e) 15,0.

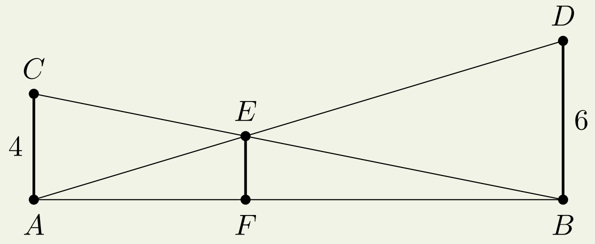
Exercício 7.22 (Colégio Militar - RJ - 2015) Em um triângulo ABC, os pontos D e E pertencem, respectivamente, aos lados AB e AC e são tais que os segmentos DE e BC são paralelos. Se F é um ponto de AB tal que EF é paralelo a CD e as medidas de AF e FD são, respectivamente, 4 e 6, a medida do segmento DB é:

(a) 15.
(b) 10.
(c) 20.
(d) 16.
(e) 36.

Exercício 7.23 (Unicamp) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 metros sobre a rampa, está a 1,5 metros de altura em relação ao solo.

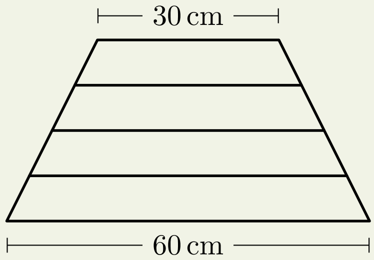
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

Exercício 7.24 (Enem - 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes, de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real, na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados. Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?



(a) 1,0 m.
(b) 2,0 m.
(c) 2,4 m.
(d) 3,0 m.
(e) 3,3 m.

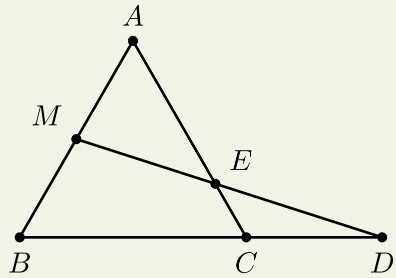
Exercício 7.25 (ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme mostrado na figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em centímetros, deve ser:



(a) 144.
(b) 180.
(c) 210.
(d) 225.
(e) 240.

Nível 4

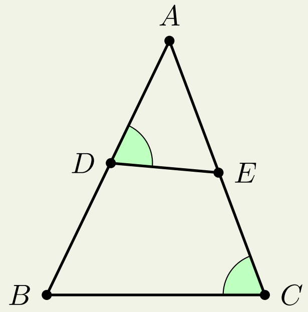
Exercício 7.26 (MACK-SP) O triangulo ABC da figura é equilátero. Se $AM = MB = 5$ e $CD = 6$, o valor de AE vale:



(a) 76/11.
(b) 77/11.
(c) 78/11.
(d) 79/11.
(e) 80/11.

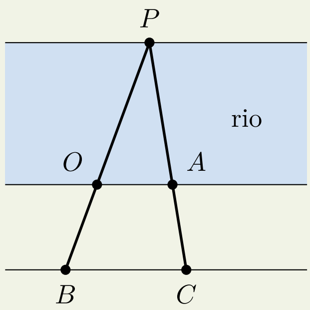
Exercício 7.27 (Puccamp) Os triângulos ABC e AED, representados na figura abaixo, são semelhantes, sendo o ângulo ADE congruente ao ângulo ACB. Se $BC = 16\,\text{cm}$, $AC = 20\,\text{cm}$, $AD = 10\,\text{cm}$ e $AE = 10{,}4\,\text{cm}$, o perímetro do quadrilátero $BCED$, em centímetros, é igual a:

(a) 32,6.
(b) 36,4.
(c) 40,8.
(d) 42,6.
(e) 44,4.



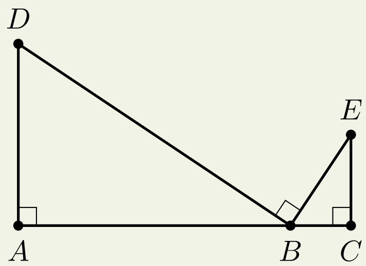
Exercício 7.28 (Unesp) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa calcular sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso ele marca, com estacas, outros pontos A, B e C do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, $OA = 25\,\text{m}$, $BC = 40\,\text{m}$ e $OB = 30\,\text{m}$, conforme mostrado na figura abaixo. A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é:

(a) 30.
(b) 35.
(c) 40.
(d) 45.
(e) 50.



Exercício 7.29 (Unesp) Na figura abaixo, B é um ponto do segmento de reta AC e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos. Se $AD = 6\,\text{dm}$, $AC = 11\,\text{dm}$ e $EC = 3\,\text{dm}$, as possíveis medidas de AB, em dm, são:

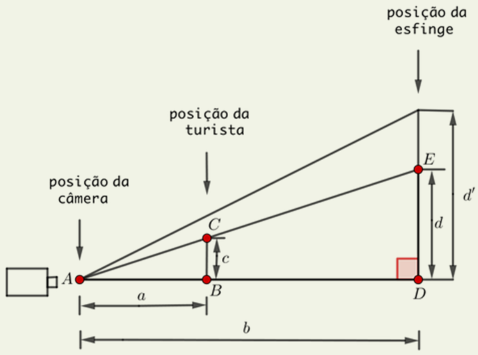
(a) 6,5 e 4,5.
(b) 7,5 e 3,5.
(c) 8,0 e 3,0.
(d) 7,0 e 4,0.
(e) 9,0 e 2,0.



Exercício 7.30 (ENEM) A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura à sua direita mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge. Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a $2/3$ da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por d e d', respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por b e que a distância da

turista à mesma lente é representada por a, pergunta-se: qual é a razão entre b e a?


Fotografia obtida da internet.



(a) $b/a = d'/c$.
(b) $b/a = 2d/3c$.
(c) $b/a = 3d'/2c$.
(d) $b/a = 2d'/3c$.
(e) $b/a = 2d'/c$.