Material Estruturado

MATEMÁTICA

Autores:
Angelo Papa Neto
Revisor:
Antonio Caminha M. Neto
Colaboradores:
Equipe Cientista Chefe

Módulo de Transição

Álgebra e Geometria Vetoriais

Volume 1

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P213m Papa Neto, Angelo
Módulo de transição: álgebra e geometria vetoriais – volume 1 [recurso eletrônico] / Angelo Papa Neto, Antonio Caminha Muniz Neto. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022.

Livro eletrônico
ISBN978-65-00-43604-4(E-book)

1.Vetores. 2. Matrizes. I. Papa Neto, Angelo. II. Muniz Neto, Antonio Caminha. III. Lira, Jorge Herbert Soares de (org.). IV. Título.

CDD: 512.1

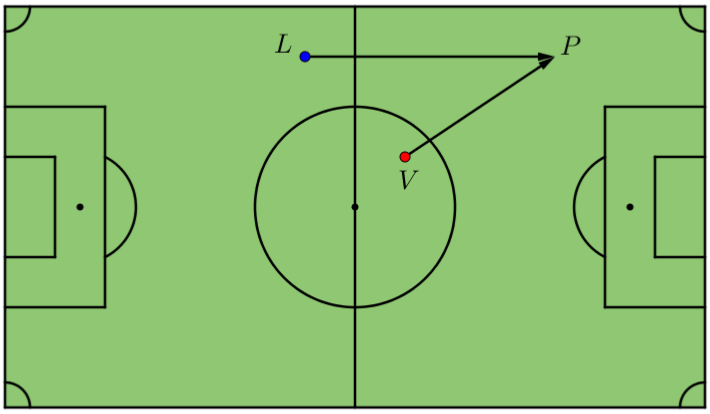
11 | Álgebra e Geometria Vetoriais

11.1 – Noção de vetor

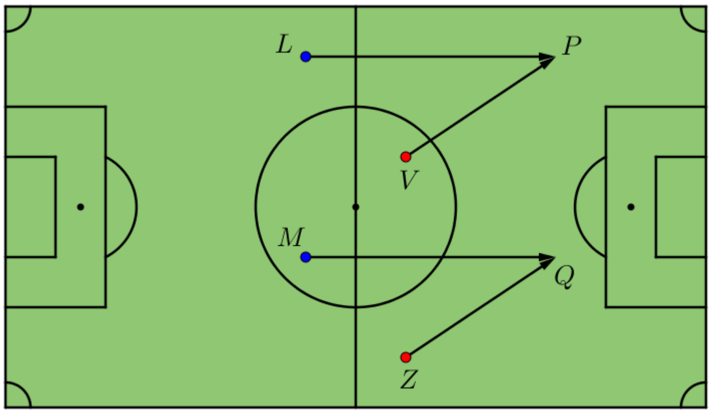
Muitas grandezas físicas, como temperatura, pressão, massa ou densidade, ficam bem determinadas por um número. Outras grandezas, como velocidade, aceleração e força, não ficam definidas apenas com um número, que estabelece a sua intensidade, mas também precisam que sejam indicadas suas direção e sentido. Para descrevê-las de modo adequado, precisamos de um objeto geométrico chamado *vetor*. Neste módulo, vamos introduzir a noção de vetor, explorando sua conexão com a noção de deslocamento, ou translação, de pontos no plano ou no espaço.

11.1.1 – Deslocamentos

A figura abaixo representa um campo de futebol onde dois times disputam uma partida. O pequeno círculo azul L representa o lateral esquerdo de um dos times. Ele recebe um lançamento e **se desloca** até o ponto P, a partir de onde pretende fazer o cruzamento para a grande área do time adversário. O pequeno círculo vermelho V representa o volante do outro time, que precisa interceptar o cruzamento. Para isso, ele também **se desloca** até o ponto P.



Os dois deslocamentos estão representados, na figura acima, por **setas**. Note que é necessário que usemos setas para que fique claro que os jogadores estão indo para o ponto P, ou seja, para que fique claro, além da direção, qual é o **sentido** do movimento de cada jogador.



Suponhamos, agora, que, no mesmo lance desta partida de futebol, um meio campista M se desloca até o ponto Q, nas proximidades da área adversária, para receber o cruzamento do seu companheiro de time. Enquanto isso, o zagueiro Z se desloca até o ponto Q para tentar interceptá-lo.

Observe que, embora os jogadores M e Z partam e cheguem em pontos diferentes dos dois jogadores anteriores (o lateral e o volante), *os deslocamentos são os mesmos*. Isso significa que, se o jogador M estivesse na posição do jogador L no início da jogada, após o deslocamento, em vez de chegar ao ponto Q, chegaria ao ponto P. Também, o mesmo valeria para o o zagueiro Z, que, se estivesse na posição do volante V, ao final do movimento estaria no pondo P e não no ponto Q. Em resumo:

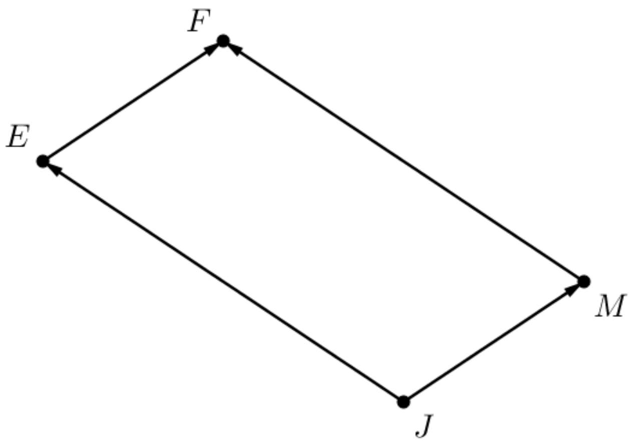
Um deslocamento pode ser representado por uma seta. Além disso, outra seta que tenha a mesma direção, sentido e tamanho representa o mesmo deslocamento.

Obs Ainda em relação à situação descrita acima, se representarmos o deslocamento do lateral por $\overrightarrow{LP}$ e o deslocamento do meio campista por $\overrightarrow{MQ}$, escreveremos $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{MQ}$ para significar que o deslocamento de ambos foi o mesmo nessa jogada. A mesma conclusão vale para os deslocamentos $\overrightarrow{VP}$ do volante e $\overrightarrow{ZQ}$ do zagueiro: podemos escrever $\overrightarrow{VP} = \overrightarrow{ZQ}$ para indicar que os deslocamentos são os mesmos.

Exercício 11.1 João e Maria moram em casas diferentes e estudam em escolas diferentes. Sabendo que os deslocamentos de ambos de casa até a escola são iguais, o que se pode afirmar sobre os deslocamentos entre as casas dos dois e entre suas escolas?

Solução. Pode-se afirmar que o deslocamento entre as casas é igual ao deslocamento entre as escolas. De fato, vamos representar pelo ponto J a casa de João e pelo ponto M a casa de Maria, pelo ponto E a escola de João e pelo ponto F a escola de Maria.

O enunciado afirma que os deslocamentos $\overrightarrow{JE}$ e $\overrightarrow{MF}$ são iguais (veja a figura a seguir), logo, os segmentos JE e MF têm um mesmo comprimento e são paralelos, e os sentidos (de J para E e de M para F são *concordantes*). Isso garante que o quadrilátero $EJMF$ é um paralelogramo. Em particular, a Geometria básica implica que os segmentos EF e JM têm um mesmo comprimento, são paralelos e os sentidos de E para F e de J para M também concordam. Assim, ir da casa de João à casa de Maria requer o mesmo deslocamento que ir da escola de João à escola de Maria, ou seja, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{JM}$.



■

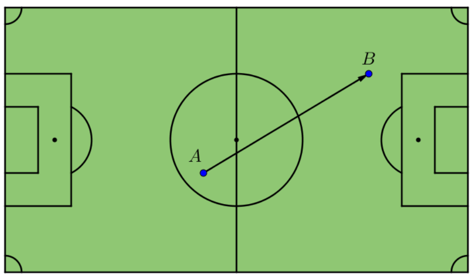
11.1.2 – A ideia de vetor

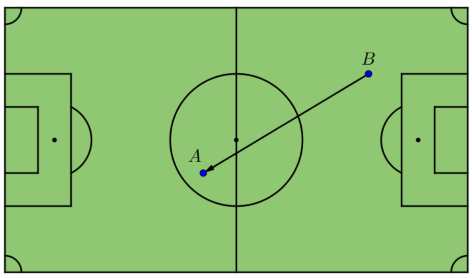
A ideia fundamental da seção anterior é que *deslocamentos podem ser representados por setas que não são afetadas por mudança de posição*. Vamos, agora, tratar essa ideia de maneira mais precisa, e chegaremos à noção de *vetor*.

Dados dois pontos A e B, o segmento de reta AB é o conjunto dos pontos pertencentes à reta determinada por A e B que estão *entre* A e B, incluindo esses dois pontos. Se escolhermos uma *orientação* para o segmento AB, passaremos a chamá-lo de **segmento orientado**.

Escolher uma orientação para um segmento significa simplesmente eleger um dos pontos, A ou B, para ser o *ponto inicial*, ou **origem**, do segmento, o que torna o outro ponto, automaticamente, o *ponto final*, ou **extremidade** do segmento. Ao representarmos um segmento orientado, desenhamos uma seta que parte da origem e vai até a extremidade do segmento.

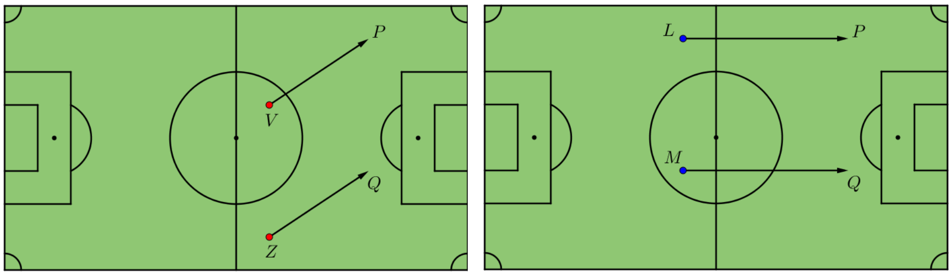
Usamos a mesma notação AB para representar um segmento não orientado ou orientado, com a diferença de que, no caso de um segmento orientado, AB e BA têm significados diferentes: em AB, a origem é A e a extremidade é B; em BA ocorre o oposto. Por isso, se estivermos falando de segmentos orientados, escreveremos $BA = -AB$ para indicar que são conjuntos de pontos iguais, mas com orientações *opostas*.





Por exemplo, nas duas figuras acima, AB representa o deslocamento de um jogador que vai do ponto A até o ponto B, enquanto $BA = -AB$ representa o deslocamento de um jogador que vai do ponto B até o ponto A. De outro modo, AB representa o dslocamento de ida, enquanto BA representa o deslocamento de volta, entre os pontos A e B.

Observando as figuras a seguir, podemos dizer que o zagueiro Z e o volante V deslocaram-se a mesma distância, na mesma direção e no mesmo sentido, portanto, o deslocamento de ambos foi *o mesmo*. Analogamente, o deslocamento do lateral L e do meia M foi o mesmo. No entanto, os segmentos orientados VP e ZQ são *diferentes*, assim como são diferentes os segmentos orientados LP e MQ, pois *estão em posições diferentes*.



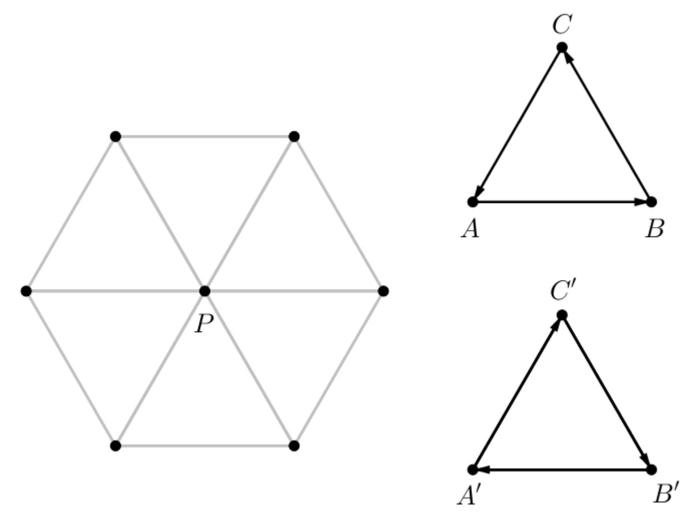
Dessa forma, para representar adequadamente a noção de deslocamento, precisamos de um objeto geométrico que seja similar a um segmento orientado, mas que *possa ser movido livremente, desde que se preservem comprimento, direção e sentido*.

Dados dois pontos A e B, o **vetor** $\overrightarrow{AB}$ é o segmento orientado AB, *ou qualquer outro segmento orientado que tenha mesmo comprimento, direção e sentido* que AB. Por exemplo, nas figuras acima, $\overrightarrow{VP} = \overrightarrow{ZQ}$ e $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{MQ}$. Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é **representado** por um segmento orientado AB se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Assim, embora os segmentos orientados VP e ZQ sejam diferentes (e possamos escrever $VP \neq ZQ$), os vetores que eles representam são iguais. De maneira análoga, os segmentos orientados LP e MQ são diferentes ($LP \neq MQ$), mas os vetores que eles representam são iguais.

Obs A direção, o sentido e o comprimento de um vetor, são a direção, o sentido e o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente.

