

ⁱ
**MATERIAL
DIDÁTICO
ESTRUTURADO**

#oco
na Aprendizagem

MATEMÁTICA

2025

Assuntos deste material

Números racionais e proporcionalidade

Funções afins e quadráticas

Funções exponenciais

Probabilidade e dados

Geometria e Trigonometria

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica

UFC/FUNCAP/SEDUC



Coordenadoria Estadual de
Formação Docente e
Educação a Distância
CED



CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

**CEARÁ
EDUCA**



CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C387m Ceará, Secretaria da Educação do
Material Didático Estruturado de Matemática [recurso
eletrônico] / Secretaria da Educação do Ceará. — Fortaleza:
SEDUC, 2025.

Livro eletrônico
ISBN 978-85-8171-624-4 (E-book)

1. Matemática. 2. Ensino médio. 3. Material didático. I. Lira,
Jorge Herbert Soares de. II. Nunes, Alexmay Soares. III.
Título.

CDD: 510.07

Todos os direitos reservados à
Secretaria da Educação do Estado do Ceará – Centro Administrativo Virgílio Távora
Av. General Afonso Albuquerque Lima, s/n – Cambeba. Fortaleza/CE – CEP: 60.822-325

GOVERNADOR
Elmano de Freitas da Costa
VICE-GOVERNADORA
Jade Afonso Romero

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretária Executiva de Cooperação com os Municípios	Emanuele Grace Kelly Santos Ferreira
Secretário Executivo da Equidade, Direitos Humanos, Educação Complementar e Protagonismo Estudantil	Helder Nogueira Andrade
Secretária Executiva de Ensino Médio e Profissional	Maria Jucineide da Costa Fernandes
Coordenadora de Educação em Tempo Integral	Ana Paula Nogueira
Coordenadora de Gestão Pedagógica do Ensino Médio	Ideigiane Terceiro Nobre
Coordenadora de Avaliação e Desenvolvimento Escolar para Resultados de Aprendizagem	Kelem Carla Santos de Freitas
Coordenador da Educação Profissional	Tadeu Valente Celedonio
Coordenadora Estadual da Formação Docente e Educação a Distância	Vagna Brito de Lima
Centro de Formação e Desenvolvimento para os Profissionais da Educação do Ceará	Ronaldo Glauber Maia de Oliveira
Cientista-Chefe da Educação	Jorge Herbert Soares de Lira
Elaboração e revisão de texto	Jorge Herbert Soares de Lira (autor) Alexmay Soares Nunes (autor) Annelise Maymone (revisora) Cristina Régia Barreto Moreira (revisora) Francisca Aglaíza R. S. Gonçalves (revisora) Pauliane Ibiapina Girão (revisora)

1 | Apresentação

Caro professor, apresentamos a seguir o Material Didático Estruturado (MDE) da Matemática “Foco na Aprendizagem”, que consiste no desenvolvimento de ações integradas voltadas à recomposição das aprendizagens, implementação do Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC) e do modelo estadual de Educação Híbrida, articulando ações didático-pedagógicas por meio da avaliação diagnóstica-formativa, Tutoria em Língua Portuguesa e Matemática, e formação continuada de professores.

Nesse sentido, o intuito da Coordenadoria de Gestão Pedagógica do Ensino Médio (Cogem) é de subsidiar suporte pedagógico para as atividades de recomposição das aprendizagens da iniciativa Foco na Aprendizagem, com sugestões para o uso do MDE como mais um material de apoio, dentre os já existentes de seu acervo de recursos didáticos nas aulas das áreas de conhecimento e componentes curriculares de sua atuação, respeitando a autonomia didática de cada docente e as especificidades de cada escola.

De modo geral, cada MDE possui suas especificidades, sendo os de Língua Portuguesa e Matemática estruturados por componentes curriculares, e divididos em unidades temáticas voltadas ao desenvolvimento de um objeto de aprendizagem; e os de Ciências Humanas e Ciências da Natureza, estruturados por áreas do conhecimento, divididos em componentes curriculares e subdivididos em capítulos temáticos voltados ao desenvolvimento de um objeto de aprendizagem e em diálogo com elementos do tempo presente dos estudantes. Nesse sentido, há de se enfatizar a finalidade que atravessa toda a estrutura deste material: possuir uma estrutura padrão em que cada uma das seções didáticas está destinada a favorecer diferentes estratégias de recomposição da aprendizagem.

Coordenadoria da Gestão do Ensino Médio - COGEM
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Ensino a Distância - CODED
Coordenadoria de Avaliação e Desenvolvimento para Resultados de Aprendizagem - COADE
Programa Cientista-Chefe em Educação - FUNCAP/UFC/SEDUC

1.1 – Proposta Pedagógica

Caro estudante,

Este caderno foi pensado com muito critério para que se tornasse um material de apoio a sua formação no Ensino Médio. Esperamos que você possa estudar cada página com o mesmo afinho e dedicação com que foi escrita. Os elaboradores e toda a equipe pedagógica envolvida levaram em conta como tornar conceitos e procedimentos matemáticos acessíveis a cada um de vocês.

O Ensino Médio é uma etapa desafiadora não apenas por somos expostos a conhecimentos mais amplos e por sermos demandados em habilidades mais complexas. Essas exigências cognitivas vêm junto com a transição para a vida adulta, com todas as incertezas e oportunidades que estão à frente.

Por isso, esse caderno cuida da necessidade de recompor conhecimentos em Matemática que serão indispensáveis a muitos futuros trajetos e projetos, sejam acadêmicos, sejam profissionais. A Matemática **não** é um mero punhado de fórmulas, um amontado de cálculos e uma disciplina

“difícil”, que causa ansiedade e que, não bastasse tudo isso, nada tem a ver com nosso cotidiano. A verdade sobre essa disciplina é que muitas das profissões que mais despontam em nossos dias requerem, cada vez mais, habilidades relacionadas ao pensamento matemático. Além disso, não podemos exercer plenamente nossa cidadania sem entendermos a linguagem matemática. De fato, basta ver como decisões econômicas e de saúde pública, baseadas em Matemática, afetam o cotidiano de nossas famílias. Estamos imersos na sociedade da informação, em que o uso de dados e de algoritmos determina aspectos de nossas vidas de formas que sequer imaginávamos possíveis há uma década atrás.

Portanto, queremos nos juntar a você no esforço de superar suas eventuais dificuldades nos conceitos essenciais da Matemática. Esse é um processo gradual, em que vamos avançando gradativamente numa espiral. Nesses avanços (em que sempre olhamos para trás para retomar e dar sentido ao que aprendemos), o que importa é termos clareza de quais são as lacunas que devem ser preenchidas e as metas de aprendizagem que devemos e podemos atingir.

Dito isso, vamos explicar como o caderno pode ser usado em **percursos curriculares**. Esses percursos iniciam com tarefas que retomam conhecimentos básicos e, progressivamente, avançam para exercícios e problemas mais complexos. Ao longo desses caminhos, você é convidado a trabalhar inclusive com questões de vestibulares, do ENEM e das avaliações externas, como o SPAECE. O caderno é organizado em seis percursos. Vejamos os principais marcos curriculares em cada um deles.

Primeiro percurso: números racionais e proporcionalidade

O caderno começa por um tema que permite revisitar conhecimentos e habilidades trabalhados, inicialmente, no Ensino Fundamental, em torno da **Aritmética** de números racionais e reais e da noção de **proporcionalidade**. Como metas de aprendizagem associadas a esses objetos de conhecimentos, podemos destacar a compreensão conceitual com respeito ao uso de razões, proporções e porcentagens em diversos contextos e problemas envolvendo taxas de variação, índices (expressos percentualmente, por exemplo) e grandezas relativas.

Neste percurso, trabalhamos, em particular, a localização de **números racionais na reta numérica**. Para isso, precisamos saber quando duas frações são equivalentes e como representar um número racional como fração ou como número decimal. O tópico seguinte, das relações de **proporcionalidade** entre duas variáveis, nos prepara para o estudo das funções afins e equações lineares e de suas representações usando retas no plano cartesiano.

Segundo percurso: funções afins e equações lineares

Neste percurso, avançamos para o estudo das funções afins e das equações lineares em duas variáveis, identificando os gráficos (linhas retas) que as representam e interpretando geometricamente os coeficientes de suas expressões algébricas. Veremos, em seguida, como relacionar funções afins e **equações lineares**. A noção de proporcionalidade é retomada neste percurso para descrever relações lineares entre variáveis ou entre suas variações, modeladas algebricamente em termos de equações lineares ou de **funções afins**. Exploramos, na discussão das questões, o conceito de taxa de variação, representada tanto como coeficiente angular na descrição algébrica das funções afins quanto como razão de **progressões aritméticas**.

Terceiro percurso: equações e funções quadráticas

Neste percurso, ampliamos os modelos de funções entre variáveis reais, apresentando questões que envolvem **funções quadráticas**. Nessas ocasiões, revisitamos as relações entre coeficientes, zeros, máximos/mínimos e propriedades geométricas dos gráficos dessas funções. Em particular, usamos fatos e procedimentos básicos sobre funções quadráticas para modelar e resolver problemas de máximos e mínimos apresentados no ENEM.

Quarto percurso: potências, logaritmos e crescimento exponencial

Avançamos, neste percurso, com o estudo de modelos de funções de uma variável real, trabalhando, neste tema, as **funções exponenciais** e as **progressões geométricas**. Iniciamos com uma discussão de fatos básicos sobre potências de 10 (com expoentes naturais, inteiros e, em seguida, racionais) e de propriedades operatórias da exponenciação. Revisitamos o conceito de **logaritmo** insistindo no fato de que seus usos e propriedades são, de fato, formas práticas de reescrever as propriedades, previamente discutidas, das potências. Apresentamos e utilizamos, nas questões, algumas estimativas para alguns logaritmos em base 10. Aplicamos as propriedades relevantes de potências e logaritmos em questões de avaliações externas e do ENEM, as quais abrangem um escopo bastante diverso de contextos, das Ciências Naturais (Química, Paleontologia, Sismologia, Física) e Tecnologias à Matemática Financeira (quando apresentamos distinções entre crescimento aritmético e crescimento geométrico).

Quinto percurso: probabilidade e dados

Neste percurso, adentramos na linguagem e técnicas estatísticas tal como exploradas nas avaliações externas e no ENEM. Para tanto, estudamos **gráficos** (de colunas, de barras, de setores) e **tabelas**, apresentando dados provenientes de diversos contextos, com o propósito de ler e interpretar as informações que expressam e de basear conclusões a partir da análise dessas informações. Abordamos, ainda, **medidas de tendência centrais** (sobretudo média, mediana e moda) de diversos conjuntos de dados. No que diz respeito à Probabilidade, nossa exposição é centrada na modelagem dos contextos e problemas em termos probabilísticos, abordando conceitos fundamentais espaço amostral distribuição de probabilidade, eventos independentes e probabilidade condicional.

Sexto percurso: objetos e grandezas geométricas no espaço

Ao entrarmos neste percurso, nos concentramos no estudo de objetos e grandezas geométricas no plano e no espaço euclidianos. Abordamos problemas envolvendo invariantes como distâncias e ângulos e grandezas associadas a figuras planas ou especiais como perímetro, área e volume. Revisitamos alguns conceitos e fatos básicos acerca de áreas e volumes no caso de objetos geométricos fundamentais, como retângulos, paralelepípedos, prismas, círculos, cilindros, cones e esferas. Além de problemas de geometria métrica, consideramos questões envolvendo projeções ortogonais, planificações e descrições de movimentos e transformações geométricas sobre figuras espaciais.

Sétimo percurso: geometria analítica e trigonometria em círculos

Finalizamos o caderno com um percurso em que retomamos objetos e grandezas geométricas no plano do ponto de vista algébrico, usando expressões quadráticas em duas variáveis para determinar distâncias entre pontos e para descrever circunferências no plano. De posse dessa linguagem, aprofundamos, então, o estudo das razões e funções trigonométricas definidas por meio de grandezas geométricas em circunferências e triângulos. Ao longo do percurso, apresentamos diversas questões de avaliações externas, do ENEM e de vestibulares acerca desses temas.

Dicas sobre o uso do caderno

Os percursos são independentes, mas recomendamos que você siga a sequência do primeiro ao sétimo. Em cada um, siga a ordem dos exercícios, pois esses aumentam gradualmente em complexidade. Caso sinta dificuldades em alguns deles, registre-as e converse com seu professor a respeito. Não se sinta desencorajado se não conseguir resolver uma ou outra questão: o mais importante é comunicar suas dificuldades para que o professor possa ajudá-lo com mais precisão. Além de recorrer ao professor, recomendamos que consulte outros materiais de apoio. Mencionamos, por exemplo, os seguintes recursos:

- os cadernos do material estruturado do Foco na Aprendizagem: <https://www.ced.seduc.ce.gov.br/foco-na-aprendizagem-matematica-2/>
- Os módulos do Portal da Matemática da OBMEP: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>
- Khan Academy: <https://pt.khanacademy.org/math/em-matematica-bncc>

2 | Percursos curriculares: de conhecimentos básicos à resolução de problemas

Iniciamos, aqui, nossos percursos curriculares, os quais avançam nos temas próprios do Ensino Médio, conectando-os a conhecimentos basilares do Ensino Fundamental. Desse modo, os percursos têm uma estrutura em espiral, no sentido de que conhecimentos e habilidades são retomados em contextos gradualmente mais complexos e mobilizados em atividades que envolvem usos e significados apropriados para cada etapa de progressão curricular e cognitiva.

2.1 – Atividades sobre números racionais e proporcionalidade

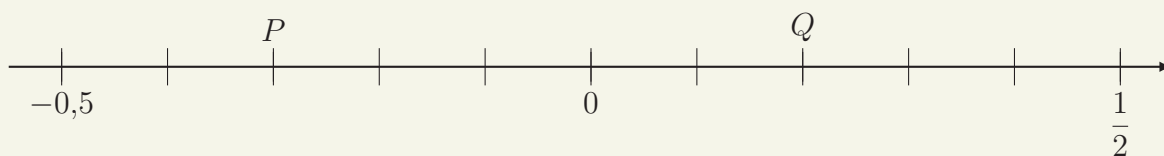
Os percursos curriculares planejados e implementados com apoio deste material seguem uma progressão *em espiral* de conhecimentos e habilidades, iniciada pela retomada de conceitos e procedimentos aritméticos que são basilares para os objetos e estruturas matemáticas próprias do Ensino Médio, a exemplo das funções elementares (afins, quadráticas, exponenciais e trigonométricas e combinações dessas) e do estudo das formas geométricas no espaço euclidiano.

Como efeito culminante do percurso norteado pelo estudo desta seção, desenvolvemos habilidades de modelagem e resolução de problemas associados aos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB para a terceira série do Ensino Médio:

- D14 - Identificar a localização de números reais na reta numérica.
- D15 - Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
- D16 - Resolver problema que envolva porcentagem.

Nos seguintes exercícios, retomamos temas estudados no Ensino Fundamental, dentre os quais a **representação dos números racionais** (em suas formas fracionárias e decimais) como pontos da reta numérica. Esse tópico requer o desenvolvimento das habilidades de estabelecer equivalências e comparações entre números racionais. Outro tópico, também coberto nos seguintes exercícios, é a noção de **proporcionalidade**, mobilizada, aqui, em diversos contextos e problemas.

Questão 1 — SISEDU 2023.2. A reta numérica a seguir está dividida em segmentos de mesmo comprimento.



Sendo assim, os números correspondentes aos pontos P e Q , respectivamente, são

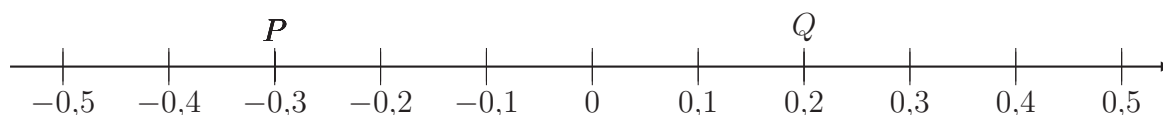
- A) $-0,3$ e $0,2$. B) $-0,7$ e $0,2$. C) $-0,7$ e $-1,2$. D) $0,3$ e $0,8$. E) $0,3$ e $0,2$.

 **Solução.** A questão diz respeito aos seguintes conhecimentos e habilidades:

- Descritor D14 do SAEB: identificar a localização de números na reta numérica.

- Saber S03.H12: identificar a localização de números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, associando pontos a números.

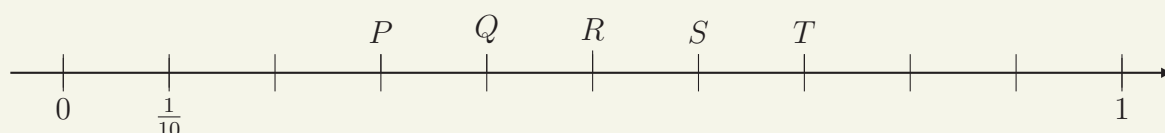
Deve-se observar que as marcas na reta numérica delimitam 10 segmentos de reta de mesma medida. Espera-se que o estudante esteja familiarizado com as diferentes formas (fracionárias ou decimais) de se representar números racionais. Em particular, faz-se necessário perceber que $\frac{1}{2} = 0,5$. Considerando a escala adotada, os pontos marcados variam de $-0,5$ a $0,5$, conforme ilustrado a seguir.



Nota-se que, na escala adotada, a distância entre duas marcas consecutivas é 0,1. Dessa forma, espera-se que o estudante possa observar que o ponto P , estando duas marcas à direita de $-0,5$, corresponde a $-0,5 + 0,1 + 0,1 = -0,3$. Por sua vez, o ponto Q , que está 2 marcas à direita da origem, deve corresponder a $0 + 0,1 + 0,1 = 0,2$.



Questão 2 — SISEDU 2023.2. Na reta numérica representada na seguinte figura, o segmento de 0 a 1 está dividido em segmentos de mesma medida.



O número $\frac{3}{5}$ corresponde a qual dos pontos marcados na reta?

- A) P B) Q C) R D) S E) T

Solução. A questão diz respeito aos seguintes conhecimentos e habilidades:

- Descritor D14 do SAEB: identificar a localização de números na reta numérica.
- Saber S03.H12: identificar a localização de números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, associando pontos a números.

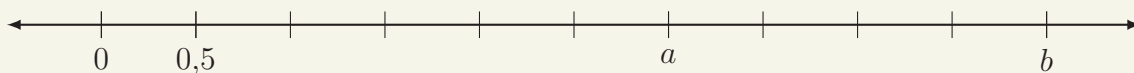
Espera-se, nesta questão, que o estudante perceba que a divisão do segmento de 0 a 1 em 10 intervalos de mesma medida permite determinar os números racionais $1/10$, $2/10$, e assim por diante. Para ajudá-lo nisso, a figura indica a localização de $1/10$ na reta numérica. O segundo passo, feita essa identificação dos múltiplos de $1/10$, consiste em observar a seguinte **equivalência de frações**

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10},$$

o que permite escrever a fração $3/5$ em sua representação decimal. O aluno, assim, deve concluir que $3/5 = 6/10$ é o múltiplo de $1/10$ associado ao sexto marco após 0. Assim, a alternativa correta é D).



Questão 3 — SISEDU 2024.2. A seguinte figura representa números a e b na reta numérica.



O resultado da divisão do número a pelo número b é igual a

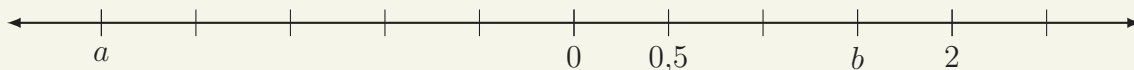
- A) 4. B) 2. C) $\frac{3}{2}$. D) $\frac{3}{5}$. E) $\frac{5}{3}$.

Solução. O estudante deve compreender que a razão entre números inteiros ou racionais pode ser expressa como a comparação de medidas de segmentos. Além disso, deve ter a compreensão de que essa comparação de medidas é efetuada por meio da divisão (e não, por exemplo, da diferença). Sendo assim, observa que o número a expressa a medida do segmento com ponto inicial em 0 e ponto final em a , ou seja, 6 vezes a medida do segmento de 0 a 0,5. Da mesma forma, b expressa a medida do segmento de 0 a b , isto é, 10 vezes a medida do segmento de 0 a 0,5. Portanto, a razão entre a e b é dada por $6/10$.

Note que, adotando a unidade de medida (ou seja, 1) em vez de 0,5 desta unidade, a tem medida igual a 3 unidades de medida e b tem medida igual a 5 unidades de medida. Logo, $a/b = 3/5$.

Isso sugere que a questão possa ser usada em uma discussão em sala de aula a respeito de frações equivalentes que expressam uma mesma medida em diferentes unidades de medida (ou diferentes escalas) na reta numérica.

Questão 4 — SISEDU 2024.1. Observe os números a e b na seguinte figura representando a reta numérica.



Que número corresponde à diferença $b - a$?

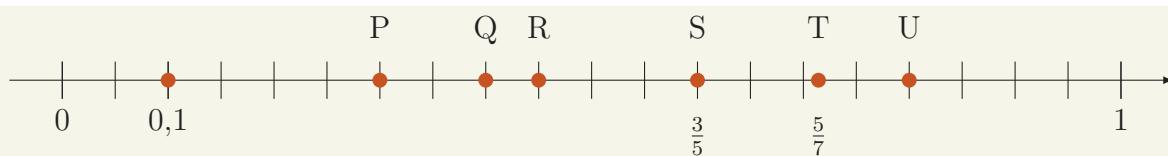
- A) 6,0 B) 4,0 C) 0,8 D) -1,0 E) -4,3

Solução. O estudante deve perceber que dois marcos consecutivos na reta numérica estão distantes um do outro por 0,5 unidade de medida: para isso, basta observar os marcos correspondentes aos números 0 e 0,5. Assim, deduz que $b = 3 \cdot 0,5 = 1,5$. Agora, levando em conta a mudança de orientação, também deduz que $a = -5 \cdot 0,5 = -2,5$. Com isso, calcula, considerando os “sinais”.

$$b - a = 1,5 - (-2,5) = 1,5 + 2,5 = 4,0.$$

Alternativamente, poderia, apenas observar que os pontos a e b estão separados por 8 marcos. Logo, a distância entre eles deve ser $8 \cdot 0,5 = 4,0$.

Questão 5 — SISEDU 2025.1. A reta numérica representada na seguinte figura está dividida em segmentos com medidas iguais a 0,05 da unidade de comprimento.



O número $\frac{3}{4}$ está localizado entre os pontos

- A) P e Q. B) Q e R. C) R e S. D) S e T. E) T e U.

Solução. O estudante deve observar que $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ e, portanto, o ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ deve estar à direita dos pontos P , Q e R , dado que esses estão à esquerda do ponto que corresponde a $\frac{1}{2}$. Além disso, o estudante deve compreender que $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$; finalmente, deve observar que

$$\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$$

uma vez que $4 \cdot 5 < 3 \cdot 7$ ou, alternativamente, pelo fato de

$$\frac{5}{7} = \frac{20}{28} < \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Assim, resta comprovar que o ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ está à esquerda de U . Para tanto, o estudante deve levar em conta que U corresponde a $0,8$, ou seja, a $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$. Dado que

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

(de fato, basta ver que $3 \cdot 5 < 4 \cdot 4$), conclui-se a validade da alternativa E). ■

Questão 6 — PAEBES, Item M090258G5, adaptado. Observe a reta numérica abaixo. Ela está dividida em segmentos de mesma medida.



Qual é o ponto que melhor representa a localização do número $\frac{5}{4}$ nessa reta?

- A) M B) L C) K D) J

Solução. O intervalo $[0, 2]$ está particionado em dez subintervalos de mesma medida. Portanto, cada um tem comprimento $\frac{2}{10} = \frac{4}{20}$. Considerando que

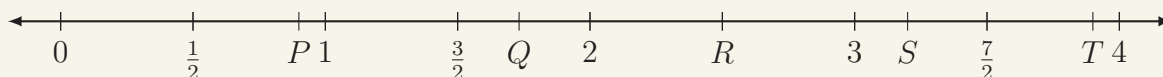
$$M = 4 \cdot \frac{2}{10} = 4 \cdot \frac{4}{20} = \frac{16}{20} < \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

e, similarmente, que

$$L > 7 \cdot \frac{2}{10} = \frac{14}{10} = \frac{28}{20} > \frac{25}{20} = \frac{5}{4},$$

segue que $\frac{5}{4}$ está entre os pontos M e L , sendo mais próximo de L (diferença, em valores absolutos, de $\frac{3}{20}$) do que de M (diferença de $\frac{9}{20}$). Portanto, o ponto L melhor representa a localização do número $\frac{5}{4}$ nessa reta. Segue que a alternativa correta é B). ■

Questão 7 — Quiz Foco na Aprendizagem. Observe os pontos P, Q, R, S e T assinalados na reta numérica representada na seguinte figura.



Assinale a alternativa em que o número real corresponde corretamente ao ponto.

A) $P = 3/7$

B) $Q = \sqrt{3}$

C) $R = 2,75$

D) $S = 15/4$

E) $T = \sqrt{7}$

Solução. Importante que o aluno estabeleça comparações imediatas como $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ ou $\frac{15}{4} > \frac{7}{2}$, o que mostra que os números associados a P e S , respectivamente, estão errados; da mesma forma, como R é ponto médio entre 2 e 3, não pode ser igual a 2,75. A análise das raízes demanda mais dos alunos: no caso de $\sqrt{7}$, pode observar que $\frac{7}{2} > \sqrt{7}$, visto que $2 < \sqrt{7} < 3$; quanto a $\sqrt{3}$, o aluno pode constatar que $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. Em nenhum caso, é preciso lidar com aproximações dos valores dessas raízes. A resposta correta é Letra B).

Obs

Para obter estimativas, dadas por números racionais, de números como $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{7}$, os professores podem discutir, no Laboratório de Matemática, ideias de *algoritmos* como aqueles baseados em métodos numéricos, a exemplo do Método de Newton, em que a raiz quadrada $\sqrt{a}$ de um número real positiva tem aproximações sucessivas dadas pela sequência de números x_n definida, recursivamente, por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

A propósito de dificuldades sobre a aritmética de números reais, recomendamos o caderno *Fortalecendo Aprendizagens, Oitavo e Nono Anos, v. 1*, especialmente seções 1.2 e 1.3, o qual pode ser acessado diretamente com o seguinte QR Code:



Questão 8 — SISEDU 2023.1. Qual das seguintes expressões é verdadeira?

A) $3,705 < 3,7005$.

B) $\frac{4}{6} < \frac{5}{7}$.

C) $\frac{1}{7} > \frac{1}{5}$.

D) $12,5\% > \frac{1}{8}$.

E) $\frac{12}{30} > \frac{3}{5}$.

Solução. A questão diz respeito às seguintes habilidades:

- Saber S03.H09: reconhecer a representação decimal de números racionais, compondo-os e decompondo-os em termos de potências de dez, positivas e negativas.
- Saber S03.H04: compreender e utilizar a noção de equivalência de frações e suas interpretações aritméticas e geométricas, identificando frações equivalentes por métodos aritméticos ou geométricos
- Saber S03.H11: ordenar ou comparar números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, em particular por meio de sua localização na reta numérica.

Com esta questão, pretendemos observar em que grau o estudante domina fatos básicos sobre equivalência e comparação de frações; equivalência entre as representações fracionárias e decimais de um dado número racional; e, finalmente, sobre a extensão do sistema posicional decimal para a representação de números racionais não-inteiros. Esses conhecimentos são basilares para várias habilidades associadas aos descritores D14, D6 e D15 na matriz de referência do SAEB, entre outros.

A definição de equivalência de frações pode ser empregada diretamente nas alternativas B) e E), uma vez que, multiplicando ambos os lados da desigualdade em B) por $7 \cdot 6$, temos

$$7 \cdot 6 \cdot \frac{4}{6} = 7 \cdot 4 < 6 \cdot 5 = 6 \cdot 7 \cdot \frac{5}{7},$$

obtém-se, assim, a desigualdade equivalente $28 < 30$, que é verdadeira; da mesma forma, multiplicando-se numeradores e denominadores nas duas frações em E) por fatores iguais (e não-nulos), temos

$$\frac{12 : 6}{30 : 6} = \frac{2}{5} < \frac{3}{5}.$$

Quanto à alternativa A), o estudante deve observar que

$$3,705 = 3,7 + 0,005 = 3,7 + \frac{5}{1\,000}$$

ao passo que

$$3,7005 = 3,7 + 0,0005 = 3,7 + \frac{5}{10\,000},$$

o que torna verdadeira a desigualdade $3,705 > 3,7005$, contrária a que está escrita na alternativa A). De modo similar, ao compreender o uso do sistema posicional decimal, o estudante pode verificar que

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{125}{1\,000} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%,$$

mostrando que temos igualdade em vez da desigualdade expressa na alternativa D).

Por fim, na alternativa C), cabe enfatizar, para o estudante, que

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5+2} < \frac{1}{5}$$

sem necessidade de recorrer a expansões decimais para justificar a plausibilidade dessa desigualdade. ■

Questão 9 — SISEDU 2024.1. Qual das seguintes desigualdades é verdadeira?

- A) $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$.
- B) $\frac{4}{7} < 0,5$.

C) $\frac{3}{4} < \frac{5}{7}$.

D) $0,605 < 0,6050$.

E) $0,65 < \frac{2}{3}$.

 **Solução.** A questão exercita o uso de critérios para comparação entre dois números racionais, expressos na forma de frações ou de números decimais. Portanto, o estudante deve ser fluente em manusear esses critérios e em estabelecer equivalências entre diferentes representações, fracionárias ou decimais, de um dado número racional.

Por exemplo, na alternativa A), é esperado que o estudante se dê conta de que $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$ sem ter que recorrer a uma (desnecessária) expansão decimal dessas frações. O professor deve buscar representar essas frações (usando segmentos de reta ou barras, por exemplo) para dirimir as dificuldades de estudantes que não compreendam essa desigualdade.

A escolha da alternativa D) também revela deficiências graves com respeito à **compreensão** do sistema decimal, expandido para a representação dos números racionais. A estudantes que tenham assinalado essa alternativa, cabe explicar que

$$0,605 = \frac{6,05}{10} = \frac{60,5}{100} = \frac{605}{1\,000} = \frac{6\,050}{10\,000} = 0,6050.$$

Com respeito à alternativa B), cabe ao professor apresentar, no caso em que os estudantes tenham optado por utilizar a expansão decimal de $\frac{4}{7}$ para estabelecer a comparação, argumentos como o seguinte:

dado que 4 é maior que a metade de 7, temos $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$. Logo, $\frac{4}{7} > 0,5$.

Quanto a alternativa C), temos

$$3 \cdot 7 > 5 \cdot 4,$$

o que implica

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{7}.$$

Por fim, temos

$$3 \cdot 0,65 = 1,80 + 0,15 = 1,95 < 2,$$

concluindo, com isso, que a alternativa correta é E). Cabe usar a discussão sobre essa alternativa para estudar a expansão decimal de $\frac{2}{3}$. ■

Questão 10 Numa gráfica, a impressão de 80 páginas custa R\$ 20,00. Mantida essa proporção, quanto custa a impressão de 60 páginas apenas?

- A) R\$ 10,00. B) R\$ 12,00. C) R\$ 15,00. D) R\$ 24,00. E) R\$ 60,00.

 **Solução.** As habilidades diretamente requeridas neste exercício são:

- Descritor D29 SAEB: resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas
- Saber S04.H3: reconhecer - em gráficos, tabelas e outros suportes - relações de proporcionalidade entre grandezas ou entre variações dessas grandezas.
- Saber S04.H09: determinar termos desconhecidos em uma proporção a partir dos termos dados.

- Saber S04.H8: compreender e efetuar cálculos, bem como resolver problemas, que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais (e.g., divisão em partes proporcionais).

Observe que o aluno pode obter o preço unitário da impressão ao fazer $20 : 80 = 0,25$. Assim, o custo de 60 páginas é $60 \cdot 0,25 = 15$ reais.

Outra estratégia é observar que a impressão de 20 páginas custa $20 : 4 = 5$ reais. Logo, como 60 páginas é o triplo de 20 páginas, a impressão de 60 páginas custa $3 \cdot 5 = 15$ reais. Nesse último raciocínio, cabe ressaltar para o estudante que a escolha de 20 páginas é fundamental, tendo em vista que 20 é um divisor comum (o máximo) de 80 e 60.

Uma terceira estratégia é determinar a razão de $\frac{80}{20} = 4$ páginas por real. Assim, mantida essa razão, temos $60/4 = 15$ conjuntos de 4 páginas, ou seja, 15 reais.



Questão 11 — SPAECE, Item M090167A9. Dirigindo o carro a uma velocidade média de 80 km/h, Luísa demora 30 minutos para ir da Cidade das Flores até a Cidade dos Ventos. Em quanto tempo Luísa faz esse mesmo trajeto, dirigindo esse carro a uma velocidade média de 120 km/h?

- A) 10 minutos. B) 20 minutos. C) 45 minutos. D) 70 minutos.

 **Solução.** Mesmo sem apelar a conhecimentos de Cinemática, intuímos que a velocidade do percurso e o tempo gasto nesse percurso são grandezas inversamente proporcionais: se a velocidade aumenta, o tempo necessário para percorrer uma mesma distância diminui na proporção inversa.

A razão entre a maior velocidade e a menor é

$$\frac{120}{80} = \frac{3}{2}.$$

Portanto, com a velocidade maior, o tempo de percurso passa a ser

$$\frac{2}{3}$$

do tempo gasto em menor velocidade, ou seja, diminui para

$$\frac{2}{3} \cdot 30 = 20 \text{ minutos.}$$

A alternativa correta é B).



Questão 12 — PAEBES, Item M100057CE. Analisando o mapa rodoviário, tem-se que a distância, em linha reta, entre Porto Velho (RO) e Belo Horizonte (MG) é de 2 centímetros, que equivalem a 1 360 quilômetros na realidade. A distância entre Boa Vista (RR) e Rio de Janeiro (RJ) nesse mapa é 5 centímetros.

A distância real, em quilômetros, entre Boa Vista e Rio de Janeiro é

- A) 544. B) 2 720. C) 3 400. D) 6 800. E) 13 600.

 **Solução.** Sabemos que 2 cm no mapa correspondem a 1360 km na realidade. Como as medidas no mapa e na realidade são diretamente proporcionais, a distância entre Boa Vista (RR) e Rio de Janeiro (RJ), na realidade, é igual

$$\frac{5}{2} \cdot 1360 = 3400 \text{ km.}$$

Equivalentemente, é possível deduzir que cada 1 cm no mapa equivale a $\frac{1360 \text{ km}}{2} = 680 \text{ km}$. Logo, a distância entre Boa Vista e Rio de Janeiro é $5 \cdot 680 \text{ km} = 3400 \text{ km}$. A alternativa correta é C). ■

Questão 13 — SPAECE, Item M110017CE. A maquete de um edifício foi construída na escala de 1:400. Se a altura da maquete é 0,08 m, qual é a altura real desse edifício?

- A) 96 metros. B) 48 metros. C) 40 metros. D) 32 metros. E) 24 metros.

 **Solução.** A escala 1 : 400 indica que 1 unidade de medida de comprimento na maquete corresponde a 400 unidades de medida de comprimento na realidade. Assim, a altura real é igual a

$$0,08 \cdot 400 = 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 100 = 32 \text{ m.}$$

A resposta correta é D). ■

Questão 14 — SISEDU 2023.2. Um reservatório de combustível tem capacidade para 4800 litros. Quando está com 1600 litros, o reservatório é reabastecido por um caminhão tanque a uma taxa de 40 litros por minuto.

O tempo do reabastecimento até o enchimento total do reservatório é

- A) 320 min. B) 160 min. C) 120 min. D) 80 min. E) 40 min.

 **Solução.** A questão diz respeito aos seguintes conhecimentos e habilidades:

- Descritor D15 do SAEB: resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
- Saber S04.H11: formular e resolver problemas que envolvam grandezas relativas, como velocidades, densidades, fluxos, vazões e outras taxas de variação entre grandezas, motivadas por diversos contextos e aplicações.
- Saber S04.H12: reconhecer, em diferentes contextos, aplicações e problemas, quando grandezas não são proporcionais, direta ou inversamente.
- Saber S04.H09: determinar termos desconhecidos em uma proporção a partir dos termos dados.
- Saber S02.H12: utilizar, de modo correto e justificado, procedimentos e algoritmos de multiplicação de números naturais ou inteiros.

A resolução desse problema exige mais de uma habilidade. Além de ler e interpretar o que o problema solicita, o aluno deve modelá-lo em termos do cálculo de uma taxa de variação que determine a *velocidade* de abastecimento do reservatório. Para tanto, deve efetuar primeiramente a subtração entre 4800 e 1600, encontrando 3200. Em seguida, tem que efetuar a divisão de

3 200 por 40 a fim de encontrar quantos minutos serão necessários para encher o reservatório, já parcialmente preenchido. Em suma, deve realizar cálculos como os seguintes:

$$\frac{4\,800 - 1\,600}{40} = \frac{3\,200 \text{ litros}}{40 \text{ litros por minuto}} = 80 \text{ minutos.}$$

Concluimos que a resposta correta é D).

Questão 15 — SISEDU 2023.2. Em uma confecção, 5 costureiras com mesma produtividade conseguem produzir 60 camisas por dia.

Mantida essa proporção, quantas costureiras devem ser contratadas a mais para que a produção passe a ser de 96 camisas por dia?

- A) 3 B) 5 C) 8 D) 12 E) 36

 **Solução.** A questão diz respeito aos seguintes conhecimentos e habilidades:

- Descritor D15 do SAEB: resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
- Saber S04.H10: compreender e utilizar corretamente propriedades operacionais de razões e proporções, inclusive quando expressas na forma das chamadas “regras de três”, combinando grandezas direta e/ou inversamente proporcionais.
- Saber S04.H09: determinar termos desconhecidos em uma proporção a partir dos termos dados.
- Saber S02.H17: reconhecer múltiplos e divisores de um dado número natural, utilizando, em particular, tábuas de multiplicação e critérios de divisibilidade na resolução de problemas.

A quantidade adicional de camisas que precisam ser produzidas é $96 - 60 = 36$. Tendo em conta que 5 costureiras, cada uma das quais com *mesma* produtividade, produzem 60 camisas, uma dessas costureiras produz

$$\frac{60}{5} = 12 \text{ camisas.}$$

Assim, seria preciso

$$\frac{36}{12} = 3$$

novas costureiras, trabalhando com essa mesma produtividade. Alternativamente, o aluno pode calcular o número total de costureiras por meio da razão

$$\frac{96}{12} = 8$$

costureiras, ou seja, $8 - 5 = 3$ novas costureiras seriam necessárias, o que corresponde à alternativa A).

Em uma abordagem de aspecto mais algébrico, denotando por x a quantidade adicional de costureiras, teríamos as relações de proporcionalidade

$$\frac{x}{36} = \frac{5}{60} \Rightarrow x = 36 \cdot \frac{5}{60} \Rightarrow x = \frac{36}{12} \Rightarrow x = 3$$

Questão 16 — SISEDU 2021.1. Lucas, Miguel e Cícero alugaram um carro para trabalhar com um aplicativo de transporte de passageiros. Combinaram utilizar o carro de forma que Lucas trabalha 6 horas por dia, Miguel trabalha 5 horas por dia e Cícero trabalha 4 horas por dia. Quanto Cícero deve receber, proporcionalmente ao tempo que trabalha, caso os três juntos apurem, em um dia, um total de R\$ 360,00?

- A) R\$ 4,00 B) R\$ 24,00 C) R\$ 90,00 D) R\$ 96,00 E) R\$ 120,00

 **Solução.** O total de horas trabalhadas pelos três motoristas é

$$6 + 5 + 4 = 15.$$

Portanto, *cada hora de trabalho* vale

$$\frac{360}{15} = 24 \text{ reais.}$$

Como o trabalho de Cícero dura 4 horas, ele deve receber, proporcionalmente,

$$4 \cdot 24 = 96 \text{ reais.}$$

A questão envolve o uso de razões, proporções ou equações lineares, relacionado às habilidades H15 e H16 na competência de área 4 da Matriz de Referência do ENEM e a habilidades como “resolver problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples” ou “resolver problema envolvendo a relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas”, associadas, respectivamente aos níveis 4 e 5 da Escala de Proficiência do SAEB. Por fim, o item contempla, entre outros, o descritor D15 da Matriz de Referência do SAEB.

Questão 17 Um dado modelo de carro consome cerca de 1 litro de gasolina a cada 20 quilômetros. Supondo que 1 litro de gasolina custe R\$ 5,00, o custo total com gasolina correspondente a um percurso de 300 quilômetros, realizado com este modelo, dada esta média de consumo, é, aproximadamente, igual a

- A) 15 reais. B) 20 reais. C) 60 reais. D) 75 reais. E) 100 reais.

 **Solução.** O consumo *médio* do carro é de 1 litro a cada 20 quilômetros ou, uma vez que, $300 = 15 \cdot 20$, de 15 litros em um percurso de 300 quilômetros. Como cada litro de gasolina custa R\$ 5,00, o custo total é de R\$ 75,00.

O problema lida com *taxas de variação* ou *constantes de proporcionalidade* entre pares de variáveis, sendo, portanto, relevante para a análise da consolidação das habilidades H15, H16 e H17 na Matriz de Referência do ENEM, também relacionadas aos descritores D15 e D19 da Matriz de Referência do SAEB e a habilidades como “determinar o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta a partir de três valores fornecidos em uma situação do cotidiano” e “resolver problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples”, descritas nos níveis 3 e 4, respectivamente, da Escala de Proficiência do SAEB.

Questão 18 O consumo médio de energia elétrica de um modelo de carro elétrico é de 0,196 quilowatt-hora por quilômetro percorrido. A energia elétrica acumulada na bateria do carro, se estiver totalmente carregada, é de 40 quilowatts-hora. Considerando esses dados, a distância máxima que pode ser percorrida pelo carro com apenas $\frac{1}{4}$ da carga total da bateria é aproximadamente igual a

- A) 8 quilômetros.
- B) 10 quilômetros.
- C) 50 quilômetros.
- D) 80 quilômetros.
- E) 200 quilômetros.

 **Solução.** Nesta sequência de questões (de 17 a 19), relacionamos taxas de variação de diferentes variáveis, desta vez introduzindo algum grau de dificuldade técnica tanto no uso de operações com números decimais quanto no contexto, que envolve grandezas menos familiares, mas cujo conhecimento preciso e formal não é demandado na solução da tarefa. Dado que $\frac{1}{4}$ da carga total da bateria equivale a

$$\frac{1}{4} \cdot 40 = 10 \text{ quilowatt-hora}$$

e, dado que o consumo médio de energia elétrica é de 0,196 quilowatt-hora por quilômetro, concluímos que a autonomia do carro será de

$$\frac{10}{0,196} = \frac{100}{1,96} \approx \frac{100}{2} = 50 \text{ quilômetros.}$$

■

Questão 19 A tabela abaixo estabelece comparações entre distâncias percorridas e os custos totais de gasolina para percorrê-las, usando carros de cinco diferentes modelos, que indicaremos como A, B, C, D e E.

Modelo	Distância percorrida	Custos
M_1	240 quilômetros	80 reais
M_2	300 quilômetros	75 reais
M_3	360 quilômetros	150 reais
M_4	360 quilômetros	100 reais
M_5	400 quilômetros	200 reais

Considerando apenas esses dados, qual o modelo mais econômico?

- A) M_1 B) M_2 C) M_3 D) M_4 E) M_5

 **Solução.** Basta calcularmos os consumos médios, representados pelas razões entre as distâncias percorridas e os custos, como medidas do quanto os modelos são econômicos. Comparando e ordenando essas frações, temos

$$\frac{400}{200} = 2 < \frac{360}{150} < 3 = \frac{240}{80} < \frac{360}{100} < \frac{300}{75}.$$

As questões 17 a 19 delineiam uma sequência cognitivamente progressiva de itens sem, necessariamente, um acréscimo considerável de dificuldade técnica. A questão 17 resumia-se ao cálculo direto de uma taxa de variação ou, posto de outro modo, à determinação de um termo desconhecido em uma relação de proporcionalidade. Encerrava alguma demanda técnica por combinar informações de 3 variáveis proporcionalmente relacionadas: custo do combustível, consumo de combustível, distância percorrida. O segundo item, a questão 18, embora não demandasse habilidades cognitivas complexas, exigia maior domínio das manipulações aritméticas, o que aumenta o grau de dificuldade procedimental. Fechando a série, a questão 19 distingue-se dos dois itens anteriores pelo maior grau de complexidade: o estudante deve, a partir do comando, que não é explícito quanto ao procedimento a ser efetuado, reconhecer que operações aritméticas devem ser efetuadas para conduzir à resposta que se pede, a saber, qual o modelo *mais econômico*. Isto requer que o estudante recupere os modelos mentais de que dispõe em seu repertório de conhecimentos e habilidades. Caso reconheça ser preciso calcular razões ou determinar taxas de variação custos/distâncias, deve efetuar as contas corretamente e, em seguida, **interpretar** os resultados obtidos como dados que darão sustentação a sua resposta. Por esta complexidade, o item envolve mais habilidades da Matriz de Referência do ENEM e do SAEB, com maior alcance cognitivo do que os dois itens anteriores.

Questão 20 Considerando a distância percorrida e o combustível consumido para percorrê-la, utilizando um dado modelo de carro, qual das seguintes expressões melhor descreve o quanto esse modelo é econômico?

- A) consumo de combustível + distância percorrida
- B) distância percorrida – consumo de combustível
- C) consumo de combustível $\times$ distância percorrida
- D) distância percorrida : consumo de combustível
- E) consumo de combustível : distância percorrida

 **Solução.** O propósito desta questão é o de acessar a habilidade do estudante em modelar o conceito de “modelo econômico” de carro como uma relação matemática formal entre as variáveis de interesse, a saber, a distância percorrida e o consumo de combustível. Portanto, a questão não envolveria um procedimento aritmético com números dados, mas a elaboração de um modelo algébrico a partir do contexto dado.

Questão 21 Uma montadora de automóveis planeja deixar de vender carros a gasolina e diesel em 2035, passando a vender apenas carros elétricos.

Fonte: **Folha de São Paulo**. Disponível em:
<https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2021/01/gm-quer-encerrar-vendas-de-carros-a-gasolina-e-diesel-em-2035.shtml>.

Acesso em: 12 de fevereiro de 2021.

Se as vendas de carros elétricos representam, atualmente, apenas 0,008 das vendas totais de automóveis dessa montadora, em quantas vezes essas vendas devem crescer para que atinjam a meta desejada em 2035?

- A) 1,25 vez.
- B) 12,5 vezes.

- C) 125 vezes.
- D) 1 250 vezes.
- E) 12 500 vezes.

 **Solução.** Bastaria interpretarmos a sentença “vender apenas carros elétricos” como a meta desejada em 2035, isto é, que os carros elétricos passem de 0,008 para 100% da venda total de automóveis da montadora. O aumento seria de

$$\frac{1}{0,008} = \frac{1\,000}{8} = 125 \text{ vezes.}$$



2.2 – Atividades sobre funções afins e equações lineares

Na sequência que estamos concretizando neste material, partimos do conceito de proporcionalidade para o estudo, algébrico e gráfico, das funções afins e das equações lineares em duas variáveis. Em particular, apresentamos questões que exploram a representação desses objetos algébricos em termos de retas no plano cartesiano. Algumas dessas questões apresentam contextos usuais em avaliações externas, ENEM e vestibulares.

O propósito é assegurar a gradual transição do enfoque aritmético para a formulação algébrica própria do estudo das funções no Ensino Médio.

Portanto, exploramos, nesta seção, os seguintes objetos de conhecimento, dentre outros:

- (a) Razões e proporções: frações interpretadas como razões entre números naturais; equivalência de frações e relações de proporcionalidade; números racionais expressando constantes de proporcionalidade;
- (b) Valores de pares de grandezas diretamente proporcionais: constantes de proporcionalidade e taxas de variação;
- (c) Variação percentual, grandezas relativas (velocidades, densidades e fluxos) e taxas de variação; crescimento linear (por exemplo, juros ou acréscimos simples); progressão aritmética e taxas de variação constantes;
- (d) Sistemas de coordenadas cartesianas: noções de paralelismo e perpendicularidade no plano, escolha de eixos cartesianos e unidade de medida nos eixos, projeções ortogonais e definição das coordenadas cartesianas; pontos com coordenadas cartesianas racionais; localização aproximada e exata de pontos com coordenadas reais;
- (e) Pontos no plano correspondentes a valores de pares de variáveis com variações diretamente proporcionais; alinhamento de pontos no plano e relações de proporcionalidade; noção intuitiva de função (a partir de gráficos no plano); contextos envolvendo representação de dados;
- (f) Relações de proporcionalidade entre (variações de) duas variáveis em termos de equações lineares;
- (g) Equações lineares definidas a partir de pontos alinhados no plano;
- (h) Retas no plano como lugares geométricos das soluções de uma equação linear;
- (i) Funções afins: conceitos, procedimentos e aplicações;
- (j) Correspondências entre equações lineares em duas variáveis e funções afins;
- (k) Representação gráfica de equações lineares e de funções afins utilizando retas no plano cartesiano;

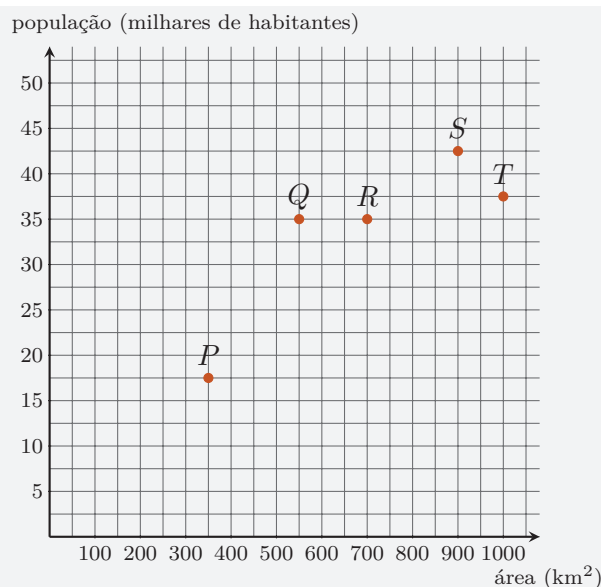
- (l) Interpretação dos coeficientes angular e linear como taxas de variação (constantes de proporcionalidade entre variações correspondentes das variáveis) e coordenadas de intersecção com o eixo vertical, respectivamente;
- (m) Efeitos de movimentos geométricos sobre os coeficientes e da mudança de coeficientes sobre a posição da reta relativamente aos eixos;
- (n) Problemas envolvendo funções afins e equações lineares;
- (o) Aplicações em Cinemática, Geografia e em outros componentes curriculares;
- (p) Aplicações de equações lineares e funções afins em contextos científicos (por exemplo, movimento uniforme, escalas geográficas), cotidianos (acréscimos simples em operações financeiras, estimativas simples baseadas em proporcionalidade) e informativos (rudimentos de regressão linear, infográficos).

O estudo desta seção contribui, portanto, para desenvolver e mobilizar conhecimentos e habilidades relacionados aos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB para Matemática da terceira série do Ensino Médio:

- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;
- D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta;
- D8 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação;
- D9 - Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas;
- D15 - Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas;
- D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela;
- D19 - Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau;
- D21 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto;
- D22 - Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral;
- D23 - Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes;
- D24 - Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.

Leia o seguinte texto para responder às questões 22 a 24.

No plano cartesiano na seguinte figura, as coordenadas dos pontos P , Q , R , S e T nos eixos horizontal e vertical correspondem, respectivamente, às áreas territoriais (em quilômetros quadrados) e às populações (em milhares de habitantes) de cinco municípios brasileiros, em valores aproximados.



A **densidade demográfica**, em cada município, é a razão entre o número de habitantes e sua área territorial, ou seja, o número médio de habitantes por quilômetro quadrado naquele município.

Questão 22 Quais as coordenadas do ponto P ?

- A) (17,5; 350).
- B) (300; 15).
- C) (301; 16).
- D) (350; 17,5).
- E) (400; 20).

Solução. O estudante precisa mobilizar conhecimentos básicos sobre coordenadas cartesianas no plano. Nesse caso, deve atentar para as unidades de medida utilizados nos eixos: as distâncias entre as retas verticais consecutivas no reticulado cartesiano (e entre os pontos correspondentes no eixo horizontal) correspondem a 50 km^2 ao passo que as distâncias entre as retas horizontais consecutivas (e entre os pontos correspondentes no eixo vertical) correspondem a 2,5 unidades (ou seja, 2 500 habitantes). Sendo assim, o ponto P tem abscissa 350 e ordenada 17,5.

Questão 23 Qual a densidade demográfica do município R ?

- A) 0,02 habitantes por quilômetro quadrado.
- B) 0,05 habitantes por quilômetro quadrado.
- C) 20 habitantes por quilômetro quadrado.
- D) 35 habitantes por quilômetro quadrado.
- E) 50 habitantes por quilômetro quadrado.

Solução. O estudante deve compreender que a comparação ou *razão* entre as medidas das grandezas “população” e “área territorial”, que define a densidade como uma grandeza relativa, é

expressa, aritmética e algebricamente, como o *quociente* entre essas medidas.

No caso do município representado pelo ponto R , temos

$$\text{densidade} = \frac{\text{população}}{\text{área territorial}} = \frac{35\,000}{700} = \frac{350}{7} = 50$$

habitantes por quilômetro quadrado.

Esses cálculos pressupõem que o estudante

- represente aritmeticamente a densidade como razão e, portanto, em termos de um quociente;
- nesse quociente, considere a razão entre população e área territorial, nessa ordem;
- associe as medidas dessas duas grandezas, referentes a cada município, como as coordenadas do ponto correspondente, na ordem correta;
- no caso do ponto P , por exemplo, perceba que a coordenada, embora não esteja explicitada, pode ser determinada como a média entre 15 000 e 20 000 (ou seja, que a distância entre pontos sucessivos marcados no eixo vertical corresponde a 2 500 unidades);
- em particular, observe que os números no eixo vertical são milhares de unidades (por exemplo, o número 15 expressa, de fato 15 milhares ou 15 000 unidades);
- que, uma vez identificados os valores para o cálculo da razão ou quociente, que realize correta e justificadamente os cálculos;
- por fim, que possa interpretar o resultado como a densidade desejável, verificando a validade dos procedimentos usados e a plausibilidade da resposta obtida a partir deles.



Questão 24 Qual dos municípios tem a maior densidade demográfica, isto é, o maior número de habitantes por quilômetro quadrado em sua área?

A) P

B) Q

C) R

D) S

E) T



Solução. Esta questão pode ser resolvida por uma abordagem aritmética que requer determinar as densidades dos municípios a partir das coordenadas dos pontos que lhes são correspondentes. Nesse caso, temos

- densidade de $Q >$ densidade de R , pois as ordenadas dos dois pontos são iguais (ou seja, os municípios têm mesma população) e suas abscissas são diferentes (a área territorial de Q é menor que a área territorial de R);

Além disso, pode-se observar que

$$\text{densidade de } P = \frac{17\,500}{350} = \frac{35\,000}{700} = \text{densidade de } R.$$

De modo análogo, calculamos

$$\text{densidade de } Q = \frac{35\,000}{550} > \frac{35\,000}{700} = 50$$

ao passo que

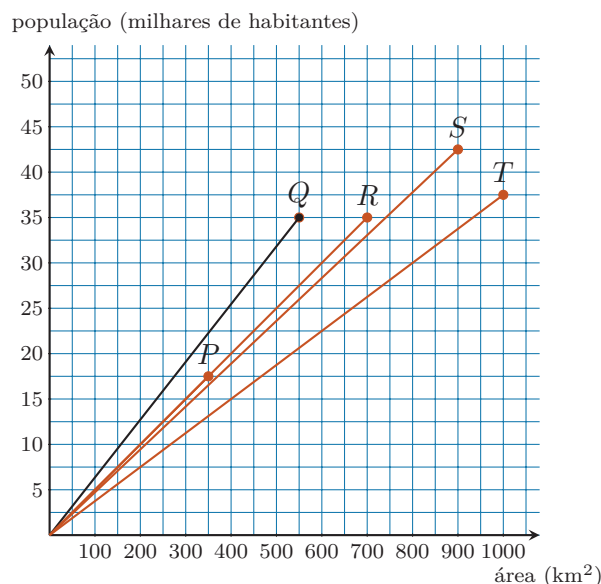
$$\text{densidade de } T = \frac{37\,500}{1000} = 37,5$$

e

$$\text{densidade de } S = \frac{42\,500}{900} < \frac{45\,000}{900} = 50.$$

Concluimos, assim, que Q é o ponto correspondente ao município de maior densidade demográfica. Note que essa abordagem não exige cálculos explícitos dos quocientes, mas uma comparação inteligente entre frações.

Outra estratégia de resolução é o uso do gráfico diretamente, em que associamos as razões entre ordenadas e abscissas a medidas da inclinação das retas contendo a origem $(0,0)$ e os pontos P, Q, R, S e T , conforme a seguinte figura.

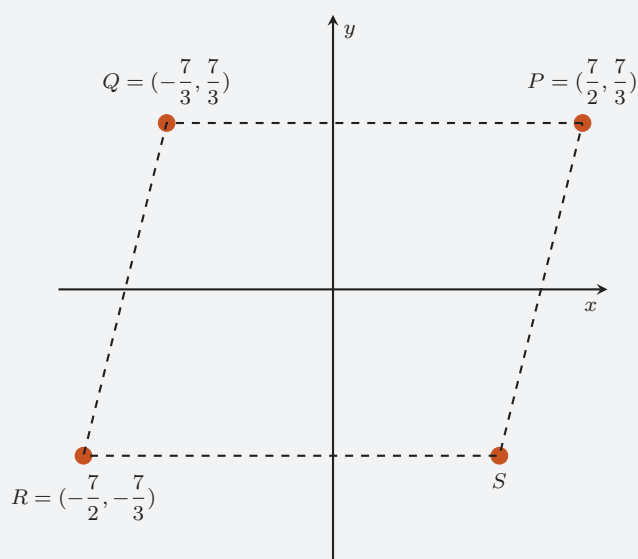


De acordo com a figura, a reta contendo $(0,0)$ e Q tem a maior inclinação, ou seja, Q corresponde ao município de maior densidade demográfica. Da mesma forma, vemos que os pontos P e R estão contidos em uma mesma reta contendo a origem. Isso significa que as densidades demográficas dos respectivos municípios são iguais, como já havíamos constatado.



Leia o seguinte texto para responder às questões 25 a 27.

No plano cartesiano representado na seguinte figura, os pontos P, Q, R e S são os vértices de um paralelogramo.



De acordo com a figura, as coordenadas dos pontos P , Q e R são $(\frac{7}{2}, \frac{7}{3})$, $(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ e $(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{3})$, respectivamente.

Questão 25 Quais as coordenadas do ponto S ?

- A) $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{3})$
- B) $(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$
- C) $(\frac{7}{2}, -\frac{7}{3})$
- D) $(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3})$
- E) $(\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$

 **Solução.** Uma possibilidade é reconhecer as simetrias do paralelogramo em relação à origem. Em particular, o ponto S é o simétrico do ponto Q com respeito à origem. Logo, suas coordenadas são dadas pelos (números reais) simétricos das respectivas coordenadas de Q , ou seja, $(7/3, -7/3)$.

Outra possibilidade é perceber que os lados $\overline{PQ}$ e $\overline{SR}$ (bem como os lados $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$) são paralelos e congruentes, de modo que, denotando as coordenadas de S por (x_0, y_0) , temos

$$S - R = P - Q,$$

ou seja,

$$(x_0 - (-7/2), y_0 - (-7/3)) = (7/2 - (-7/3), 7/3 - 7/3),$$

o que implica

$$x_0 = 7/3 \quad \text{e} \quad y_0 = -7/3.$$

■

Questão 26 A reta contendo os pontos Q e S é gráfico de qual das seguintes funções afins?

- A) $y = x$.
- B) $y = x + \frac{14}{3}$.
- C) $y = -x$.
- D) $y = -x + \frac{14}{3}$.
- E) $y = -\frac{7}{3}x + \frac{7}{3}$.

 **Solução.** Um ponto (x, y) pertence à reta determinada pelos pontos $Q = (-7/3, 7/3)$ e $S = (7/3, -7/3)$ se, e somente se, satisfazem a seguinte equivalência de taxas de variação:

$$\frac{y - 7/3}{x - (-7/3)} = \frac{-7/3 - 7/3}{7/3 - (-7/3)},$$

o que equivale a

$$\frac{y - 7/3}{x - (-7/3)} = -1,$$

ou seja,

$$y - 7/3 = -x - 7/3$$

ou, equivalentemente, $y = -x$.

Questão 27 Qual a tangente do ângulo agudo entre os segmentos $\overline{RS}$ e $\overline{RP}$?

A) $14/3$

B) 4

C) 1

D) $4/5$

E) $2/3$

 **Solução.** O estudante deve observar que o ângulo entre os segmentos $\overline{RP}$ e $\overline{RS}$ é, de fato, congruente ao ângulo entre o segmento $\overline{RP}$ e o eixo horizontal. Por definição, a tangente desse ângulo é a inclinação da reta que contém os pontos R e P . Essa inclinação, por sua vez, é pela razão entre as variações das coordenadas de R a P , isto é,

$$\frac{7/3 - (-7/3)}{7/2 - (-7/2)} = \frac{2}{3}.$$

Questão 28 Em um *shopping center*, o valor a ser pago ao estacionar um carro é cobrado de acordo com as seguintes regras:

- Nas primeiras cinco horas do uso do estacionamento, o valor a ser pago é de R\$ 12,00.
- A cada hora adicional, após as cinco primeiras horas, são pagos R\$ 2,00 a mais.

Qual das seguintes expressões define o preço P a pagar como função do número inteiro x de horas de uso do estacionamento quando $x > 5$?

A) $P(x) = 12 + 2x$.

B) $P(x) = 2x$.

C) $P(x) = 14x$.

D) $P(x) = 12 + 2(x - 5)$.

E) $P(x) = 14(x - 5)$.

 **Solução.** O custo por tempo adicional, após 5 horas, é dado por

$$2(x - 5),$$

onde x é o tempo, em horas, decorrido desde o momento em que o estacionamento passa a ser utilizado. Assim, o custo total é dado por

$$P(x) = 12 + 2(x - 5),$$

ou seja,

$$P(x) = 2 + 2x.$$

Questão 29 — PAEBES, Item . Uma caixa d'água com capacidade máxima de 200 litros estava completamente cheia quando teve seu fundo perfurado no dia primeiro de janeiro. Essa perfuração provocou, nesse dia, uma perda de 10 litros de água, que se manteve constante ao longo dos demais dias. Considere que a água nessa caixa d'água não foi repostada e nem usada durante esse mês.

Em quantos dias essa caixa ficou completamente vazia?

- A) 11. B) 18. C) 19. D) 20. E) 21.

 **Solução.** A cada dia, a caixa perde 10 L. Como ela estava cheia com 200 L, o número de dias necessários para esvaziar completamente é dado por

$$\frac{200 \text{ L}}{10 \text{ L/d}} = 20 \text{ dias}$$

Portanto, a caixa ficou vazia após 20 dias. A resposta correta é D).

Questão 30 — SISEDU 2025.1. Uma cisterna para armazenamento de água tem capacidade total de 5 000 litros. No instante em que a quantidade de água na cisterna fica reduzida a 450 litros, ela passa a ser reabastecida a uma taxa constante, conforme os dados na seguinte tabela.

Tempo desde o início do reabastecimento (segundos)	Quantidade de água (litros)
0	450
6	451
60	460
600	550

A quantidade total de água c (em litros) em função do tempo t (em segundos) desde o início do reabastecimento é dada por

- A) $c(t) = \frac{1}{6} + 450t$.
B) $c(t) = 450 + \frac{1}{6}t$.
C) $c(t) = \frac{450}{6} + t$.
D) $c(t) = 6 + 450t$.
E) $c(t) = 450 + 6t$.

 **Solução.** A partir dos dados da tabela, deduz-se que o reabastecimento ocorre a uma razão de 1 litro a cada 6 segundos. Portanto, a quantidade de litros de água na cisterna é, então, dada

por

$$c(t) = 450 + \frac{1}{6}t,$$

onde t é o tempo em segundos decorrido desde o início do reabastecimento.

Questão 31 — PAEBES, Item M120933E4. No quadro abaixo, foram registrados alguns valores de x e suas respectivas imagens $f(x)$, de uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

Qual é a lei de formação que representa essa função?

- A) $f(x) = x - 1$.
- B) $f(x) = x + 1$.
- C) $f(x) = x + 2$.
- D) $f(x) = 2x + 1$.
- E) $f(x) = 3x + 3$.

Solução. Analisando os pares (x, y) da tabela, notamos que, quando x varia em uma unidade, y varia em duas unidades. Isso indica que o coeficiente angular (a taxa de variação) da função é 2. Portanto, a expressão algébrica da função é da forma $f(x) = 2x + b$, em que b é o coeficiente linear, a ser determinado. Para tanto, Usamos os dados em uma das colunas da tabela para determinar b . Por exemplo, usando os dados na terceira coluna de valores de x e y , vemos que o ponto $(0,1)$ pertence ao gráfico de f . Logo, $b = 1$. De fato,

$$1 = f(0) = 2 \cdot 0 + b \implies b = 1$$

Portanto, a expressão algébrica de f é

$$f(x) = 2x + 1,$$

o que corresponde à letra D).

Questão 32 — SPAECE, Item M120370A9. Ana emprestou R\$ 3 000,00 a uma amiga e cobrou 1,2 % ao mês de juros simples.

Quanto Ana receberá de juros por um período de 3 meses?

- A) R\$ 36,00
- B) R\$ 108,00
- C) R\$ 1 080,00
- D) R\$ 3 108,00
- E) R\$ 10 800,00

Solução. Ana cobra 1,2 % ao mês sobre R\$ 3000. Isso significa que os juros relativos a um mês são dados por

$$\text{R\$ } 3000 \cdot 1,2 \% = 100 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \frac{1}{100} = \text{R\$ } 36$$

Em 3 meses, portanto, o total de juros é igual a

$$\text{R\$ } 36 \cdot 3 = \text{R\$ } 108,$$

o que corresponde à alternativa B).

Questão 33 — SPAECE, Item M090519A9. Maurício aplicou R\$ 500,00 a juros simples durante 12 meses, à taxa de 2% ao mês. Ao término desse período, ele comprou um celular, utilizando o montante total obtido nessa aplicação.

Qual o valor desse celular?

A) R\$ 120,00

B) R\$ 510,00

C) R\$ 600,00

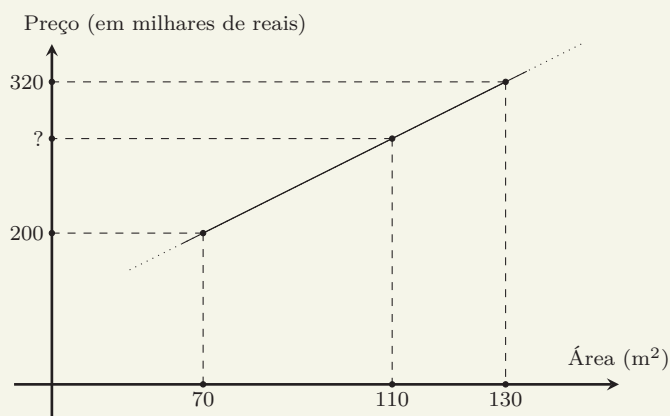
D) R\$ 620,00

Solução. Maurício aplicou R\$ 500 com rendimento de 2% ao mês, durante 12 meses. Sendo assim, o montante total obtido nessa aplicação é igual

$$500 + \underbrace{500 \cdot 2\% + \dots + 500 \cdot 2\%}_{12 \text{ vezes}} = 500 + 12 \cdot 500 \cdot 2 \cdot \frac{1}{100} = 500 + 120 = 620$$

reais, o que corresponde à letra D).