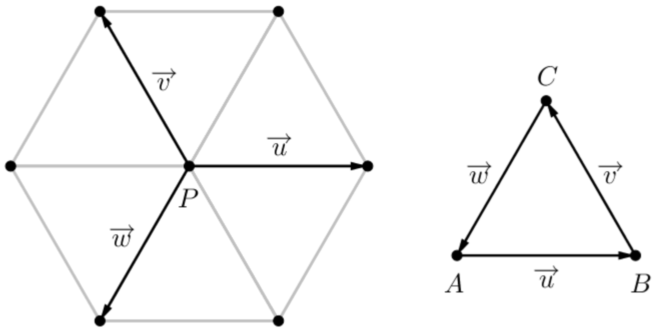
Um vetor $\overrightarrow{v}$ pode ser posicionado livremente, ou seja, para cada ponto C, existe um ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isso significa que existe um segmento orientado CD com origem em C e que representa $\overrightarrow{v}$. Neste caso, dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ está **aplicado** em C.

Exercício 11.2 Na figura a seguir, ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos equiláteros de lados paralelos e de mesmos comprimentos. O ponto P é o centro de um hexágono regular, que tem o mesmo lado que os dois triângulos e é tal que as diagonais traçadas são paralelas aos lados dos triângulos.

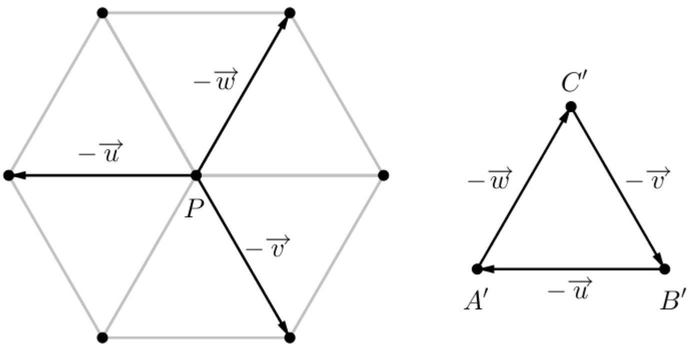


(a) Transporte os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ para o ponto P.
(b) Transporte os vetores $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{C'B'}$ e $\overrightarrow{B'A'}$ para o ponto P.

Solução. (a) Vamos chamar $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CA}$. Esses três vetores, aplicados em P, são exibidos na figura a seguir.



(b) Temos: $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'B'}$, $-\overrightarrow{v} = \overrightarrow{B'C'}$ e $-\overrightarrow{w} = \overrightarrow{C'A'}$. Esses três vetores, aplicados em P, são exibidos na figura a seguir.



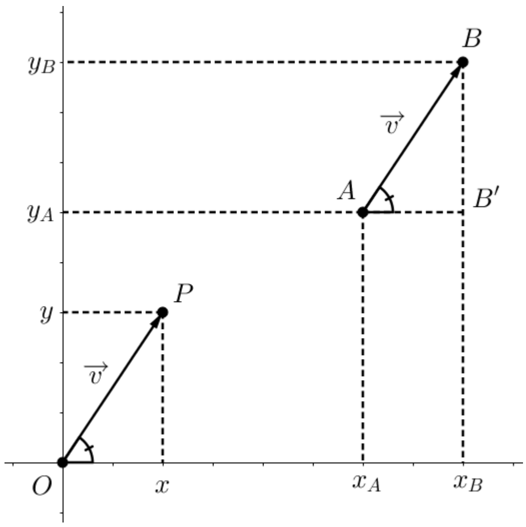
■

11.1.3 – Coordenadas

Sabemos que, uma vez escolhido e fixado um sistema de eixos cartesianos, cada ponto P do plano corresponde a um par ordenado de números reais. Escrevemos $P = (x,y)$ e dizemos que os números reais x e y são as *coordenadas* do ponto P. O plano com um sistema de eixos cartesianos é chamado de plano cartesiano. Da mesma forma, veremos a seguir que cada vetor $\overrightarrow{v}$ em um plano cartesiano também corresponde a um par ordenado de números reais.

Dado um vetor $\overrightarrow{v}$, seja OP o segmento orientado que representa $\overrightarrow{v}$, com origem no ponto $O = (0,0)$. Dizemos que as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{v}$ são as coordenadas do ponto P, que é a extremidade de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. De outro modo, as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{v}$ são as coordenadas do ponto P para onde $\overrightarrow{v}$ desloca a origem $O = (0,0)$ do sistema de coordendas.

Se $A = (x_A,y_A)$ e $B = (x_B,y_B)$ são dois pontos tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, então os segmentos orientados AB e OP têm mesmo comprimento, direção e sentido. Logo, os triângulos retângulos ABB' e OPx são congruentes (veja a figura a seguir).



Em particular, os catetos desses dois triângulos têm comprimentos respectivamente iguais, de sorte que $x = x_B - x_A$ e $y = y_B - y_A$. Podemos denotar isso de forma conjunta, escrevendo

$$(x,y) = (x_B - x_A, y_B - y_A). \tag{11.1}$$

Portanto, as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{v}$ são obtidas subtraindo-se as coordenadas de sua origem das coordenadas de sua extremidade.

Definindo a *subtração de pares ordenados* coordenada a coordenada, isto é, fazendo $(a,b) - (c,d) = (a - c, b - d)$, podemos escrever (11.1) de um modo mais simples: $\overrightarrow{v} = (x,y) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_B,y_B) - (x_A,y_A) = B - A$, ou seja,

$$\overrightarrow{v} = B - A. \tag{11.2}$$

Assim, podemos dizer que *um vetor é a diferença entre sua extremidade e sua origem.*

A igualdade (11.2) pode ser reescrita como

$$B = A + \overrightarrow{v}, \tag{11.3}$$

onde podemos entender a operação "+" de duas maneiras:

- **Algebricamente:** como a soma das coordenadas de $\overrightarrow{v} = (x,y)$ às coordenadas de $A = (x_A,y_A)$, obtendo-se as coordenadas de $B = (x_B,y_B) = (x_A + x,y_A + y)$.
- **Geometricamente:** como o deslocamento do ponto A, dado pelo vetor $\overrightarrow{v}$, resultando no ponto B.

Exercício 11.3 A posição inicial de Pedro, em relação a um sistema de coordenadas escolhido e fixado, é o ponto $P = (1,2)$. Ele se desloca até o ponto A, sendo seu deslocamento dado pelo vetor $\overrightarrow{v} = (-2,1)$. Em seguida, ele vai de A até o ponto B e seu deslocamento, nesta etapa, é dado pelo vetor $\overrightarrow{w} = (3,2)$. Encontre as coordenadas do ponto B.

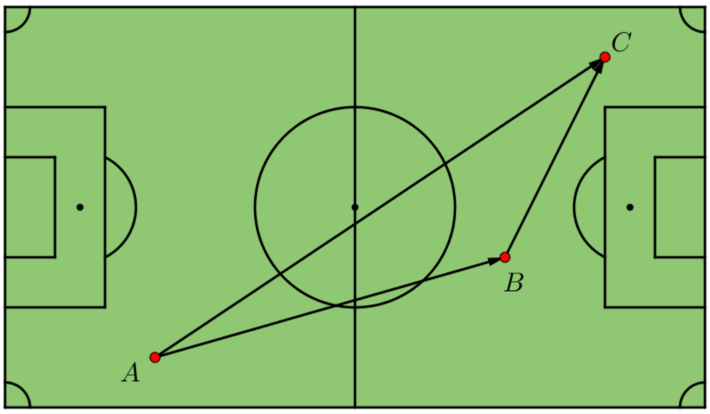
Solução. Uma vez que o deslocamento de P até A é dado por $\overrightarrow{v}$, temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PA} = A - P$. Assim, $A = P + \overrightarrow{v} = (1,2) + (-2,1) = (1 + (-2),2 + 1) = (-1,3)$. Por outro lado, o deslocamento de A até B é dado por $\overrightarrow{w} = (3,2)$, logo, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A$, ou seja, $B = A + \overrightarrow{w} = (-1,3) + (3,2) = (-1 + 3,3 + 2) = (2,5)$. ■

11.2 – Aritmética de vetores

Na seção anterior, vimos que é possível identificar pontos e vetores com pares ordenados de números reais. Nesta seção, vamos considerar duas operações que podem ser feitas com vetores, descrevendo o efeito das mesmas geometricamente e em termos de pares ordenados.

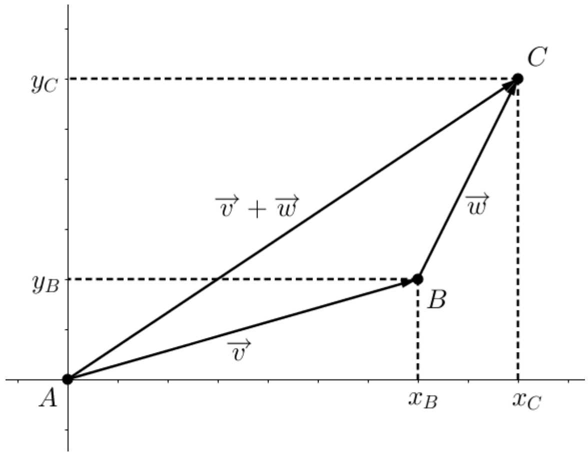
11.2.1 – Adição de vetores

Consideremos dois deslocamentos sucessivos feitos por um jogador em um campo de futebol. Primeiro ele vai do ponto A até o ponto B e depois do ponto B até o ponto C. O resultado desses dois deslocamentos, quando considerados conjuntamente, é um deslocamento de A até C, conforme mostrado na figura a seguir.



Interpretamos o deslocamento de A até C como a *soma* dos deslocamentos de A até B e de B até C, ou seja, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$, então $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$. Aqui, o símbolo "+" significa que o deslocamento $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ foi obtido fazendo-se primeiro o deslocamento $\overrightarrow{v}$ e depois o deslocamento $\overrightarrow{w}$.

Agora, consideremos um sistema cartesiano de coordenadas cuja origem coincide com a origem A do vetor $\overrightarrow{v}$. As coordenadas de $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ são as coordenadas de C, ou seja, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x_C, y_C)$. Se $\overrightarrow{w} = (x, y)$, então $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (x_C - x_B, y_C - y_B)$, e isso implica que $x = x_C - x_B$ e $y = y_C - y_B$. Portanto, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x_C, y_C) = (x_B + x, y_B + y)$.



De acordo com a construção acima, as as coordenadas da soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ são as somas das coordenadas de $\overrightarrow{v}$ e de $\overrightarrow{w}$.

Uma vez que percebamos isto, podemos pensar no plano cartesiano simplesmente como o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

formado pelos pares ordenados de números reais, definindo uma **adição de pares ordenados** por

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y'). \tag{11.4}$$

Essa adição corresponde exatamente à adição de vetores que consideramos acima.

Escrever a adição de vetores na forma (11.4) nos permite chegar a algumas conclusões importantes sobre esta operação. Por exemplo, se $\overrightarrow{u} = (x,y)$ e $\overrightarrow{v} = (x',y')$, então

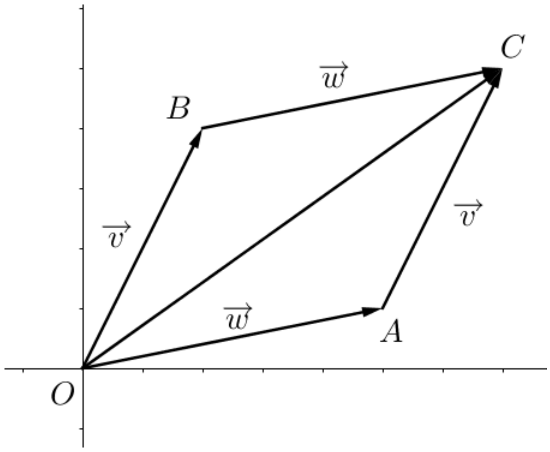
$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= (x,y) + (x',y') = (x + x', y + y') \\ &= (x' + x, y' + y) = (x',y') + (x,y) \\ &= \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

A propriedade acima é chamada *comutatividade*. De outra forma, dizemos que a adição de vetores é uma operação *comutativa*.

Podemos chegar à mesma conclusão usando a definição geométrica de adição, que vimos anteriormente. Vamos fazer isso resolvendo um problema.

Exercício 11.4 Dois amigos partem do ponto O, na figura a seguir. Um deles vai até o ponto A e o outro vai até o ponto B, sendo que os pontos O, A e B não são colineares. Ao chegarem aos pontos A e B, eles se comunicam, passando um ao outro as informações sobre que direção e sentido seguiram nessa primeira parte do percurso, e também qual a distância percorrida por cada um. De posse dessas informações, o que cada um dos amigos deve fazer para que, ao final da segunda parte do percurso, ambos se encontrem no ponto C?

Solução. Para que ambos cheguem ao mesmo ponto C, basta que, na segunda parte do percurso, eles invertam seus deslocamentos, ou seja, basta que cada um siga na mesma direção e sentido e percorra a mesma distância que o outro percorreu na primeira parte do percurso. A figura a seguir mostra uma possibilidade para os deslocamentos dos dois amigos:



■

Ainda em relação à figura acima, OB e AC são segmentos orientados que representam o mesmo vetor $\overrightarrow{v}$, ao passo que OA e BC são segmentos orientados que representam o mesmo vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, o segmento orientado OC, que coincide com a diagonal do paralelogramo $OACB$, representa o vetor $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ e também o vetor $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$, que, por isso, são iguais.

Outra propriedade importante da adição de vetores é a *associatividade*: se $\overrightarrow{u} = (x,y)$, $\overrightarrow{v} = (x',y')$ e $\overrightarrow{w} = (x'',y'')$, então

$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}.$$

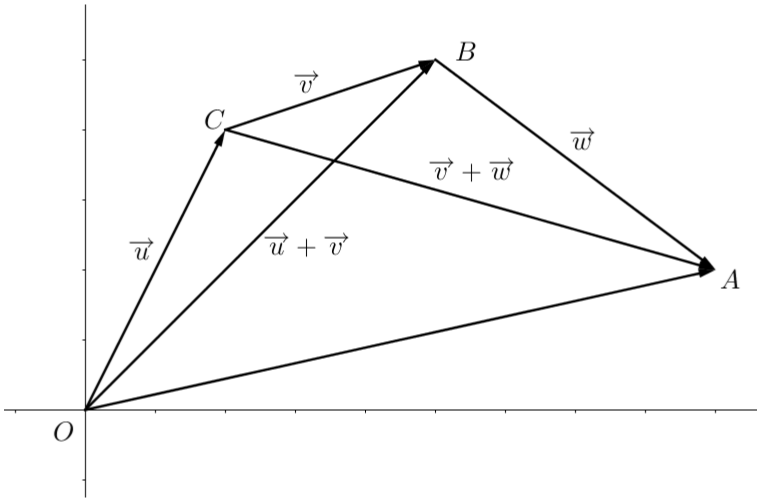
Essa igualdade ocorre porque, por um lado,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= (x,y) + ((x',y') + (x'',y'')) \\ &= (x,y) + (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x + (x' + x''), y + (y' + y'')); \end{aligned}$$

por outro, como em cada coordenada estamos somando números reais e a adição de números reais é associativa, podemos escrever

$$\begin{aligned} (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) &= ((x + x') + x'', (y + y') + y'') \\ &= (x + x', y + y') + (x'', y'') \\ &= ((x,y) + (x',y')) + (x'',y'') \\ &= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}. \end{aligned}$$

Aqui também podemos raciocinar geometricamente. Imagine, na figura a seguir, uma pessoa que esteja a princípio no ponto O e se desloque primeiro até o ponto C, depois de C até B e, finalmente, de B até A. O deslocamento de O até A pode ser visto como a soma do deslocamento de O até C com o deslocamento de C até A, ou como a soma do deslocamento de O até B com o deslocamento de B até A.



De um modo mais formal, na figura acima, os segmentos orientados OC, CB e BA representam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. De acordo com a regra geométrica para a adição de vetores, o segmento orientado OB representa a soma $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ e o segmento orientado CA representa a soma $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$. Assim, o segmento orientado OA representa a soma $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$ e, também, a soma $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$. Portanto, essas soma são iguais.

Obs Escrevemos **0** ou $\overrightarrow{0}$ para denotar o **vetor nulo**. Este é o vetor representado pelos segmentos orientados AB, *com* $A = B$, ou seja, pelos segmentos orientados *degenerados em um ponto*. Como segmentos degenerados não têm direção nem sentido, o vetor nulo não tem direção nem sentido. As coordenadas do vetor nulo são dadas por $\overrightarrow{0} = (0,0)$.

A propriedade que torna o vetor nulo importante é a seguinte: se $\overrightarrow{v}$ é um vetor qualquer, então

$$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{v} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{0}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}.$$

Por conta dessas igualdades, dizemos que $\overrightarrow{0}$ é o *elemento neutro* para a adição de vetores. Interpretado como um deslocamento, o vetor $\overrightarrow{0}$, aplicado a um ponto A, resulta no próprio ponto A, isto é, não desloca o ponto A.

11.2.2 – Multiplicação de vetor por número

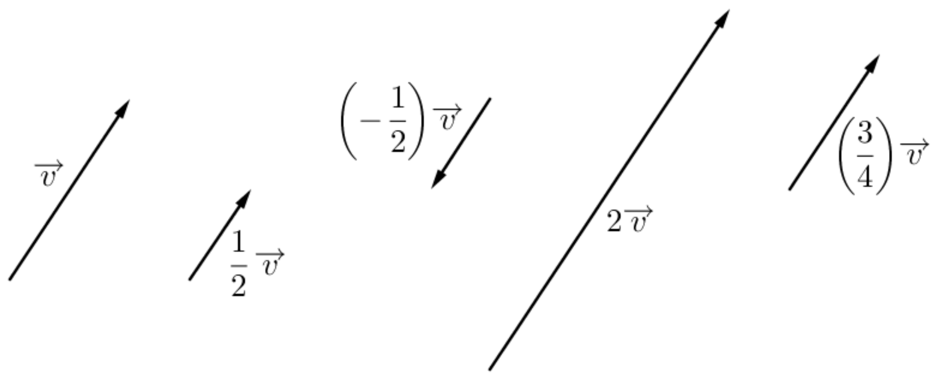
Agora, vamos considerar uma nova operação sobre vetores, desta vez envolvendo vetores e números. Se a é um número real e $\overrightarrow{v}$ é um vetor, usaremos a notação $a\overrightarrow{v}$ com o seguinte significado:

- Se $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, então $a\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, para qualquer a real.
- Se $a=0$, então $a\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$;
- Se $a>0$ e $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, então $a\overrightarrow{v}$ é um vetor com mesma direção e sentido que $\overrightarrow{v}$ e com comprimento igual ao comprimento de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por a. (Lembremos que o comprimento de um vetor é o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente).
- Se $a<0$ e $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, então $a\overrightarrow{v}$ é um vetor com mesma direção que $\overrightarrow{v}$, *com sentido contrário ao de* $\overrightarrow{v}$ e com comprimento igual ao comprimento de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por $|a|$ (o valor absoluto de a).

Em palavras, *ao multiplicar um vetor não nulo por um número real diferente de zero, obtemos um vetor com a mesma direção e que pode ter o mesmo sentido, se o número for positivo, ou sentido contrário, se o número for negativo.* Além disso, *a multiplicação de um vetor por um número* $a \neq 0$ *resulta em um vetor cujo tamanho é* $|a|$ *vezes o tamanho do vetor inicial.*

Em qualquer caso, dizemos que $a\overrightarrow{v}$ é o **produto por escalar** do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo *escalar* a. Essa nomenclatura vem da Física, onde grandezas não vetoriais são ditas *escalares*.

A figura a seguir representa alguns múltiplos escalares de um vetor $\overrightarrow{v}$. Note que todos esses vetores têm a mesma direção. O vetor $\left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{v}$ tem o sentido contrário ao de $\overrightarrow{v}$, pois o escalar $-\frac{1}{2}$ é negativo. Os outros vetores têm o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$. O tamanho de cada vetor depende do tamanho de $\overrightarrow{v}$ e do escalar que o multiplica. Por exemplo, $2\overrightarrow{v}$ tem o dobro do tamanho de $\overrightarrow{v}$.



Em termos de coordenadas, se $\overrightarrow{v} = (x,y)$, então

$$a\overrightarrow{v} = (ax,ay). \tag{11.5}$$

A fim de compreendermos o porquê da validade da igualdade acima, notemos inicialmente que, se $a = 0$, então, por definição $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} = (0,0)$. Da mesma forma, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} = (0,0)$, então $a\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} = (0,0) = (a \cdot 0, a \cdot 0)$.

Podemos, então, supor que $a \neq 0$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Neste caso, a identidade (11.5) pode ser verificada observando que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $a\overrightarrow{v}$ são hipotenusas de triângulos retângulos semelhantes (veja a figura a seguir).

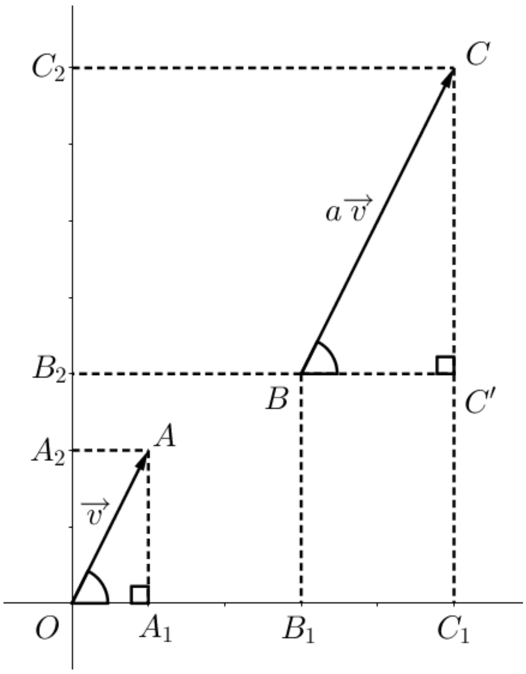
Os triângulos retângulos OAA_1 e BCC' são semelhantes porque os vetores $\overrightarrow{v}$ e $a\overrightarrow{v}$ têm a mesma direção, logo, os ângulos $\angle AOA_1$ e $\angle CBC'$ são congruentes. Dessa semelhança, segue que

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}} = a,$$

assim, $\overline{B_1C_1} = a\,\overline{OA_1} = ax$. Da mesma forma,

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{C'C}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}} = a,$$

logo, $\overline{B_2C_2} = a\,\overline{OA_2} = ay$. Portanto, as coordenadas de $a\overline{v}$ são ax e ay.



As operações *adição de vetores* e *multiplicação de vetor por escalar* podem ser feitas de modo conjunto, como nos exercícios a seguir.

Exercício 11.5 Considere os vetores $\overrightarrow{v} = (1, -1)$ e $\overrightarrow{w} = (1,1)$.

(a) Calcule $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, $2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.
(b) Existem números reais x e y tais que $x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w} = (2,6)$?

Solução. (a) Vamos usar (11.4) e (11.5):

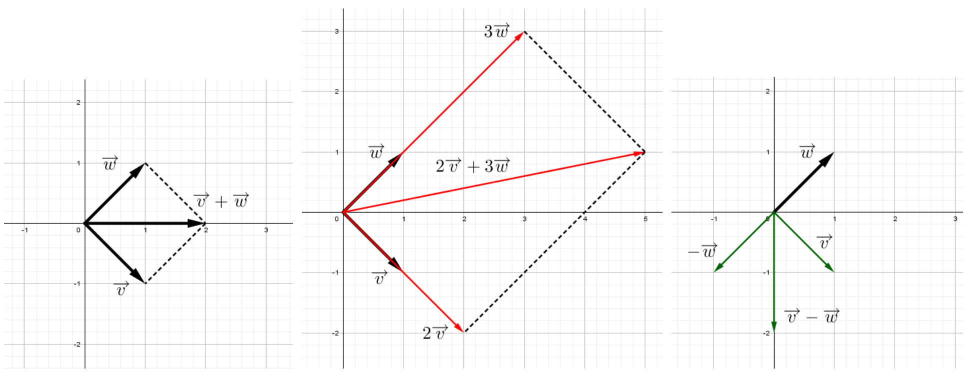
$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (1, -1) + (1,1) = (1 + 1, -1 + 1) = (2,0),$$

$$2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w} = 2(1, -1) + 3(1,1) = (2, -2) + (3,3) = (2 + 3, -2 + 3) = (5,1)$$

e

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + (-1)\overrightarrow{w} = (1, -1) + (-1)(1,1) = (-1,1) + (-1, -1) = (0, -2).$$

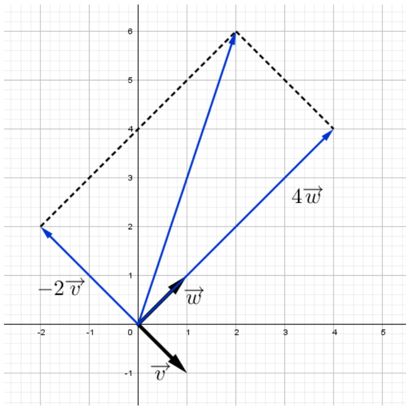
Os três vetores obtidos são exibidos na figura a seguir.



(b) Queremos decidir se existem números reais x e y tais que $x(1,-1)+y(1,1) = (2,6)$, ou seja, $(x,-x)+(y,y) = (2,6)$. Somando coordenada a coordenada no primeiro membro, queremos que $(x+y,-x+y) = (2,6)$. Como dois pares ordenados são iguais se, e somente se, suas coordenadas são iguais, a última igualdade é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ -x+y &= 6 \end{cases}$$

Somando as duas equações, eliminamos a incógnita x, obtendo $2y = 8$, logo, $y = 4$. Substituindo o valor de y em uma qualquer das equações, obtemos $x = -2$. Esta situação é reprentada geometricamente na figura a seguir.



■

Uma expressão do tipo $a\vec{v} + b\vec{w}$ é chamada de **combinação linear** dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim, no Exercício 11.5, verificamos que o vetor com coordenadas $(2,6)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dados lá.

Exercício 11.6 Considere os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$.

(a) Dado um vetor qualquer $\vec{v} = (x,y)$ no plano, é possível escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$?

(b) Obtenha todos os possíveis valores de x e y para que $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$.