Questão 34 — SISEDU 2024.2. Uma construtora oferece apartamentos em três tamanhos diferentes. O gráfico abaixo ilustra a relação entre o preço de cada apartamento e sua respectiva área construída.



O preço de um apartamento cuja área é 110 m² é igual a

A) R\$ 260.000.

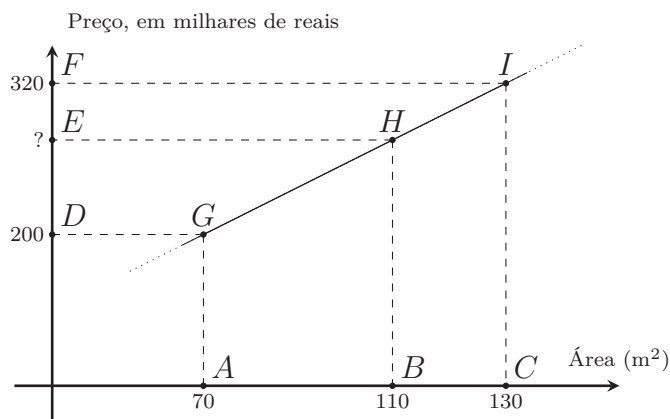
B) R\$ 270.000.

C) R\$ 280.000.

D) R\$ 300.000.

E) R\$ 310.000.

Solução. Relações de semelhança entre segmentos de reta são uma linguagem geométrica útil para explorar e estabelecer relações de proporcionalidade entre variáveis ou entre suas variações. De fato, considere as relações de semelhança, representadas no gráfico, entre as medidas de segmentos correspondentes no eixo cartesiano e na reta inclinada (a qual, como sabemos, é o gráfico de uma função afim que representa o preço como função da área).



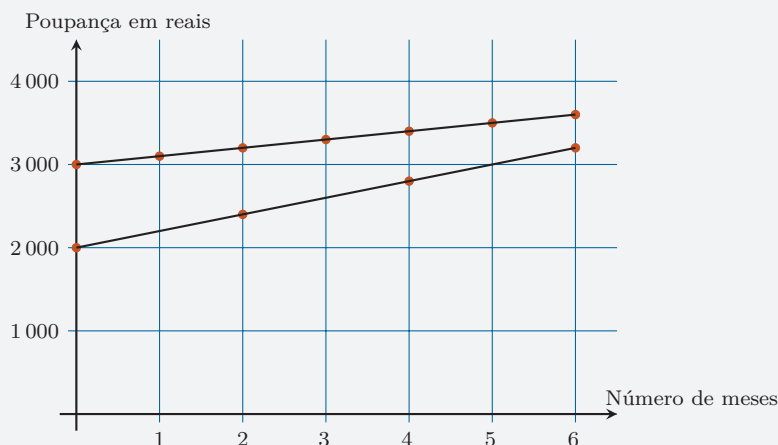
Essa relação de semelhança se deve ao fato de que os pontos G , H e I são colineares (o que é uma consequência de que a função é afim). Uma vez que os pontos A, B, C e D, E, F são suas projeções ortogonais sobre os eixos cartesianos, as relações de semelhança são expressas como as seguintes relações de proporcionalidade:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$$

Nota-se que $\overline{AC}$ é o triplo de $\overline{BC}$. Assim, $\overline{DF}$ também deve ser triplo de $\overline{EF}$. Como $\overline{DF} = 120$, então $\overline{EF} = 40$. Logo, o preço de um apartamento com 110 m^2 é $320 - 40 = 280$ mil reais. ■

Leia o seguinte texto para responder às questões 35 e 36.

As irmãs Luana e Nicole planejam uma viagem internacional e começaram, ao mesmo tempo, a poupar algum dinheiro para isso, conforme os gráficos na seguinte figura.



Luana começou com uma poupança de R\$ 2 000,00 e, a cada dois meses, poupa mais R\$ 400,00. Nicole, por sua vez, iniciou sua poupança com R\$ 3 000,00 e, a cada mês, poupa mais R\$ 100,00.

Questão 35 — SISEDU 2024.2. Caso continuem poupando nos próximos meses, em quantos meses Luana e Nicole terão poupanças de mesmo valor?

A) 5 meses

B) 6 meses

C) 7 meses

D) 9 meses

E) 10 meses

 **Solução.** A diferença dos valores iniciais é de 1 000 reais. A cada dois meses, no entanto, Luana poupa $400 - 2 \cdot 100 = 200$ reais a mais que Nicole. Assim, precisaria de $1\,000/200 = 5$ pares de meses, ou seja, 10 meses para que tenha uma poupança acumulada igual a de Nicole.

Usando a linguagem algébrica de funções, as poupanças acumuladas de Luana e Nicole podem ser descritas, respectivamente, pelas expressões

$$L(t) = 2\,000 + \frac{400}{2}t \quad \text{e} \quad N(t) = 3\,000 + 100t,$$

onde t é o tempo (em meses) decorrido desde o momento em que iniciam a poupança. Assim, $L(t) = N(t)$ quando

$$2\,000 + 200t = 3\,000 + 100t,$$

ou seja, quando $100t = 1\,000$, o que ocorre quando $t = 10$ meses. ■

Questão 36 — SISEDU 2024.2. Em quantos meses Luana e Nicole conseguem, juntas, poupar 11 000 reais?

A) 12 meses.

B) 20 meses.

C) 22 meses.

D) 45 meses.

E) 80 meses.

 **Solução.** A soma dos valores iniciais é de 5 000 reais. Assim, resta poupar 6 000 para que atinjam o resultado de 11 000. A cada dois meses, no entanto, Luana e Nicole poupam, juntas, $400 + 2 \cdot 100 = 600$. Logo, seria necessário 10 pares de meses, ou seja, 20 meses para que, juntas, poupem 11 000 reais.

Usando a linguagem algébrica de funções, as poupanças acumuladas de Luana e Nicole podem ser descritas, respectivamente, pelas expressões

$$L(t) = 2\,000 + \frac{400}{2}t \quad \text{e} \quad N(t) = 3\,000 + 100t,$$

onde t é o tempo (em meses) decorrido desde o momento em que iniciam a poupança. Assim, $L(t) + N(t) = 11\,000$ quando

$$2\,000 + 200t + 3\,000 + 100t = 11\,000$$

ou seja, quando $300t = 6\,000$, o que ocorre quando $t = 20$ meses. ■

Leia o seguinte texto para responder às questões 37 e 38.

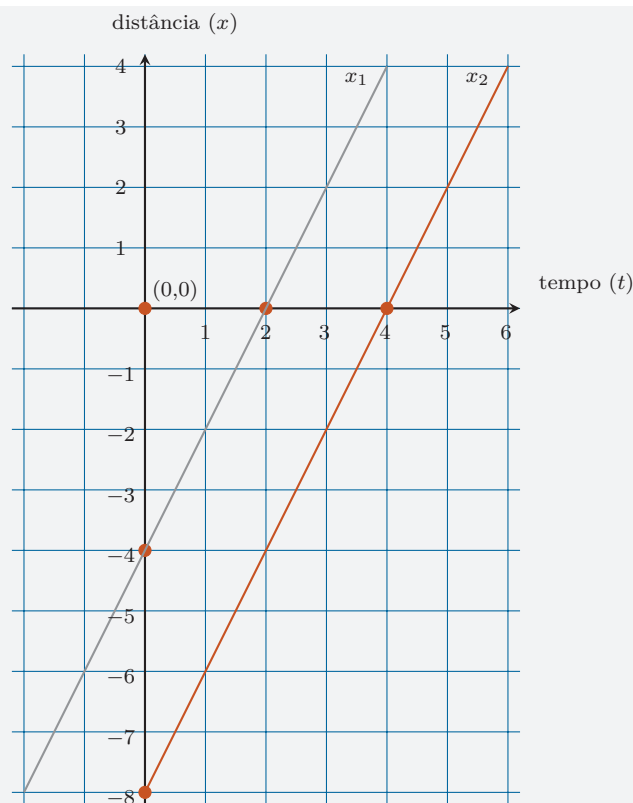
As retas inclinadas na seguinte figura representam partes dos gráficos de funções afins cujas expressões algébricas são

$$x_1(t) = c_1 + v_1t$$

e

$$x_2(t) = c_2 + v_2t,$$

onde c_1, c_2, v_1 e v_2 são constantes. A variável t representa tempo (medido em segundos) e a variável x representa distância (medida em metros).



Questão 37 — SISEDU 2025.1. De acordo com esses gráficos, as funções x_1 e x_2 têm valores iguais a 2, respectivamente, nos instantes

- A) 3 e 5. B) 2 e 4. C) 2 e 2. D) 0 e -4. E) -4 e -8.

Solução. O estudante deve ser capaz de associar pontos nos gráficos a suas respectivas coordenadas cartesianas. Além disso, deve compreender que os valores assumidos pelas funções são representados como coordenadas no eixo vertical. Assim, $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$ correspondem aos pontos que são as intersecções dos gráficos de x_1 e x_2 , respectivamente, com a reta horizontal $x = 2$. Essas intersecções são os pontos com coordenadas $(3, 2)$ e $(5, 2)$, cujas coordenadas horizontais correspondem aos valores da variável t para os quais $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, respectivamente. Assim, os valores desejados da variável t são, respectivamente, $t = 3$ e $t = 5$.

O professor pode utilizar a discussão em torno desta questão e da seguinte para retomar o estudo das funções afins ou para introduzir o tema da equação cartesiana da reta. Para tanto, pode explorar o contexto dessas questões, em que descrevemos o movimento de pontos na reta com velocidades constantes, tópico bastante usual em Cinemática (parte do currículo de Física).

A esse respeito, a função x_1 descreve um movimento uniforme em que a posição no tempo $t = 2$ é $x_1 = 0$ metros. A velocidade desse movimento uniforme é dada pela taxa de variação entre a variação das posições e a variação correspondente dos tempos. Por exemplo, tendo em conta que, no instante $t = 0$, temos $x_1 = -4$, essa velocidade ou taxa de variação é dada por

$$\frac{0 - (-4)}{2 - 0} = 2$$

metros por segundo. Essa velocidade é constante ao longo de todo o movimento: logo, poderia ser calculada pela taxa de variação correspondente a dois instantes *quaisquer*. Assim, deduzimos

que a expressão algébrica de x_1 como função de t é dada por

$$x_1 = -4 + 2t,$$

ou seja $c_1 = -4$ e $v_1 = 2$. Essa expressão pode ser reescrita como a equação cartesiana

$$2t - x_1 = 4$$

da reta que passa pelos pontos $(0, -4)$ e $(2, 0)$, justamente o gráfico da função x_1 .

Da mesma forma, a função x_2 descreve o movimento do ponto na reta que passa pela posição $x_2 = -8$ no instante $t = 0$ e pela posição $x_2 = 0$ no instante $t = 4$. Logo, a velocidade desse ponto é dada pela taxa de variação

$$\frac{0 - (-8)}{4 - 0} = 2$$

metros por segundo. Essa taxa de variação é a inclinação do gráfico da função x_2 , ou seja, seu coeficiente angular v_2 . O coeficiente linear c_2 dessa função, por sua vez, é dado pelo valor de x_2 no instante $t = 0$, ou seja, por $x_2 = -8$, o que corresponde à coordenada vertical do ponto de intersecção do gráfico com o eixo vertical. Assim, a função x_2 é expressa algebricamente como

$$x_2 = -8 + 2t,$$

expressão equivalente à equação cartesiana

$$2t - x_2 = 8$$

da reta que passa pelos pontos $(0, -8)$ e $(4, 0)$, justamente o gráfico da função x_2 . ■

Questão 38 — SISEDU 2025.1. De acordo com seus gráficos, os coeficientes das funções x_1 e x_2 satisfazem qual das seguintes propriedades?

- A) $c_2 = c_1 + 2$.
- B) $c_2 = c_1 - 4$.
- C) $v_2 = 2v_1$.
- D) $c_2 = c_1$.
- E) $v_2 = v_1 + 2$.

 **Solução.** Os gráficos de x_1 e x_2 são retas paralelas distintas. Em termos algébricos, isso significa que os coeficientes angulares das funções afins x_1 e x_2 são iguais (e positivos, visto que o ângulo dessas retas com o eixo horizontal, no sentido anti-horário, é menor que 90°). No entanto, como as retas são distintas, os coeficientes lineares devem ser diferentes. Esses coeficientes lineares são as coordenadas verticais das intersecções dos gráficos de x_1 e x_2 com o eixo vertical (em que $t = 0$), ou seja, são iguais a $c_1 = -4$ e $c_2 = -8$, respectivamente. Logo, deduzimos que

$$v_1 = v_2$$

e

$$c_2 = c_1 - 4.$$

De fato, vimos, na resolução da questão anterior, que as expressões algébricas de x_1 e x_2 são, respectivamente, dadas por

$$x_1 = -4 + 2t \quad \text{e} \quad x_2 = -8 + 2t.$$

Cinematicamente, isso significa que os pontos estão, em todo instante, a uma mesma distância um do outro, dada por

$$x_1 - x_2 = -4 + 2t - (-8 + 2t) = 4$$

metros. Em particular, no instante $t = 0$, estão separadas 4 metros uma da outra e essa separação se mantém constante. Também podemos observar que a separação *horizontal* entre os gráficos de x_1 e x_2 é de 2 segundos. Isso significa que x_2 passa pelo mesmo ponto que x_1 dois segundos *após* x_1 . Algebricamente, temos

$$x_2(t + 2) = -8 + 2(t + 2) = -4 + 2t = x_1(t),$$

para todo instante t . Assim,

$$x_1(t) = x_2(t + 2)$$

ou

$$x_2(t) = x_1(t - 2),$$

ou seja, a posição de x_2 em um dado instante t é a mesma posição de x_1 , dois segundos *antes*.

Ressaltamos que o professor pode utilizar essa exposição a respeito das duas questões para revisar temas como a forma segundo a qual a alteração dos coeficientes das funções afins (ou das equações lineares) alteram seus gráficos e, reciprocamente, como translações dos gráficos alteram esses coeficientes. Por exemplo, vemos que o gráfico de x_2 é obtido a partir do gráfico de x_1 transladando-o *horizontalmente* duas unidades para a direita: isso significa, exatamente, que

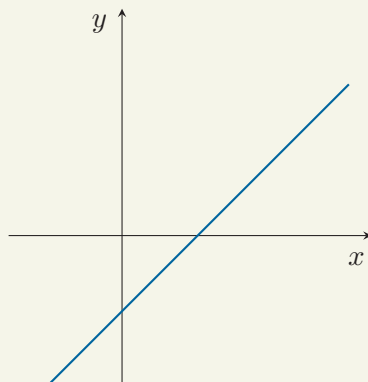
$$x_2(t) = x_1(t - 2).$$

Equivalentemente, o gráfico de x_2 pode ser obtido a partir do gráfico de x_1 transladando *verticalmente* esse último 4 unidades para baixo, ou seja,

$$x_2(t) = -4 + x_1(t).$$



Questão 39 No plano cartesiano na seguinte figura está representado o gráfico de uma função afim da forma $y = ax + b$



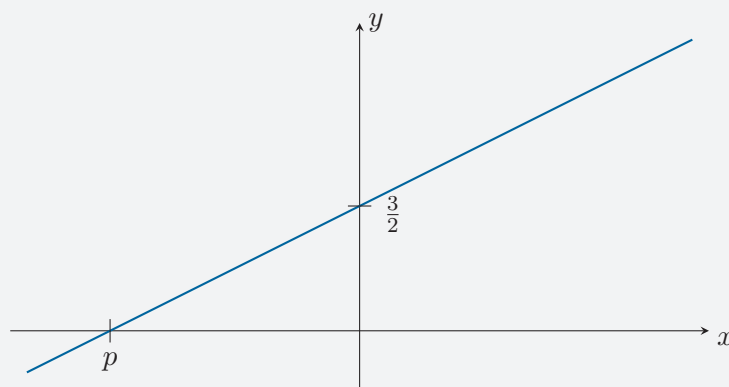
Qual das seguintes afirmações a respeito dos coeficientes a e b é correta?

- A) $a < 0$ e $b < 0$.
- B) $a < 0$ e $b > 0$.
- C) $a > 0$ e $b > 0$.
- D) $a > 0$ e $b < 0$.
- E) $a > 0$ e $b = 0$.

 **Solução.** O gráfico na figura é uma reta com inclinação positiva. Logo, a função afim correspondente a esse gráfico tem coeficiente angular a positivo. Além disso, o gráfico intersecta o eixo vertical em um ponto com ordenada negativo. Isso significa que o coeficiente linear b da função afim é negativo.

Leia o seguinte texto para responder às questões 40 e 41.

Na figura seguinte, é representada uma reta no plano cartesiano contendo os pontos $(p, 0)$ e $(0, \frac{3}{2})$. Essa reta é o gráfico da função afim dada por $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



Questão 40 — SISEDU 2024.1. Para qual valor de x temos $f(x) = 4$?

- A) $\frac{5}{4}$
- B) $\frac{5}{2}$
- C) $\frac{7}{2}$
- D) 5
- E) 11

 **Solução.** De acordo com o enunciado, a expressão algébrica da função é

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$f(x) = 4 \iff \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 4.$$

Essa última equação é equivalente a

$$\frac{1}{2}x = 4 - \frac{3}{2},$$

ou seja, a

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{2},$$

equação cuja solução é $x = 5$, o que corresponde à letra D).

Questão 41 — SISEDU 2024.1. Sobre o valor da coordenada p , podemos afirmar que

- A) $p = 3$. B) $p = 1/2$. C) $p = 3/2$. D) $p = -3/4$. E) $p = -3$.

 **Solução.** Sabemos que o ponto $(p, 0)$ pertence à reta que é gráfico da função afim cuja expressão algébrica é

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Como a ordenada é zero, fazemos $f(p) = 0$, isto é,

$$\frac{1}{2}p + \frac{3}{2} = 0,$$

equação equivalente a

$$\frac{1}{2}p = -\frac{3}{2},$$

cujas soluções são $p = -3$, o que corresponde à alternativa E). ■

Questão 42 — PAEBES, Item M120180G5, adaptado. Qual é a equação da reta que passa pelos pontos $H = (-1, 5)$ e $I = (1, 1)$?

- A) $y = -2x - 3$ B) $y = -2x + 3$ C) $y = -2x + 9$ D) $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ E) $y = 2x + 4$

 **Solução.** Um ponto (x, y) pertence à reta determinada pelos pontos $H = (-1, 5)$ e $I = (1, 1)$ se, e somente se,

$$\frac{y - 5}{x - (-1)} = \frac{1 - 5}{1 - (-1)},$$

ou seja, se e somente se,

$$y - 5 = \frac{-4}{2}(x + 1),$$

equação que pode ser reescrita na forma

$$y = -2x + 3,$$

expressão algébrica que corresponde à letra B). ■

Questão 43 — SPAECE, Item M120053A9, adaptado. Qual é a equação da reta que passa pelos pontos $A = (1, 6)$ e $B = (-2, 12)$?

- A) $y = -18x + 24$.
B) $y = -6x$.
C) $y = -2x + 8$.
D) $y = -0,5x + 4$.
E) $y = 6x$.

 **Solução.** Um ponto (x, y) pertence à reta determinada pelos pontos $A = (1, 6)$ e $I = (-2, 12)$ se, e somente se,

$$\frac{y - 6}{x - 1} = \frac{12 - 6}{-2 - 1},$$

ou seja, se e somente se,

$$y - 6 = \frac{6}{-3}(x - 1),$$

equação que pode ser reescrita na forma

$$y = -2x + 8,$$

expressão algébrica que corresponde à letra C).

Questão 44 — SPAECE, Item M120703H6. Considere uma reta r que passa pelos pontos de coordenadas $(-2, 3)$ e $(4, -2)$. Uma equação dessa reta r está representada em

- A) $x + 2y + 16 = 0$.
- B) $x + 6y - 16 = 0$.
- C) $2x - 3y + 6 = 0$.
- D) $5x + 6y - 8 = 0$.
- E) $6x + 5y - 3 = 0$.

 **Solução.** Um ponto (x, y) pertence à reta determinada pelos pontos $(-2, 3)$ e $(4, -2)$ se, e somente se,

$$\frac{y - 3}{x - (-2)} = \frac{-2 - 3}{4 - (-2)},$$

ou seja, se e somente se,

$$y - 3 = \frac{-5}{6}(x + 2),$$

equação que pode ser reescrita na forma

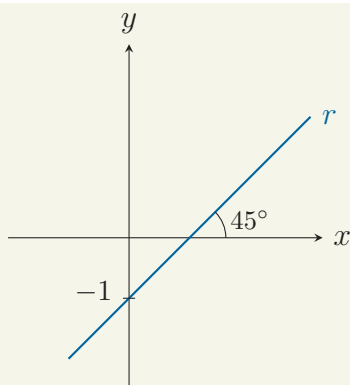
$$y - 3 = -\frac{5}{6}x - \frac{10}{6},$$

ou seja,

$$5x + 6y = 8,$$

o que corresponde à alternativa D).

Questão 45 — SPAECE, Item M120005CE. Veja o esboço do gráfico abaixo.



Sabendo que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, podemos dizer que os coeficientes angular (m) e linear (n) da reta r são

- A) $m = 1$ e $n = -1$.
- B) $m = 1$ e $n = 0$.
- C) $m > 1$ e $n = -1$.
- D) $m < 1$ e $n < -1$.
- E) $m > 1$ e $n > 0$.

 **Solução.** Sabemos que o coeficiente angular m é igual à tangente do ângulo que a reta r faz com o eixo x . Como esse ângulo mede 45° , temos

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

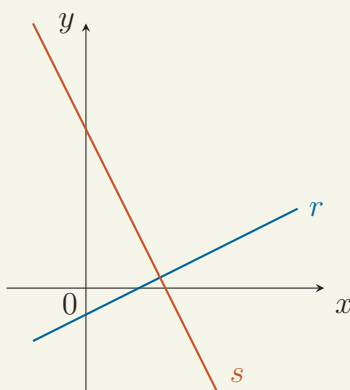
Observando o gráfico, vemos que a reta r intersecta o eixo y no ponto $(0, -1)$. Assim, concluímos que o coeficiente linear n é igual a -1 . Em suma, temos

$$m = 1 \quad \text{e} \quad n = -1,$$

o que corresponde à alternativa A).



Questão 46 — SPAECE, Item M120442B1. No plano cartesiano abaixo, a reta r tem equação $y = mx + n$ e a reta s tem equação $y = px + q$.



De acordo com essa representação,

- A) $m > 0$ e $p < 0$.

- B) $m > 0$ e $q < 0$.
- C) $m < 0$ e $p > 0$.
- D) $n < 0$ e $q < 0$.
- E) $n < 0$ e $p > 0$.

 **Solução.** A análise da figura nos mostra que

- A reta r tem inclinação entre 0 e $\pi/2$ radianos (ou seja, é gráfico de uma função afim crescente), o que significa que tem coeficiente angular m positivo.
- A reta r intersecta o eixo y em um ponto com ordenada negativa; logo, $n < 0$.
- A reta s tem inclinação entre $\pi/2$ e π radianos (ou seja, é gráfico de uma função afim decrescente), o que significa que tem coeficiente angular p negativo.
- A reta s intersecta o eixo y em um ponto com ordenada positivo; logo, $q > 0$.

Portanto, a alternativa correta é A).

2.3 – Atividades sobre equações e funções quadráticas

Os conhecimentos e habilidades relativos a funções quadráticas, estudados nesta seção, estão relacionados aos seguintes descritores na Matriz de Referência do SAEB:

- D17 - Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
- D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- D21 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
- D25 - Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.
- D26 - Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

Continuamos, nesta seção, explorando o tema das **funções**, desta vez enfatizando as **funções quadráticas**. Uma função quadrática (ou função polinomial de segundo grau) é uma relação entre duas variáveis, x e y , digamos, da seguinte forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

em que a , b e c são constantes dadas, chamadas *coeficientes*, sendo que a é diferente de zero. Note que, caso $a = 0$, teríamos uma função afim, apenas. No caso em que os coeficientes a , b e c satisfazem a seguinte relação $b^2 \geq 4ac$, funções quadráticas podem ser escritas na seguinte *forma fatorada*

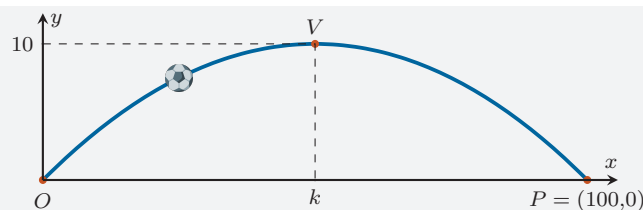
$$y = a(x - r)(x - s),$$

em que r e s são os *zeros* da função quadrática, isto é, os valores da variável x para os quais $y = 0$.

Leia o seguinte texto para responder às questões 47 e 48.

Na figura seguinte, a curva representa a trajetória de uma bola de futebol do ponto O , onde foi chutada ao ponto P , onde atinge o solo.

Observe que a bola alcança uma altura máxima de 10 metros.



Essa curva pode ser modelada como o gráfico de uma função de segundo grau $y = f(x)$ definida no intervalo de 0 a 100.

Questão 47 — SISEDU 2024.1. Qual o valor k da variável x em que a função f atinge seu valor máximo?

- A) 110. B) 100. C) 50. D) 10. E) 5.

Solução. A alternativa correta é C). De fato, k é a abscissa do ponto do gráfico da parábola que tem maior ordenada (ou seja, de seu vértice). Portanto, k deve ser a média aritmética entre os zeros da função. A análise do gráfico mostra que esses zeros são 0 e 100. Portanto,

$$k = \frac{0 + 100}{2} = 50.$$

■

Questão 48 — SISEDU 2024.1, adaptada. A função de segundo grau cujo gráfico está representado na figura tem expressão algébrica dada por

- A) $f(x) = -0,004x^2 + 0,004x$.
B) $f(x) = 0,004x^2 + 0,4x$.
C) $f(x) = 0,4x - 0,004x$.
D) $f(x) = 0,004x - x^2$.
E) $f(x) = 0,4x - 0,004x^2$.

Solução. A alternativa correta é E). Para deduzir uma expressão algébrica da função f , o estudante deve, inicialmente, considerar que a função tem zeros em $x = 0$ e $x = 100$ e um valor máximo no ponto médio entre esses zeros. Assim, tem, necessariamente, sua expressão algébrica tem a forma fatorada

$$f(x) = ax(x - 100).$$

Resta, então, determinar o coeficiente quadrático a . Como o valor máximo (igual a 10, de acordo com o gráfico) ocorre quando x é a média aritmética dos zeros, temos

$$x = 50 \implies f(x) = 10,$$

ou seja,

$$10 = f(50) = -a \cdot 50 \cdot 50,$$

o que implica que

$$a = -\frac{10}{50 \cdot 50} = -\frac{1}{250}.$$

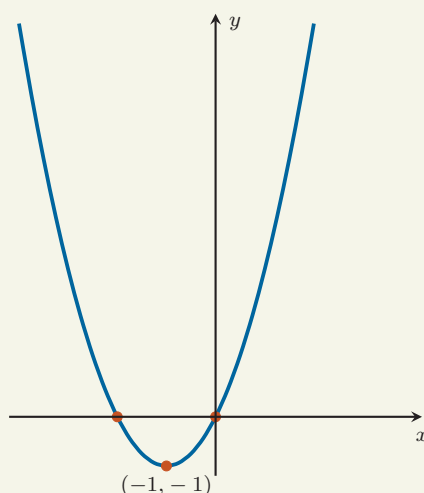
Portanto, f pode ser algebricamente expressa por

$$f(x) = -\frac{1}{250}x(x - 100)$$

ou

$$f(x) = -\frac{1}{250}x^2 + \frac{4}{10}x.$$

Questão 49 — SISEDU 2024.2. Observe o gráfico de uma função quadrática f representado na seguinte figura.

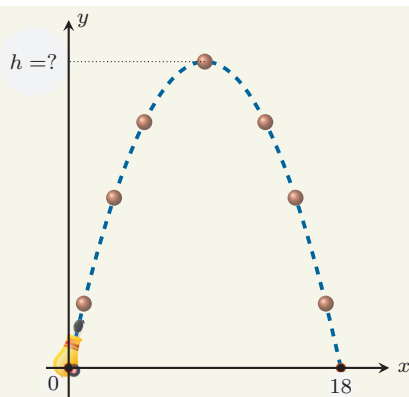


Para quais valores de x temos $f(x) = 0$?

- A) 0 e 2. B) 0. C) -1 e 0. D) -2, -1 e 0. E) -2 e 0.

 **Solução.** A intenção, ao propor este problema, é a de que os estudantes utilizem as informações presentes no gráfico, em que, além das coordenadas do chamado vértice, está representado o fato de que a reta vertical que passa por esse ponto de mínimo é um eixo de simetria do gráfico. Podemos usar essa informação geométrica para deduzir que a função é par em relação ao eixo vertical $x = -1$. Logo, como $x = 0$ é um dos zeros da função, o outro zero deve ser $x = -2$.

Questão 50 — SISEDU 2024.2. Uma bala é atirada de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola de equação $y = -5x^2 + 90x$, em que as variáveis x e y são medidas em metros.



Nessas condições, a altura máxima atingida pela bala é

- A) 30 m. B) 40,5 m. C) 81,5 m. D) 405 m. E) 810 m.

 **Solução.** A função quadrática pode ser escrita, facilmente, em sua forma fatorada, a saber,

$$y = -5x(x - 18).$$

Desse modo, é imediato observar que os zeros dessa função ocorrem em $x = 0$ (como o gráfico indica) e $x = 18$. Logo, o ponto de máximo (observe que o coeficiente do termo quadrático é igual a -5 e, portanto, é negativo) ocorre no ponto médio entre os zeros, ou seja, quando

$$x = \frac{0 + 18}{2} = 9.$$

Para esse valor de x , o valor correspondente da função é

$$y = -5 \cdot 9 \cdot (-9) = 405.$$

Uma estratégia alternativa é recorrer diretamente a expressões algébricas, ou seja, a “fórmulas”, para as coordenadas do vértice da parábola que é gráfico da função. De acordo com essas expressões, a ordenada do vértice (que equivale à altura máxima demandada na questão) é dada por

$$y = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde

$$\Delta = 90^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 = 8100.$$

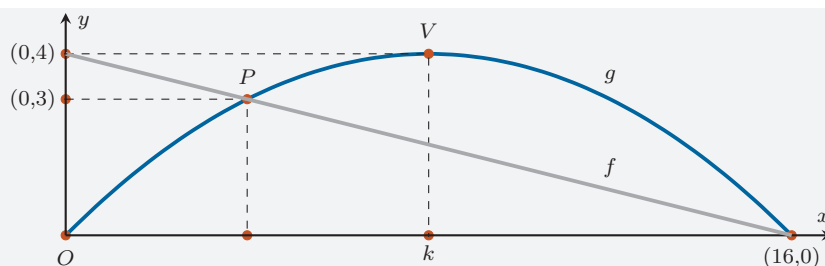
Portanto,

$$y = \frac{8100}{4 \cdot 5} = \frac{810}{2} = 405.$$

■

Leia o seguinte texto para responder às questões 51 a 53.

Na seguinte figura, estão representados os gráficos da função afim f e da função quadrática g , ambas definidas no intervalo $[0, 16]$.



Note que o ponto P está na intersecção dos gráficos de f e g e o ponto V é o vértice do gráfico de g .

Questão 51 — SISEDU 2024.1. A função afim f é representada algebricamente pela expressão

- A) $f(x) = 16x + 4$.
- B) $f(x) = 4x - \frac{1}{4}$.
- C) $f(x) = \frac{1}{4}x + 4$.
- D) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 16$.
- E) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 4$.

Solução. De acordo com a figura, o gráfico de f contém os pontos $(0, 4)$ e $(16, 0)$. A inclinação do gráfico é dada por

$$\frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

Além disso, o gráfico intersecta o eixo vertical no ponto $(0, 4)$, cuja ordenada é 4. Logo, f é expressa algebricamente por

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + 4,$$

expressão algébrica na alternativa E).

Questão 52 — SISEDU 2024.2. A função quadrática g é representada algebricamente por

$$g(x) = -\frac{1}{16}x^2 + Bx,$$

onde B é um número real.

Qual o valor de B ?

- A) -1
- B) 0
- C) $\frac{1}{2}$
- D) 1
- E) 16

Solução. Para deduzir uma expressão algébrica da função g , observamos, inicialmente, que a função tem zeros em $x = 0$ e $x = 16$ e um valor máximo. Assim, tem, necessariamente, sua expressão algébrica tem a forma fatorada

$$g(x) = ax(x - 16),$$

Resta, então, determinar o coeficiente quadrático $a < 0$. Como o valor máximo (igual a 4, de acordo com o gráfico) ocorre quando x é a média aritmética dos zeros, temos

$$x = 8 \implies g(x) = 4,$$

ou seja,

$$4 = g(8) = -a \cdot 8 \cdot 8,$$

o que implica que

$$a = -\frac{4}{8 \cdot 8} = -\frac{1}{16}.$$

Portanto, g pode ser algebricamente expressa por

$$f(x) = -\frac{1}{16}x(x - 16)$$

ou

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x.$$

Logo, a resposta correta é a letra D).



Questão 53 — SISEDU 2024.1. Sejam (x_0, y_0) as coordenadas do ponto P na intersecção dos gráficos das funções f e g .

Podemos afirmar que

- A) $(x_0, y_0) = (4, 0)$.
- B) $(x_0, y_0) = (0, 3)$.
- C) $(x_0, y_0) = (8, 4)$.
- D) $(x_0, y_0) = (3, 4)$.
- E) $(x_0, y_0) = (4, 3)$.

 **Solução.** A análise do gráfico nos mostra que o ponto P tem ordenada 3. Assim, utilizando o fato de que P pertence ao gráfico da função afim $f(x) = -\frac{1}{4}x + 4$, temos que a abscissa x_0 de P satisfaz a equação linear

$$-\frac{1}{4}x_0 + 4 = 3.$$

Logo,

$$x_0 = -4 \cdot (3 - 4) = 4.$$

Portanto, $P = (4, 3)$.

Sugerimos ao professor que explore outras possibilidades de resolução desta questão. Por exemplo, dado que $P = (x_0, 3)$ pertence ao gráfico da função quadrática $g(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x$, temos

$$-\frac{1}{16}x_0^2 + x_0 = 3,$$

equação quadrática que equivale a

$$x_0^2 - 16x_0 + 48 = 0,$$

equação que pode ser reescrita como

$$(x_0 - 4)(x_0 - 12) = 0.$$

Logo, as soluções da equação quadrática são $x_0 = 4$ e $x_0 = 12$. No entanto, apenas $x_0 = 4$ é uma solução viável, pois P também deve pertencer ao gráfico de f .

Uma terceira estratégia é identificar os pontos x que satisfazem

$$f(x) = g(x),$$

ou seja, tais que

$$-\frac{1}{16}x^2 + x = -\frac{1}{4}x + 4$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 - 20x + 64 = (x - 4)(x - 16) = 0,$$

com x entre 0 e 16.



Questão 54 — SPAECE. Em uma boutique, o lucro da venda dos vestidos pode ser calculado pela equação $L(x) = x^2 - 14x + 240$, em que x é a quantidade de vestidos vendidos no mês. Ao final de um mês, o estabelecimento lucrou 272 reais.

A quantidade de vestidos vendidos nesse mês foi

- A) 24. B) 18. C) 16. D) 15.



Solução. A função quadrática que representa o lucro é

$$L(x) = x^2 - 14x + 240.$$

Sabemos que ao final do mês o lucro foi de R\$ 272. Logo:

$$x^2 - 14x + 240 = 272$$

Subtraindo 272 dos dois lados da equação anterior, temos

$$x^2 - 14x - 32 = 0,$$

equação que pode ser reescrita como

$$(x - 16)(x + 2) = 0.$$

Portanto, as soluções de qualquer uma dessas equações quadráticas equivalentes são $r = 16$ e $s = -2$. Como a solução desejada deve ser uma dada quantidade (não-negativa) de vestidos vendidos, concluímos que deve ser 16, o que corresponde à alternativa C).

A equação quadrática

$$x^2 - 14x - 32 = 0$$

pode ser resolvida, também, por completamento de quadrados, uma vez que a reescrevamos como

$$x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x + 7^2 - 7^2 - 32 = 0,$$

ou seja, como

$$(x - 7)^2 - 81 = 0.$$

Essa equação tem soluções dadas por

$$(x - 7) = \pm 9,$$

ou seja,

$$r = 7 + 9 = 16 \quad \text{e} \quad s = 7 - 9 = -2,$$

como já havíamos obtido. ■

Questão 55 — PAEBES, Item M120199A9. No quadro abaixo foram registrados alguns valores para x e os respectivos valores de y de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

x	1	2	3	4	5
y	2	5	10	17	26

A expressão algébrica que representa essa função é

- A) $y = x$.
- B) $y = 2x$.
- C) $y = x^2$.
- D) $y = x^2 - 1$.
- E) $y = x^2 + 1$.

 **Solução.** Observamos pela tabela que a variação da variável x e a variação correspondente da variável y *não são* diretamente proporcionais. Logo, y *não é* função afim de x , o que nos permite descartar as alternativas A) e B).

Vejamos se os dados na tabela são consistentes com uma função quadrática da forma

$$y = a(x - x_V)^2 + y_V,$$

em que (x_V, y_V) são coordenadas do vértice do gráfico da função quadrática e a é seu coeficiente quadrático.

Substituindo os valores $(x, y) = (1, 2)$, $(x, y) = (2, 5)$ e $(x, y) = (3, 10)$, temos, respectivamente,

$$a(1 - x_V)^2 + y_V = 2, \quad a(2 - x_V)^2 + y_V = 5$$

e

$$a(3 - x_V)^2 + y_V = 10.$$

Portanto, subtraindo, termo a termo, uma dessas equações da outra, temos

$$a(x_V - 2)^2 - a(x_V - 1)^2 = 3,$$

$$a(x_V - 3)^2 - a(x_V - 2)^2 = 5$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -2ax_V + 3a &= 3 \\ -2ax_V + 5a &= 5. \end{aligned}$$

Assim, deduzimos que

$$a = 1$$

e, portanto, $x_V = 0$. Logo, a expressão algébrica da função é da forma

$$y = x^2 + y_V.$$

Substituindo valores como $(1, 2)$, temos, enfim

$$2 = 1 + y_V,$$

ou seja,

$$y_V = 1.$$

Portanto, a expressão algébrica da função é da forma

$$y = x^2 + 1,$$

o que corresponde à alternativa E).

Obs

Expomos, a seguir, uma solução similar à anterior, mas usando a forma “estendida” $y = ax^2 + bx + c$ da representação algébrica da função. Considerando, novamente, os pontos $(1, 2)$, $(2, 5)$ e $(3, 10)$ e substituindo essas coordenadas na representação algébrica, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 10, \end{cases} \quad (2.1)$$

cujas soluções são

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Logo, a expressão algébrica da função é, como já havíamos demonstrado,

$$y = x^2 + 1.$$

Outra possibilidade é utilizar um *procedimento prático*: analisando os valores da tabela, observamos que cada valor da y é unidade a mais que o quadrado do valor de x correspondente. De fato, verificamos que

$$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 = 2.$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 1 = 5.$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3^2 + 1 = 10.$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 4^2 + 1 = 17.$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 5^2 + 1 = 26.$$

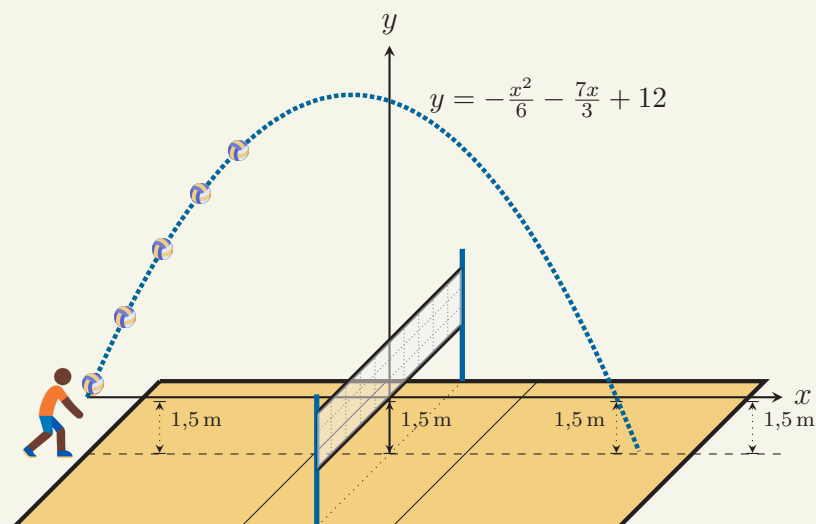
Portanto, a expressão algébrica correta que representa essa função é:

$$y = x^2 + 1$$

Em todas essas “soluções”, estamos partindo da *hipótese* de que a função cujo gráfico contém os pontos informados é quadrática. Obviamente, poderíamos tentar esse ajuste por meio de outras classes de funções cujo número de *parâmetros* livres seja grande o suficiente. Essa discussão é bem interessante e pode motivar, em sala de aula, a seguinte pergunta: *dados três pontos no plano cartesiano, sob que condições pertencem ao gráfico de uma função quadrática? Essa função, caso, exista, é unicamente determinada por esses pontos?*



Questão 56 — ENEM 2022, Caderno 5 - Amarelo, Questão 174, adaptada. Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola de equação: $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

- A) apenas no ginásio I.
- B) apenas nos ginásios I e II.
- C) apenas nos ginásios I, II e III.
- D) apenas nos ginásios I, II, III e IV.
- E) em todos os ginásios.



Solução. No sistema de coordenadas ilustrado na figura, $x = 0$ corresponde a posição da

rede e y indica a altura a partir do nível de 1,5 m acima do nível do piso da quadra. A função quadrática

$$y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$$

pode ser reescrita, em *forma fatorada*, como

$$y = -\frac{1}{6}(x^2 + 14x - 72) = -\frac{1}{6}(x + 18) \cdot (x - 4).$$

As raízes $x_1 = -18$ e $x_2 = 4$ significam as distâncias (orientadas) em relação à rede (que, como vimos, está situada em $x = 0$). Isso significa que o jogador sacou a bola a uma distância de 18 metros (à esquerda) da rede e que a bola atingiu a outra metade da quadra a uma distância de 4 metros (à direita) da rede.

O ponto mais alto (o *vértice* da parábola ocorre quando x é o ponto médio entre as raízes, ou seja, quando

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-18 + 4}{2} = -7.$$

Para esse valor da variável x , temos o valor máximo da variável y , dado por

$$y = -\frac{1}{6}(-7 + 18) \cdot (-7 - 4) = -\frac{11 \cdot (-11)}{6} = \frac{121}{6} = 20,166 \dots$$

Concluimos que a altura máxima, em relação ao nível do piso da quadra, é igual a

$$1,5 + 20,166 \dots = 21,66 \dots$$

Deduzimos, desse modo, que o saque seria invalidado nos ginásios I, II, III e IV, o que corresponde à alternativa D). ■

Na questão 56, lidamos com alguns fatos importantes sobre **funções quadráticas** ou funções polinomiais de segundo grau. Os zeros ou raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores da variável x para os quais $f(x) = 0$. No caso em que f tem dois zeros (possivelmente iguais), digamos, $x = r$ e $x = s$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - r)(x - s) = a(x^2 - rx - sx + rs) \\ &= ax^2 - a(r + s)x + ars. \end{aligned}$$

Portanto $r + s = -b/a$ e $rs = c/a$. Além disso, a função atinge valor máximo (se $a < 0$) ou valor mínimo (se $a > 0$) quando $x = x_V$, onde

$$x_V = \frac{r + s}{2},$$

ou seja, quando x é igual à média aritmética dos zeros da função. Escrevendo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, vemos que os zeros ou raízes de f são dados, no caso em que $\Delta \geq 0$, por

$$r = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad s = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Logo,

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

e o valor máximo (ou mínimo) da função f é dado quando

$$y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Sendo assim, o vértice da parábola, gráfico da função f , tem coordenadas $V = (-b/2a, -\Delta/4a)$. Além disso, a reta vertical que passa por V é um eixo de simetria dessa parábola.

Questão 57 — ENEM 2022, Caderno 5 - Amarelo, Questão 176. Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \leq t \leq 2$;
- II: $3 \leq t \leq 4$;
- III: $5 \leq t \leq 6$;
- IV: $7 \leq t \leq 9$;
- V: $10 \leq t \leq 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a

- A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

 **Solução.** Note que a função quadrática p pode ser escrita na *forma fatorada* como

$$p(t) = (12 - t)(2 + t),$$

de modo que os zeros ou raízes dessa função são $t_1 = -2$ e $t_2 = 12$. Logo, o valor máximo da função p ocorre quando t é a média aritmética desses zeros, ou seja, quando

$$t = \frac{-2 + 12}{2} = 5.$$

Esse valor máximo, por curiosidade, é igual a

$$p(5) = (12 - 5) \cdot (2 + 5) = 7 \cdot 7 = 49.$$

A resposta correta é, portanto, C), visto que o valor máximo de $p(t)$ ocorre quando $t = 5$. ■

Obs

Podemos aplicar diretamente expressões ou “fórmulas” para as coordenadas (t_V, p_V) em que a função $p(t)$ atinge seu valor máximo, sem recorrer à fatoração da expressão quadrática que define p . No entanto, é fundamental entender como essas expressões são, naturalmente, deduzidas a partir das representações algébricas ou gráficas da função quadrática.

Por exemplo, dada a expressão

$$p(t) = -t^2 + 10t + 24,$$

um *completamento de quadrados* permite escrever

$$p(t) = -t^2 + 10t - 25 + 25 + 24 = -(t - 5)^2 + 49.$$

Portanto $p(t) \leq 49$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $t = 5$. Em geral, dada uma função quadrática da forma

$$f(t) = at^2 + bt + c,$$

em que a, b e c são constantes (com $a \neq 0$) a reescrevemos como

$$p(t) = a\left(t^2 + 2\frac{b}{2a}t\right) + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Denotando $\Delta \doteq b^2 - 4ac$, escrevemos

$$p(t) = a(t - t_V)^2 + p_V,$$

em que $t_V = -b/2a$ e $p_V = -\Delta/4a$. Concluimos que, se $a < 0$ (respectivamente, $a > 0$), temos

$$p(t) \leq p_V \quad (\text{respectivamente, } f(t) \geq p_V),$$

a igualdade ocorrendo se, e somente se, $t = t_V$.

No exemplo anterior, temos $a = -1$, $b = 10$ e $c = 24$. Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot (-1) \cdot 24 = 196.$$

Logo, o valor t_V da variável t em que p atinge o valor máximo é igual a

$$t_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$$

e o valor máximo da função p é dado por

$$p_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{196}{4} = 49,$$

conforme havíamos determinado na resolução da questão 57.

Exercício 2.1 — ENEM 2013, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 165, adaptada. A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C .

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A) 19,0

B) 19,8

C) 20,0

D) 38,0

E) 39,0

Solução. O tempo mínimo t , necessário para abrir-se o forno, é aquele em que a temperatura diminui do valor inicial, quando o forno é desligado, para 39°C . Assim

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400,$$

ou seja

$$\frac{t^2}{4} = 361.$$

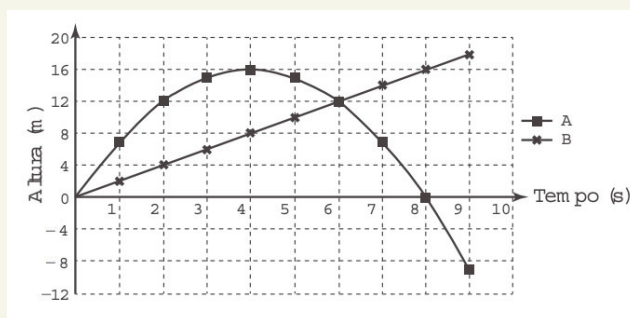
Logo

$$\frac{t}{2} = 19,$$

ou seja, $t = 19 \times 2 = 38$ minutos após o desligamento do forno, o que corresponde à alternativa D).

Questão 58 — ENEM 2016, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 136, adaptada.

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

- A) diminuir em 2 unidades.
- B) diminuir em 4 unidades.
- C) aumentar em 2 unidades.
- D) aumentar em 4 unidades.
- E) aumentar em 8 unidades.

Solução. O coeficiente angular da reta na figura é dado pela razão entre a altura, em metros, e o tempo, em segundos. Por exemplo, a 6 segundos após o lançamento, a altura atingida é de 12 metros. Assim, o coeficiente angular é dado por

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ metros por segundo.}$$

Agora, observando o gráfico parabólico, constatamos que a altura máxima atingida pelo projétil A é igual a 16 metros, o que ocorre 4 segundos após o lançamento. Para que o projétil B atingisse

esta mesma altura neste mesmo instante, o coeficiente angular de sua nova trajetória deveria ser igual a

$$\frac{16}{4} = 4 \text{ metros por segundo.}$$

Portanto, deveríamos aumentar o coeficiente angular em 2 unidades. Concluimos que a alternativa correta é C). ■

Observemos que o gráfico parabólico intersecta o eixo horizontal (que representa a variável tempo) nos instantes $s = 0$ e $s = 8$ segundos. Portanto, a altura h atingida pelo projétil é uma função quadrática do tempo s após o lançamento com a seguinte forma fatorada

$$h = as(s - 8).$$

onde a deve ser determinado pelos dados no gráfico. Observe que, quando $s = 4$ segundos, temos $h = 16$ metros. Logo,

$$16 = a \cdot 4 \cdot (4 - 8).$$

Portanto $a = -1$ e a função fica completamente determinada:

$$h = -s(s - 8),$$

ou seja,

$$h = -s^2 + 8s.$$

Questão 59 — ENEM 2015, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 157, adaptada.

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R\$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p , o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente na padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p , em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

- A) R\$ 0,50 $\leq p <$ R\$ 1,50.
- B) R\$ 1,50 $\leq p <$ R\$ 2,50.
- C) R\$ 2,50 $\leq p <$ R\$ 3,50.
- D) R\$ 3,50 $\leq p <$ R\$ 4,50.
- E) R\$ 4,50 $\leq p <$ R\$ 5,50.

 **Solução.** O gerente pretende manter a média de arrecadação, isto é, de *receita* diária na venda de pães especiais. Esta receita média é igual a R\$ 300,00. Se o preço de um pão especial, em reais, é simbolizado pela variável p , e a quantidade de pães especiais vendida por dia é q , a receita diária é dada pelo produto

$$y = pq,$$

ou seja, quantidade $\times$ preço. O enunciado nos diz que esta quantidade q é *função* do preço, da seguinte forma:

$$q = 400 - 100p.$$

Logo, a receita é dada por uma *função quadrática* na forma fatorada

$$y = p(400 - 100p).$$

Como queremos manter a receita y igual a 300 reais, devemos ter

$$300 = p(400 - 100p).$$

Uma das soluções para esta *equação quadrática* é $p = 1$ real. De fato

$$300 = 1 \cdot (400 - 100).$$

A outra solução é dada por $p = 3$ reais. Logo, o preço mínimo do pão especial, que permite manter a receita igual a R\$ 300,00, é igual a R\$ 1,00. Sendo assim, a alternativa correta é A). ■

Vimos anteriormente que uma função quadrática da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

pode ser reescrita, via *completamento de quadrados*, como

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V, \quad (2.2)$$

em que (x_V, y_V) são dadas por

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

No caso em que os coeficientes da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ satisfazem $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, temos

$$f(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

ou seja, se e somente se,

$$x = r = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{\Delta}) \quad \text{ou} \quad x = s = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{\Delta}). \quad (2.3)$$

O ponto médio entre os zeros corresponde ao valor da variável x para a qual a função assume valor mínimo (respectivamente, máximo) quando $a > 0$ (respectivamente, quando $a < 0$). No gráfico desta função, o ponto de menor (respectivamente, maior) ordenada é chamado *vértice* da parábola. Suas coordenadas são, justamente,

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

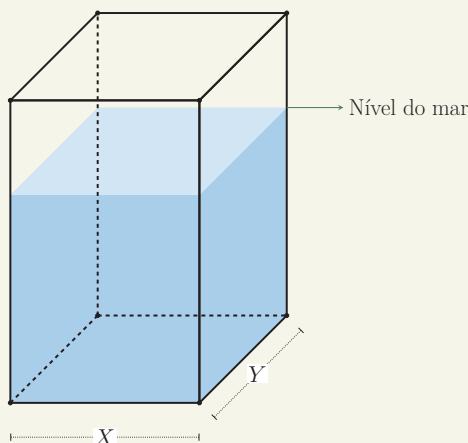
Note que, no caso em que $\Delta \geq 0$, a expressão do lado direito em 2.2 é uma diferença de

quadrados, a qual pode ser expressa como

$$\begin{aligned}f(t) &= a \left[(x - x_V)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\&= a \left[(x - x_V) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \cdot \left[(x - x_V) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \\&= a(x - r)(x - s),\end{aligned}$$

uma forma *fatorada* da função quadrática.

Questão 60 — ENEM 2017, Caderno 7 - Azul, Questão 161, adaptada. Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y , em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

- A) 1 e 49 B) 1 e 99 C) 10 e 10 D) 25 e 25 E) 50 e 50

Solução. A base do viveiro é um retângulo com dimensões lineares (comprimento e largura, digamos) dadas por X e Y . Portanto, seu perímetro é dado por

$$2X + 2Y = 100.$$

Portanto,

$$X + Y = 50.$$

Por sua vez, a área A da base é dada pelo produto dessas dimensões, ou seja,

$$A = XY.$$

Uma vez que

$$Y = 50 - X,$$

concluimos que a área pode ser escrita como uma função quadrática de X :

$$A = X(50 - X).$$

Se $X = 0$ ou $X = 50$, a área se anula. Logo, $X = 0$ e $X = 50$ são as raízes da equação

$$X(50 - X) = 0.$$

O valor máximo da área ocorre quando X é a média aritmética das raízes, isto é, quando

$$X = \frac{0 + 50}{2} = 25 \text{ metros.}$$

Sendo assim, o valor correspondente de Y é dado por $Y = 50 - 25 = 25$ metros. Portanto, a alternativa correta é da letra D). A área máxima da base, portanto, é dada por

$$A = 25 \cdot 25 = 625 \text{ metros quadrados.}$$



Método do Professor Po Shen Loh. Se quisermos determinar as dimensões para as quais a área da base é $A = 400$ metros quadrados, devemos resolver a equação quadrática

$$X(50 - X) = 400,$$

ou seja,

$$X^2 - 50X + 400 = 0$$

As soluções (ou raízes) desta equação quadrática têm *média aritmética* dada por

$$X = 25,$$

que é exatamente o valor de X em que a função $A = -X^2 + 50X$ atinge valor máximo. Podemos verificar, usando (2.3), que o produto dessas raízes é dado pelo coeficiente 400. Escrevendo uma das raízes como

$$25 - u$$

e a outra como

$$25 + u,$$

concluimos que

$$(25 - u)(25 + u) = 400,$$

ou seja,

$$625 - u^2 = 400.$$

Logo

$$u^2 = 225.$$

Portanto $u = 15$ ou $u = -15$. Concluimos que as raízes são dadas por

$$25 - 15 = 10 \quad \text{e} \quad 25 + 15 = 40.$$



Se quisermos determinar as dimensões para as quais a área da base é $A = 400$ metros quadrados, devemos resolver a equação quadrática

$$X(50 - X) = 400,$$

ou seja,

$$X^2 - 50X + 400 = 0$$

A média aritmética das raízes é igual a 25, valor de X em que a função A atinge seu valor máximo.

2.4 – Atividades sobre potências, logaritmos e crescimento exponencial

Nesta seção, enfocamos conhecimentos e habilidades diretamente relacionadas aos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB:

- D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- D22 - Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.
- D27 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- D28 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
- D29 - Resolver problema que envolva função exponencial.

Na sequência de nosso planejamento, abordamos, nesta seção, alguns problemas envolvendo potências e logaritmos, que são notações muito úteis em cálculos aritméticos, especialmente quando envolvem medidas de experimentos científicos, na chamada *notação científica*. Faremos uma breve revisão dos conceitos e propriedades fundamentais a respeito das **operações de potenciação e radiciação** e, na sequência, passamos à resolução de algumas questões de avaliações externas, ENEM e vestibulares.

Para começar, relembremos que potências de expoente *natural* indicam, simplesmente, que estamos multiplicando um mesmo número uma dada quantidade de vezes. Por exemplo, na expressão 10^5 , estamos escrevendo, de forma bem sucinta, o produto

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10,$$

em que há 5 vezes fatores iguais ao número 10 (chamado base). Nesse caso, o número 5 é chamado *expoente*. Da mesma forma

$$10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000\,000.$$

Desta vez, o expoente é o número 7 e a base continua a ser o número 10. Note que

$$10^5 \cdot 10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{12},$$

uma vez que há 12 fatores iguais à base 10. Observe, ainda, que o expoente final 12 é a *soma* dos dois expoentes iniciais 5 e 7, já que esta soma é igual ao total de fatores iguais a 10 que aparece no produto final. De modo geral, dados dois números naturais m e n , não nulos, temos

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n},$$

ou seja, multiplicando m fatores iguais a 10 e n fatores iguais a 10, obtemos o produto de $m + n$ fatores iguais a 10.



Agora, definimos potências de 10 com expoentes inteiros *negativos*. Por exemplo, definimos

$$10^{-5} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10},$$

ou seja,

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5}.$$

Da mesma forma,

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10\,000\,000} = 0,0000001,$$

um décimo milionésimo. Assim como antes, observe que

$$10^{-5} \cdot 10^{-7} = 10^{-12}.$$

Observe, além disso, que

$$10^5 \cdot 10^{-5} = 10^5 \cdot \frac{1}{10^5} = 1.$$

Portanto, em geral, dado um número natural não nulo m , temos

$$10^m \cdot 10^{-m} = 1,$$

o que nos leva a definir

$$10^0 = 1.$$

Em resumo, temos $10^0 = 1$, $10^1 = 10$ e

$$\begin{aligned} 10^m &= \underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{m \text{ fatores}}, \\ 10^{-m} &= \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \dots \cdot \frac{1}{10}}_{m \text{ fatores}} = \frac{1}{10^m}, \end{aligned}$$

onde m é um número natural não-nulo. Concluimos também que

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n} \quad (2.4)$$

para dois números inteiros m e n **quaisquer**, sejam eles negativos, positivos ou nulos.

Prosseguindo com exemplos de potências na base 10, vemos que

$$\begin{aligned} \dots 10^{-5} &= 0,00001 & 10^{-4} &= 0,0001 & 10^{-3} &= 0,001 \\ 10^{-2} &= 0,01 & 10^{-1} &= 0,1 & 10^0 &= 1 & 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 & 10^3 &= 1\,000 & 10^4 &= 10\,000 & 10^5 &= 100\,000 \dots \end{aligned}$$

Estas são algumas das potências de base 10. Passamos, agora, à definição de *logaritmos* de base 10. Esses nada mais são do que os *expoentes* que aparecem na lista de potências acima, ou seja,

$$\begin{aligned} \dots \log_{10} 0,00001 &= -5 & \log_{10} 0,0001 &= -4 & \log_{10} 0,001 &= -3 \\ \log_{10} 0,01 &= -2 & \log_{10} 0,1 &= -1 & \log_{10} 1 &= 0 & \log_{10} 10 &= 1 \\ \log_{10} 100 &= 2 & \log_{10} 1\,000 &= 3 & \log_{10} 10\,000 &= 4 & \log_{10} 100\,000 &= 5 \dots \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned} \log_{10} 10\,000 &= 5 & \text{significa que} & & 10^5 &= 10\,000 \\ \log_{10} 0,00001 &= -5 & \text{significa que} & & 10^{-5} &= 0,00001, \end{aligned}$$

e assim por diante. Observamos, além disso, que

$$\log_{10}(10^m \cdot 10^n) = \log_{10} 10^m + \log_{10} 10^n, \quad (2.5)$$

ou seja, o logaritmo “transforma” produtos em somas. De fato,

$$\begin{aligned}\log_{10}(10^m \cdot 10^n) &= \log_{10} 10^{m+n} \\ &= m + n \\ &= \log_{10} 10^m + \log_{10} 10^n.\end{aligned}$$

Obs

Consideramos, agora, o seguinte problema, que é bem mais sutil: calcular o logaritmo de 2 na base 10, ou seja, determinar o número x (supondo que exista) tal que

$$\log_{10} 2 = x.$$

Lembre que, por definição,

$$\log_{10} 2 = x \text{ significa que } 10^x = 2.$$

Note que, se tomássemos $x = 0$ teríamos $10^0 = 1$ enquanto que, se fixássemos $x = 1$, obteríamos $10^1 = 10$. No entanto,

$$1 < 2 < 10.$$

Portanto, o expoente x correto deve ser um número entre 0 e 1, isto é, $0 < x < 1$, ou seja,

$$0 < \log_{10} 2 < 1.$$

Em particular, $\log_{10} 2$ não é um número inteiro! Como proceder, então? Primeiro, observe-mos que

$$10^3 = 1\,000 \approx 1\,024 = 2^{10}.$$

O símbolo $\approx$ significa “aproximadamente”. Em resumo, temos a seguinte aproximação

$$10^3 \approx 2^{10},$$

a qual podemos reescrever como

$$10^{\frac{3}{10}} \approx 2.$$

Com isso, deduzimos que $\frac{3}{10} = 0,3$ é uma aproximação de $\log_{10} 2$.

Observação 2.1 Nos cálculos anteriores, usamos a noção de potência de 10 com expoente *racional*. Vejamos como definir essas potências rigorosamente: dado um número racional na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números naturais, com $n \neq 0$, dizemos que

$$10^{\frac{m}{n}} = a,$$

para um certo número real a se, e somente se,

$$10^m = a^n.$$

Nem sempre é possível calcularmos à mão valores exatos para estas potências, mas apenas aproximações. Por exemplo, o número 3 é uma aproximação da potência $10^{\frac{1}{2}}$ (a raiz quadrada de 10), uma vez que $3 \cdot 3 = 9 \approx 10$. Em suma,

$$10^{\frac{1}{2}} \approx 3 \quad \text{uma vez que} \quad 3^2 = 9 \approx 10.$$

Note que 3,2 seria uma aproximação melhor para $10^{\frac{1}{2}}$, posto que

$$(3,2)^2 = \left(\frac{2^5}{10}\right)^2 = \frac{2^{10}}{100} = \frac{1\,024}{100} = 10,24 \approx 10.$$

Da mesma forma, perceba que 2 é uma aproximação para a potência $10^{\frac{1}{3}}$, visto que

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \approx 10,$$

mas 2,15 é uma aproximação bastante melhor, dado que

$$(2,15)^3 = 2,15 \cdot 2,15 \cdot 2,15 = 9,938375 \approx 10.$$

Logo,

$$10^{\frac{1}{3}} \approx 2,15.$$

Colocando em prática a discussão sobre potências de expoente racional e logaritmos (ambos na base 10, por enquanto), resolvamos o seguinte exercício.

Questão 61 Determine valores aproximados para os logaritmos $\log_{10} 20$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 3$ e $\log_{10} 6$.

 **Solução.** Vimos, anteriormente, que 0,3 é uma aproximação para o logaritmo de 2 na base 10. Assim, usando o fato de que o logaritmo “transforma” produtos em somas (o que decorre do fato, sobre potências, de que $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$, que pode ser estendido para potências racionais), temos

$$\begin{aligned}\log_{10} 20 &= \log_{10}(2 \cdot 10) = \log_{10} 2 + \log_{10} 10 \\ &= \log_{10} 2 + 1,\end{aligned}$$

uma vez que $\log_{10} 10 = 1$ visto que $10^1 = 10$. Assim,

$$\log_{10} 20 \approx 0,3 + 1 = 1,3.$$

Agora, para obter um valor aproximado de $\log_{10} 5$, observamos que

$$1 = \log_{10} 10 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 2 + \log_{10} 5.$$

Assim,

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 \approx 1 - 0,3 = 0,7.$$

Portanto,

$$\log_{10} 5 \approx 0,7.$$

Observando, como antes, que

$$10^{\frac{1}{2}} \approx 3,$$

temos

$$\log_{10} 3 \approx \frac{1}{2} = 0,5$$

Usando essas aproximações e a propriedade 2.4, calculamos, por fim,

$$\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \approx 0,3 + 0,5 = 0,8.$$

Em resumo, o cálculo de logaritmos pode envolver aproximações. As calculadoras eletrônicas e computadores efetuam essas aproximações com dezenas de casas decimais. Outra ferramenta para esses cálculos, menos usada hoje em dia e cuja construção demandou, no passado, gigantescos esforços de matemáticos como John Napier, é a *tábua de logaritmos*.

Observação 2.2 Outra propriedade fundamental da potenciação, que será importante na sequência, é a seguinte: dados m, n números naturais, temos

$$(10^m)^n = 10^{m \cdot n}. \quad (2.6)$$

De fato, temos

$$(10^m)^n = \underbrace{10^m \cdot \dots \cdot 10^m}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{m \text{ fatores}} \cdot \dots \cdot \underbrace{10 \cdot \dots \cdot 10}_{m \text{ fatores}} = 10^{m \cdot n}.$$

A propriedade expressa em 2.6 é também válida para potências de 10 com expoentes inteiros e racionais. Note que 2.6 é uma consequência direta de 2.4.

Obs

A demonstração das propriedades 2.4 e 2.6 para expoentes racionais não será feita aqui. Observamos que essas propriedades são também verdadeiras para potências de outras bases, além da base 10 (desde que positivas e diferentes de 1).

Para finalizar esta apresentação das potências e logaritmos, veremos que, para calcular logaritmos em uma base *qualquer*, basta conhecermos os logaritmos em uma *dada* base, por exemplo, na base 10. De fato, determinaremos valores aproximados para o logaritmo de 3 na base 2, ou seja, qual o número x tal que

$$\log_2 3 = x,$$

ou seja, tal que

$$2^x = 3.$$

Inicialmente, observe que x deve estar entre 1 e 2, visto que

$$2^1 = 2 < 3 < 4 = 2^2$$

e, de acordo com estas desigualdades, deve estar mais próximo de 1 do que de 2 (pense a respeito dessa afirmação. Concorde com ela?). Para obtermos uma estimativa deste logaritmo, relembremos que

$$\log_{10} 2 \approx 0,3 \quad \text{e} \quad \log_{10} 3 \approx 0,5,$$

ou seja,

$$2 \approx 10^{0,3} \quad \text{e} \quad 3 \approx 10^{0,5}.$$

Assim, podemos aproximar o lado esquerdo e o lado direito da equação

$$2^x = 3$$

obtendo, como resultado, a aproximação

$$(10^{0,3})^x \approx 10^{0,5}.$$

Portanto, usando a propriedade 2.6 (para expoentes racionais) e igualando os expoentes dos dois lados da equação, obtemos

$$0,3x \approx 0,5,$$

ou seja,

$$x \approx \frac{0,5}{0,3} = 1,666 \dots$$

Concluimos, desta forma, o seguinte valor aproximado para o logaritmo de 3 na base 2:

$$\log_2 3 \approx 1,6.$$

Obs

Nestes últimos cálculos, usamos a propriedade de *mudança de base* de logaritmos, que nada mais é do que uma forma adequada de reescrever a propriedade 2.6 das potências: dados dois números a, b positivos, com $a \neq 1$, tais que

$$\log_{10} a = m \quad \text{e} \quad \log_{10} b = n,$$

temos

$$a^{\frac{n}{m}} = (10^m)^{\frac{n}{m}} = 10^n = b.$$

Isso significa que o logaritmo do número b (número real positivo) na base a (número real positivo, distinto de 1) é dado por n/m , ou seja,

$$\log_a b = \frac{n}{m}.$$

Concluimos que

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}, \quad (2.7)$$

a propriedade de “mudança de base”.