Solução. (a) Observe que podemos escrever

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Logo, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear de $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

(b) Vimos em (a) que $x\vec{i} + y\vec{j} = (x,y)$. Assim,

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Dessa forma, os únicos valores de x e y que tornam a combinação linear $x\vec{i} + y\vec{j}$ nula são $x = 0$ e $y = 0$. ■

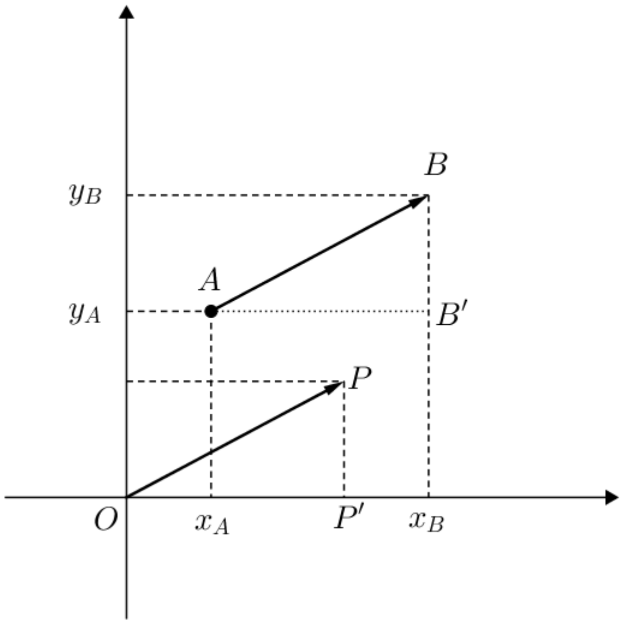
11.3 – Módulo e produto escalar

Nesta seção introduziremos a noção de *módulo* de um vetor, a qual nos permite medir a distância percorrida em um deslocamento em linha reta entre dois pontos. Discutiremos também a importante noção de *produto escalar* de vetores, com a qual poderemos decidir quando dois vetores são perpendiculares.

11.3.1 – O comprimento de um vetor

O **módulo** ou *comprimento* de um vetor é o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente. Em termos de coordenadas, se o vetor $\overrightarrow{v}$ é representado por um segmento orientado AB, com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ (veja a figura a seguir), então o módulo de $\overrightarrow{v}$ é dado por

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \tag{11.6}$$



Nas notações da figura acima, isso é uma consequência do Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo $AB'B$.

Em particular, se $\overrightarrow{v}$ é representado por um segmento orientado OP, onde O é a origem, ou seja, $O = (0,0)$, e $P = (x_P, y_P)$, então

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x_p^2 + y_P^2}.$$

O módulo de um vetor é igual a zero se, e somente se, o vetor é o vetor nulo. De fato, se $\overrightarrow{v} = (a,b)$ é um vetor no plano, então $|\overrightarrow{v}| = 0$ é equivalente a $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, ou seja, $a^2 + b^2 = 0$, o que ocorre se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores com a mesma direção e sentido, então

$$\overrightarrow{w} = \frac{|\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}. \tag{11.7}$$

Realmente, uma vez que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ têm mesma direção e sentido, temos $\overrightarrow{w} = a\,\overrightarrow{v}$, com $a > 0$; então, calculando módulos, obtemos $|\overrightarrow{w}| = |a\,\overrightarrow{v}| = a|\overrightarrow{v}|$, logo, $a = \frac{|\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{v}|}$.

Por outro lado, caso $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tenham mesma direção mas sentidos contrários, um raciocínio análogo ao acima fornece

$$\overrightarrow{w} = -\frac{|\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Reunimos a discussão acima na afirmação a seguir:

> Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não nulos e com mesma direção, então $\overrightarrow{w} = t\overrightarrow{v}$, onde $t = \pm\frac{|\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{v}|}$ e escolhemos o sinal $+$ ou $-$ conforme $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tenham sentidos iguais ou contrários, respectivamente.

O número real t faz o *ajuste* do tamanho do vetor $\overrightarrow{v}$, esticando-o ou contraindo-o para que ele fique com o mesmo tamanho (mesmo módulo) que o vetor $\overrightarrow{w}$. Além disso, no caso em que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ têm sentidos contrários, o número real t deve ser negativo, para inverter o sentido do vetor $\overrightarrow{v}$, fazendo com que os vetores $\overrightarrow{w}$ e $t\,\overrightarrow{v}$ tenham sentidos iguais.

Um vetor $\overrightarrow{u}$ é chamado **unitário** se o seu módulo é igual a 1: $|\overrightarrow{u}| = 1$. Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor não nulo, então o vetor $\overrightarrow{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$ é unitário e tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{v}$. Realmente, uma vez que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm sentidos iguais, (11.7) (com $\overrightarrow{u}$ no lugar de $\overrightarrow{w}$) dá $\overrightarrow{u} = \frac{|\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}$. Portanto, $|\overrightarrow{u}| = 1$ se, e só se, $\overrightarrow{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}$. É costume denotarmos o vetor unitário $\frac{1}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}$ por $\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$. Seguiremos esse uso no restante deste módulo, sem maiores comentários.

Exercício 11.7 Encontre o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{v} = (4,3)$. Encontre também os vetores de módulo 7 que têm a mesma direção de $\overrightarrow{v}$.

Solução. O módulo de $\overrightarrow{v}$ é $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Assim, o vetor unitário $\overrightarrow{u}$ que tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{v}$ é

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{1}{5}\overrightarrow{v} = \frac{1}{5}(4,3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Se $\overrightarrow{w}$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{w} = t\overrightarrow{v}$, para algum t real. Logo, $\overrightarrow{w} = t(4,3) = (4t,3t)$. Para que $|\overrightarrow{w}| = 7$, devemos ter $\sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} = 7$, ou seja, $\sqrt{25t^2} = 7$. Elevando ao quadrado, obtemos $25t^2 = 49$, isto é, $t^2 = \frac{49}{25}$, o que fornece dois valores para t: $t_1 = \frac{7}{5}$ ou $t_2 = -\frac{7}{5}$. Portanto, os vetores procurados são

$$\overrightarrow{w}_1 = t_1\overrightarrow{v} = \left(\frac{28}{5}, \frac{21}{5}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{w}_2 = t_2\overrightarrow{v} = \left(-\frac{28}{5}, -\frac{21}{5}\right).$$

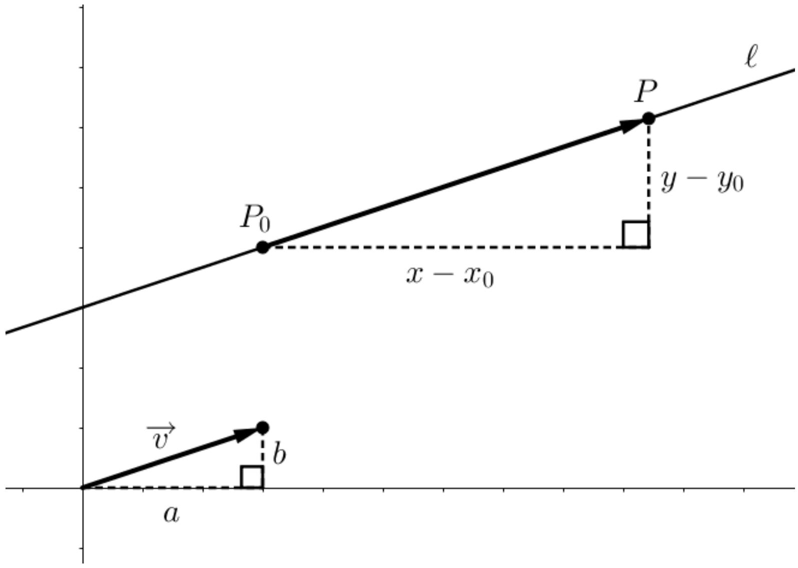
■

11.3.2 – Equação vetorial de uma reta

Fixado um ponto $P_0 = (x_0,y_0)$ e um vetor não nulo $\overrightarrow{v} = (a,b)$, vamos descrever *a reta que passa pelo ponto P_0 e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v}$*. Mais precisamente, queremos encontrar uma maneira de verificar se um ponto qualquer $P = (x,y)$ do plano pertence ou não a essa reta.

Sempre que tivermos um critério claro para decidir quando um ponto dado pertence ou não a essa reta, dizemos que podemos *determinar* a reta. Isso pode ser feito usando-se *equações*. A seguir, vamos obter três tipos de equações para uma reta.

A reta ℓ que passa pelo ponto P_0 e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v}$ é o conjunto formado por todos os pontos P tais que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{v}$, ou seja, $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{v}$, para algum número real t. O vetor $\overrightarrow{v}$ é chamado **vetor diretor** da reta. Note que, qualquer vetor que tenha a mesma direção que a reta ℓ pode ser considerado um vetor diretor de ℓ.



Em termos de coordenadas, sendo $P = (x,y)$, temos

$$\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{v} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) = t(a,b) = (ta,tb).$$

Assim, $x - x_0 = ta$ e $y - y_0 = tb$, isto é,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}. \tag{11.8}$$

Em palavras, as expressões em (11.8) dão as coordenadas de um ponto qualquer P da reta em termos de um *parâmetro* t, que pode variar livremente no conjunto dos números reais. Podemos escrever $x(t)$ e $y(t)$, em vez de x e y para enfalizar que essas coordenadas dependem de t. Dessa forma, as equações (11.8) são denominadas de **equações paramétricas da reta**.

As duas equações em (11.8) podem ser sintetizadas na expressão

$$P = P_0 + t\overrightarrow{v}, \tag{11.9}$$

de sorte que o ponto P depende do parâmetro t. A equação (11.9) é chamada de **equação vetorial da reta**.

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, podemos igualar o valor de t calculado a partir das duas equações em (11.8), escrevendo

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \tag{11.10}$$

Na expressão (11.10) não aparece o parâmetro t, e sim uma relação entre as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer da reta. Por isso, chamamos (11.10) de **equação cartesiana da reta**.

Exercício 11.8 Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $P_0 = (1,2)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v} = (-2,1)$. Encontre o ponto de interseção dessa reta com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Solução. Qualquer ponto $P = (x,y)$ dessa reta satisfaz a condição (11.9):

$$P = P_0 + t\overrightarrow{v},$$

ou seja,

$$(x,y) = (1,2) + t(-2,1).$$

Assim, as corrdenadas x e y de P dependem de t segundo as expressões $x(t) = 1 - 2t$ e $y(t) = 2 + t$.

A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta formada pelos pontos que têm abscissa e ordenada iguais, ou seja, pontos (x,y) tais que $x = y$. Para que um ponto da reta que encontramos acima seja também um ponto dessa bissetriz, devemos ter $x(t) = y(t)$, ou seja, $1 - 2t = 2 + t$. Essa equação dá $3t = -1$, logo, $t = -1/3$. Assim, o ponto de interseção procurado é

$$\left(x\left(\frac{-1}{3}\right), y\left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \left(1 - 2\left(\frac{-1}{3}\right), 2 + \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

■

Exercício 11.9 Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1,2)$ e $B = (4,3)$.

Solução. A reta determinada pelos pontos A e B passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,3) - (1,2) = (3,1)$. Então, as equações paramétricas da reta são dadas pela igualdade

$$(x(t),y(t)) = A + t\,\overrightarrow{AB} = (1,2) + t(3,1).$$

Assim, $x(t) = 1 + 3t$ e $y(t) = 2 + t$. ■

Obs Na solução anterior, poderíamos ter escolhido $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3,-1)$ como vetor diretor. Em consequência (usando s, em vez de t, como parâmetro), obteríamos as equações paramétricas

$$(x(s),y(s)) = B + s\,\overrightarrow{BA} = (4,3) + s(-3,-1) = (4 - 3s, 3 - s).$$

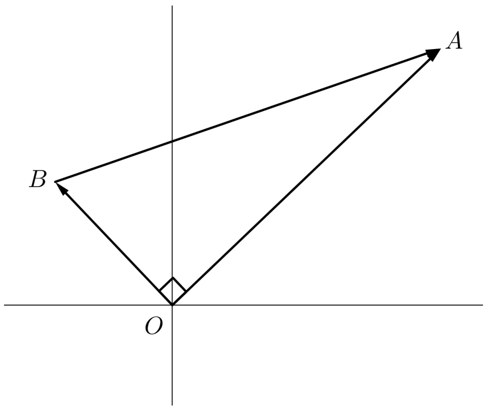
Tal descrição também é correta e é equivalente à da solução anterior. Realmente, fazendo $s = 1 - t$, obtemos

$$(4 - 3s, 3 - s) = (4 - 3(1 - t), 3 - (1 - t)) = (1 + 3t, 2 + t).$$

11.3.3 – Ortogonalidade

Dizemos que dois vetores *não nulos* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **ortogonais** ou **perpendiculares**, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, se dois segmentos orientados que representem esses vetores e tenham a mesma origem formarem um ângulo reto.

A seguir, veremos uma condição necessária e suficiente sobre as coordenadas de dois vetores para que estes sejam *perpendiculares*. Vamos supor que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sejam vetores perpendiculares e vamos representá-los por segmentos orientados OA e OB, onde O é a origem do plano cartesiano (veja a figura a seguir). Fazendo isso, vemos que OA e OB são os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é AB.



As coordenadas dos pontos A e B são $A = (x_A,y_A)$ e $B = (x_B,y_B)$. Assim, o Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2, \tag{11.11}$$

pode ser reescrito como

$$\left(\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_B^2 + y_B^2}\right)^2 \tag{11.12}$$

isto é,

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2. \tag{11.13}$$

Desenvolvendo os quadrados no primeiro membro dessa igualdade e cancelando os termos que se repetem em ambos os lados, obtemos

$$-2x_Ax_B - 2y_Ay_B = 0,$$

ou seja,

$$x_Ax_B + y_Ay_B = 0. \tag{11.14}$$

O argumento acima mostra que a perpendicularidade entre os vetores $\overrightarrow{u} = (x_A,y_A)$ e $\overrightarrow{v} = (x_B,y_B)$ implica a igualdade (11.14). Isso significa que essa igualdade é uma condição *necessária* para que os dois vetores sejam perpendiculares.