Questão 62 — SISEDU 2025.1. Mariana registra as frações de uma certa dose de um medicamento presentes na corrente sanguínea de um paciente nas cinco primeiras horas após o paciente ter ingerido o medicamento. Observe a sequência de dados registrados por Mariana:

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \frac{27}{128}.$$

Se esse padrão for mantido, qual seria a fração do medicamento presente na corrente sanguínea do paciente 7 horas após a ingestão do medicamento?

A) $3^5/2^{11}$

B) $3^7/4^7$

C) $3^3/4^3$

D) $3^4/2^9$

E) $1/3^7$

 **Solução.** O estudante deve observar que os termos estão em progressão geométrica cuja razão é dada por

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}.$$

Sendo assim, o termo na posição n na sequência é dado por

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{3^{n-2}}{2^{2n-3}}$$

e, em particular, o sexto e o sétimo termo são dados por

$$\frac{27}{128} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^3}{2^7} \cdot \frac{3}{2^2} = \frac{3^4}{2^9}$$

e

$$\frac{3^4}{2^9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^5}{2^{11}}.$$

Questão 63 — SISEDU 2024.2. Dado que $3^4 = 81$ e $3^6 = 729$, o número real x tal que

$$3^x = 300$$

está entre

- A) 4 e 5.
- B) 5 e 5,5.
- C) 5,5 e 6.
- D) $\frac{81}{4}$ e $\frac{729}{6}$.
- E) $81^{\frac{1}{2}}$ e $729^{\frac{1}{2}}$.

 **Solução.** Como a função exponencial de base 3 é crescente e 300 está entre $243 = 3^5$ e $729 = 3^6$, segue que o expoente x deve estar entre 5 e 6. Para refinar essa estimativa, é preciso ver que 300 está mais próximo de 243 do que de 729: mais precisamente, 300 é menor que a média aritmética entre 243 e 729. Portanto, o expoente x deve estar entre 5 e 5,5. Em termos rigorosos, usamos o fato de que a função exponencial $f(x) = 3^x$ satisfaz a desigualdade

$$3^{5,5} = f(5,5) < \frac{f(5) + f(6)}{2}$$

posto que seu gráfico, no intervalo $[5, 6]$, fica abaixo da reta contendo os pontos $(5, f(5) = 243)$ e $(6, f(6) = 729)$. Logo, $300 < 3^{5,5}$.

Outra forma de comprovar que x está entre 5 e 5,5 é estimar o valor de $3^{5,5}$, o que pode ser feito usando o fato de que $3^{1/2} = \sqrt{3} > 1,7$ uma vez que $1,7 \cdot 1,7 = 2,89$. Considerando essa aproximação, o estudante deduz que

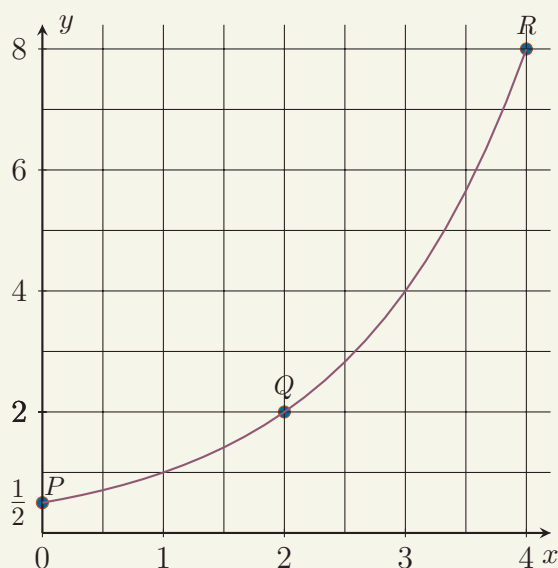
$$3^{5,5} = 3^5 \cdot 3^{0,5} = 3^5 \cdot 3^{1/2} > 243 \cdot 1,7 > 240 \cdot 1,5 = 360.$$

Portanto,

$$3^5 < 300 < 3^{5,5}$$

e, dado que a função exponencial de base 3 é crescente, temos $5 < x < 5,5$.

Questão 64 — SISEDU 2024.2. Observe, na seguinte figura, o gráfico contendo os pontos P , Q e R .



Qual das seguintes funções corresponde a esse gráfico?

- A) $y = 2^{-x}$
- B) $y = 2^{x-1}$
- C) $y = 2^x$
- D) $y = x^2$
- E) $y = 2x$

Solução. O estudante familiarizado com a representação gráfica de funções exponenciais reconhece que o gráfico no suporte da questão corresponde a um múltiplo de uma função exponencial da forma $y = ba^x$, onde $a > 1$ e $b > 0$. A fim de determinar a base a e o fator b , pode usar a informação, expressa no suporte, de que o gráfico contém os pontos $(0, 1/2)$ e $(4, 8)$. Logo, $ba^0 = 1/2$ e $ba^4 = 8$, o que implica $a^4 = 16$, ou seja, $a = 2$. Portanto, a expressão algébrica da função é dada por

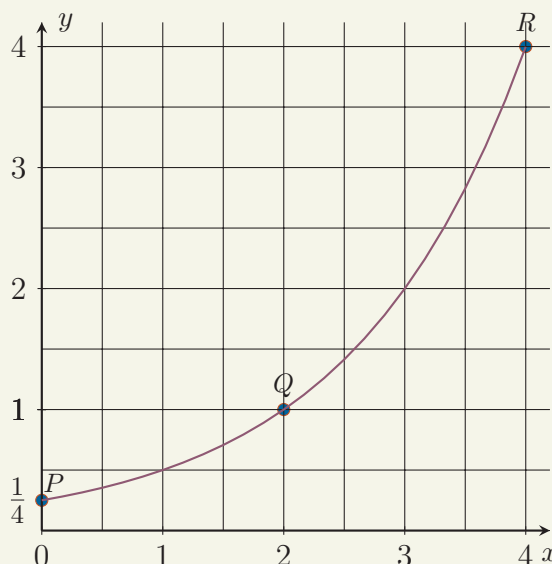
$$y = \frac{1}{2}2^x = 2^{x-1}.$$

Outra estratégia, que exige menor compreensão conceitual sobre funções exponenciais, é analisar as alternativas diretamente como segue:

- Como o gráfico apresentado no suporte *não* é uma reta, a função não pode ser afim; logo, a alternativa E) está incorreta.
- Da mesma forma, *não pode ser* a função quadrática $y = x^2$, pois, para $x = 0$, teríamos $y = 0$, o que contradiz o fato de que o ponto $(0, \frac{1}{2})$ pertencer ao gráfico. Portanto, a alternativa D) também está errada.
- A alternativa A) é falsa, pois $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ é uma função **decrecente**, o que não condiz com o gráfico apresentado. Além disso, o gráfico da função exponencial da alternativa A) não contém o ponto $(0, \frac{1}{2})$.

Uma forma de tornar a alternativa B) aceitável para os estudantes é raciocinar que o gráfico no suporte é obtido transladando-se o gráfico da função exponencial $y = 2^x$ uma unidade para a esquerda. Logo, em $x = 0$, temos o valor da função $y = 2^x$ em $x = -1$, e assim por diante.

Questão 65 A seguinte figura mostra parte do gráfico de uma função f , passando pelos pontos $P = (0, \frac{1}{4})$, $Q = (2, 1)$ e $R = (4, 4)$.



Sendo assim, é correto afirmar que, dentre as alternativas, a que melhor representa o gráfico de f é:

- A) f é a função afim dada por $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$.
- B) f é a função quadrática $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.
- C) f é a função exponencial $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 4^x$.
- D) f é a função exponencial $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- E) f é a função exponencial $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$.

Solução. Descartamos, de imediato, as alternativas A) e B) por apresentarem uma função afim e uma função quadrática. A alternativa D) pode ser também eliminada, visto que, de acordo com o gráfico, a função é crescente. Verifiquemos as duas outras alternativas:

- Alternativa C: caso a função fosse dada por

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot 4^x = 4^{x-1},$$

teríamos as seguintes implicações:

$$x = 0 \implies f(0) = 4^{-1} = \frac{1}{4} \implies P \text{ está no gráfico.}$$

e

$$x = 2 \implies f(2) = 4^{2-1} = 4 \implies (2, 4) \text{ pertence ao gráfico de } f. \text{ Logo, } Q = (2, 1) \text{ não pertence ao gráfico de } f.$$

- Alternativa E): caso a função fosse dada por

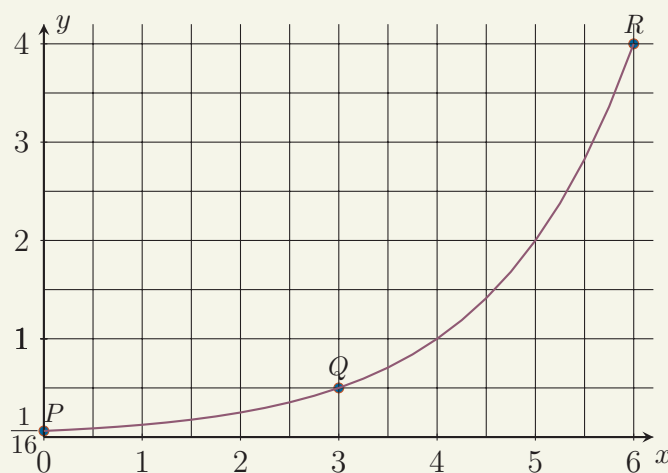
$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x = 2^{x-2},$$

teríamos as seguintes deduções

- (a) $x = 0 \implies f(0) = 2^{0-2} = \frac{1}{4} \implies P$ está no gráfico.
- (b) $x = 2 \implies f(2) = 2^{2-2} = 1 \implies Q = (2, 1)$ pertence ao gráfico de f .
- (c) $x = 4 \implies f(2) = 2^{4-2} = 4 \implies R = (4, 4)$ pertence ao gráfico de f .

Concluimos que a função em E) é a única opção, dentre as alternativas, que condiz com os dados expostos na figura. ■

Questão 66 — SISEDU 2025.1. A seguinte figura mostra parte do gráfico de uma função exponencial $f(x) = ab^x$, onde a e b são constantes.



Sabendo que o gráfico de f contém os pontos $P = (0, \frac{1}{16})$, $Q = (3, \frac{1}{2})$ e $R = (6, 4)$, é correto afirmar que

- A) $a = \frac{1}{16}$ e $b = 2$.
- B) $a = 1$ e $b = \frac{2}{3}$.
- C) $a = \frac{1}{9}$ e $b = 2$.
- D) $a = 1$ e $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- E) $a = \frac{21}{32}$ e $b = \frac{1}{16}$.

Solução. Trata-se, meramente, de determinarmos os parâmetros (ou coeficientes) da função exponencial da forma $f(x) = ab^x$, onde $a \neq 0$ e $b > 0, b \neq 1$, a partir dos dados sobre pontos no gráfico de f informados na figura.

Uma vez que os pontos $P = (0, 1/16)$ e $R = (6, 4)$ pertencem à figura, temos

$$\frac{4}{1/16} = \frac{f(6)}{f(0)} = \frac{ab^6}{ab^0} = b^6,$$

ou seja,

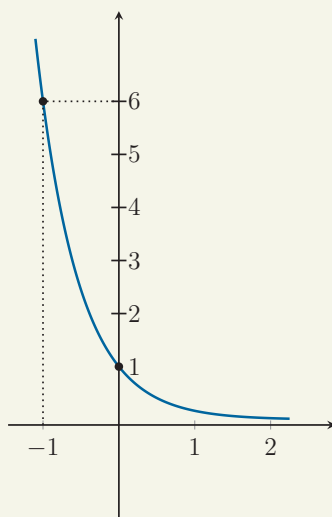
$$b^6 = 64,$$

o que implica $b = 2$. Substituímos essa informação na expressão da função, reescrevendo-a como $f(x) = a \cdot 2^x$. Usando, uma vez mais, que $P = (0, 1/16)$ pertence ao gráfico de f , temos

$$a \cdot 2^0 = \frac{1}{16},$$

ou seja, $a = 1/16$. Assim, concluímos que a alternativa correta é A).

Questão 67 — SAEGO, Item M100242E4. Observe abaixo o gráfico de uma função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.



Qual é a lei de formação dessa função?

- A) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.
- B) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}$.
- C) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 1$.
- D) $f(x) = 6^x$.
- E) $f(x) = 6^{x+1}$.

 **Solução.**

Pelos dados da figura no suporte da questão, os pontos $(-1, 6)$ e $(0, 1)$ pertencem ao gráfico da função. Uma vez que se trata de uma função exponencial da forma $f(x) = ab^x$, deduzimos que

$$\frac{1}{6} = \frac{f(0)}{f(-1)} = \frac{ab^0}{ab^{-1}} = b.$$

Além disso, verificamos que

$$1 = ab^0 = a.$$

Portanto, a expressão algébrica de f pode ser dada por

$$f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x.$$



Passamos, agora, a algumas questões do ENEM que utilizam a linguagem de potências e logaritmos, começando pelo seguinte problema, em que logaritmos são aplicados à Química e à Ciência dos Solos.

Questão 68 — ENEM 2019, Caderno 7 - Azul, Questão 137, adaptada. A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com $\text{pH} < 7$) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com $\text{pH} > 7$) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $\text{pH} = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

- A) qualquer valor acima de 10^{-8} .
- B) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7} .
- C) valores maiores que 7 e menores que 8.
- D) valores maiores que 70 e menores que 80.
- E) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7} .

 **Solução.** A variante da *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial é produzida em solo com pH inferior a 8, ou seja, cuja concentração x de íon hidrogênio satisfaz

$$-\log_{10} x < 8.$$

Assim,

$$\log_{10} x > -8.$$

Portanto, o número x é obtido elevando-se 10 a um expoente *maior* que -8 , ou seja,

$$x > 10^{-8}$$

Por outro lado, esta variedade cor-de-rosa de *Hydrangea* ocorre apenas se o pH do solo for *maior* que 7, ou seja, se

$$-\log_{10} x > 7.$$

Logo,

$$\log_{10} x < -7.$$

Deste modo, o número x obtido elevando-se 10 a um expoente *menor* que -7 , ou seja,

$$x < 10^{-7}.$$

Concluimos, portanto, que

$$10^{-8} < x < 10^{-7},$$

o que corresponde à letra E).



Na sequência, trabalhamos com uma questão do ENEM que aplica logaritmos em Sismologia, o estudo e observação de movimentos sísmicos, como terremotos.

Questão 69 — ENEM 2019, Caderno 7 - Azul, Questão 154, adaptada. Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) ($\mu\text{m-Hz}$)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula:

$$M_s = 3,30 + \log_{10}(A \cdot f),$$

em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz).

Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em <http://cejarj.cecierj.edu.br>. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado)

Utilize 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

- A) Pequeno.
- B) Ligeiro.
- C) Moderado.
- D) Grande.
- E) Extremo.

 **Solução.** De acordo com os dados, a amplitude máxima do terremoto registrado foi

$$A = 2000 \mu\text{m}$$

e a frequência medida foi

$$f = 0,2 \text{ Hz}.$$

Logo

$$A \cdot f = 2000 \cdot 0,2 = 400.$$

Calculemos, então, o logaritmo de 400 na base 10. Usando o fato (lembrado no enunciado) de que

$$\log_{10} 2 \approx 0,3,$$

temos

$$2 \approx 10^{0,3}$$

e, utilizando a propriedade 2.6, deduzimos que

$$4 = 2^2 \approx (10^{0,3})^2 = 10^{2 \cdot 0,3} = 10^{0,6}.$$

Portanto,

$$400 = 4 \cdot 100 \approx 10^{0,6} \cdot 10^2 = 10^{0,6+2} = 10^{2,6}.$$

Concluimos que

$$\log_{10} 400 \approx 2,6.$$

Substituindo este resultado na fórmula $M_s = 3,30 + \log_{10}(A \cdot f)$ para a magnitude local do terremoto, calculamos

$$M_s \approx 3,3 + 2,6 = 5,9,$$

o que corresponde à letra C). ■

Obs

No enunciado original da questão, os logaritmos são escritos como

$$\log 2,$$

isto é, sem referência à base 10. Na nossa adaptação da questão, escrevemos esse logaritmo na forma usual

$$\log_{10} 2$$

Esta é uma prática comum nos livros, nos exames e vestibulares: o logaritmo de x na base 10 é escrito como

$$\log x,$$

simplesmente, em vez de $\log_{10} x$.

Obs

Na próxima questão, utilizaremos o fato de que, dados números reais positivos x, x' , temos

$$\log_{10}(x \cdot x') = \log_{10} x + \log_{10} x'. \quad (2.8)$$

Em particular, se x' é o inverso multiplicativo de x , ou seja, se $x \cdot x' = 1$, temos

$$\log_{10}(x \cdot x') = \log_{10} 1 = 0$$

e, assim,

$$\log_{10} x + \log_{10} x' = 0.$$

Portanto, uma vez que $x' = \frac{1}{x}$, deduzimos, desse modo, que

$$\log_{10} \frac{1}{x} = -\log_{10} x. \quad (2.9)$$

Concluimos que, dados números reais positivos X e x , temos

$$\log_{10} \frac{X}{x} = \log_{10} X - \log_{10} x. \quad (2.10)$$

Exercício 2.2 — ENEM 2016, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 174, adaptada.

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2 ?

- A) $E_1 = E_2 + 2$ B) $E_1 = 10^2 E_2$ C) $E_1 = 10^3 E_2$ D) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} E_2$ E) $E_1 = \frac{9}{7} E_2$

 **Solução.** Observe que, no caso do terremoto no Japão, em 2011, a magnitude registrada foi $M = 9$. Assim,

$$9 = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_0} \right),$$

onde E_1 foi a energia liberada neste terremoto. Da mesma forma, no terremoto de 2013, na China, a magnitude medida foi $M = 7$, ou seja,

$$7 = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_2}{E_0} \right),$$

onde E_2 foi a energia liberada neste terremoto. Sendo assim,

$$\frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_2}{E_0} \right) - \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_0} \right) = 7 - 9 = -2.$$

Utilizando a propriedade 2.10, deduzimos que

$$\log_{10} \left(\frac{E_2}{E_0} \right) - \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_0} \right) = \log_{10} \left(\frac{E_2}{E_0} \cdot \frac{E_0}{E_1} \right) = \log_{10} \left(\frac{E_2}{E_1} \right).$$

Logo,

$$\frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E_2}{E_1} \right) = -2,$$

isto é,

$$\log_{10} \left(\frac{E_2}{E_1} \right) = -2 \cdot \frac{3}{2} = -3$$

e, portanto,

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{-3},$$

ou seja,

$$E_2 = 10^{-3} E_1,$$

ou, equivalentemente, $E_1 = 10^3 E_2$, o que corresponde à alternativa C). ■

Finalizando esta sequência de atividades que combinam potências, logaritmos e progressões geométricas, selecionamos algumas questões com contextos motivados pelas Ciências da Natureza.

Questão 70 — ENEM 2018, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 171, adaptada.

Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 400 000 transistores distribuídos em 1 centímetro quadrado de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

- A) 1999. B) 2002. C) 2022. D) 2026. E) 2146.

 **Solução.** A quantidade inicial de transistores por centímetro quadrado, em 1986, era de 400 000 = 4×10^5 . A quantidade a ser atingida é de 100 000 000 000 = 10^{11} de transistores por centímetro quadrado. Sabendo que a quantidade de transistores por centímetro quadrado dobra a cada dois anos nos processadores, temos que a quantidade n de *pares de anos* necessários para este aumento é dada por

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{11}.$$

Logo, precisamos resolver a seguinte equação para determinar o número n de pares de anos:

$$4 \cdot 2^n \cdot 10^5 = 10^{11}.$$

Uma vez que $4 = 2^2$, essa última equação é equivalente a

$$2^{n+2} \cdot 10^5 = 10^{11}.$$

Tendo em conta que

$$\frac{10^{11}}{10^5} = 10^{11-5} = 10^6,$$

simplificamos essa equação, obtendo, por fim,

$$2^{n+2} = 10^6.$$

Portanto, precisamos escrever o número 2 como uma potência de 10. Vimos que o expoente adequado para isso é, por definição, o *logaritmo* de 2 na base 10, o qual aproximamos por 0,3, conforme o enunciado. Logo,

$$10^{0,3} \approx 2.$$

Assim,

$$10^{0,3(n+2)} \approx 2^{n+2}.$$

Portanto, substituindo na equação, temos

$$10^{0,3(n+2)} \approx 10^6$$

Igualando os expoentes, concluímos que $0,3(n + 2) \approx 6$, ou seja, que

$$n + 2 \approx \frac{6}{0,3} = 20.$$

Portanto, $n \approx 18$ pares de anos, isto é, 36 anos. Assim, a alternativa correta é a letra C). ■

Exercício 2.3 — ENEM 2016, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 145, adaptada.

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de $3\,000^{\circ}\text{C}$ e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 minutos. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$. O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30°C é mais próximo de

- A) 22. B) 50. C) 100. D) 200. E) 400.

 **Solução.** A temperatura inicial era $3\,000^{\circ}\text{C}$ e a final, apenas 30°C após um tempo de t horas. Sabendo que a temperatura diminui $1\% = \frac{1}{100}$ a cada *meia hora*, concluímos que

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{100}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)}_{2t \text{ fatores}} \cdot 3\,000 = 30,$$

uma vez que, em t horas, temos $2t$ meias horas. Portanto, t é dada resolvendo-se a equação

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{2t} = \frac{30}{3\,000}$$

ou, uma vez que $\frac{30}{3\,000} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$,

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{2t} = 10^{-2}.$$

Portanto, precisamos escrever o número 99 como uma potência de 10. Para tanto, decompomos 99 como $9 \cdot 11 = 3^2 \cdot 11$. Agora, usamos o fato, informado no enunciado, de que

$$\log_{10} 3 \approx 0,477 \quad \text{e} \quad \log_{10} 11 \approx 1,041,$$

ou seja,

$$3 \approx 10^{0,477} \quad \text{e} \quad 11 \approx 10^{1,041}.$$

Logo $99 = 3^2 \cdot 11 = 10^{0,477 \cdot 2 + 1,041} = 10^{1,995}$. Substituindo na equação, temos

$$(10^{-0,005})^{2t} = 10^{-2},$$

ou seja $0,005t = 1$. Portanto, $t = 200$ horas, resposta que corresponde à alternativa D). ■

Questão 71 — PAEBES, Item M120261A9. A evolução prevista para certa cultura de bactérias é dada por $N(t) = 2 \cdot 3^t$, em que N é o número de bactérias, e t é o tempo em anos.

Qual será o tempo necessário para que o número de bactérias seja de 486?

- A) 1 ano. B) 2 anos. C) 3 anos. D) 4 anos. E) 5 anos.

 **Solução.** A função que modela o número de bactérias é expressa algebricamente por

$$N(t) = 2 \cdot 3^t$$

A fim de determinar para qual valor de t temos $N(t) = 486$, escrevemos essa equação como

$$2 \cdot 3^t = 486,$$

o que equivale a

$$3^t = \frac{486}{2} = 243 = 3^5.$$

Como a função $t \mapsto 3^t$ é *injetiva*, concluímos que o tempo necessário é igual a $t = 5$ anos. Portanto, a alternativa correta é E).



Questão 72 — SAEGO, Item M120282H6. Em determinado período, um pecuarista constatou que a população P , em milhares, de caprinos e ovinos da empresa onde atuava variava de acordo com a função $P(t) = \frac{1}{4} \cdot 2^t$, em que t representa o tempo, em anos, a partir do início do registro dessa população.

Depois de 6 anos do início desse registro, a população, em milhares, de caprinos e ovinos será de

- A) 2. B) 3. C) 9. D) 12. E) 16.

 **Solução.** A função que representa a população (em milhares) é dada pela expressão algébrica

$$P(t) = \frac{1}{4} \cdot 2^t = 2^{t-2}.$$

A fim de determinarmos $P(6)$, escrevemos

$$P(6) = 2^{6-2} = 2^4 = 16.$$

Portanto, a população após 6 anos será de **16 mil** caprinos e ovinos, resposta que corresponde à alternativa E).



Questão 73 — PAEBES, Item M120109A9, adaptada. No meio de uma avenida movimentada, o motorista aciona os freios de seu automóvel. Após a freada, o automóvel percorre 24 metros no 1º segundo, 12 metros no 2º segundo, e assim por diante, percorrendo, em cada segundo, metade da distância que percorreu no segundo anterior.

A distância total a ser percorrida no tempo de 4 segundos após a freada será de

- A) 15 metros. B) 21 metros. C) 27 metros. D) 42 metros. E) 45 metros.

 **Solução.** A cada segundo, o automóvel percorre metade da distância percorrida no segundo anterior. Segundo esse padrão de *decréscimo geométrico*, temos

- No 1º segundo, percurso de 24 metros
- No 2º segundo: percurso de 12 metros
- No 3º segundo, percurso de $\frac{12}{2} = 6$ metros

- No 4º segundo, percurso de $\frac{6}{2} = 3$ metros

Somando todas essas distâncias percorridas, temos

$$24 + 12 + 6 + 3 = 45 \text{ metros}$$

Portanto, a distância total percorrida em 4 segundos será de 45 metros, resposta que corresponde à alternativa E).

A discussão acerca da questão 73 é um momento apropriado para reforçar as relações entre progressões geométricas e funções exponenciais (restringindo-as a um domínio discreto, como os números naturais). No caso do contexto da questão, a função que modelaria o problema poderia ser representada algebricamente como

$$f(t) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1},$$

tomando t como a variável discreta tomando valores em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Esse é exemplo de uma progressão geométrica que, de modo geral, pode ser definida como uma função exponencial, cujo domínio é $\mathbb{N}$, da forma

$$f(n) = ar^{n+1},$$

em que $f(0) = a$ é o termo inicial da progressão e $r > 0, r \neq 1$, é sua razão. A propriedade fundamental de uma tal progressão é

$$f(n) = \sqrt{f(n-1) \cdot f(n+1)},$$

válida para $n \geq 1$.

Questão 74 — ENEM 2013, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 162, adaptada.

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de cézio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do cézio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do cézio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

- A) 27. B) 36. C) 50. D) 54. E) 100.

 **Solução.** A massa inicial de cézio-137 é dada pela constante A , cujo valor não precisamos conhecer. Porém, precisamos determinar a constante k . Para isso, usamos o fato de que, após 30 anos, a quantidade de massa de cézio-137 passa de A para a metade, ou seja, para $\frac{A}{2}$. Assim,

$$\frac{1}{2}A = A \cdot (2,7)^{30k}.$$

Portanto, a constante k deve satisfazer a equação

$$(2,7)^{30k} = \frac{1}{2}.$$

O que se pede na questão é a quantidade t de anos após a qual a massa de césio-137 será *um décimo* da massa inicial, ou seja, quando será igual a

$$\frac{1}{10}A.$$

Isto significa que, após esses t anos, teremos $M(t) = \frac{1}{10}A$. Portanto,

$$A \cdot (2,7)^{kt} = \frac{1}{10}A,$$

o que resulta em

$$(2,7)^{kt} = \frac{1}{10},$$

ou seja, $(2,7)^{kt} = 10^{-1}$. Portanto, elevando ambos os lados dessa última equação à potência 30, obtemos

$$(2,7)^{30kt} = 10^{-30}.$$

Assim, utilizando novamente a propriedade 2.6, deduzimos que

$$\left((2,7)^{30k}\right)^t = 10^{-30}.$$

Como vimos acima, $(2,7)^{30k} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$. Deste modo, obtemos

$$\left(2^{-1}\right)^t = 10^{-30}.$$

Finalmente, usamos o fato de que $\log_{10} 2 \approx 0,3$, ou seja, $2 \approx 10^{0,3}$. Concluimos que

$$\left(10^{-0,3}\right)^t = 10^{-30}.$$

Uma vez mais, utilizamos a propriedade 2.6 para deduzir que

$$10^{-0,3t} = 10^{-30}.$$

Sendo assim, temos

$$t = \frac{30}{0,3} = 100 \text{ anos},$$

resposta que corresponde à alternativa E).



Observação 2.3 A resolução da questão 74 consiste, essencialmente, em resolver uma **equação exponencial** da forma

$$2^x = 10^m, \quad (2.11)$$

onde o lado direito da equação é uma potência de 10. O objetivo, portanto, é determinar o expoente x que permite “transformar” a potência de 10 do lado direito da equação em uma potência de base 2.

Note que essa equação é bem diferente de uma equação linear da forma $2x = 10^m$, a qual se resolve utilizando as operações aritméticas (por exemplo, multiplicação e divisão).

No caso da equação exponencial 2.11, é preciso conhecer o valor, exato ou aproximado, do **logaritmo** de 2 na base 10 (ou o logaritmo de 10 na base 2), o qual, como sabemos é o *expoente* $\log_{10} 2$ tal que

$$10^{\log_{10} 2} = 2.$$

Conhecendo o valor desse logaritmo, o lado esquerdo da equação 2.11 passa a ser escrito também como uma potência de 10. Para isso, utilizamos a propriedade 2.6 de modo que

$$2^x = (10^{\log_{10} 2})^x = 10^{x \cdot \log_{10} 2}.$$

Assim, reescrevemos a equação 2.11 como

$$10^{x \cdot \log_{10} 2} = 10^m.$$

Deduzimos, portanto, que os expoentes dos dois lados da equação são iguais, ou seja,

$$x \cdot \log_{10} 2 = m.$$

Com isso, obtemos o valor desejado da incógnita x , a saber,

$$x = \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot m.$$

No caso da questão, tínhamos $m = 30$ e usávamos a aproximação $\log_{10} 2 \approx 0,3$. Sendo assim, obtínhamos

$$x \approx \frac{1}{0,3} \cdot 30 = 100.$$

Questão 75 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 156. Um agricultor é informado sobre um método de proteção para sua lavoura que consiste em inserir larvas específicas, de rápida reprodução. A reprodução dessas larvas faz com que sua população multiplique-se por 10 a cada 3 dias e, para evitar eventuais desequilíbrios, é possível cessar essa reprodução aplicando-se um produto X. O agricultor decide iniciar esse método com 100 larvas e dispõe de 5 litros do produto X, cuja aplicação recomendada é de exatamente 1 litro para cada população de 200 000 larvas. A quantidade total do produto X de que ele dispõe deverá ser aplicada de uma única vez.

Quantos dias após iniciado esse método o agricultor deverá aplicar o produto X?

A) 2

B) 4

C) 6

D) 12

E) 18

 **Solução.** Seja t o número de dias decorridos desde o início da aplicação do método (em $t = 0$). A população de larvas $p(t)$ cresce em **progressão geométrica** como uma **função exponencial** de t . A seguinte tabela mostra alguns valores de $p(t)$.

t	0	3	6	9	12	15
$p(t)$	100	$100 \cdot 10$	$100 \cdot 10^2$	$100 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^5$

Algebricamente, a função $p(t)$ é expressa por

$$p(t) = 100 \cdot 10^{\frac{t}{3}} = 10^{\frac{t}{3}+2}.$$

De acordo com o enunciado, 5 litros do produto são suficientes para controlar uma população de

$$5 \cdot 200\,000 = 1\,000\,000 = 10^6 \text{ larvas.}$$

O número t de dias para chegar-se a essa população é dado pela **equação exponencial**

$$10^{\frac{t}{3}+2} = 10^6,$$

que equivale à equação linear

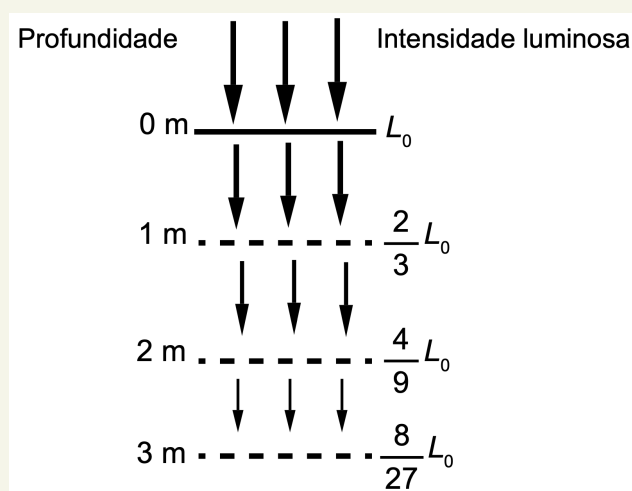
$$\frac{t}{3} + 2 = 6,$$

cujas solução é dada por

$$t = 12.$$

Portanto, a resposta correta é D).

Exercício 2.4 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 159. O esquema mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L_0 a intensidade na sua superfície.



Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o mesmo padrão do esquema.

A intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m é igual a

- A) $\frac{1}{9} L_0$ B) $\frac{16}{27} L_0$ C) $\frac{32}{243} L_0$ D) $\frac{64}{729} L_0$ E) $\frac{128}{2187} L_0$

Solução. Seja x a profundidade, em metros, do rio, medida desde a superfícies (que corresponde a $x = 0$). A intensidade luminosa $L(x)$ decresce em **progressão geométrica** como uma **função exponencial** de x . A seguinte tabela mostra alguns valores de $L(x)$, em que constatamos que a *razão* da progressão geométrica é $\frac{2}{3}$.

x	0	1	2	3	4	5
$L(x)$	L_0	$L_0 \cdot \frac{2}{3}$	$L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$	$L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$	$L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Algebricamente, a função $L(x)$ é expressa por

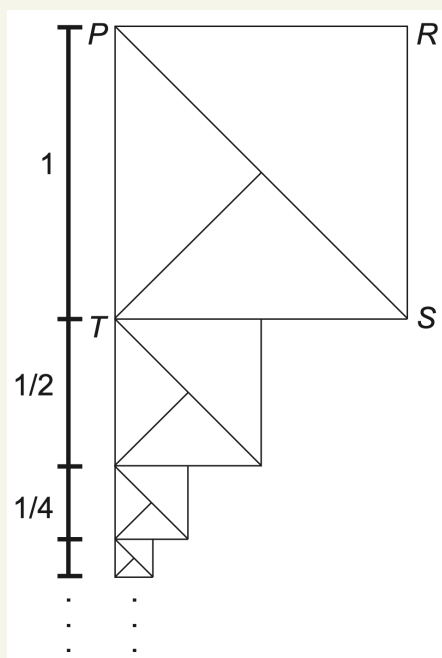
$$L(x) = L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x,$$

onde L_0 é uma constante que mede a luminosidade na superfície, isto é, quando $x = 0$. Assim, quando $x = 6$ m, temos

$$L(x) = L_0 \left(\frac{2}{3} \right)^6 = \frac{2^6}{3^6} L_0 = \frac{64}{729} L_0,$$

o que corresponde à alternativa D).

Exercício 2.5 — ENEM 2020, Caderno 5 - Amarelo, Questão 166. O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado $PRST$, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

- A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$ C) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$ E) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

Solução. A medida de um dos lados do n -ésimo quadrado (isto é, do quadrado que ocupa a posição n na sequência de quadrados) é dada por

$$\ell(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Em particular, se $n = 100$, temos

$$\ell(100) = \left(\frac{1}{2}\right)^{99},$$

o que corresponde à alternativa B).

Exercício 2.6 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 163. A exposição a alguns níveis sonoros pode causar lesões auditivas. Por isso, em uma indústria, são adotadas medidas preventivas de acordo com a máquina que o funcionário opera e o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB), a que o operário é exposto, sendo $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, I a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Disponível em: www.sofisica.com.br. Acesso em: 8 jul. 2015 (adaptado).

Quando o som é considerado baixo, ou seja, $N = 48 \text{ dB}$ ou menos, deve ser utilizada a medida preventiva I. No caso de o som ser moderado, quando N está no intervalo $(48 \text{ dB}, 55 \text{ dB})$, deve ser utilizada a medida preventiva II. Quando o som é moderado alto, que equivale a N no intervalo $(55 \text{ dB}, 80 \text{ dB})$, a medida preventiva a ser usada é a III. Se N estiver no intervalo $(80 \text{ dB}, 115 \text{ dB})$, quando o som é considerado alto, deve ser utilizada a medida preventiva IV. E se o som é considerado muito alto, com N maior que 115 dB , deve-se utilizar a medida preventiva V.

Uma nova máquina, com $I = 8 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$, foi adquirida e será classificada de acordo com o nível de ruído que produz.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

O funcionário que operará a nova máquina deverá adotar a medida preventiva

- A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

 **Solução.** Dado

$$I = 8 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2,$$

temos, graças a propriedade 2.10, a seguinte expressão

$$\begin{aligned} N &= \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10} = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)^{10} \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{8 \times 10^{-8}}{10^{-12}} \right) = 10 \log_{10} (8 \times 10^4) \\ &= 10 \cdot (\log_{10} 8 + \log_{10} 10^4) = 10 \cdot (\log_{10} 2^3 + \log_{10} 10^4) \\ &= 10 \cdot (3 \log_{10} 2 + 4) \\ &= 10 \cdot (3 \cdot 0,3 + 4) = 10 \cdot 4,9 = 49 \text{ dB}, \end{aligned}$$

o que caracteriza nível de som moderado e uso da medida preventiva II. A resposta correta é letra B).

Seguimos, resolvendo, desta vez, questões que aplicam potências e logaritmos em contextos de Matemática Financeira.

Questão 76 — ENEM 2019, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 154. Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento

será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado. O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

- A) 398,02. B) 400,00. C) 401,94. D) 404,00. E) 406,02.

 **Solução.** O enunciado informa que a taxa de *juros compostos* é de 1% ao mês, ou seja, $\frac{1}{100} = 0,01$ a cada mês depois da data da compra. Isto quer dizer que, se o cliente optasse por *antecipar* o primeiro pagamento em um mês, ou seja, se efetuasse esse primeiro pagamento no dia da compra, pagaria

$$\frac{202}{1 + 0,01} = \frac{202}{1,01} = 200 \text{ reais.}$$

Da mesma forma, se resolvesse antecipar o segundo pagamento, efetuando-o no dia da compra, deveria pagar

$$\frac{204,02}{(1 + 0,01)^2} = \frac{204,02}{1 + 2 \cdot 0,01 + 0,0001} = \frac{204,02}{1,0201} = 200 \text{ reais.}$$

Concluimos que, caso antecipasse os dois pagamentos para o dia da compra do produto, pagaria $200 + 200 = 400$ reais. A alternativa correta é B).

Obs

Façamos, aqui, uma breve revisão sobre o regime de *juros compostos* em Matemática Financeira: dado um *valor inicial* ou capital C_0 (20 reais, digamos) e uma taxa de juros de i a ser aplicado a cada unidade de tempo (por exemplo, $i = 10\% = 0,1$ ao mês), o capital ajustado, após uma unidade de tempo (em nosso exemplo, após um mês) é igual a

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i).$$

Após mais uma unidade de tempo, o capital passa a ser

$$C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)^2.$$

De modo geral, após n unidades de tempo, o capital é ajustado para

$$C_n = C_0(1 + i)^n. \quad (2.12)$$

Em nosso exemplo, teríamos

$$C_n = 20 \cdot (1 + 10\%)^n = 20 \cdot (1,1)^n.$$

Neste caso, após $n = 3$ meses do momento inicial, teríamos

$$C_3 = 20 \cdot (1,1)^3 = 20 \cdot 1,331 = 26,62 \text{ reais.}$$

Observe que a expressão 2.12 para o montante após n unidades de tempo indica que esse montante é dado por uma progressão geométrica com termo inicial C_0 e razão $1 + i$.

Obs

Utilizando a notação apresentada anteriormente no contexto da questão 76, vê-se que o valor ou capital inicial é igual a $C_0 = 200$ reais e a taxa de juros é igual a $i = 1\% = 0,01$ ao mês (ou seja, a unidade de tempo é *mês*). Logo, a progressão geométrica de valores ajustados ou corrigidos do capital são

$$C_1 = C_0(1 + i) = 200 \cdot (1 + 0,01) = 200 \cdot 1,01 = 202 \text{ reais,}$$

$$C_2 = C_1(1 + i) = 202 \cdot 1,01 = 204,02 \text{ reais,}$$

e assim por diante.

Vamos nos aprofundar um pouco mais na noção de juros compostos. Vimos, nas explicações anteriores, que esse regime é um exemplo de **progressão geométrica** ou crescimento geométrico: o montante cresce exponencialmente.

Questão 77 — ENEM 2019, Caderno 5 - Amarelo, Segundo Dia, Questão 157. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R\$ 1 250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. Censo 2010. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

- A) R\$ 1 340,00. B) R\$ 1 349,00. C) R\$ 1 375,00. D) R\$ 1 465,00. E) R\$ 1 474,00.

 **Solução.** No período de 2000 a 2010, o rendimento médio mensal aumentou $7,2\% = 0,072$, a partir de um valor inicial de R\$ 1 250,00 em 2000. Assim, em 2010, o valor do rendimento médio mensal passou a ser

$$1\,250 + 1\,250 \cdot 0,072 = 1\,250 \cdot (1 + 0,072).$$

O aumento esperado (projetado) de 2010 para 2020 é de 10%, a partir do valor de 2010. Portanto, o rendimento mensal médio esperado em 2020 é igual a

$$1\,250 \cdot (1 + 0,072) \cdot (1 + 0,1),$$

ou seja,

$$1\,250 \cdot (1 + 0,072 + 0,1 + 0,0072) = 1\,250 \cdot 1,1792 = 1\,474 \text{ reais.}$$

Logo, a alternativa correta é E). ■

Questão 78 — UNICAMP 2018, Primeira Fase, Prova Q, Questão 18. Dois anos atrás, certo carro valia R\$ 50 000,00 e atualmente vale R\$ 32 000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

- A) R\$ 25 600,00. B) R\$ 24 400,00. C) R\$ 23 000,00. D) R\$ 18 000,00.

 **Solução.** O valor do carro decresce a uma taxa anual constante, a qual denotamos por i . Logo, em um ano, o valor do carro decresce de R\$ 50 000,00 para

$$50\,000,00 - 50\,000,00 \cdot i = 50\,000 \cdot (1 - i),$$

um valor menor. Após mais um ano, esse valor é novamente reduzido, passando a ser

$$50\,000 \cdot (1 - i) \cdot (1 - i) = 32\,000.$$

Portanto, a taxa i é determinada ao resolvermos a equação

$$(1 - i)^2 = \frac{32\,000}{50\,000},$$

ou seja, a equação

$$(1 - i)^2 = \frac{16}{25}.$$

Calculando a raiz quadrada em ambos os lados da equação, obtemos

$$1 - i = \frac{4}{5}.$$

Logo, em um ano a mais, o valor do carro reduz de R\$ 32 000,00 para

$$32\,000 \cdot (1 - i) = 32\,000 \cdot \frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{32\,000}{5} = 4 \cdot 6\,400 = 25\,600 \text{ reais.}$$

Assim, a alternativa correta é A). ■

Questão 79 — INSPER 2019-1, Caderno 1, Questão 36. Considere a seguinte tabela:

x	$\frac{28}{1000}$	$\frac{30}{1000}$	$\frac{35}{1000}$	$\frac{38}{1000}$	$\frac{40}{1000}$	$\frac{3}{10}$
10^x	1,067	1,071	1,084	1,091	1,096	2

Investimentos de taxa fixa são uma opção mais conservadora para quem busca aplicar seu dinheiro em tempos de instabilidade do mercado. Para aqueles que procuram essa linha de investimento, a investidora M&B oferece um plano de investimento para seus clientes com taxa anual fixa na qual o dinheiro aplicado duplica em um período de 10 anos. Com base nos valores da tabela, é correto afirmar que a taxa anual atrelada ao plano oferecido por essa investidora é de

- A) 7,1%. B) 9,1%. C) 9,6%. D) 8,4%. E) 6,7%.

 **Solução.** De acordo com o enunciado, um cliente que invista, por exemplo, R\$ 100,00 no plano com esta taxa anual fixa receberá, em 10 anos, o dobro deste valor, isto é, R\$ 200,00. Se i é taxa anual fixa, temos

$$100 \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot \dots \cdot (1 + i)}_{10 \text{ fatores}} = 200.$$

Portanto, a taxa anual i é dada pela seguinte equação

$$(1 + i)^{10} = 2.$$

Portanto,

$$1 + i = 2^{\frac{1}{10}}.$$

No entanto, de acordo com a última coluna da tabela $2 = 10^{\frac{3}{10}}$ (lembre-se de que, no início desta seção, havíamos deduzido que $\log_{10} 2 \approx 0,3$). Substituindo esse dado na equação anterior, temos

$$1 + i = (10^{\frac{3}{10}})^{\frac{1}{10}} = 10^{\frac{3}{100}} = 1,071,$$

onde, na última igualdade, usamos a segunda coluna da tabela. Portanto, $i = 0,071 = 7,1\%$. Assim, a alternativa correta é A). ■

Questão 80 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 170. Uma loja vende seus produtos de duas formas: à vista ou financiado em três parcelas mensais iguais. Para definir o valor dessas parcelas nas vendas financiadas, a loja aumenta em 20% o valor do produto à vista e divide esse novo valor por 3. A primeira parcela deve ser paga no ato da compra, e as duas últimas, em 30 e 60 dias após a compra. Um cliente da loja decidiu comprar, de forma financiada, um produto cujo valor à vista é R\$ 1 500,00.

Utilize 5,29 como aproximação para $\sqrt{28}$.

A taxa mensal de juros compostos praticada nesse financiamento é de

- A) 6,7% B) 10% C) 20% D) 21,5% E) 23,3%

 **Solução.** Ao financiar o valor de R\$ 1 500,00, o cliente pagará 20% a mais, ou seja,

$$1\,500 + 20\% \cdot 1\,500 = 1\,500 + 300 = 1\,800 \text{ reais,}$$

em 3 pagamentos de R\$ 600,00: o primeiro pagamento no ato da compra; o segundo pagamento, 30 dias após a compra; e o terceiro e último, 60 dias após a compra.

A taxa mensal i de juros compostos é aplicada, pela primeira vez, ao *saldo devedor* após o pagamento no ato da compra, isto é, a $1\,500 - 600 = 900$ reais, o que resulta no saldo devedor corrigido, a ser pago 30 dias após o ato da compra, dado por

$$900 \cdot (1 + i).$$

Aplica-se, então, a taxa de juros novamente a $900(1 + i) - 600$, o que resulta em

$$(900(1 + i) - 600) \cdot (1 + i) = 900 \cdot (1 + i)^2 - 600 \cdot (1 + i) = 600,$$

o valor do último pagamento, a ser efetuado 60 dias após o ato da compra.

Concluimos que $1 + i$ resolve a equação quadrática

$$900(1 + i)^2 - 600(1 + i) - 600 = 0.$$

Dividindo ambos os lados por 300, obtemos uma equação equivalente a essa, a saber,

$$3(1 + i)^2 - 2(1 + i) - 2 = 0,$$

cujas soluções positivas são

$$1 + i = \frac{2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{6} = \frac{2 + \sqrt{28}}{6} \approx \frac{2 + 5,29}{6} = \frac{7,29}{6} = 1,215.$$

Deduzimos que $i = 21,5\%$, o que corresponde à alternativa D). ■



Acréscimos compostos são diferentes de **acréscimos simples**. No caso de acréscimos simples sobre um valor inicial C a uma taxa i igual a, por exemplo $5\% = 0,05$, os acréscimos são sempre calculados sobre C , isto é,

$$C + \underbrace{C \cdot i + \dots + C \cdot i}_{t \text{ vezes}}$$

ou seja, o montante M , isto é, o valor final após t acréscimos, é dado por

$$M = C + Cit = C(1 + it).$$

Esses valores definem uma **progressão aritmética**.

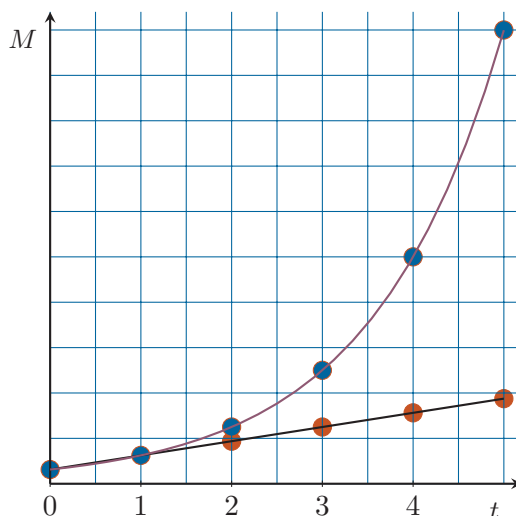
No caso de acréscimos compostos, cada acréscimo é calculado sobre o valor *imediatamente anterior* e não sobre o valor inicial. Logo, acréscimos compostos a uma taxa i , sobre o valor inicial C , definem uma **progressão geométrica**:

$$C + Ci = C(1 + i), C(1 + i) + C(1 + i)i = C(1 + i)^2, C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2i = C(1 + i)^3,$$

e assim por diante. De um modo geral, o acréscimo composto com t fatores resulta no montante

$$M = C(1 + i)^t.$$

A figura seguinte ilustra a diferença entre os crescimentos aritmético e geométrico, respectivamente associados aos acréscimos simples e acréscimos compostos:



Os pontos alinhados em uma reta correspondem aos acréscimos simples, a partir do valor inicial $C = 5/32$ a uma taxa de acréscimos simples igual a $i = 100\%$. Já os pontos que seguem ao longo de uma linha *exponencial* são dados pela progressão geométrica de acréscimos *compostos* que também iniciam com $C = 5/32$, a uma taxa de acréscimos compostos igual a $i = 100\%$.

Questão 81 — ENEM 2017, Caderno 5 - Amarelo, Questão 144. Um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P . O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

- A) $P\left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2}\right)$
- B) $P\left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)}\right)$
- C) $P\left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2}\right)$
- D) $P\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3i}{100}\right)}\right)$

$$E) P \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3} \right)$$

 **Solução.** As três últimas prestações (sexta, sétima e oitava), se pagas nas datas dos vencimentos, somariam

$$P + P + P.$$

Entretanto, antecipando a sétima e a oitava parcelas para o dia do vencimento da sexta parcela, o valor a ser pago (com descontos compostos) seria

$$P + \frac{P}{1 + i/100} + \frac{P}{(1 + i/100)^2},$$

o que corresponde à alternativa A). ■

2.5 – Atividades sobre Probabilidade e Dados

Os conhecimentos e habilidades relativos a Estatística Descritiva, Combinatória Enumerativa e Probabilidades, estudados nesta seção, estão relacionados aos seguintes descritores na Matriz de Referência do SAEB:

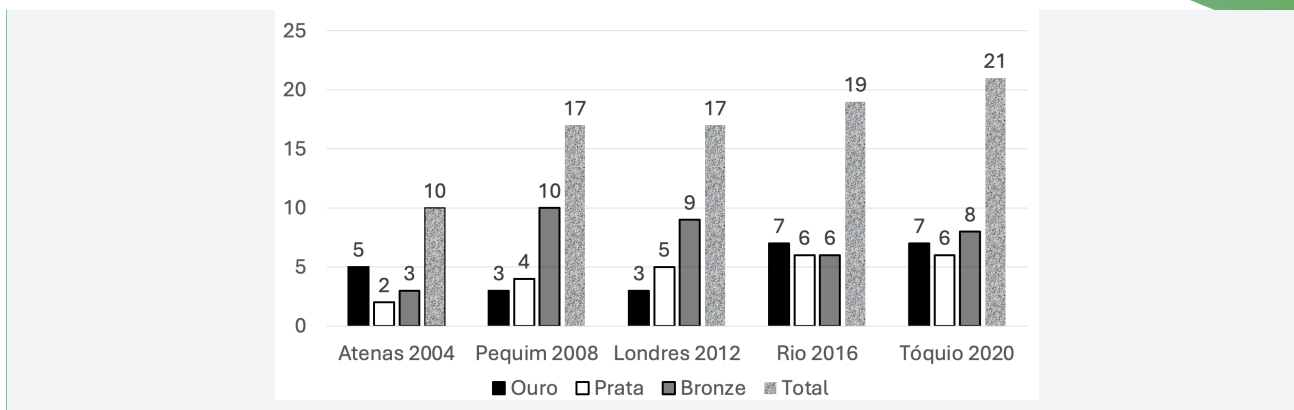
- D34 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
- D35 - Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.
- D32 - Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.
- D33 - Calcular a probabilidade de um evento.

Ao longo desta seção, apresentamos estratégias de resolução para questões, apresentadas em avaliações externas, ENEM e em vestibulares, a respeito da Estatística Descritiva e da Teoria das Probabilidades e suas aplicações, um tópico essencial tanto no cotidiano quanto para as Ciências e Tecnologias. De fato, esse assunto é um dos principais pré-requisitos para algumas das profissões mais demandadas no mercado de trabalho, agora e no futuro, como é o caso das carreiras relacionadas a Ciência de Dados e Inteligência Artificial.

Recomendamos que o estudo desta seção seja acompanhado de uma boa revisão das operações com frações, já que, em várias ocasiões, lidaremos com probabilidades expressas por números racionais.

Leia o seguinte texto para responder às questões 82 a 84.

No seguinte gráfico de colunas, estão registrados os números de medalhas recebidas pelos atletas brasileiros nas cinco últimas edições dos Jogos Olímpicos.



Questão 82 — SISEDU 2024.2. Quantas medalhas o Brasil deveria ganhar nos Jogos Olímpicos de Paris em 2024 de modo que a média de medalhas ganhas de 2004 a 2024 fosse igual a 17?

- A) 102. B) 24. C) 23. D) 18. E) 17.

Solução. Uma estratégia que revela compreensão conceitual da noção de média aritmética por parte do aluno seria a de distribuir, de forma equitativa, os 6 números de modo que as colunas no gráfico tivessem, todas, altura 17. Considerando os 5 números de medalhas exibidos no gráficos, o estudante, então, observaria que retirando 2 medalha do total em 2016 e 4 medalhas do total em 2020 e transferindo-as para o total em 2004, ficaríamos com $10 + 2 + 4 = 16$ medalhas no total de 2004. Portanto, bastaria transferir mais 1 medalha do total de 2024 de modo que, em 2004, ficássemos também com 17 medalhas. Logo, o número total necessário de medalhas em 2024 seria $17 + 1 = 18$.

Uma abordagem mais direta e procedimental, embora menos reveladora de compreensão conceitual, seria modelar algebricamente o problema como sendo o de determinar a diferença

$$6 \cdot 17 - (10 + 17 + 17 + 17 + 19 + 21).$$

Podemos efetuar esse cálculo diretamente ou, de outro modo, “equilibrar” as parcelas como antes, obtendo

$$\begin{aligned} & 6 \cdot 17 - (10 + 17 + 17 + 17 + 2 + 17 + 4) \\ &= 6 \cdot 17 - (10 + 2 + 4 + 4 \cdot 17) \\ &= 2 \cdot 17 - 16 \\ &= 17 + 1 = 18. \end{aligned}$$

Questão 83 — SISEDU 2024.2. De acordo com as informações no gráfico, qual das seguinte afirmações é verdadeira?

- A) O percentual de medalhas de ouro passou de 50% em 2004 para 30% em 2020.
 B) O número total de medalhas aumentou 11% dos Jogos Olímpicos de 2004 para os de 2020.
 C) Os maiores percentuais de medalhas de ouro ocorreram nos Jogos Olímpicos de 2016 e 2020.
 D) O total de medalhas de ouro correspondem a mais de 25% do total de medalhas de 2004 a 2020.

E) O percentual de medalhas de ouro se manteve constante de 2016 para 2020.

Solução. Os percentuais de medalhas de ouro nas edições dos Jogos Olímpicos de 2004; 2008 e 2012; 2016 e 2020 foram, respectivamente,

$$\frac{5}{10} = 50\%, \quad \frac{3}{17} \approx \frac{3}{18} \approx 17\%,$$

$$\frac{7}{19} \approx \frac{7}{20} = 35\%, \quad \frac{7}{21} \approx 33\%.$$

Já o número total de medalhas aumentou, de 2004 a 2020,

$$\frac{21 - 10}{10} = \frac{11}{10} = 110\%$$

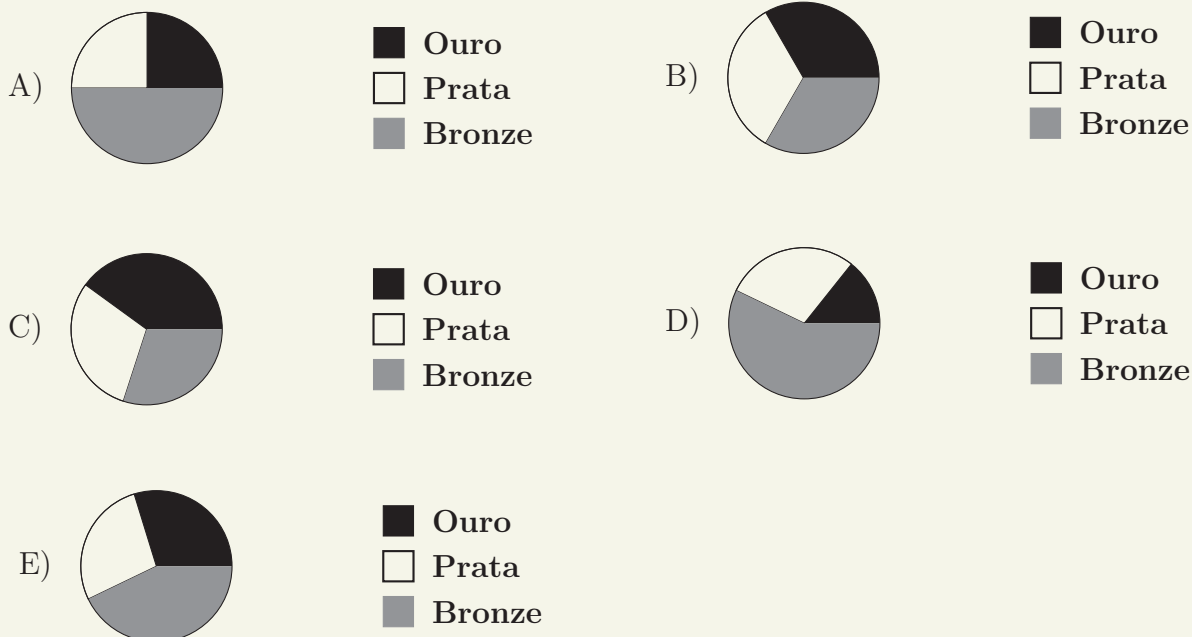
em termos percentuais. Desse total de medalhas, o número total de medalhas de ouro representou

$$\frac{25}{84},$$

ou seja, mais de 25/100.



Questão 84 — SISEDU 2024.1. Qual dos seguintes gráficos de setores representa as proporções de medalhas de ouro, prata e bronze no total de medalhas recebidas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos de 2004 a 2020?



Solução. A resolução depende da interpretação gráfica das áreas dos setores como sendo proporcionais aos percentuais dos 3 tipos de medalhas em relação ao total. Esse total, nas cinco edições dos Jogos Olímpicos, é igual a

$$10 + 17 + 17 + 19 + 21 = 10 + 34 + 20 + 20 = 84$$

medalhas, das quais temos um número total de

$$5 + 3 + 3 + 7 + 7 = 11 + 14 = 25$$

medalhas de ouro,

$$2 + 4 + 5 + 6 + 6 = 18 + 5 = 23$$

medalhas de prata e

$$3 + 10 + 9 + 6 + 8 = 12 + 14 + 10 = 36$$

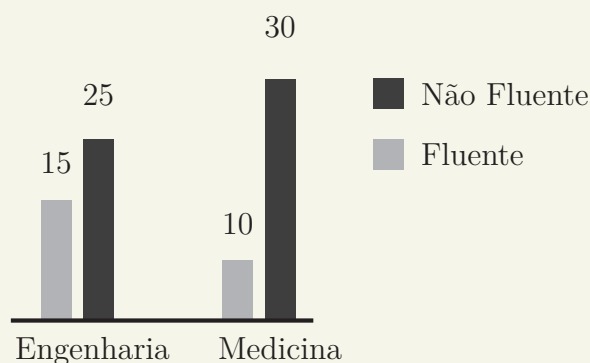
medalhas de bronze. Logo, as respectivas proporções de medalhas de ouro, prata e bronze, em relação ao total de medalhas nas cinco edições dos Jogos Olímpicos, são

$$\frac{25}{84}, \quad \frac{23}{84} \quad \text{e} \quad \frac{36}{84}.$$

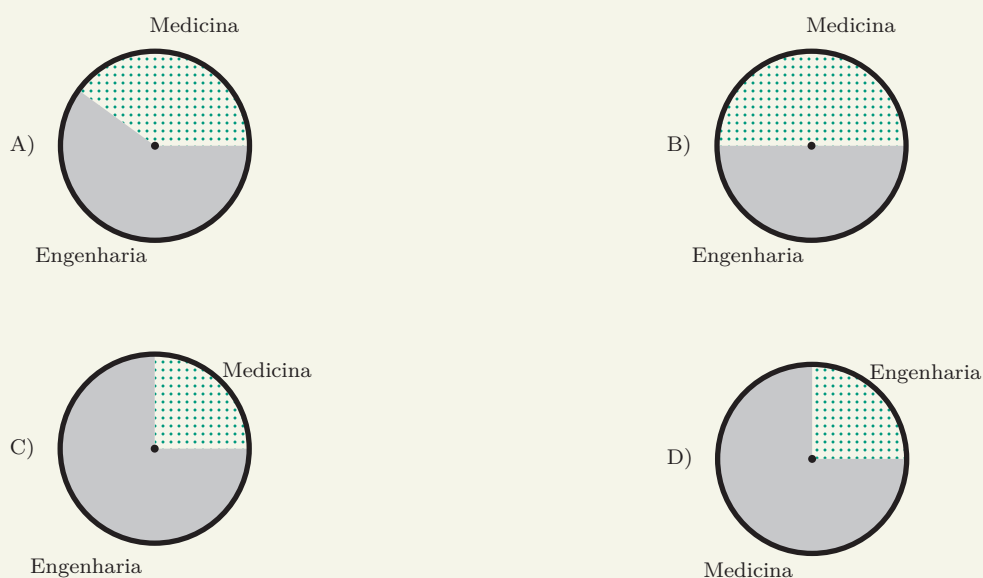
As duas primeiras frações são ambas próximas de $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$ e a última pode ser expressa como $\frac{3}{7}$. Logo, no gráfico de setores, deveríamos ter dois setores de áreas praticamente iguais e um terceiro setor com área $3/2 = 1,5$ vezes maior que a área dos outros dois.



Questão 85 O gráfico abaixo mostra a distribuição dos estudantes do primeiro ano dos cursos de Engenharia e Medicina de uma faculdade em relação à fluência em Língua Inglesa.



Assinale a alternativa com o gráfico de setores que melhor representa as proporções de estudantes de Medicina e de Engenharia no total de estudantes fluentes em Língua Inglesa.





Solução. Há 25 estudantes fluentes em inglês, dos quais $10 = \frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\%$ são da turma de Medicina. Isso nos mostra, que no gráfico de setores a parte da turma de Medicina fluente em Língua Inglesa corresponde a um setor próximo da metade e a parte da turma de Engenharia fluente em Língua Inglesa corresponde a um setor próximo de $2/3$.



Questão 86 — SPAECE, Item M120190A9, adaptado. Para disciplinar o trânsito em Pedalândia, o prefeito resolveu emplacar as bicicletas da cidade. As placas são formadas por 2 vogais e 3 algarismos. O primeiro a emplacar sua bicicleta recebeu a seguinte placa:

AA - 000

Nessas condições, qual é o número máximo de bicicletas que podem ser emplacadas em Pedalândia?

- A) 2 500. B) 4 000. C) 6 000. D) 25 000. E) 30 000.

Solução. As placas são formadas por

- 2 vogais (A, E, I, O, U) — total de 5 letras possíveis.
- 3 algarismos (de 0 a 9) — total de 10 dígitos possíveis.

O número total de placas possíveis é dado por

$$\underbrace{5 \cdot 5}_{\text{vogais}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{algarismos}} = 25 \cdot 1000 = 25\,000$$

Portanto, o número máximo de bicicletas que podem ser emplacadas é **25 mil**, resposta correspondente à alternativa D).



Questão 87 Uma caixa contém 4 bolas brancas e 7 bolas pretas, todas idênticas, exceto pela cor. Uma pessoa retira uma das bolas, observa sua cor e a devolve para a caixa. Em seguida, ela retira mais uma bola e observa sua cor.

Qual a probabilidade de que a primeira bola sorteada seja branca e a segunda seja preta?

- A) $1/4$. B) $11/22$. C) $28/110$. D) $11/121$. E) $28/121$.

Solução. A retirada da primeira bola (com a reposição dessa bola para a caixa) não altera a distribuição de probabilidades para a cor da bola na segunda retirada. Portanto, as duas retiradas são eventos independentes ou, dito de forma mais precisa, as cores das bolas nas duas retiradas são variáveis aleatórias *independentes*.

Portanto, a probabilidade de que a cor da bola na primeira retirada seja branca e a probabilidade de que a cor da bola na segunda retirada seja preta é igual ao *produto* da probabilidade de retirar-se uma bola branca da caixa e da probabilidade de retirar-se uma bola preta da caixa, ou seja,

$$\frac{4}{4+7} \cdot \frac{7}{4+7},$$

onde estamos supondo equiprobabilidade (isto é, há iguais probabilidade de retirar-se uma das 11 bolas). Assim, a probabilidade desejada é $28/121$.

Questão 88 Dois dados convencionais, numerados de 1 a 6 em cada face, são lançados simultaneamente.

Sabe-se que a soma dos números obtidos é 8. Sendo assim, qual é a probabilidade de que um dos números obtidos seja 6?

- A) $1/6$ B) $2/5$ C) $1/3$ D) $1/2$ E) $\frac{5}{36}$

 **Solução.** Das 5 combinações possíveis para a soma 8 ($6 + 2, 5 + 3, 4 + 4, 3 + 5, 2 + 6$), o número 6 aparece em dois casos ($6 + 2$ e $2 + 6$). Assim, a probabilidade de que um dos números seja 6 é $\frac{2}{5}$.

Questão 89 — SPAECE. Felipe colocou dentro de uma caixa as 6 letras que formam seu nome. Ele sorteou aleatoriamente uma dessas letras. Qual é a probabilidade de se obter, nesse sorteio, a letra E?

- A) $\frac{1}{6}$. B) $\frac{1}{4}$. C) $\frac{1}{3}$. D) $\frac{1}{2}$. E) $\frac{2}{3}$.

 **Solução.** O nome **Felipe** possui 6 letras (F, E, L, I, P, E), cada uma delas associada à mesma probabilidade de ser extraída no sorteio, a saber, a $1/6$. Como há duas letras “E” entre as 6 letras colocadas, concluímos que a probabilidade de extrair-se *uma das duas letras* “E” no sorteio é igual a

$$\frac{\text{números de letras E}}{\text{número total de letras}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

resposta que corresponde à alternativa C).

Questão 90 — SPAECE, Item M120191A9. Em uma fábrica de lâmpadas, a máquina de testes indicou que, de um lote com 600 lâmpadas, 30 estavam com defeito. Se o supervisor escolher uma lâmpada desse lote ao acaso, qual é a probabilidade de ela estar com defeito?