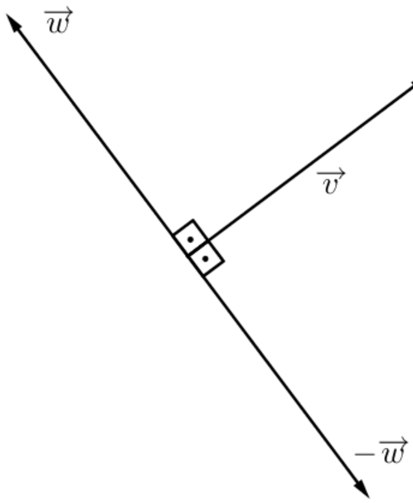
Mas, além disso, a igualdade (11.14) também é uma condição *suficiente* para a perpendicularidade de dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Isto porque, se vale

(11.14), então (11.13) também vale (pois (11.14) foi obtido de (11.13) por um simples cancelamento de parcelas). Por sua vez, (11.13) é o mesmo que (11.12), ou seja, que (11.11). Então, a recíproca do Teorema de Pitágoras garante que o triângulo OAB é retângulo em O, o que implica a perpendicularidade de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

■ **Exemplo 11.1** Dado um vetor não nulo $\overrightarrow{v} = (x,y)$, o vetor $\overrightarrow{w} = (-y,x)$ tem o mesmo módulo de $\overrightarrow{v}$ e é perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

De fato, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$ e $|\overrightarrow{w}| = \sqrt{(-y)^2+x^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |\overrightarrow{v}|$. Alem disso, como $x(-y)+yx = 0$, podemos concluir por (11.14) que $\overrightarrow{v} = (x,y)$ e $\overrightarrow{w} = (-y,x)$ são perpendiculares.

Note que o vetor $-\overrightarrow{w} = (y,-x)$ também é perpendicular a $\overrightarrow{v}$. Pode ser facilmente verificado (faça isso!) que o vetor $\overrightarrow{w}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{v}$ por uma rotação de 90° no sentido anti-horário, enquanto $-\overrightarrow{w}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{v}$ por uma rotação de 90° no sentido horário.



As informações do Exemplo 11.1 são importantes e, por isso, vamos resumi-las a seguir:

> Se um vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ for girado 90° no sentido anti-horário, o resultado será o vetor $\overrightarrow{w} = (-y,x)$. Se a rotação de $\overrightarrow{v}$ for no sentido horário, o resultado será o vetor $-\overrightarrow{w} = (y,-x)$.

11.3.4 – Produto escalar

O **produto escalar** de dois vetores $\overrightarrow{v} = (a,b)$ e $\overrightarrow{w} = (c,d)$ é o número

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = ac + bd. \tag{11.15}$$

Com a definição acima, podemos reescrever a discussão sobre perpendicularidade de vetores da seguinte maneira: se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são dois vetores não nulos, então:

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0. \tag{11.16}$$

Exercício 11.10 São dados os pontos $A = (2{,}1)$ e $B = (8{,}5)$. Encontre um ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, tal que o triângulo ABP seja retângulo em P.

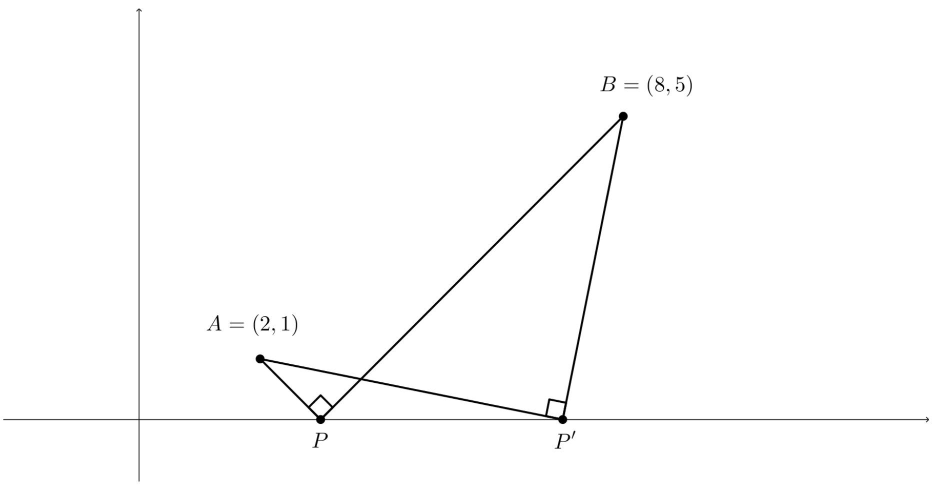
Solução. Como o ponto P pertence ao eixo das abscissas, podemos escrever $P = (x{,}0)$. Como ABP deve ser retângulo em P, o ângulo $\angle APB$ entre os vetores $\overrightarrow{PA} = A - P = (2 - x{,}1)$ e $\overrightarrow{PB} = B - P = (8 - x{,}5)$ é reto.

Então, segue de (11.16) que

$$(2 - x{,}1) \cdot (8 - x{,}5) = 0,$$

isto é, $(2 - x)(8 - x) + 5 = 0$. Por sua vez, essa equação é o mesmo que $16 - 2x - 8x + x^2 + 5 = 0$ ou, ainda, $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Como as raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$, concluímos que existem dois pontos sobre o eixo das abscissas que satisfazem a condição do problema: os pontos $P = (3{,}0)$ e $P' = (7{,}0)$. A figura a seguir ilustra esses dois pontos.



■

Exercício 11.11 Com o auxílio de (11.15), verifique a validade das seguintes propriedades do produto escalar:

(1) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$.
(2) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.
(3) $(\alpha \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \cdot (\alpha \overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$.
(4) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Solução. Se $\overrightarrow{v} = (a{,}b)$ e $\overrightarrow{w} = (c{,}d)$, (11.15) dá $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = ac + bd$. Portanto,

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = (c{,}d) \cdot (a{,}b) = ca + db = ac + bd = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w},$$

o que demonstra (a).

Para (b), sendo $\overrightarrow{u} = (e,f)$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= (e,f) \cdot (a+c,b+d) = e(a+c) + f(b+d)\\ &= ea + ec + fb + fd = (ea + fb) + (ec + fd)\\ &= (a,f) \cdot (a,b) + (e,f) \cdot (b,d)\\ &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}.\end{aligned}$$

Se α é um número real, então $\alpha\overrightarrow{v} = (\alpha a,\alpha b)$. Assim,

$$\begin{aligned}(\alpha\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} &= (\alpha a,\alpha b) \cdot (c,d) = (\alpha a)c + (\alpha b)d\\ &= a(\alpha c) + b(\alpha d) = (a,b) \cdot (\alpha c,\alpha d)\\ &= \overrightarrow{v} \cdot (\alpha\overrightarrow{w}).\end{aligned}$$

A demonstração de que $\overrightarrow{v} \cdot (\alpha\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$ é análoga e será deixada a você.

Por fim, quanto a (d), note que

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = (a,b) \cdot (a,b) = a^2 + b^2 \geq 0,$$

pois uma soma de quadrados de números reais não pode ser negativa. Além disso, os cálculos acima garantem que

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0,$$

o que, por sua vez, ocorre se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$, isto é, se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. ■

Uma última observação é que podemos escrever o módulo de um vetor $\overrightarrow{v}$ como

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}.$$

Realmente, sendo $\overrightarrow{v} = (x,y)$, temos

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = (x,y) \cdot (x,y) = x^2 + y^2.$$

11.4 – Dimensões superiores a 2

“A essência da Matemática é sua liberdade”. Nesta seção vamos dar um exemplo que ilustra essa afirmação do matemático alemão George Cantor (1845–1918).

Nas seções anteriores, estudamos a noção de vetor *no plano*. Vimos que um vetor pode ser associado a um *par ordenado*. Também definimos três operações: adição, multiplicação por número e produto escalar e vimos que é possível expressar essas operações usando pares ordenados:

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1 + y_1,x_2 + y_2),$$

$$a(x_1,x_2) = (ax_1,ax_2),$$

$$(x_1,x_2) \cdot (y_1,y_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

O conjunto dos pares ordenados de números reais é o *produto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que, por conveniência, representamos usando a notação $\mathbb{R}^2$. Em geral, se n é um número inteiro maior ou igual a 2, podemos escrever

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

para indicar o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo, n vezes. Esse é o conjunto formado por todas as *listas ordenadas* de n números reais: $(x_1,\dots,x_n)$. O importante, nessas listas, é que elas são conjuntos formados pelos elementos, de x_1 a x_n, onde a *posição na lista é relevante.* Por exemplo, as listas (1,2,3,4) e (1,3,2,4) têm os mesmos elementos, mas não são iguais, porque os elementos 2 e 3 não ocupam as mesmas posições nas duas listas. Duas listas $(x_1,\dots,x_n)$ e $(y_1,\dots,y_n)$ são iguais se, e somente se, os elementos nas mesmas posições sejam iguais, ou seja, $x_1 = y_1,\dots,x_n = y_n$.

As operações entre pares ordenados que escrevemos acima, e que têm um significado geométrico, podem ser definidas da mesma maneira para listas ordenadas quaisquer:

$$(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n),$$

$$a(x_1,\dots,x_n) = (ax_1,\dots,ax_2),$$

$$(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Estas operações têm as mesmas propriedades algébricas que aquelas que tínhamos definido anteriormente para pares ordenados. Elas nos permitem levar as propriedades geométricas correspondentes do plano $\mathbb{R}^2$ para um "espaço" $\mathbb{R}^n$ qualquer.

Um caso de interesse imediato é aquele em que $n = 3$, pois os trios ordenados de números reais estão em correspondência com os pontos do espaço tridimensional onde vivemos.

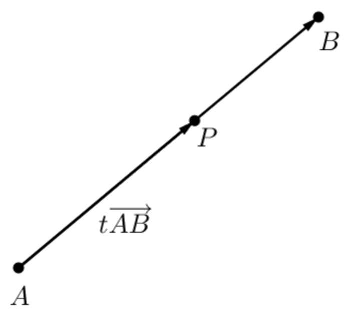
O exercício a seguir ilustra como podemos usar coordenadas para estender um resultado do plano para o espaço.

Exercício 11.12 Sejam $A = (a_1,\dots,a_n)$ e $B = (b_1,\dots,b_n)$ dois pontos distintos em $\mathbb{R}^n$.

(a) Se P é um ponto do segmento AB, é possível escrever suas coordenadas em função das coordenadas de A e de B?

(b) Verifique que o ponto médio M do segmento AB tem coordenadas $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2},\dots,\frac{a_n+b_n}{2}\right)$.

Solução. (a) Se P é um ponto do segmento AB, então $\overrightarrow{AP}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, logo $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, com $t \geq 0$.



Como P está entre A e B, o módulo do vetor $\overrightarrow{AP}$ é menor ou igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$, logo $|t\overrightarrow{AB}| \leq |\overrightarrow{AB}|$. Podemos dividir essa desigualdade por $|\overrightarrow{AB}|$, pois $A \neq B$. Logo $0 \leq t \leq 1$.

Suponha que $P = (p_1, \dots, p_n)$. Assim como no caso $n = 2$ (plano) que discutimos anteriormente, também aqui o vetor $\overrightarrow{AP}$ representa o deslocamento do ponto A ao ponto P. Em particular, as coordenadas desse vetor são dadas pelas diferenças entre as coordenadas de P e de A: $\overrightarrow{AP} = (p_1 - a_1, \dots, p_n - a_n)$. Comparando as coordenadas obtemos $p_1 - a_1 = t(b_1 - a_1), \dots, p_n - a_n = t(b_n - a_n)$, ou seja, $p_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, p_n = a_n + t(b_n - a_n)$. Portanto, podemos escrever as coordenadas de P:

$$P = (a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n)),$$

onde $0 \le t \le 1$. Se $t = 0$, então $P = A$, se $t = 1$, então $P = B$.

(b) Se $P = M$, o ponto médio do segmento AB, então o vetor $\overrightarrow{AM}$ tem metade do tamanho do vetor $\overrightarrow{AB}$. Por isso, neste caso, $t = 1/2$ e

$$M = (a_1 + (1/2)(b_1 - a_1), \dots, a_n + (1/2)(b_n - a_n)) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_1 + b_1}{2}\right).$$

■

O Exercício 11.12 é um exemplo de como o uso de coordenadas nos permite levar argumentos geométricos para os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n > 3$, *mesmo que estes espaços não possam ser visualizados.*

11.5 – Aritmética de matrizes

Já vimos neste módulo que vetores no plano podem ser interpretados como deslocamentos, ou seja, como um tipo de movimento, chamado *translação*.

Outros movimentos, como rotações, podem ser descritos utilizando um conceito algébrico denominado de *matriz*. Com vistas também a outras aplicações, desenvolveremos os fatos mais básicos sobre matrizes de maneira mais geral do que seria necessário para descrever rotações

11.5.1 – Matrizes

Uma tabela com m linhas e n colunas, preenchida com mn números reais, é denominada uma **matriz** $m \times n$ (lê-se, m *por* n). Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & \pi & 6 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 & 3/5 \end{pmatrix} \tag{11.17}$$

é uma matriz 3×4, porque tem 3 linhas e 4 colunas.

Em geral, escrevemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \tag{11.18}$$

ou simplesmente $(a_{ij})_{m\times n}$, para indicar uma matriz $m \times n$. Os elementos a_{ij}, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ são as **entradas** da matriz. Os índices i e j determinam a posição da entrada na matriz da seguinte forma: a entrada a_{ij}

está na linha i e na coluna j. Por exemplo, em (11.17), se $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, então $a_{23} = \pi$, pois este é o número que está escrito na segunda linha e na terceira coluna. Por outro lado, temos que $a_{14} = 3$, pois este o número que ocupa a entrada situada na primeira linha e quarta coluna.

Se uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tem apenas uma linha, ou seja, se $m = 1$, dizemos que A é uma **matriz-linha**. Se $n = 1$, ou seja, se a matriz A tem apenas uma coluna, dizemos que ela é uma **matriz-coluna**. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são matrizes-linha, ao passo que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são matrizes-coluna.

Se a quantidade de linhas de uma matriz for igual à quantidade de colunas, ou seja, se $m = n$, diremos que a matriz é **quadrada**. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

são matrizes quadradas 2×2, 3×3 e 4×4, respectivamente. O número de linhas (e de colunas) de uma matriz quadrada é sua **ordem**. Assim, dizemos que as matrizes acima têm ordens 2, 3 e 4, respectivamente.

Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ formam uma diagonal na tabela, que chamamos de **diagonal principal** da matriz. Os elementos $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$, ou seja, os elementos a_{ij}, com $i + j = n + 1$, formam a outra diagonal da tabela, chamada **diagonal secundária** da matriz. Por exemplo, na matrizes a seguir, as diagonais estão destacadas

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boldsymbol{a_{44}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \boldsymbol{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ \boldsymbol{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Dizemos que uma matriz quadrada é **triangular superior** se todos os elementos que estão **abaixo** da diagonal principal são iguais a zero. Dizemos que uma matriz quadrada é **triangular inferior** se todos os elementos que estão **acima** da diagonal principal são iguais a zero. Por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

é triangular superior, enquanto a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

é triangular inferior.

Uma matriz (quadrada) que é triangular superior e também triangular inferior, é chamada de **matriz diagonal**. Em uma matriz diagonal, os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Contudo, não há exigência sobre os elementos da diagonal principal; alguns deles, ou mesmo todos, podem ser iguais a 0.

A matriz quadrada de ordem n na qual todas as entradas da diagonal principal são iguais a 1 e as demais entradas são iguais a 0 é chamada de **matriz identidade**. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 5.

Exercício 11.13 Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, as entradas satisfazem a seguinte condição: $a_{ij} = 0$ se $i > j$. O que podemos afirmar sobre essa matriz?

Solução. Na matriz A, os elementos a_{ij} tais que $i > j$ são a_{21}, a_{31} e a_{32}. Todos esses elementos são iguais a zero, pela condição dada no enunciado. Escrevendo a matriz A, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz A é triangular superior. ■

Exercício 11.14 Em uma matriz quadrada de ordem 2, as entradas são dadas por $a_{ij} = i - j$. Escreva essa matriz.

Solução. $a_{11} = 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 1 - 2 = -1$, $a_{21} = 2 - 1 = 1$ e $a_{22} = 2 - 2 = 0$. Assim, a matriz procurada é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Exercício 11.15 As matrizes $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tem seus elementos dados pelas seguintes regras:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j - 1 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j - 1 \end{cases}.$$

Encontre A e B para $n = 4$.

Solução. Como $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, os elementos que não estão na diagonal principal são iguais a zero. Isso significa que a matriz A é diagonal. Como $a_{ij} = 1$, se $i = j$, os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1, logo, a matriz A é a matriz identidade de ordem 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na matriz B, os únicos elementos que não são nulos são iguais a 1, e correspondem às entradas b_{ij}, tais que $i = j - 1$. Como $j \in \{1,2,3,4\}$, temos $j - 1 \in \{0,1,2,3\}$. Temos de descartar a possibilidade $j - 1 = 0$, pois ela não corresponde a um valor possível para i. Assim, as entradas não nulas da matriz B são $b_{21} = b_{32} = b_{43} = 1$ e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

11.5.2 – Adição e multiplicação por número

Podemos somar duas matrizes, desde que elas tenham os mesmos números de linhas e de colunas. Por exemplo, a adição

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pode ser feita (pois ambas as matrizes são 2×3), mas a adição

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

não pode ser feita, uma vez que as matrizes têm números diferentes de colunas.

Quando duas matrizes podem ser somadas, o resultado é uma matriz que tem os mesmos números de linhas e colunas das duas parcelas. Assim, o resultado da adição

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

é também uma matriz 2×3.

Por outro lado, *por definição*, cada entrada da matriz-soma é a soma das entradas respectivas das duas parcelas. Em palavras, dizemos que a soma de duas matrizes é dada “entrada a entrada”. Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-2 & 1-1 & 2+0 \\ 2+1 & 0+1 & -1+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em geral, para matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n},$$

para todos $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Exercício 11.16 Considere as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule todas as possíveis somas dessas matrizes.

Solução. Como só podemos somar matrizes que têm os mesmos números de linhas e de colunas, as únicas somas possíveis são

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Multiplicar uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por um número real α é multiplicar cada uma de suas entradas por esse número α. Por exemplo,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Em geral, se α é um número e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz, então αA é a matriz $m \times n$ cujas entradas são obtidas multiplicando-se as entradas de A por α, ou seja,

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}.$$

Obs A adição de matrizes e o produto de uma matriz por um número têm as mesmas propriedades que a adição de vetores e o produto de um vetor por um número. Por outro lado, um vetor (no plano) pode ser visto como uma matriz linha 1×2 ou como uma matriz coluna 2×1. Para isso, basta escrever as coordenadas do vetor como sendo as entradas da matriz (linha ou coluna).

Exercício 11.17 Escreva o vetor $\vec{v} = (1,3)$ como uma matriz-linha e como uma matriz-coluna.

Solução. O vetor $\vec{v}$ pode ser escrito como a matriz linha $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ ou como matriz coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ■

11.5.3 – Multiplicação de matrizes

Já vimos que, assim como vetores, matrizes podem ser somadas e multiplicadas por números. Vimos também que existe outra operação entre vetores, o produto escalar, que gera um número a partir de dois vetores. Veremos agora como multiplicar matrizes. A primeira observação importante é a seguinte:

Obs A multiplicação de matrizes é uma generalização do produto escalar.

Para explicar a observação acima, consideremos dois exemplos.

Exercício 11.18 Sueli vai fazer um bolo usando, em sua receita, os seguintes ingredientes: $500g$ de farinha de trigo, $500ml$ de leite, $200g$ de manteiga e 4 ovos. Ela deseja saber quanto vai gastar em seu bolo com esses ingredientes, cujos preços são dados pelas variáveis a seguir, em reais: x é o preço do quilo de farinha de trigo, y é o preço do litro de leite, z é o preço de um pote com $400g$ de manteiga e w é o preço de uma dúzia de ovos. Escreva uma expressão que dependa dessas variáveis e que indique a Sueli quanto ela gastará com ingredientes para fazer seu bolo.

Solução. Se $1kg$ de farinha de trigo custa x reais, $500g = 0{,}5kg$ custam $x/2$ reais. O mesmo vale para o leite, que custa y reais o litro, logo, $500ml = 0{,}5l$ custam $y/2$ reais. Com um pote de $400g$, que custa z reais, Sueli faz duas receitas, logo, em uma receita ela gasta $z/2$ reais. Finalmente, como 4 ovos são $1/3$ de uma dúzia, o seu custo é de $w/3$ reais.

Somando os custos com cada ingrediente, obtemos

$$f(x,y,z,w) = (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w, \tag{11.19}$$

que é o total gasto por Sueli para fazer o bolo.

Podemos expressar $f(x,y,z,w)$ como um produto escalar:

$$f(x,y,z,w) = (1/2,1/2,1/2,1/3) \cdot (x,y,z,w).$$

Esse produto também pode ser escrito da seguinte maneira

$$f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \tag{11.20}$$

no qual escrevemos o vetor $(1/2,1/2,1/2,1/3)$ como a matriz-linha

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

e o vetor (x,y,z,w) está escrito como a matriz coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}_{4\times 1}.$$

O símbolo "·" em (11.20) não é mais um produto escalar, mas um *produto de matrizes*. ■

Inspirados pelo Exercício 11.18 definimos o produto de uma matriz linha 1×4, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}_{1\times 4}$ por uma matriz coluna 4×1, $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}_{4\times 1}$ como sendo o número $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$.

Neste ponto, podemos fazer duas perguntas:

(1) Qual é a vantagem de fazer isso, já que a função do Exemplo 11.18 já podia ser escrita como um produto interno?
(2) Uma desvantagem do produto escalar é que, embora os fatores sejam vetores, o resultado é um número. Essa desvantagem permanece no nosso produto de matrizes. Temos como corrigir isso?

Em relação à primeira pergunta, a vantagem de escrever assim é que, fazendo isso, o produto pode ser generalizado e tem interpretações geométricas importantes, como veremos mais adiante. Em relação à segunda pergunta, podemos identificar números com matrizes 1×1, ou seja, matrizes com uma linha e uma coluna. Dessa forma, o produto de matrizes, continua a ser uma matriz, mas com ordem diferente das ordens das matrizes que são fatores da multiplicação.

Exercício 11.19 Sueli quer fazer dois bolos, um deles seguindo a mesma receita do Exercício 11.18 e o outro seguindo outra receita, que leva os mesmos ingredientes, mas em outras quantidades : $400g$ de farinha de trigo, $250ml$ de leite, $100g$ de manteiga e 3 ovos. Escreva uma expressão que dependa das variáveis dadas no Exemplo 11.18 e que forneça o quanto Sueli gastará com ingredientes em cada bolo.

Solução. Como já vimos no Exemplo 11.18, o custo que Sueli terá para fazer o primeiro bolo é dado, em função dos preços dos ingredientes, pela expressão $f(x,y,z,w) = (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w$, que pode ser escrita como

$$f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

O custo que Sueli terá para fazer o segundo bolo é dado por uma expressão análoga, mas onde as entradas da matriz linha correspondem às novas quantidades dos ingredientes: $g(x,y,z,w) = (2/5)x + (1/4)y + (1/4)z + (1/4)w$, ou seja,

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Queremos representar as duas situações por uma única expressão. Vamos fazer isso escrevendo uma matriz coluna

$$\begin{pmatrix} f(x,y,z,w) \\ g(x,y,z,w) \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w \\ (2/5)x + (1/4)y + (1/4)z + (1/4)w \end{pmatrix}_{2\times 1},$$

onde a entrada na primeira linha indica o custo dos ingredientes na produção do primeiro bolo e a entrada na segunda linha indica o custo do segundo bolo. Se quisermos obter essa última matriz a partir da matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ fazendo uma só operação, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 2/5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)x + (1/2)y + (1/2)z + (1/3)w \\ (2/5)x + (1/4)y + (1/4)z + (1/4)w \end{pmatrix}_{2\times 1},$$

onde a matriz 2×4 da esquerda é formada juntando-se as matrizes-linha

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

■

Seguindo o modelo do Exemplo 11.19, podemos definir o produto de uma matriz 2×4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

por uma matriz-coluna 4×1

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}$$

como sendo a matriz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} \end{pmatrix}_{2\times 1}.$$

Esse produto é, portanto, uma matriz coluna 2×1, onde cada linha é um “produto escalar”. Mais precisamente, a matriz $A \cdot B$ tem duas linhas e uma coluna, portanto, tem apenas duas entradas: a da primeira linha é obtida fazendo-se o produto escalar da primeira linha da matriz A pela única coluna da matriz B. O elemento da segunda linha é obtido fazendo-se o produto escalar da segunda linha da matriz A pela única coluna da matriz B.

Podemos considerar, agora, duas matrizes A e B com uma única restrição: *o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B*. Isso permite que possamos fazer produtos escalares das linhas de A pelas colunas de B. Vamos começar com um exemplo.

■ **Exemplo 11.2** Vamos considerar as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Essas matrizes podem ser multiplicadas de duas maneiras: $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Calcule esses produtos.

Solução. Para calcularmos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

devemos proceder da seguinte maneira:

(1) Calcular o produto escalar da primeira linha da matriz A pela primeira coluna da matriz B. Isso vai produzir a entrada que está na primeira linha e na primeira coluna da matriz $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & \\ & \end{pmatrix}.$$

Note que $(2{,}2,-1) \cdot (1{,}5,-1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) = 2 + 10 + 1 = 13$.

(2) Calcular o produto escalar da primeira linha da matriz A com a segunda coluna da matriz B. Isso vai produzir a entrada que está na primeira linha e na segunda coluna da matriz $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ & \end{pmatrix}.$$

Note que $(2{,}2,-1) \cdot (4{,}2{,}1) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 8 + 4 - 1 = 11$.

(3) Para obtermos a entrada que ocupa a segunda linha e a primeira coluna da matriz $A \cdot B$, devemos calcular o produto escalar da segunda linha da matriz A pela primeira coluna da matriz B: $(3{,}1{,}2) \cdot (1{,}5,-1) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) = 6$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & \end{pmatrix}.$$

(4) Finalmente, o produto escalar da segunda linha de A pela segunda coluna de B vai produzir a entrada que está na segunda linha e na segunda coluna de $A \cdot B$: $(3{,}1{,}2) \cdot (4{,}2{,}1) = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 12 + 2 + 2 = 16$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Assim, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$.