- A) 5%. B) 9%. C) 10%. D) 20%. E) 30%.

 **Solução.** Sabemos que há um total de 600 lâmpadas, das quais 30 estão com defeito. Nossa suposição é de que cada uma das lâmpadas está associada à mesma probabilidade de ser escolhida ao acaso, a saber,

$$\frac{1}{600}.$$

Além disso, modelamos a probabilidade de selecionar uma lâmpada defeituosa ao acaso como a razão

$$\frac{\text{quantidade de lâmpadas defeituosas}}{\text{quantidade total de lâmpadas}} = \frac{30}{600} = \frac{1}{20} = \frac{1 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 5\%,$$

o que corresponde à alternativa A).

Questão 91 — SPAECE, Item M120708H6. Para realizar um sorteio, Rosana vai utilizar uma urna contendo 10 bolinhas idênticas numeradas de 1 a 10. Qual é a probabilidade de a primeira bolinha retirada por Rosana dessa urna ser a de número 3?

- A) $\frac{1}{10}$. B) $\frac{1}{9}$. C) $\frac{3}{10}$. D) $\frac{9}{10}$. E) $\frac{10}{9}$.

 **Solução.** A urna contém 10 bolinhas numeradas de 1 a 10. Como cada uma das bolinhas “tem” a mesma probabilidade de ser sorteada (hipótese de equiprobabilidade), a probabilidade de retirar a bolinha de número 3 é

$$\frac{1}{10},$$

resposta que corresponde à alternativa A).

Questão 92 — SPAECE, Item M120736A9. Em um estojo, existem 6 canetas pretas, 7 canetas azuis e 3 canetas vermelhas. Tirando uma caneta ao acaso desse estojo, qual é a probabilidade de que ela seja azul?

- A) $\frac{7}{16}$. B) $\frac{9}{16}$. C) $\frac{7}{9}$. D) $\frac{9}{7}$. E) $\frac{16}{7}$.

 **Solução.** Inicialmente, calculamos a quantidade total de canetas que, de acordo com o enunciado, é igual a

$$6 + 7 + 3 = 16.$$

Como cada uma das canetas está associada à mesma probabilidade de ser retirada ao acaso, a probabilidade de que seja retirada uma caneta azul é

$$\frac{\text{número de canetas azuis}}{\text{número total de canetas}} = \frac{7}{16},$$

o que corresponde à alternativa A).

Questão 93 — PAEBES, Item M120188B1. Juliana possui 3 sandálias marrons, 5 sandálias pretas, 3 bolsas marrons, 2 bolsas brancas e 1 cinto marrom.

Ela está usando um acessório marrom, qual é a probabilidade de que seja uma sandália?

- A) $\frac{3}{7}$. B) $\frac{3}{8}$. C) $\frac{3}{14}$. D) $\frac{8}{14}$. E) $\frac{1}{8}$.

 **Solução.** Queremos calcular a probabilidade de que, ao escolher um acessório marrom, ele seja uma sandália. Inicialmente, calculamos a quantidade total de acessórios marrons, dada por

$$3 + 3 + 1 = 7.$$

Como estamos supondo, implicitamente, que cada um dos acessórios marrons tem a mesma probabilidade de ser usado (professor, essa é uma hipótese plausível?), a probabilidade de que esse acessório seja uma sandália é

$$\frac{\text{número de sandálias marrons}}{\text{número de acessórios marrons}} = \frac{3}{7},$$

o que corresponde à alternativa A).



Essa discussão pode ensinar uma breve incursão no tema da *probabilidade condicional*. De fato, a probabilidade de selecionar-se um acessório marrom (supondo equiprobabilidade) é

$$\frac{3 + 3 + 1}{3 + 5 + 3 + 2 + 1} = \frac{7}{14},$$

ao passo que a probabilidade de selecionar-se uma sandália marrom, dentre *todos* os acessórios (sempre supondo equiprobabilidade), é

$$\frac{3}{14}.$$

Portanto, a probabilidade de que uma sandália tenha sido escolhida, sabendo-se que foi selecionado um acessório marrom, é

$$\frac{3/14}{7/14} = \frac{3}{7},$$

ou seja,

$$\frac{\#(S \cap M)}{\#M},$$

em que S é o conjunto das sandálias e M é o conjunto dos acessórios marrons.

Questão 94 — PAEBES, Item M120975E4. Uma fábrica de tijolos produziu um lote com 987 tijolos. Desses, 35 apresentaram defeito.

Qual é a probabilidade de o primeiro tijolo retirado desse lote apresentar defeito?

- A) $\frac{987}{35}$. B) $\frac{35}{952}$. C) $\frac{35}{987}$. D) $\frac{1}{35}$. E) $\frac{1}{987}$.

Solução. Como cada um dos tijolos está associada à mesma probabilidade de ser o primeiro a ser retirado ao acaso, a probabilidade de que seja retirado um tijolo defeituoso é

$$\frac{\text{número de tijolos defeituosos}}{\text{número total de tijolos}} = \frac{35}{987},$$

o que corresponde à alternativa C).

Questão 95 — PAEBES, Item M120410H6. Um professor de Matemática dividiu os alunos de sua turma em 13 grupos diferentes para apresentarem um trabalho. Para determinar a ordem das apresentações dos grupos, ele colocou em uma urna 13 cartões idênticos, numerados de 1 a 13, que foram sorteados aleatoriamente.

Qual é a probabilidade do primeiro cartão retirado da urna ser um número maior que 8?

A) $\frac{1}{13}$.B) $\frac{5}{13}$.C) $\frac{6}{13}$.D) $\frac{7}{13}$.E) $\frac{8}{13}$.

 **Solução.** Os cartões são numerados de 1 a 13: a cada um desses cartões, associamos a probabilidade de $\frac{1}{13}$ de que seja sorteado ao acaso. Desejamos determinar a probabilidade de que seja sorteado um cartão com número maior que 8. As possibilidades “favoráveis” são os números de 9 a 13, de modo que a probabilidade desejada pode ser calculada como

$$\frac{\text{número de cartões com números de 9 a 13}}{\text{número total de cartões}} = \frac{5}{13},$$

resposta que corresponde à letra B).



Questão 96 — SPAECE, Item M110765E4. Um congresso de Medicina terá seu próximo evento realizado no Brasil. Para selecionar o estado que sediará o congresso, será realizado um sorteio entre todos os estados que se inscreveram. Dentre eles, 1 está localizado na região Norte, 3 na região Sul, 2 na região Centro-Oeste, 4 na região Sudeste e 5 estados na região Nordeste.

Qual é a probabilidade de um dos estados da região Sul sediar esse congresso?

A) $\frac{1}{15}$.B) $\frac{3}{15}$.C) $\frac{3}{12}$.D) $\frac{10}{15}$.E) $\frac{15}{3}$.

 **Solução.** Inicialmente, calculamos a quantidade total de estados inscritos, obtendo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

dos quais 3 são da Região Sul. Como cada um dos estados está associada à mesma probabilidade de ser selecionado ao acaso, a probabilidade de que seja escolhido um estado da Região Sul é

$$\frac{\text{número de estados da Região Sul}}{\text{número total de estados}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

o que corresponde à alternativa B).



Questão 97 — PAEBES, Item M120068B1. Um instituto de pesquisas foi contratado para fazer um levantamento da população de crianças de um bairro. No levantamento, foi verificado que 9 casais possuem 1 menino e 1 menina, 4 casais possuem apenas 1 menino, 6 casais possuem apenas 1 menina e 5 casais não têm filhos. A probabilidade de que um casal desse bairro, escolhido aleatoriamente, tenha apenas uma menina é

A) $\frac{15}{24}$ B) $\frac{24}{15}$ C) $\frac{15}{19}$ D) $\frac{6}{24}$ E) $\frac{6}{15}$

 **Solução.** Inicialmente, calculamos o número total de casais, obtendo

$$9 + 4 + 6 + 5 = 24,$$

casais, dos quais 6 possuem apenas 1 menina. Como cada um dos casais está associada à mesma probabilidade de ser selecionado ao acaso (a saber, $\frac{1}{24}$), a probabilidade de que seja escolhido um casal com apenas 1 menina é

$$\frac{\text{número de casais com apenas 1 menina}}{\text{número total de casais}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

o que corresponde à alternativa D).



Questão 98 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 149. No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados. Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{3}$.

C) $\frac{1}{8}$.

D) $\frac{2}{9}$.

E) $\frac{3}{8}$.

 **Solução.** Inicialmente, calculamos a quantidade total de cartões que, de acordo com o enunciado, é igual a

$$200 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 100 = 800$$

cartões. Como cada um dos cartões têm a mesma probabilidade de ser sorteado, a probabilidade de que seja sorteado um cartão de estudante da terceira série é

$$\frac{\text{número de cartões de estudantes de terceira série}}{\text{número total de cartões}} = \frac{300}{800} = \frac{3}{8},$$

o que corresponde à alternativa E).

Questão 99 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 158. Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,

A) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$.

B) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$.

C) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$.

D) $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$.

E) $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$.

 **Solução.** Inicialmente, observamos que, no primeiro sorteio (do algarismo das unidades), qualquer um dos 10 resultados (isto é, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) tem mesma probabilidade, a saber, $\frac{1}{10}$.

Caso o resultado do primeiro sorteio seja 0, as únicas bolas na segunda urna devem ser as de números 1, 2, 3, 4 e 5. Caso o resultado do primeiro sorteio seja um dos números 6, 7, 8 ou 9, as únicas bolas na segunda urna devem ser as de números 0, 1, 2, 3 e 4. Caso o resultado do primeiro sorteio seja um dos números 1, 2, 3, 4 ou 5, as únicas bolas na segunda urna devem ser as de números 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

Logo, se o resultado do primeiro sorteio é 0 (com probabilidade $\frac{1}{10}$), a probabilidade de que o resultado do segundo sorteio seja 5 (de modo que o número formado é 50) é igual a $\frac{1}{5}$, visto

que ficam apenas 5 bolas na segunda urna. Logo, a probabilidade de formar o número 50 com os dois sorteios é igual a

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}.$$

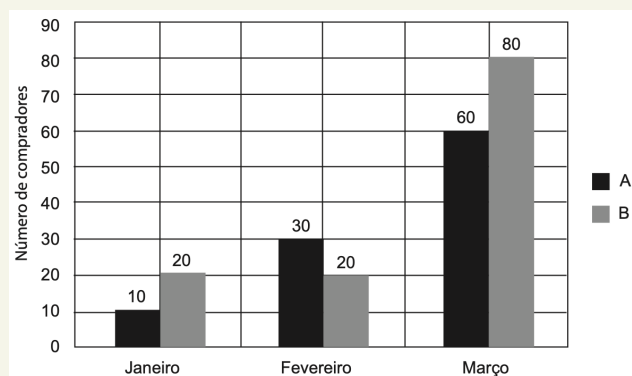
Por outro lado, se o resultado do primeiro sorteio é 2 (com probabilidade $1/10$), a probabilidade de que o resultado do segundo sorteio seja 0 (de modo que o número formado é 02) é igual a $1/6$, visto que ficam apenas 6 bolas na segunda urna. Logo, a probabilidade de formar o número 02 com os dois sorteios é igual a

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}.$$

Sendo assim, a alternativa correta é A).



Questão 100 — ENEM 2013, Caderno 7 - Azul, Segundo Dia, Questão 146, adaptada. Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

- A) $\frac{1}{20}$. B) $\frac{3}{242}$. C) $\frac{5}{22}$. D) $\frac{6}{25}$. E) $\frac{7}{15}$.

Solução. A probabilidade de que um comprador do produto A tenha realizado esta compra em fevereiro é igual a seguinte *razão*

$$\frac{\text{número de compradores do produto A em fevereiro}}{\text{número total de compradores do produto A}} = \frac{30}{10 + 30 + 60} = \frac{30}{100},$$

ao passo que a probabilidade de que um comprador do produto B tenha realizado esta compra em fevereiro é igual a seguinte *razão*

$$\frac{\text{número de compradores do produto B em fevereiro}}{\text{número total de compradores do produto B}} = \frac{20}{20 + 20 + 80} = \frac{20}{120}.$$

Devemos calcular a chance, isto é, a probabilidade de que o comprador do produto A sorteado fez sua compra em fevereiro e o comprador do produto B sorteado fez sua compra em fevereiro, também. A conjunção e significa que devemos calcular a probabilidade de que os dois *eventos* tenham **ambos** ocorrido. Observamos que o resultado de um dos sorteios não altera as probabilidades dos resultados do outro sorteio. Isso significa que os eventos são *independentes*. Portanto,

a probabilidade de que os dois eventos ocorram é dada pelo *produto* das probabilidades de cada evento, separadamente:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{20}.$$

Deste modo, a alternativa correta é A).

Solução alternativa. Justifiquemos a “*regra do e*” que usamos na resolução do exercício. O número de compradores do produto A é $10 + 30 + 60 = 100$ e o número de compradores do produto B é $20 + 20 + 80 = 120$. Portanto, temos $100 \cdot 120$ pares da forma

(comprador do produto A, comprador do produto B).

Desses pares, aqueles que representam os resultados *desejados* são da forma

(compradores do produto A em fevereiro,
compradores do produto B em fevereiro).

Existem $30 \cdot 20$ pares deste tipo. Portanto, a probabilidade desejada é dada pela razão

$$\frac{\text{quantidade de pares desejados}}{\text{quantidade de pares possíveis}} = \frac{30 \cdot 20}{100 \cdot 120} = \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{1}{20}.$$

Questão 101 — ENEM 2013, Caderno 7 - Azul, Segundo Dia, Questão 150, adaptada. Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{5}{8}$.

C) $\frac{1}{4}$.

D) $\frac{5}{6}$.

E) $\frac{5}{14}$.

 **Solução.** Dos 1 200 alunos da escola, 300 não falam nem inglês nem espanhol. Portanto,

$$1\,200 - 300 = 900$$

falam inglês **ou** espanhol.



Este “**ou**” não tem o sentido comum da linguagem cotidiana, quando dizemos “A ou B” significando que, se A ocorre, B não ocorre, e vice-versa. Este “ou” significa que A pode ocorrer, B pode ocorrer ou ambos podem ocorrer. Tem, portanto, o mesmo sentido da união de conjuntos e expressa uma *disjunção lógica*.

Dos 900 alunos que falam pelo menos uma das línguas, 600 falam inglês e 500 falam espanhol, o que totaliza $600 + 500 = 1\,100$, mais do que o total de 900. Como isto se explica?

O ponto é que quando dizemos “600 falam inglês”, contamos os que falam *apenas* inglês e os que falam inglês e espanhol. Da mesma forma, quando dizemos “500 falam espanhol”, contamos os que falam *apenas* espanhol e os que falam espanhol e inglês. Portanto, somando 600 e 500,

estamos somando duas vezes o total de alunos que falam tanto inglês quanto espanhol. Deduzimos que o número total desses alunos que falam as duas línguas é, portanto, dado por

$$600 + 500 - 900 = 1\,100 - 900 = 200.$$



O “e” indica a chamada *conjunção lógica* e representa a intersecção de conjuntos. Neste exemplo específico, a intersecção do conjunto dos alunos que falam espanhol e do conjunto dos alunos que falam inglês.

Em resumo, temos

Línguas faladas	Total de alunos
Apenas Espanhol	$500 - 200 = 300$
Apenas Inglês	$600 - 200 = 400$
Espanhol e Inglês	200
Nenhuma das duas	300
Total	1200

A probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso, não fale inglês e fale espanhol é exatamente a probabilidade de que fale *apenas* espanhol, isto é,

$$\frac{\text{quantidade de alunos que falam apenas espanhol}}{\text{quantidade de alunos que não fala inglês}} = \frac{300}{300 + 300} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}.$$

Deste modo, a alternativa correta é A).



Solução alternativa. Acabamos de calcular uma probabilidade *condicional*, a saber, qual a probabilidade de que um evento A ocorra, *sabendo-se* que B ocorreu? Neste caso que estudamos, temos

- a) A: o aluno fale espanhol;
- b) B: o aluno não fale inglês.

Denotamos esta probabilidade condicional por $P(A|B)$. Como nosso *universo* de alunos está restrito, diminuído para o conjunto de alunos que *não falam* inglês, temos

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Temos

$$P(B) = \text{probabilidade de que o aluno não fale inglês} = \frac{600}{1\,200} = \frac{1}{2}$$

e

$$P(A \cap B) = \text{probabilidade de que o aluno não fale inglês e fale espanhol.}$$

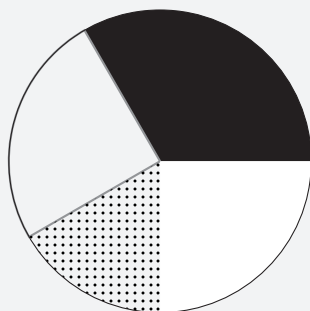
Logo,

$$P(A \cap B) = \text{probabilidade de que o aluno fale apenas espanhol} = \frac{300}{1\,200} = \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$P(A|B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Podemos interpretar geometricamente a solução deste segundo problema: no seguinte gráfico de setores, os que falam apenas espanhol correspondem exatamente a um quarto da área total do círculo (na cor cinza, do lado esquerdo da figura).



- Apenas Inglês(400)
- Nenhuma das duas(300)
- ▤ Inglês e Espanhol(200)
- Apenas Espanhol(300)

Mas este quarto de círculo é *metade* do semicírculo dos que não falam inglês, que seria formado reunindo os setores que representam os que não falam nenhuma das duas línguas (setor cinza) e dos que falam apenas espanhol (setor branco).

Questão 102 — ENEM 2015, Caderno 7 - Azul, Segundo Dia, Questão 142, adaptada. Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

- A) 23,7%. B) 30,0%. C) 44,1%. D) 65,7%. E) 90,0%.

 **Solução.** O enunciado informa que a probabilidade p de que um dado aluno compreenda e fale inglês é de 30%. Observe que um dado aluno

- a) compreende e fala inglês, ou
- b) não compreende ou não fala inglês.

A probabilidade de que ocorra a) ou b) é 100%. Daí,

$$p + q = 100\%,$$

onde q é a probabilidade de que um dado aluno *não* compreenda ou *não* fale inglês. Logo,

$$q = 100\% - 30\% = 70\%.$$

Neste exemplo, a) e b) são dois eventos complementares: um dos dois deve ocorrer. Além disso, se um ocorre, o outro não ocorre. Isto pode ser traduzido em termos das probabilidades p e q de a) e b), respectivamente:

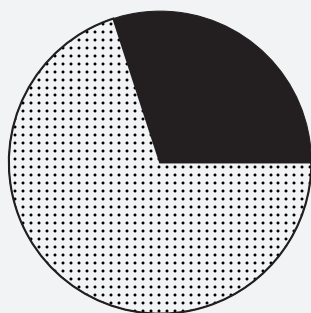
$$p + q = 100\%$$

ou

$$q = 100\% - p.$$

A figura ilustra, geometricamente, os dois eventos complementares. De fato, a união dos dois

forma o círculo, que representa uma área que corresponde a 100%, ao passo que os eventos são representados pelas porções de menor e maior área no gráfico, que representam 30% e 70%, respectivamente.



■ Compreende e fala Inglês

▤ Não compreende ou não fala inglês

A probabilidade P que devemos calcular é a de que *pelo menos um* dos alunos compreenda e fale inglês. Basta, portanto, calcular a probabilidade Q de que *nenhum* dos três compreenda e fale inglês. Esta probabilidade é dada pela produto

$$Q = \frac{70}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot \frac{70}{100},$$

que corresponde à probabilidade de termos sorteado, dentre todos os alunos da escola, três deles que não compreendessem nem lessem inglês. Note que

$$Q = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343 = 34,3\%.$$

Em um conjunto qualquer de três alunos, temos apenas as seguintes duas possibilidades:

- A) nenhum dos três compreende e fala inglês ou
- B) pelo menos um dos três compreende e fala inglês.

Deduzimos, assim, que as probabilidades de ocorrer A) ou B) somam 100%, ou seja,

$$P + Q = 100\%.$$

Portanto,

$$P = 100\% - 34,3\% = 65,7\%,$$

o que corresponde à alternativa D).



Questão 103 — ENEM 2021, Caderno 5 - Amarelo, Questão 177. O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

- A) 2. B) 4. C) 6. D) 9. E) 10.

 **Solução.** Calculemos a probabilidade de que, em n lançamentos, o jogador *não* acerte o alvo uma única vez, ou seja, que erre o alvo nos n lançamentos. Observe que há uma única forma de isso ocorrer e sua probabilidade é dada por

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n \text{ fatores}} = \frac{1}{2^n},$$

dado que os resultados dos lançamentos são **independentes**, ou seja, os resultados em lançamentos anteriores *não* afetam as probabilidades dos resultados dos lançamentos seguintes.

Logo, a probabilidade de que, em n lançamentos, o jogador acerte o alvo ao menos uma vez é dada por

$$1 - \frac{1}{2^n}.$$

Para que essa probabilidade seja maior ou igual a $\frac{9}{10}$, devemos ter

$$1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{9}{10},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{10},$$

o que ocorre, se e somente se,

$$2^n \geq 10.$$

Para tanto, basta tomarmos $n \geq 4$, o que corresponde à alternativa B).



Na questão 103, usamos o fato de que as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$ de eventos complementares A e B têm soma igual a 1. Mais precisamente, se os eventos A e B são disjuntos (ou seja, $A \cap B = \emptyset$, o que significa que, se A ocorre, então B não ocorre, e vice-versa) e se a união $A \cup B$ é todo o espaço amostral (ou seja, um dos eventos A ou B deve ocorrer), então

$$P(A) + P(B) = 1$$

ou

$$P(B) = 1 - P(A).$$

Questão 104 — ENEM 2019, Caderno 7 - Azul, Questão 159, adaptada. O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é $1/2$.

Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber pelo menos uma das placas instaladas fosse superior a $99/100$.

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é

- A) 99. B) 51. C) 50. D) 6. E) 1.

 **Solução.** Devemos supor, por simplicidade, que o fato de um motorista ver (ou não ver) uma das placas não altera a probabilidade de ver (ou não ver) uma das seguintes. Portanto, supomos que cada um desses eventos são **independentes** dos demais. Assim, caso haja n placas, a probabilidade de que o motorista *não veja nenhuma* delas é igual a

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n \text{ fatores}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Logo, a probabilidade de que o motorista *veja pelo menos uma* das placas é dada por

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Para que esta probabilidade seja maior que $\frac{99}{100}$, devemos ter

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{99}{100},$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 - \frac{99}{100}.$$

Logo, é preciso que

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$$

ou, equivalentemente,

$$2^n > 100.$$

Como a menor potência de 2 maior que 100 é $128 = 2^7$, concluímos que é preciso ter, pelo menos, 7 placas na estrada. Portanto, é preciso que sejam instaladas 6 placas novas, o que corresponde à alternativa de letra D). ■

A questão anterior pode ser reescrita em termos de lançamentos de uma moeda *justa*, isto é, uma moeda para a qual as probabilidades de “cara” ou “coroa” são, ambas, iguais a $\frac{1}{2}$. Logo,

$$P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}.$$

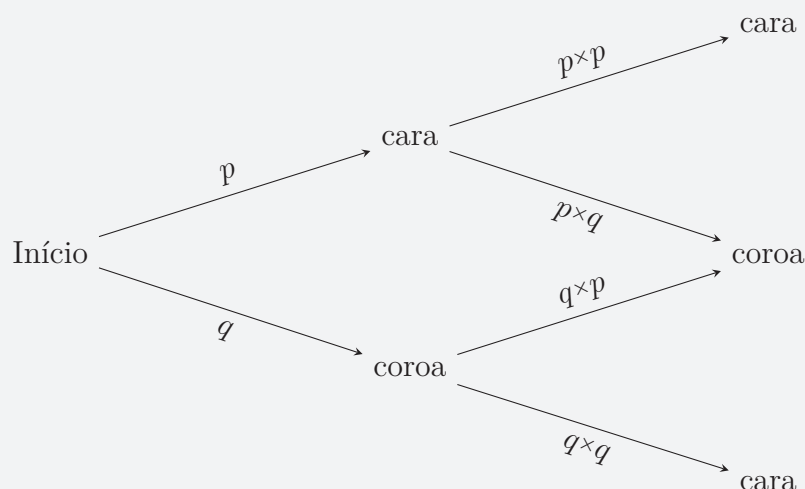
Em geral, podemos considerar “cara” e “coroa” como dois eventos **complementares** com probabilidades p e q . Ou seja, se ocorre “cara”, não ocorre “coroa”, e vice-versa. Além disso, deve ocorrer um dos dois, necessariamente. Logo, as probabilidades **devem somar 1**, isto é,

$$p + q = 1.$$

O diagrama abaixo, chamado *árvore binomial* ilustra o que ocorre em dois lançamentos sucessivos desta moeda: há *três* possibilidades para os eventos resultantes dos dois lançamentos:

$$\{\text{cara, cara}\}, \{\text{cara, coroa}\} = \{\text{coroa, cara}\}, \{\text{coroa, coroa}\}$$

Observamos que os lançamentos são **independentes**, ou seja, o resultado do primeiro lançamento não afeta as probabilidades dos resultados do segundo lançamento. De modo mais claro, o fato, por exemplo de termos o evento “cara” no primeiro lançamento, por exemplo, em nada altera as chances de obtermos “cara” ou “coroa” no segundo lançamento.



Portanto, as probabilidades dos três eventos resultantes dos dois lançamentos são

$$P(\{\text{cara, cara}\}) = p^2, \quad P(\{\text{cara, coroa}\}) = 2pq, \quad P(\{\text{coroa, coroa}\}) = q^2$$

Observe que há *duas* maneiras de obtermos o resultado $\{\text{cara, coroa}\}$: com “cara” no primeiro lançamento e “coroa” no segundo, ou vice-versa. Note que essas probabilidades também somam 1, visto que

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1.$$

Estes lançamentos podem ser repetidos n vezes, gerando árvores binomiais com mais e mais ramificações. Um percurso aleatório nos ramos dessas árvores dá origem a uma matemática bastante interessante, com aplicações em Finanças e Física. Aos interessados, recomendamos o livro *O Andar do Bêbado*, de Leonard Mlodinow.

Voltando à questão que resolvemos acima, suponha que as probabilidades são, de fato, iguais a $\frac{1}{2}$, isto é, $p = q = \frac{1}{2}$. Neste caso, percebemos que são precisos pelo menos $n = 2$ lançamentos para que a probabilidade de ao menos um resultado “cara” fosse igual a $\frac{3}{4} = 75\%$. De fato, o evento complementar a este seria $\{\text{coroa, coroa}\}$ nos dois lançamentos. A probabilidade deste evento, como vimos, é $q^2 = \frac{1}{4}$. Logo, a probabilidade do evento complementar é

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

que é a soma das probabilidades dos eventos $\{\text{cara, cara}\}$ e $\{\text{cara, coroa}\}$.

Exercício 2.7 — ENEM 2022, Caderno 5 - Amarelo, Questão 152. A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão. Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$. Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

A) $\frac{35}{64}$

B) $\frac{40}{64}$

C) $\frac{42}{64}$

D) $\frac{44}{64}$

E) $\frac{52}{64}$



Solução.

Denominemos os times por A e B. Por ora, denote por p a probabilidade de que

o time A vença uma partida e por q a probabilidade de que o time B vença essa partida. Por definição, temos $p + q = 1$. Vejamos, então, os casos em que o time A, por exemplo, vence a primeira partida e vence o campeonato. Esses casos são os seguintes:

- O time A vence as três partidas após a primeira (e o campeonato é, assim, encerrado): há uma única maneira de que isso ocorra e a probabilidade desse evento é

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p}_{\text{vitórias nas 3 partidas seguintes}}.$$

- O time A perde uma das três partidas após a primeira e ganha na quinta partida: há 3 maneiras (perde a segunda ou perde a terceira ou perde a quarta) de que isso ocorra e a probabilidade desse evento é

$$\underbrace{3 \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p}_{\text{uma derrota nas 3 partidas seguintes}}.$$

- O time A perde duas das quatro partidas após a primeira e ganha na sexta partida: há $\binom{4}{2} = 6$ maneiras (2 derrotas em 4 partidas) de que isso ocorra e a probabilidade desse evento é

$$\underbrace{6 \cdot q \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p}_{\text{duas derrotas nas 4 partidas seguintes}}.$$

- O time A perde três das cinco partidas após a primeira e ganha na sétima partida: há $\binom{5}{3} = 10$ maneiras (3 derrotas em 5 partidas) de que isso ocorra e a probabilidade desse evento é

$$\underbrace{10 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p}_{\text{três derrotas nas 5 partidas seguintes}}.$$

Somando as probabilidades desses eventos temos a probabilidade de que A vença o campeonato, supondo-se que *venceu* a primeira partida, a saber,

$$p^3 + 3p^3q + 6p^3q^2 + 10p^3q^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{6}{32} + \frac{10}{64} = \frac{8 + 12 + 12 + 10}{64} = \frac{42}{64},$$

onde usamos que $p = q = 1/2$. O mesmo cálculo pode ser feito para B. Concluimos que a alternativa correta é C).



Exercício 2.8 — ENEM 2023, Caderno 5 - Amarelo, Questão 166. Visando atrair mais clientes, o gerente de uma loja anunciou uma promoção em que cada cliente que realizar uma compra pode ganhar um voucher para ser usado em sua próxima compra. Para ganhar seu voucher, o cliente precisa retirar, ao acaso, uma bolinha de dentro de cada uma das duas urnas A e B disponibilizadas pelo gerente, nas quais há apenas bolinhas pretas e brancas. Atualmente, a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma bolinha preta na urna A é igual a 20% e a probabilidade de se escolher uma bolinha preta na urna B é 25%. Ganha o voucher o cliente que retirar duas bolinhas pretas, uma de cada urna.

Com o passar dos dias, o gerente percebeu que, para a promoção ser viável aos negócios, era preciso alterar a probabilidade de acerto do cliente sem alterar a regra da promoção. Para isso, resolveu alterar a quantidade de bolinhas brancas na urna B de forma que a probabilidade de um cliente ganhar o voucher passasse a ser menor ou igual a 1%. Sabe-se que a urna B tem 4 bolinhas pretas e que, em ambas as urnas, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas.

Qual é o número mínimo de bolinhas brancas que o gerente deve adicionar à urna B?

- A) 20. B) 60. C) 64. D) 68. E) 80.

 **Solução.** Como a probabilidade de escolher-se, ao acaso, uma bolinha preta na urna B é igual a $25\% = \frac{1}{4}$ (e todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem escolhidas), a proporção entre bolinhas pretas e o total de bolinhas na urna B é igual a $\frac{1}{4}$. Logo, se havia 4 bolinhas pretas na urna B, havia $4 \cdot 4 = 16$ bolinhas ao todo nessa urna.

Adicionando b bolinhas brancas à urna B, a probabilidade de escolher-se uma bola preta reduz-se a

$$\frac{4}{16 + b}$$

e, portanto, a probabilidade de escolher-se uma bolinha preta na urna A e uma bolinha preta na urna B passa a ser

$$\frac{20}{100} \cdot \frac{4}{16 + b}.$$

Para que essa probabilidade seja menor ou igual a $1\% = \frac{1}{100}$ devemos ter

$$\frac{20}{100} \cdot \frac{4}{16 + b} \leq \frac{1}{100},$$

ou seja,

$$20 \cdot 4 \leq 16 + b,$$

isto é,

$$b \geq 80 - 16 = 64,$$

o que corresponde a letra C).

Questão 105 — ENEM 2018, Caderno 5 - Amarelo, Questão 163. O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna.

Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% delas eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

- A) 10. B) 15. C) 35. D) 40. E) 45.

 **Solução.** De acordo com o enunciado, havia 20 perguntas na urna, cada uma delas com a mesma probabilidade de ser selecionada ao acaso. Como a probabilidade de selecionar-se uma pergunta fácil era de $25\% = \frac{1}{4}$, deduzimos que havia, inicialmente, $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ perguntas fáceis.

Adicionando-se f perguntas fáceis a mais na urna, deseja-se que a probabilidade de sortear-se uma dessas perguntas passe a ser $75\% = \frac{3}{4}$.

Por outro lado, devemos ter

$$\text{probabilidade de sortear pergunta fácil} = \frac{\text{quantidade de perguntas fáceis}}{\text{quantidade total de perguntas}} = \frac{5 + f}{20 + f}.$$

Logo,

$$\frac{5 + f}{20 + f} = \frac{3}{4},$$

equação que pode ser reescrita como

$$4f + 20 = 3f + 60$$

ou $f = 40$. Portanto, é preciso adicionar 40 perguntas fáceis a mais na urna, o que corresponde à alternativa D). ■

Exploraremos, a seguir, algumas questões que envolvam **contagem** ou combinatória enumerativa.

Questão 106 — ENEM 2021, Caderno 5 - Amarelo, Questão 139. Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

- A) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$ B) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$ C) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$ D) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$ E) $\frac{21!}{7!14!}$

 **Solução.** A quantidade de escolhas de 2 tipos de tecidos diferentes, dados os 6 tipos disponíveis, é igual a

$$6 \cdot 5,$$

ao passo que a quantidade de escolhas de 5 tipos diferentes de pedras ornamentais, dados os 15 disponíveis, é dada por

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11.$$

Por fim, a quantidade de diferentes fantasias produzidas de acordo com o que é descrito no enunciado é igual ao produto

quantidade de escolhas de 2 tecidos $\cdot$ quantidade de escolhas de 5 pedras ornamentais,

ou seja,

$$(6 \cdot 5) \cdot (15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11).$$

Em termos de *fatoriais* e *números binomiais*, escrevemos esse resultado como

$$\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!},$$

o que corresponde à alternativa A). ■

Muitos problemas de contagem podem ser modelados em termos de *permutações* e *combinações*. Revisitemos, brevemente, esses conceitos. Consideremos, inicialmente, a seguinte questão: dado um conjunto com n elementos, de quantas maneiras podemos ordenar k desses elementos, com $k \leq n$, em uma **sequência** da forma

$$(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k).$$

Note que o primeiro elemento da sequência y_1 pode ser qualquer um dos n elementos de B ; portanto, o segundo elemento y_2 pode ser qualquer um dos $n - 1$ elementos restantes; e assim por diante. Assim, o número de sequência ordenadas de k elementos, escolhidos dentre n elementos, **sem repetição**, é igual a

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \cdot (n - k).$$

Caso queiramos considerar apenas *quais* elementos forem selecionados, sem levar em conta a ordem em que são selecionados, devemos dividir esse número pela quantidade de diferentes formas em que podemos ordenar k elementos, ou seja,

$$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \cdot (n - k)}{k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Em outras palavras, essa é a quantidade de subconjuntos de k elementos que podemos determinar em um conjunto de n elementos.