É importante observarmos que *a multiplicação de A por B só foi possível, da maneira que fizemos, porque o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.*

Neste exemplo, como o número de colunas de B também é igual ao número de linhas de A, logo, além de $A \cdot B$ podemos calcular o produto $B \cdot A$. Para isso, devemos proceder da mesma forma:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cada uma das três linhas de A tem dois elementos, pois a matriz A tem duas colunas. Cada coluna de B tem dois elementos, pois a matriz B tem duas linhas. Se i e j são números pertencentes ao conjunto $\{1,2,3\}$, o produto escalar da linha i pela coluna j é a entrada da matriz $B \cdot A$ que ocupa a linha situada na linha i e coluna j do produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Além de exercitarem produtos de matrizes, os cálculos acima também mostram que o resultado da multiplicação de duas matrizes A e B *depende da ordem dos fatores*, mesmo quando ambos os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ puderem ser efetuados. De fato, os cálculos acima deram $A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$, uma matriz 2×2, e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 16 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, uma matriz 3×3. Portanto, a multiplicação de matrizes, em geral **não é comutativa**. ■

Em geral, se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times \ell$, então o produto $A \cdot B$ é uma matriz $C_{m\times\ell}$, e cada entrada de C é obtida fazendo-se o produto escalar de uma linha de A por uma coluna de B. Mais precisamente, se

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

é a linha i da matriz A e

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

é a colune j da matriz B, então

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

é a entrada que ocupa a linha i e a coluna j da matriz $C = A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2\ell} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}_{n\times\ell} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i\ell} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}_{m\times\ell}$$

Exercício 11.20 É possível multiplicar, em alguma ordem, as matrizes

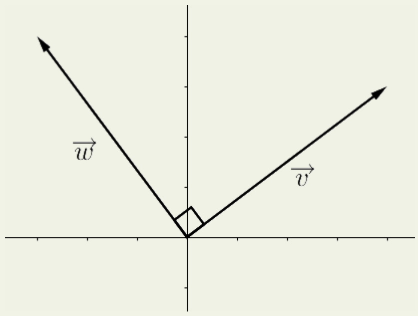
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Solução. Não! Uma das matrizes tem duas linhas e três colunas, e a outra tem cinco linhas e quatro colunas. Para que o produto fosse possível, o número de linhas de uma das matrizes teria que ser igual ao número de colunas da outra, o que não ocorre. ■

11.5.4 – Funções lineares no plano

Vamos, agora, dar uma interpretação geométrica para a multiplicação de matrizes, que, de certa forma, justifica a escolha que fizemos para a maneira de multiplicar uma matriz por outra.

Exercício 11.21 Para cada vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ no plano, seja $\overrightarrow{w}$ o vetor obtido a partir de $\overrightarrow{v}$ fazendo-se uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem, como na figura a seguir:



Considere as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{v} = (x,y)$ e $\overrightarrow{w} = (x',y')$. É possível escrever x' e y' em função de x e y?

Solução. Como $\overrightarrow{w}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{v}$ por uma rotação, temos que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ têm módulos iguais: $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{w}|$, ou seja, $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x')^2+(y')^2}$. Elevando ao quadrado esta última igualdade, obtemos

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2. \tag{11.21}$$

Uma vez que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são perpendiculades, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, o que, em termos de coordenadas, é $xx' + yy' = 0$. Supondo que $y \neq 0$, temos $y' = -\frac{xx'}{y}$. Logo, a igualdade (11.21) pode ser reescrita como

$$(x')^2 + \left(-\frac{xx'}{y}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$(x')^2(x^2+y^2) = y^2(x^2+y^2).$$

Como estamos supondo que o vetor $\overrightarrow{v}$ não é nulo, podemos cancelar x^2+y^2, obtendo $(x')^2 = y^2$, logo, $x' = \pm y$. Por fim, já que a rotação é no sentido anti-horário, devemos escolher $x' = -y$, pois a abscissa x' de $\overrightarrow{w}$ deve ter sinal contrário ao da ordenada y de $\overrightarrow{v}$ (veja a figura anterior). Substituindo $x' = -y$ em $y' = -xx'/y$, obtemos $y' = x$.

Em resumo, a rotação de 90° no sentido anti-horário, em torno da origem, do vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$, resulta no vetor $\overrightarrow{w} = (-y,x)$.

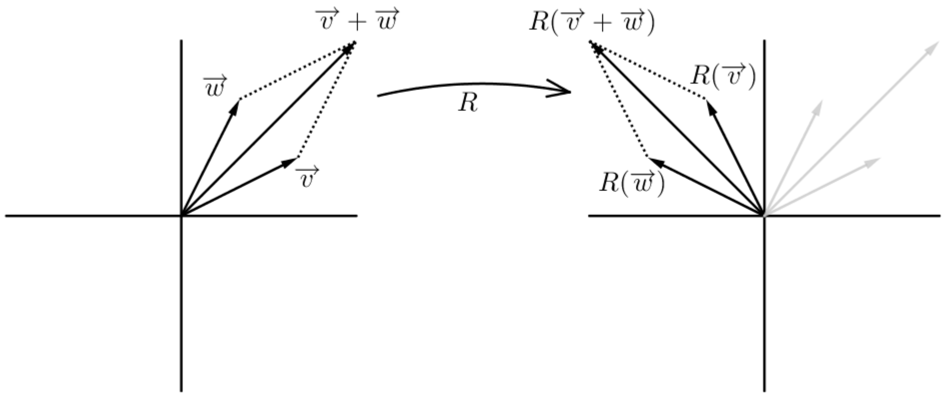
Identificando esses dois vetores com matrizes-coluna e observando que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \tag{11.22}$$

vemos que a ação de girar o vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ de 90° no sentido anti-horário é o mesmo que multiplicar a matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Em outras palavras, **essa rotação pode ser representada por uma multiplicação de matrizes**. ■

Podemos ver a rotação do Exercício 11.21 como uma função, ou transformação, R, do plano no plano, que leva cada vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ em um vetor $\overrightarrow{w} = R(\overrightarrow{v}) = (-y,x)$. O vetor $\overrightarrow{w}$ é obtido pela rotação de 90°, no sentido anti-horário, em torno da origem. Assim, identificando os pares (x,y) e $(-y,x)$ com matrizes colunas, a rotação R pode ser vista como a multiplicação pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, da maneira descrita em (11.22).

Na figura a seguir, à esquerda, são mostrados dois vetores, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, e sua soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



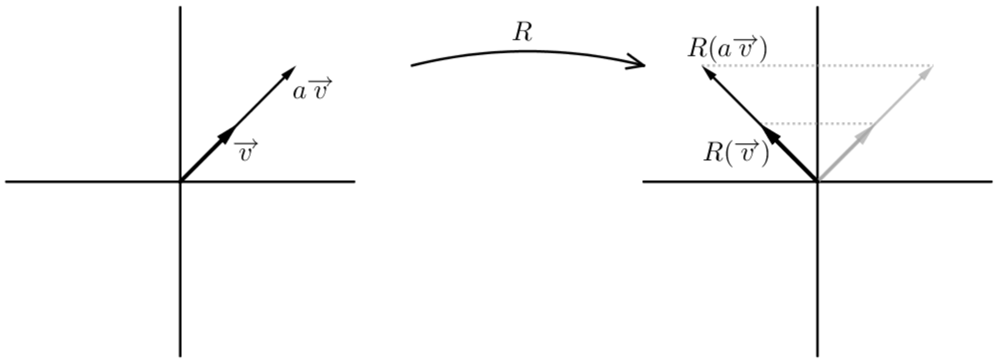
À direita são mostrados os vetores $R(\overrightarrow{v})$, $R(\overrightarrow{w})$ e $R(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, obtidos girando-se os vetores à esquerda de 90°, no sentido anti-horário e em torno da origem. A posição antiga dos vetores, antes da rotação, é mostrada à direita em um tom mais claro.

Note que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são lados de um paralelogramo com uma diagonal igual à soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. A rotação R gira por igual todo o paralelogramo; em particular, a diagonal do paralelogramo girado, que aparece à direita, é $R(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$. No entanto, essa mesma diagonal é a soma dos vetores $R(\overrightarrow{v})$ e $R(\overrightarrow{w})$, que correspondem aos lados desse paralelogramo. Assim, concluímos que a transformação R *preserva somas*, ou seja

$$R(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = R(\overrightarrow{v}) + R(\overrightarrow{w}). \tag{11.23}$$

A figura abaixo, à esquerda, mostra um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ e um múltiplo escalar $a\overrightarrow{v}$, onde a é um número real diferente de zero (no caso da figura em questão, $a > 1$). À direita são mostrados os vetores $R(\overrightarrow{v})$ e $R(a\overrightarrow{v})$, obtidos a partir de $\overrightarrow{v}$ e $a\overrightarrow{v}$ por uma rotação de 90°, no sentido anti-horário e em torno da origem. A posição antiga dos vetores, antes da rotação, é mostrada à direita em um tom mais claro.

Vamos nos ater ao caso em que a é positivo. O caso em que $a < 0$ pode ser tratado da mesma forma.



Uma vez que $|\vec{v}| = |R(\vec{v})|$ e $\vec{v} \perp R(\vec{v})$, os vetores $\vec{v}$ e $R(\vec{v})$ correspondem aos catetos de um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa é representada, na figura acima à direita, por um segmento pontilhado. Da mesma forma, como $|a\vec{v}| = |R(a\vec{v})|$ e $a\vec{v} \perp R(a\vec{v})$, os vetores $a\vec{v}$ e $R(a\vec{v})$ correspondem aos catetos de outro triângulo retângulo isósceles.

Assim, esses dois triângulos são necessariamente semelhantes, de forma que

$$\frac{|R(\vec{av})|}{|R(\vec{v})|} = \frac{|a\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{a|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = a;$$

então, $|R(\vec{av})| = a|R(\vec{v})|$. Por fim, uma vez que os vetores $R(\vec{av})$ e $aR(\vec{v})$ têm mesmos sentido e módulo, segue que

$$R(\vec{av}) = aR(\vec{v}), \tag{11.24}$$

ou seja, a transformação R também *preserva multiplicação por escalar.*

Se uma função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem as duas propriedades acima, ou seja, se

(1) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ e
(2) $T(a\vec{u}) = aT(\vec{u})$,

para todos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e todos os escalares a, dizemos que T é **linear**. A rotação R é uma função linear.

Funções lineares têm um comportamento muito *simples* e *previsível.* Vamos considerar uma função linear no plano, ou seja, uma função T que associa, a cada vetor $\vec{v}$ do plano, um vetor $\vec{w}$, também do plano. Como já fizemos no caso da rotação, indicamos isso escrevendo $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Note que não é proibido que esses dois vetores sejam iguais.

Se escolhermos um sistema de coordenadas, os vetores podem ser escritos como pares ordenados. Dentre esses pares ordenados, existem dois especiais, os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$. Eles são especiais porque, a partir deles, podemos escrever todos os outros vetores. Realmente, sendo $\vec{v} = (x,y)$, temos

$$\vec{v} = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Dizemos que a última expressão acima é uma *combinação linear* dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Vamos supor, agora, que sabemos o que a função linear T faz com os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$: digamos que $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$, com a, b,

c, d constantes reais. Então,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x\vec{i} + y\vec{j}) = T(x\vec{i}) + T(y\vec{j}) \\ &= xT(\vec{i}) + yT(\vec{j}) = xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(a,c) + y(b,d) = (ax,cx) + (by,dy) \\ &= (ax + by, cx + dy). \end{aligned}$$

Em resumo, se a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear e sabemos o que ela faz com os vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$, digamos, $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$, então conseguimos determinar completamente a função:

$$T(x,y) = (ax + by, cx + dy). \tag{11.25}$$

Mais ainda, a expressão em (11.25) pode ser escrita como

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{11.26}$$

Note que as *colunas* da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ são exatamente as imagens dos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ pela função T.

Exercício 11.22 Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função linear do plano tal que $T(1,0) = (1,2)$ e $T(0,1) = (-1,-1)$. Encontre $T(6,5)$.

Solução. A função T é dada por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y, 2x - y).$$

Em particular, $T(6,5) = (6 - 5, 2 \cdot 6 - 5) = (1,7)$. ∎

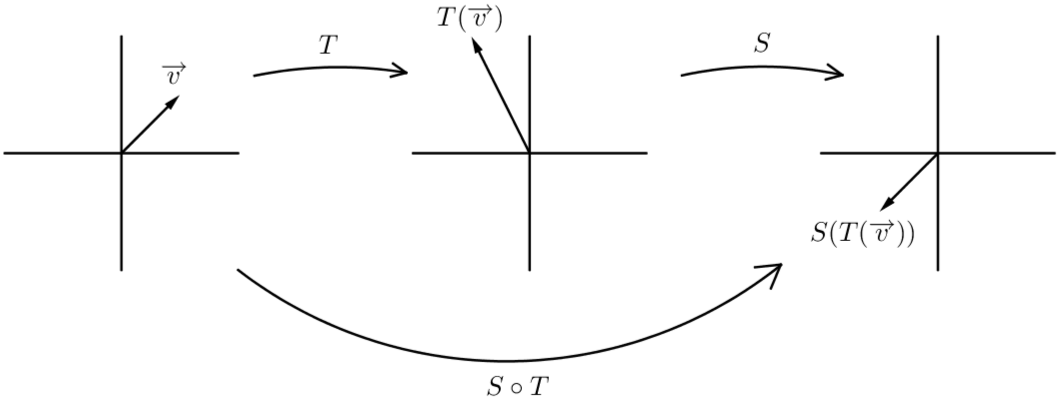
Vamos considerar, agora, duas funções lineares S e T no plano, tais que

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O que acontece quando aplicamos uma dessas funções e depois a outra? Um vetor $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ é levado pela função T no vetor $T(\vec{v})$, e este vetor é levado em $S(T(\vec{v}))$ pela função S. Assim, as funções T e S, aplicadas uma depois da outra, nessa ordem, dão origem a uma nova função, que transforma o vetor $\vec{v}$ *diretamente* no vetor $S(T(\vec{v}))$. Usamos a notação $S \circ T$ para indicar essa função, e a chamamos de **função composta** de S e T.



Podemos calcular $S(T(\overrightarrow{v}))$, considerando as coordenadas de $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned} S(T(x,y)) &= S(ax+by,cx+dy) \\ &= (a'(ax+by)+b'(cx+dy),c'(ax+by)+d'(cx+dy) \\ &= ((a'a+b'c)x+(a'b+b'd)y,(c'a+d'c)x+(c'b+d'd)y) \\ &= \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O fato notável, aqui, é que a matriz que corresponde à função composta $S \circ T$ é

$$\begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

que é o produto das matrizes de S e de T. Assim, encontramos mais uma razão para fazermos a multiplicação de matrizes da forma como explicamos anteriormente. Ao todo, temos três justificativas para realizarmos a multiplicação de matrizes dessa maneira. São elas:

(1) A multiplicação de matrizes generaliza o produto interno.
(2) Podemos associar funções lineares a matrizes. Embora isto valha em geral, fizemos aqui apenas o caso em que a função linear é uma transformação do plano, que corresponde a uma matriz 2×2.
(3) A composta de duas funções lineares corresponde ao produto das matrizes que as representam.

Exercício 11.23 A rotação R, do Exercício 11.21, é dada, de acordo com a expressão (11.22), por

$$R(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encontre a matriz da rotação de 180° em torno da origem.

Solução. A rotação de 180° é obtida a partir de duas rotações de 90°. Logo, esta rotação é dada pela função composta $R \circ R$, cuja matriz correspondente é o produto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, aplicar a rotação de 180° a um vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ equivale a multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

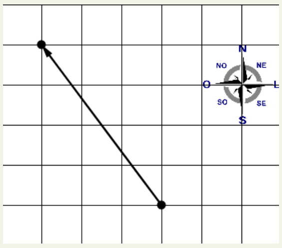
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix},$$

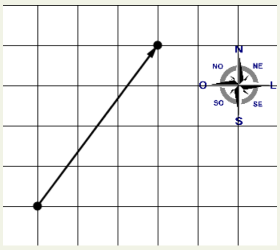
ou seja, a rotação de 180° transforma o vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ no vetor $-\overrightarrow{v} = (-x, -y)$. ■

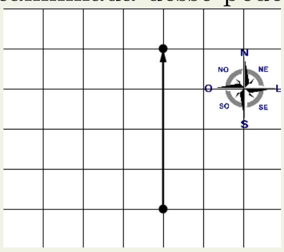
11.6 – Exercícios

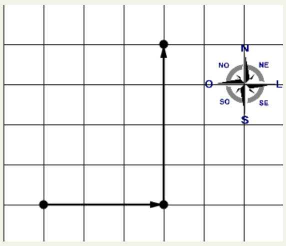
Nível 1

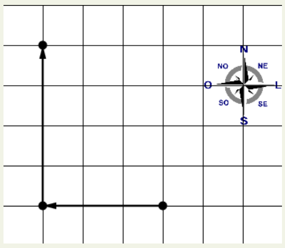
Exercício 11.24 Em um bairro cujos quarteirões são quadrados de lado $100m$, um pedestre caminhou quatro quarteirões de Sul para Norte e depois três quarteirões de Leste para Oeste. Assinale a figura que melhor representa o vetor deslocamento correspondente a toda a caminhada desse pedestre.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

Exercício 11.25 A soma de uma quantidade finita de vetores no plano é igual ao vetor nulo. Um desses vetores é $\overrightarrow{v} = (1, -2)$. Se retirarmos esse vetor, a soma dos demais vetores é igual a:

(a) $\overrightarrow{0}$.
(b) $\overrightarrow{v}$.
(c) $(-1,2)$.
(d) $-\overrightarrow{v}$.
(e) Não é possível determiná-la.

Exercício 11.26 Considere os três vetores $\overrightarrow{u} = (2,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2)$ e $\overrightarrow{w} = (7,11)$. Calcule $\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.

Exercício 11.27 O vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ do plano é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{w} = (1,2)$ e tem o mesmo comprimento que este vetor. Pode-se afirmar que:

(a) $\overrightarrow{v} = (1,2)$ ou $\overrightarrow{v} = (-1,-2)$.
(b) $\overrightarrow{v} = (2,1)$ ou $\overrightarrow{v} = (-2,-1)$.
(c) $\overrightarrow{v} = (-2,-1)$ ou $\overrightarrow{v} = (2,1)$.
(d) $\overrightarrow{v} = (2,-1)$ ou $\overrightarrow{v} = (-2,1)$.
(e) $\overrightarrow{v} = (1,2)$ ou $\overrightarrow{v} = (-1,2)$.

Exercício 11.28 Um grupo com quatro pessoas está conversando sobre os livros que já leram. Eles fizeram uma lista com cinco livros e querem organizar as informações sobre quem já leu esses livros. Para isso, compuseram uma tabela na qual só aparecem zeros e uns, com as pessoas corrrespondendo às linhas e os livros às columas. Um 0 significa que uma pessoa não leu um livro, e um 1 significa que uma pessoa leu um livro. Supondo que a tabela obtida foi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

assinale a única alternativa verdadeira:

(a) Uma pessoa leu todos os livros.
(b) Um livro foi lido por todas as pessoas.
(c) Uma pessoa não leu livros.
(d) Duas pessoas leram exatamente os mesmos livros.
(e) Um livro foi lido por apenas uma pessoa.

Exercício 11.29 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule as potências A^2, A^3, A^4, etc. A potência A^{2020} é igual a.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nível 2

Exercício 11.30 Considere um pentágono $ABCDE$. A soma de vetores

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

é igual a:

(a) $\overrightarrow{0}$.
(b) $\overrightarrow{EA}$.
(c) $-\overrightarrow{AB}$.
(d) $\overrightarrow{AE}$.
(e) Essa soma depende da forma do pentágono.

Exercício 11.31 Considere os três vetores $\overrightarrow{u} = (2,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2)$ e $\overrightarrow{w} = (7,11)$. Encontre dois números reais x e y tais que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

Exercício 11.32 Considere a função que associa a cada vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ o número $f(\overrightarrow{v}) = f(x,y) = 2x + 3y$.

(1) Verifique que $f(3, -2) = 0$.
(2) Suponha que o vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ seja perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,3)$. Determine o valor de $f(x,y)$.
(3) Se $f(x,y) = 0$, o que podemos afirmar sobre os vetores $\overrightarrow{u} = (2,3)$ e $\overrightarrow{u} = (x,y)$?

Exercício 11.33 A tabela a seguir mostra o preço, em reais, de três itens, A, B e C, em dois supermercados, X e Y.

	A	B	C
X	12	10	25
Y	11	15	22

Suponha que uma pessoa deseje comprar 6 unidades do produto A, 7 unidades do produto B e 5 unidades do produto C. Em qual supermercado será mais vantajoso fazer a compra?

(a) Somente no supermercado X.
(b) Somente no supermercado Y.
(c) Em qualquer dos dois.
(d) Não há dados suficientes.

Exercício 11.34 A *inversa* de uma matriz A é uma matriz B tal que $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são iguais à matriz identidade. Suponha que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e que

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a inversa de A. A partir da igualdade

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos concluir que.

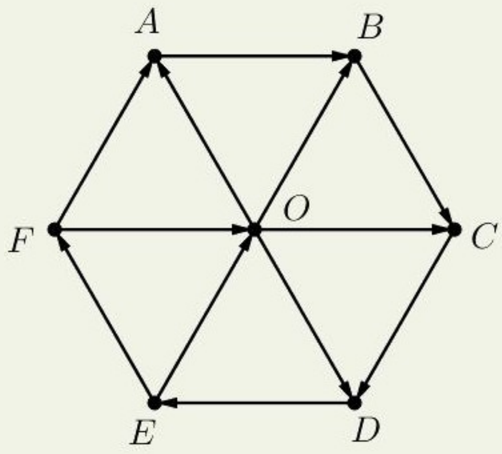
(a) $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = 1$.
(b) $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 1$.
(c) $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.
(d) $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 0$.
(e) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = 0$.

Nível 3

Exercício 11.35 Sejam $\overrightarrow{u} = (1,1)$ e $\overrightarrow{v} = (-1,2)$. Suponha que $\overrightarrow{w}$ é um vetor do plano, perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$. Então, podemos afirmar que

(a) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$.
(b) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}$.
(c) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.
(d) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
(e) não é possível determinar $\overrightarrow{w}$.

Exercício 11.36 Na figura abaixo, $ABCDEF$ é um hexágono regular.



Pode-se afirmar corretamente que:

(a) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EO}$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.
(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{EF}$.
(c) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$.
(d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$.
(e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$.

Exercício 11.37 Seja $\overrightarrow{u_1} = (1,2,3,4,5)$ e $\overrightarrow{u_2} = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$. Encontre dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tais que

(1) $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$;
(2) $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$, e
(3) $\overrightarrow{v}$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{u_1}$.

Exercício 11.38 A tabela a seguir mostra o preço, em reais, de três itens, A, B e C, em dois supermercados, X e Y.

	A	B	C
X	12	10	25
Y	11	15	22

Suponha que uma pessoa deseje comprar 6 unidades do produto A e 5 unidades do produto C.

(1) Se o consumidor comprar 3 unidades do produto A, 6 unidades do produto B e 9 unidades do produto C, ele vais gastar mais em algum dos supermercados?
(2) Qual é o maior número de unidades do produto B que o consumidor pode comprar de modo que seja mais vantejoso comprar no supermercado Y?

Exercício 11.39 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos afirmar corretamente que:

(a) $A^8 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
(b) $A^6 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
(c) $A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.
(d) $A^{12} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$.
(e) $A^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 128 & 0 \\ 128 & 0 & 128 \\ 0 & 128 & 0 \end{pmatrix}$.

Nível 4

Exercício 11.40 Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Sejam M, N, P e Q os pontos médios de AB, BC, CD e DA, respectivamente. Verifique que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

Exercício 11.41 Considere os vetores $\overrightarrow{v} = (1,1)$ e $\overrightarrow{w} = (-1,2)$. Existem números *inteiros* m e n tais que $m\overrightarrow{v} + n\overrightarrow{w} = (4,25)$? Em caso afirmativo, determine-os.

Exercício 11.42 Considere os vetores $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$. Dentre os vetores a seguir, assinale o único que é perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(a) $\overrightarrow{w} = (1,1,1)$.
(b) $\overrightarrow{w} = (1,1,-1)$.
(c) $\overrightarrow{w} = (-1,1,1)$.
(d) $\overrightarrow{w} = (1,-1,1)$.
(e) $\overrightarrow{w} = (0,1,1)$.

Exercício 11.43 Considere os pontos $A = (3,2)$, $B = (1,-1)$ e $P = (x,y)$. Suponha que estes três pontos sejam *colineares*, ou seja, os três pontos estejam em uma mesma reta. Então podemos afirmar que as coordenadas do ponto P satisfazem a equação:

(a) $3x - 2y = 0$.
(b) $3x - 2y - 5 = 0$.
(c) $2x - 3y = 0$.
(d) $3x - 2y + 5 = 0$.
(e) $3x - 3y - 1 = 0$.

Exercício 11.44 O vetor $\overrightarrow{w} = (x',y')$ é obtido a partir do vetor $\overrightarrow{v} = (x,y)$ fazendo-se uma rotação de 60°, no sentido anti-horário. Se a matriz 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisfaz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

podemos dizer que:

(a) $a = 1/2$, $b = -\sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.
(b) $a = -1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.
(c) $a = 1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.
(d) $a = 1/2$, $b = -\sqrt{3}/2$, $c = \sqrt{3}/2$, $d = -1/2$.
(e) $a = 1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $c = -\sqrt{3}/2$, $d = 1/2$.

Exercício 11.45 Encontre

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{2020}.$$

Sugestão: calcule as primeiras potências dessa matriz, com expoente 1, 2, 3, 4, etc., e tente descobrir um padrão nessas potências. Alternativamente, conclua primeiro que a matriz dada, aplicada a um vetor (x,y), corresponde a uma rotação de 45° no sentido anti-horário. Então, veja o efeito de 2020 rotações de 45°.

Exercício 11.46 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calcule A^2, A^3 e A^4.
(2) Verifique que $(I - A)(I + A + A^2 + A^3) = I - A^4$, onde I é a matriz identidade 4×4.
(3) Determine, usando os itens anteriores, a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 11.47 A *transposta* de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é a matriz $A^t = (b_{ji})_{n\times m}$, onde $b_{ji} = a_{ij}$, para $i \in \{1,\dots,m\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$. Isto significa que *as linhas de A^t são as colunas de A e as colunas de A^t são as linhas de A.*

Dizemos que uma matriz A é *simétrica*, quando $A^t = A$. Dizemos que uma matriz A é *antissimétrica* quando $A^t = -A$.

(1) Verifique que matrizes simétricas e antissimétricas são quadradas.
(2) Verifique que os elementos da diagonal principal de uma matriz antissimétrica são todos nulos.
(3) Dada uma matriz quadrada A, construa as matrizes $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t$ e $T = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t$. Verifique que S é simétrica e T é antissimétrica.
(4) Verifique que $A = S+T$, ou seja, toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.
(5) Verifique que a única maneira de escrever uma matriz quadrada como a soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica é a descrita nos itens (3) e (4).