O número

$$k! \doteq k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

(lê-se “ k fatorial”) expressa a quantidade de sequências ordenadas formadas por k elementos, ou seja, o número de **permutações** de k elementos. O número

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \cdot (n - k)}{k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

é a quantidade de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos, ou seja, o número de **combinações** de n elementos, tomados de k em k .

Observação 2.4 Na questão 106, representemos por

$$T = \{a, b, c, d, e, f\}$$

o conjunto dos 6 tipos de tecidos disponíveis (que denotamos pelas letras a, b, c, d, e e f no conjunto T). Os *pares ordenados* formados pela escolha, sem repetição de 2 tipos de tecidos

dentre os elementos de T , são os seguintes:

$$\begin{aligned} &(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), \\ &(b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), \\ &(c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (c, f), \\ &(d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (d, f), \\ &(e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, f), \\ &(f, a), (f, b), (f, c), (f, d), (f, e). \end{aligned}$$

Observe que temos $6 \cdot 5$ pares, visto que, escolhido o primeiro elemento do par (com 6 possíveis escolhas), restam 5 possíveis escolhas para o segundo elemento. No entanto, não nos interessa a ordem em que dois tipos diferentes são escolhidos: consideramos, por exemplo, o *subconjunto*

$$\{a, b\}$$

em vez dos *pares ordenados*

$$(a, b) \text{ e } (b, a).$$

Sendo assim, é preciso dividir $6 \cdot 5$ por 2, obtendo, desse modo, o número de subconjuntos de 2 elementos do conjunto T :

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{6!/4!}{2!} = \binom{6}{2}.$$

Da mesma forma, dado o conjunto

$$P = \{A, B, C, D, E, \dots, K, L, M, N, O\}$$

de tipos de pedras ornamentais, existem

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11,$$

ou seja,

$$15 \cdot (15 - 1) \cdot (15 - 2) \cdot (15 - 3) \cdot (15 - 4)$$

sequências *ordenadas* de 5 elementos de P , escolhidos sem repetição dentre seus 15 elementos. No entanto, sequências como

$$(A, B, C, D, E) \text{ e } (E, B, C, A, D)$$

correspondem ao mesmo *subconjunto*

$$\{A, B, C, D, E\},$$

em que a ordem não é considerada. Como os elementos de um subconjunto de 5 elementos podem ser ordenados de $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ maneiras diferentes, deduzimos que cada um desses subconjuntos corresponde a $5!$ sequências ordenadas de 5 elementos.

Portanto, é preciso dividir a quantidade de sequências ordenadas de 5 elementos por $5!$, o que resulta em

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15!/10!}{5!} = \binom{15}{5}.$$

Exercício 2.9 — ENEM 2020, Caderno 5 - Amarelo, Questão 170. Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

- A) $9!$. B) $4!5!$. C) $2 \times 4!5!$. D) $\frac{9!}{2}$. E) $\frac{4!5!}{2}$.

 **Solução.** Na frase “I AM POTTER”, existem 5 consoantes (sendo que uma delas, a consoante T, ocorre 2 vezes) e 4 vogais. Logo, para intercalarmos consoantes e vogais em um anagrama, as letras inicial e final devem ser consoantes, formando o seguinte padrão:

consoante - vogal - consoante - vogal - consoante - vogal - consoante - vogal - consoante.

Sendo assim, temos $4!$ formas de ordenar as 4 vogais (que são distintas, a saber, I, A, O, E) e $5!$ formas de ordenar as consoantes M, P, T, T, R. No entanto, cada uma das sequências dessas 5 consoantes tem 2 versões exatamente iguais, dado que existem duas consoantes T.

Portanto, o número total de anagramas, de acordo com as regras no enunciado, é

$$4! \cdot \frac{5!}{2},$$

ou seja, o resultado na alternativa E).

Questão 107 — ENEM 2019, Caderno 5 - Amarelo, Questão 160. Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

- A) 69. B) 70. C) 90. D) 104. E) 105.

 **Solução.** O número de maneiras de formar 4 duplas sem que haja uma dupla de canhotos pode ser calculado subtraindo

número de maneiras de formar 4 duplas — número de maneiras de formar 4 duplas, sendo uma delas a dupla de canhotos.

Assim, calculamos, inicialmente, o número de maneiras de formar 4 duplas (sem restrições). O procedimento é o seguinte:

- Dados os 8 jogadores, precisamos escolher 2 para formar a dupla (que é um subconjunto de 2 jogadores, em que a ordem não importa): logo, temos $\binom{8}{2}$ possibilidades.
- Dos 6 amigos restantes, devemos formar uma segunda dupla: há $\binom{6}{2}$ segundas duplas possíveis.
- Dos 4 amigos que restam, devemos formar uma terceira dupla: temos $\binom{4}{2}$ maneiras de formar essa terceira dupla.
- Resta, assim, 1 única dupla.

Logo, o número de maneiras de formar 4 duplas é, em princípio, igual a

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$$

Todavia, nesse cálculo, estamos considerando *permutações* das quatro duplas, ou seja, estamos contando 4! vezes cada uma das 4 duplas formadas. Concluimos, que, de fato, o número de maneiras de formar 4 duplas (em que a ordem das duplas não é relevante) é

$$\frac{1}{4!} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$$

Agora, calculamos o número de maneiras de formar 4 duplas, sabendo que uma delas é a dupla de amigos canhotos. Procedemos analogamente, mas iniciando com os 6 amigos restantes. Temos, então,

$$\frac{1}{3!} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$$

maneiras de formar 4 duplas, sendo que uma delas é a dupla de amigos canhotos.

Portanto, o número que desejamos é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4!} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} - \frac{1}{3!} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \\ &= \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2} \\ &= 105 - 15 = 90. \end{aligned}$$

Concluimos que a alternativa correta é C). ■

Nas próximas questões, retomamos o conceito de **probabilidade condicional**.

Exercício 2.10 — ENEM 2020, formato digital. Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-la sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda.

Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

- Duas delas têm “cara” nas duas faces;
- Uma delas tem “coroa” nas duas faces;
- Duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face “cara” no lado superior da moeda lançada por ele?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

 **Solução.** Denotemos os seguintes eventos:

- Moeda 1: o apostador escolhe, ao acaso, uma moeda com “cara” nas duas faces; a probabilidade $P(\text{moeda 1})$ desse evento é $\frac{2}{5}$.
- Moeda 2: o apostador escolhe, ao acaso, uma moeda com “coroa” nas duas faces; a probabilidade $P(\text{moeda 2})$ desse evento é $\frac{1}{5}$.

- Moeda 3: o apostador escolhe, ao acaso, uma moeda normal; a probabilidade $P(\text{moeda 3})$ desse evento é $\frac{2}{5}$.

Assim, a probabilidade $P(\text{cara})$ de que o apostador obtenha o resultado “cara” em um lançamento de moeda escolhida ao acaso é

$$\begin{aligned} P(\text{cara}) &= P(\text{cara}|\text{moeda 1}) \cdot P(\text{moeda 1}) + P(\text{cara}|\text{moeda 2}) \cdot P(\text{moeda 2}) \\ &\quad + P(\text{cara}|\text{moeda 3}) \cdot P(\text{moeda 3}) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

o que mostra que a alternativa correta é C).

Questão 108 — ENEM 2019, Caderno 5 - Amarelo, Questão 176. Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

- A) 0,0500. B) 0,1000. C) 0,1125. D) 0,3125. E) 0,5000.

 **Solução.** Nesta questão, podemos aplicar o *Teorema da Probabilidade Total* e a *Regra de Bayes*. Sabemos, a partir da leitura do enunciado, que

- a probabilidade da declaração ser fraudulenta, dado que é inconsistente, é igual a

$$P(\text{fraudulenta}|\text{inconsistente}) = 25\% = \frac{1}{4};$$

- a probabilidade da declaração ser fraudulenta, dado que não é inconsistente, é igual a

$$P(\text{fraudulenta}|\text{não inconsistente}) = 6,25\% = \frac{1}{16}.$$

Como 20% das declarações é inconsistente e todas as declarações têm mesma probabilidade de serem escolhidas ao acaso para análise, concluímos que a probabilidade de selecionar-se uma declaração inconsistente é

$$P(\text{inconsistente}) = 20\% = \frac{1}{5}$$

e, portanto, a probabilidade de escolher-se uma declaração não inconsistente é

$$P(\text{não inconsistente}) = 80\% = \frac{4}{5}.$$

Sendo assim, o **Teorema da Probabilidade Total** garante que

$$\begin{aligned} P(\text{fraudulenta}) &= P(\text{fraudulenta}|\text{inconsistente}) \cdot P(\text{inconsistente}) \\ &\quad + P(\text{fraudulenta}|\text{não inconsistente}) \cdot P(\text{não inconsistente}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Por outro lado, a **Regra de Bayes** assegura que a probabilidade $P(\text{inconsistente}|\text{fraudulenta})$ de que uma declaração, escolhida ao acaso, seja inconsistente, sabendo-se que é fraudulenta, é dada pela relação

$$P(\text{inconsistente}|\text{fraudulenta}) \cdot P(\text{fraudulenta}) = P(\text{fraudulenta}|\text{inconsistente}) \cdot P(\text{inconsistente}).$$

Logo,

$$P(\text{inconsistente}|\text{fraudulenta}) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5},$$

o que nos permite concluir que

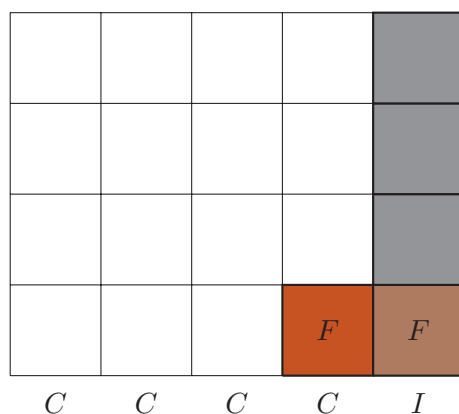
$$P(\text{inconsistente}|\text{fraudulenta}) = \frac{1}{2}.$$

Isso garante que a alternativa E) é correta. ■

A seguinte figura ilustra tanto o **Teorema da Probabilidade Total** quanto a **Regra de Bayes** utilizadas na resolução da questão 108. Note que 4 das 5 colunas no retângulo correspondem ao subconjunto C das declarações não inconsistentes (ou seja, consistentes), enquanto que 1 das 5 colunas (a última da esquerda para a direita) corresponde ao subconjunto I das declarações inconsistentes.

Logo, as frações das áreas do retângulo correspondentes aos subconjuntos C e I são, respectivamente, iguais a $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{5}$ da área total. Essas áreas representam as probabilidades $P(\text{não inconsistente})$ e $P(\text{inconsistente})$, respectivamente. Em resumo,

$$P(\text{não inconsistente}) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \text{ e } P(\text{inconsistente}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$



Note que a coluna I é dividida em 4 partes de mesma área, uma das quais corresponde às declarações inconsistentes e fraudulentas. Isso significa que

$$P(\text{fraudulenta}|\text{inconsistente}) = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Da mesma forma, as quatro colunas C são divididas em 16 partes de mesma área, uma das quais corresponde às declarações não inconsistentes e fraudulentas. Isso representa a probabilidade

$$P(\text{fraudulenta}|\text{não inconsistente}) = \frac{1}{16} = 6,25\%.$$

Observe que, *somando* essas áreas, temos a área correspondente ao **total** de declarações fraudulentas, isto é,

$$\begin{aligned} P(\text{fraudulenta}) &= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{5} \\ &= P(\text{fraudulenta}|\text{inconsistente}) \cdot P(\text{inconsistente}) \\ &\quad + P(\text{fraudulenta}|\text{não inconsistente}) \cdot P(\text{não inconsistente}). \end{aligned}$$

Essa é uma ilustração da prova do Teorema da Probabilidade Total.

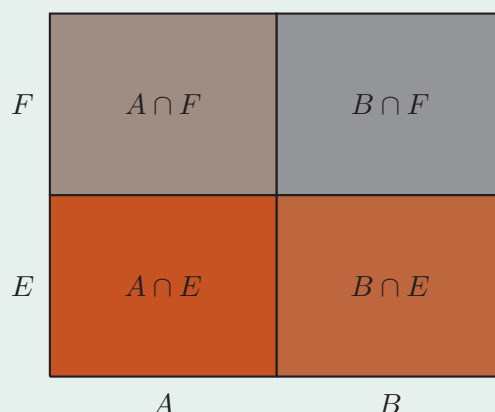
Agora, observe que, da área correspondente a declarações fraudulentas (os dois quadrados rotulados pela letra F no canto inferior direito do retângulo), metade corresponde a declarações consistentes e a outra metade corresponde a declarações inconsistentes. Portanto,

$$P(\text{consistente}|\text{fraudulenta}) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(\text{inconsistente}|\text{fraudulenta}) = \frac{1}{2}.$$

Isso ilustra a prova da Regra de Bayes.

Observação 2.5 Vejamos enunciados do Teorema da Probabilidade Total e da Regra de Bayes no caso simplificado de dois pares de eventos A, B e E, F tais que $A \cap B = \emptyset$ e $E \cap F = \emptyset$. Suponhamos que o espaço amostral Ω pode ser decomposto tanto na união $A \cup B$ quanto na união $E \cup F$.

O retângulo na figura representa o espaço amostral Ω , particionado nos eventos A, B, E e F .



Note que

$$P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap F) = P(A|E) \cdot P(E) + P(A|F) \cdot P(F)$$

e, da mesma forma,

$$P(B) = P(B \cap E) + P(B \cap F) = P(B|E) \cdot P(E) + P(B|F) \cdot P(F),$$

as expressões do Teorema da Probabilidade Total.

Por outro lado, temos

$$P(E|A) \cdot P(A) = P(E \cap A) = P(A \cap E) = P(A|E) \cdot P(E),$$

o que demonstra a Regra de Bayes.

Exercício 2.11 — ENEM 2018, Caderno 5 - Amarelo, Questão 149. Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dada por

- A) 2×128 .
- B) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$.
- C) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.
- D) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$.
- E) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

 **Solução.** Havendo 128 competidores inicialmente, é preciso haver $128/2 = 64$ partidas, o que corresponde ao número de subconjuntos de 2 tenistas. Os 64 vencedores dessas partidas jogam entre si em 32 partidas. Os 32 vencedores jogam em 16 partidas. Esse processo finaliza quando os 2 vencedores da penúltima etapa jogam entre si na última partida. Portanto, o total de partidas é

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1,$$

o que corresponde à alternativa E) ■

Observação 2.6 A soma $1 + 2 + \dots + 32 + 64$ é um caso particular da soma

$$S_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

da **progressão geométrica** cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 2. Para calcular explicitamente essa soma, observe que

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_n &= 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n) \\ &= 2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = S_n - 1 + 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = 2^{n+1} - 1.$$

No caso particular do exercício 2.11, temos $n = 6$ e, portanto

$$64 + \dots + 1 = S_6 = 2^7 - 1 = 127.$$

2.6 – Atividades sobre objetos e grandezas geométricas no espaço

Nesta seção, abordamos conhecimentos e habilidades sobre invariantes, grandezas e medidas de objetos geométricos no plano e no espaço euclidianos. Iniciamos com uma rápida retomada acerca de áreas de figuras planas elementares e de relações entre lados, diagonais e ângulos em polígonos convexos. Prosseguindo, estudamos representações (planificações, sobretudo), volumes e áreas superficiais de figuras geométricas “elementares” no espaço euclidiano, a exemplo de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

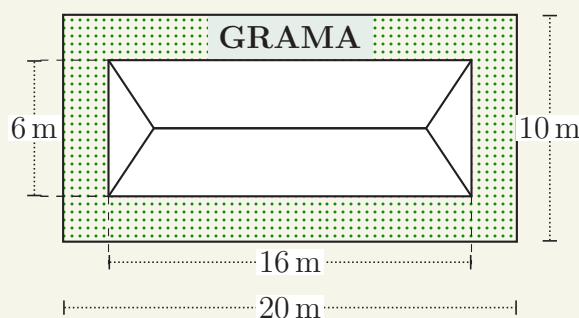
Em termos da Matriz de Referência do SAEB, os percursos curriculares possibilitados pelos conteúdos nesta seção consolidam habilidades relacionadas aos seguintes descritores:

- D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
- D4 - Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
- D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
- D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).



Iniciamos nosso percurso retomando alguns conceitos e fatos sobre objetos e grandezas geométricas no plano euclidiano. Apresentamos algumas questões que revisitam a noção de **área de figuras planas** elementares como retângulos, triângulos, paralelogramos, trapézios e círculos. Em seguida, discutimos relações entre número de lados, número de diagonais e medida de ângulos em **polígonos convexos**.

Questão 109 — PAEBES, Item M090194G5. Carlos comprou um terreno retangular cujas medidas estão representadas no desenho abaixo e, no centro dele, construiu uma casa de base também retangular medindo 6 metros de largura por 16 metros de comprimento. Ao redor da casa, ele plantou grama de forma a cobrir todo espaço que sobrou do terreno.



Quantos metros quadrados de grama Carlos plantou nesse terreno?

- A) 16 B) 96 C) 104 D) 200

Solução. A área ocupada pela grama é dada pela diferença da área do terreno (uma região retangular com dimensões de 20 metros e 10 metros) e a área ocupada pela casa, uma região também retangular, com medidas iguais a 16 metros e 6 metros. Logo, a área ocupada pela grama é igual a

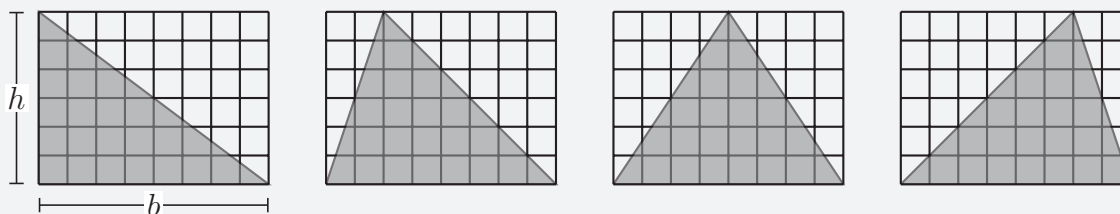
$$20 \cdot 10 - 16 \cdot 6 = 20 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 104$$

metros quadrados, o que corresponde à alternativa C).

Obs

A questão 109 utiliza um fato fundamental sobre área de retângulos, a saber, dadas as medidas b e h de dois dos lados perpendiculares em um retângulo, sua área é igual ao produto $b \cdot h$.

As figuras seguintes mostram uma sequência de triângulos desenhados em uma malha quadriculada:



Em cada um desses triângulos, podemos fixar um dos lados do retângulo como **base**, com medida igual a b . A **altura** de cada triângulo, relativa a essa base, é igual à medida h de um dos lados do retângulo perpendicular à base. Por construção, todos os triângulos têm mesma área A , igual à metade da área do retângulo, ou seja,

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

Questão 110 Demonstre que a área de cada um dos triângulos na figura anterior é igual à metade da área do retângulo em que estão inscritos.

Solução. Em todos os casos, é possível dividir cada triângulo em dois triângulos retângulos de mesma altura h e bases com medidas a e c , de modo que $a + c = b$. Para cada par de triângulos construído desse modo, suas áreas somam

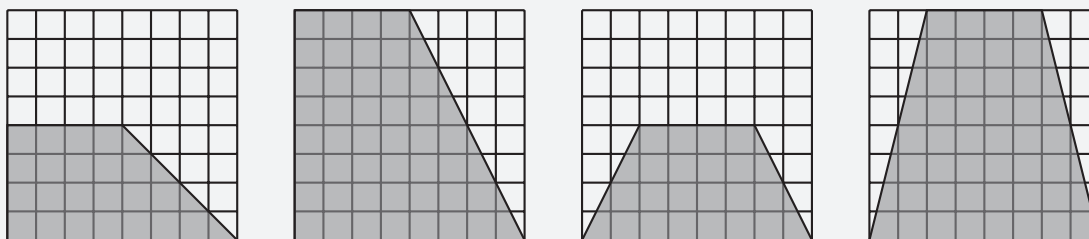
$$A = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}h(a + c)$$

Uma vez que $a + c = b$, temos

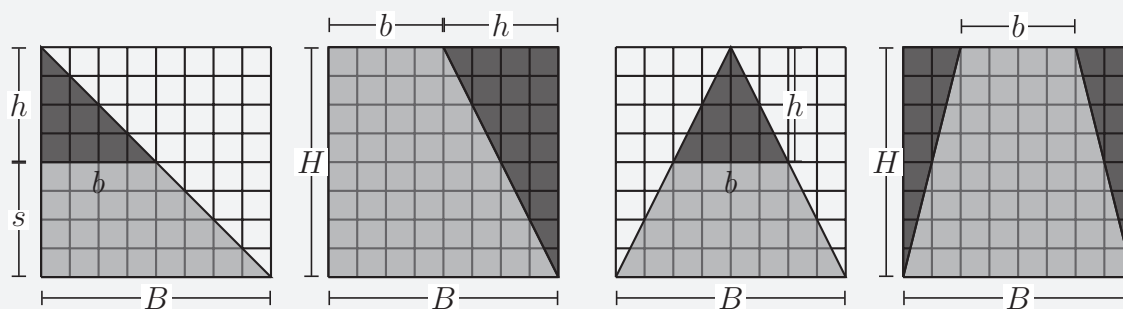
$$A = \frac{1}{2}bh.$$

Isso reduz o problema a deduzir a expressão da área de um triângulo retângulo: nesse caso, a demonstração é geometricamente mais simples e intuitiva, bastando justapor ao triângulo sua reflexão em torno da hipotenusa, o que gera um retângulo com medidas a e h , por exemplo, e o dobro da área do triângulo retângulo. ■

A figura seguinte mostra quatro *trapézios*.



Observe que a área desses trapézios pode ser calculada *adicionando-se* a área de um (ou dois) triângulo(s):



Na primeira figura, da esquerda para a direita, ao completarmos o trapézio com um triângulo de base b e altura h (em tom mais escuro nas figuras), obtemos outro triângulo (parte destacada da figura) com base B e altura $H = h + s$. Logo, a área do trapézio é a *diferença* das áreas desses dois triângulos, isto é,

$$\frac{1}{2}B \cdot H - \frac{1}{2}b \cdot h.$$

Pela **semelhança dos triângulos**, temos

$$\frac{B}{H} = \frac{b}{h}, \quad \text{ou seja,} \quad B \cdot h = b \cdot H.$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{1}{2}Bh$ dessa expressão inicial, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B \cdot H - \frac{1}{2}b \cdot h &= \frac{1}{2}BH - \frac{1}{2}Bh + \frac{1}{2}Bh - \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}B(H - h) + \frac{1}{2}bH - \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}B(H - h) + \frac{1}{2}b(H - h) = \frac{1}{2}(B + b)(H - h) = \frac{1}{2}(B + b)s. \end{aligned}$$

Questão 111 Demonstre, para cada um dos outros três trapézios, que as áreas são dadas por

$$\frac{1}{2}(B + b) \cdot s,$$

onde B e b são as bases do trapézio e s é a altura relativa a essas bases.

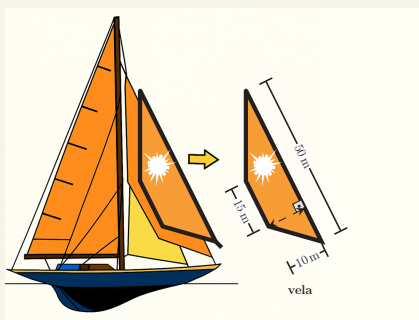
Solução. Em todos os casos, traçamos uma diagonal do trapézio, dividindo-o em dois triângulos, ambos com altura s , um com base B e outro com base b . Assim, a área total do trapézio pode ser obtida somando as áreas desses dois triângulos:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{1}{2}B \cdot s + \frac{1}{2}b \cdot s = \frac{1}{2}(B + b) \cdot s.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(B + b) \cdot s.$$

Questão 112 — PAEBES, Item M090075H6. Durante um forte vento, um barco teve uma de suas velas danificadas. O capitão desse barco ancorou na cidade mais próxima com objetivo de

comprar o tecido necessário para confeccionar uma vela substituta. Observe abaixo o desenho desse barco e de sua vela com algumas medidas indicadas.



A quantidade mínima de tecido, em metros quadrados, que o capitão deverá comprar para confeccionar essa vela é

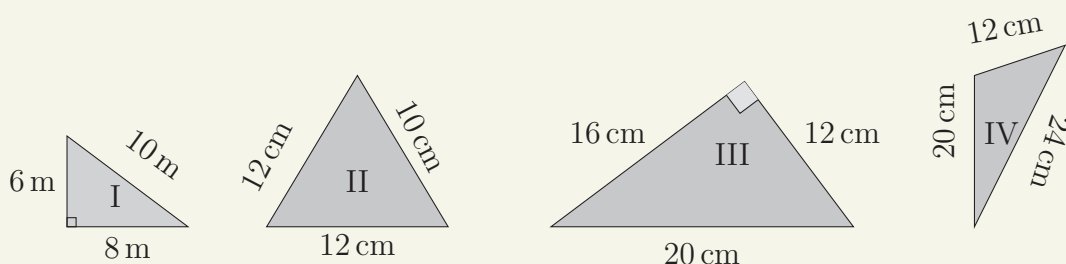
- A) 250. B) 325. C) 380. D) 450.

Solução. A figura sugere que a vela tem forma de trapézio em que as bases têm medidas iguais a 50 metros e 15 metros, ao passo que a altura relativa a essas bases tem medida igual a 10 metros. Sendo assim, a área da vela pode ser calculada usando diretamente a expressão do *produto da média aritmética das bases pela altura*, ou seja,

$$\frac{1}{2} \cdot (15 + 50) \cdot 10 = 5 \cdot (15 + 50) = 75 + 250 = 325$$

metros quadrados, o que corresponde à alternativa B).

Questão 113 — SAEPE - Item M120392ES. No desenho abaixo estão representados os triângulos I, II, III e IV e suas medidas em centímetros.



O par de triângulos semelhantes nesse desenho é

- A) I e II. B) I e III. C) I e IV. D) II e IV. E) III e IV.

Solução. Podemos colocar os lados com medidas 6 cm e 8 cm no triângulo I em correspondência com os lados do triângulo III cujas medidas são 12 cm e 16 cm. Esses pares de lados determinam, tanto no triângulo I quanto no triângulo III, um ângulo reto. Portanto, pelo critério LAL, os triângulos I e III são semelhantes com razão de semelhança igual a 2.

Note que é possível também usar o critério LLL, apenas observando que o lado com medida 10 cm no triângulo I é posto em correspondência com o lado no triângulo III cuja medida é 20 cm.

Completando a resolução, observamos, ainda, que nenhum dos triângulos II e IV é retângulo, ou seja, nenhum dos dois tem um ângulo reto. Logo, não podem ser semelhantes a I e III. Além disso, não há como definir uma correspondência entre os lados de II e IV de modo que as respectivas medidas sejam proporcionais. De fato, comparando os respectivos lados, daquele de maior medida para o de menor medida, temos

$$\frac{12}{24} \neq \frac{10}{12}.$$

Outra forma de verificar isso é observar que o triângulo II é isósceles e o triângulo IV não o é. Portanto, a alternativa correta é B). ■

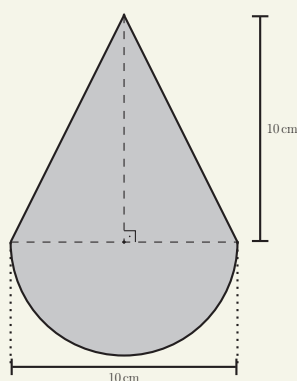


Na próxima questão, usamos um fato central da geometria de círculos no plano, a saber, a área de um círculo de raio $r > 0$ é dada por

$$\pi \cdot r^2.$$

Para desenvolvermos alguma intuição sobre essa expressão da área do círculo, recomendamos a leitura do material didático estruturado sobre Geometria Métrica, seção 1.4, disponível na página do Foco na Aprendizagem da CODED/CED https://www.ced.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/82/2022/05/caderno03_deAluno.pdf.

Questão 114 — PAEBES, Item M090568H6, adaptado. Uma empresa que fabrica peças em aço foi contratada para produzir um logotipo cujo formato é o de uma justaposição de um triângulo a um semicírculo. Nesse logotipo, a medida do diâmetro do semicírculo é igual a medida da base do triângulo. A figura abaixo apresenta o desenho desse logotipo com algumas de suas medidas.



Dado:
 $\pi \approx 3,14$

Qual a área da superfície de cada uma dessas peças em aço?

A) 65,70 cm².

B) 89,25 cm².

C) 100,00 cm².

D) 207,00 cm².

Solução. A figura em questão pode ser decomposta em um triângulo com base medindo 10 centímetros e altura, relativa a essa base, medindo também 10 centímetros; e um semicírculo, com raio igual a $10/2 = 5$ centímetros. Assim, a área da figura é dada por

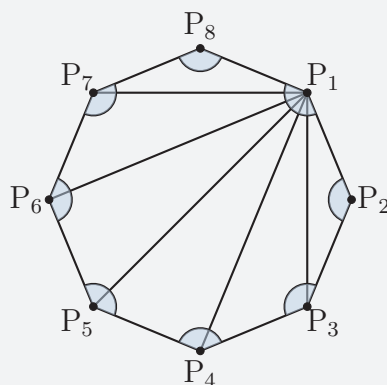
$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 50 + 25 \cdot 1,57 = 89,25$$

centímetros quadrados, o que corresponde à alternativa B). ■

Obs

Encerramos essa etapa do percurso abordando fatos relativos ao número de lados, número de diagonais e medidas de ângulos em polígonos convexos (em particular, em polígonos regulares). Uma discussão mais detalhada sobre perímetros e áreas de polígonos regulares com 5 lados ou mais depende de fatos básicos sobre relações métricas e trigonométricas em triângulos, dentre as quais o **Teorema de Pitágoras**, estudado na próxima seção.

Dado um polígono convexo de n lados (onde n é um número natural maior que 3), temos uma *diagonal* para cada escolha de um par de *vértices*. Na figura abaixo, estão traçadas as diagonais do vértice P_1 aos vértices P_3 a P_7 em um polígono convexo de 8 lados.



No caso geral, para cada um dos n vértices P_i , temos $n - 3$ escolhas do outro vértice (P_j , digamos) de modo a traçar uma diagonal. Logo, existem

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3),$$

em que dividimos o produto por 2 pelo fato de cada diagonal ser contada duas vezes, ou seja, dado que $\overline{P_i P_j} = \overline{P_j P_i}$.

Note que as diagonais particionam o polígono em $n - 2$ triângulos. Por um lado, sabemos que a soma (das medidas) dos *ângulos internos* desses $n - 2$ triângulos é igual a $(n - 2) \cdot \pi$ radianos. Por outro, a soma desses ângulos internos dos triângulos é igual à soma dos ângulos internos nos n vértices do polígono (veja a figura para convencer-se dessa afirmação). Assim, deduzimos que a *soma dos ângulos internos* de um polígono convexo é igual, em radianos, a

$$(n - 2) \cdot \pi.$$

No caso particular de um **polígono regular**, em que os lados são congruentes e os ângulos internos são congruentes, cada um desses ângulos mede

$$\frac{(n - 2) \cdot \pi}{n}$$

radianos. Podemos verificar, ainda no caso de polígonos convexos em geral, que a soma dos *ângulos externos* em cada vértice é igual a

$$n\pi - (n - 2)\pi = 2\pi \text{ radianos.}$$

Logo, no caso particular de um polígono regular, os ângulos externos são congruentes e cada um deles mede

$$\frac{2\pi}{n}$$

radianos.

Obs

A partir deste ponto do percurso, passamos a estudar formas geométricas no espaço euclidiano. Iniciamos, nas questões seguintes, mobilizando conhecimentos sobre planificação, áreas superficiais e volumes de **cubos** e, mais geralmente, **paralelepípedos**. Em alguns casos, consideramos sólidos geométricos construídos pela sobreposição de paralelepípedos.

Questão 115 — PAEBES, Item M050148E4. Observe os desenhos abaixo.



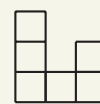
(I)



(II)



(III)



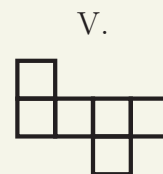
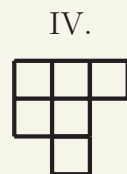
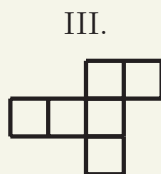
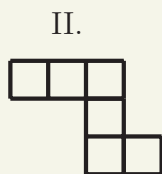
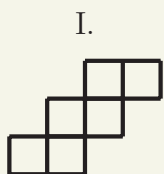
(IV)

Quais desses desenhos representam a planificação de um cubo?

- A) I e II.
- B) I e IV.
- C) II e III.
- D) II e IV.

Solução. Os desenhos que representam a planificação de um cubo são (I) e (II). Observe que as figuras (III) e (IV) não são planificações válidas de um cubo, pois dobraduras dessas figuras sempre geram sobreposição de faces ou lacunas.

Questão 116 — UFRGS 2013. Considere as seguintes proposições de modelos de planificação de um cubo.



Entre essas proposições de modelos de planificação, quais podem resultar em um cubo?

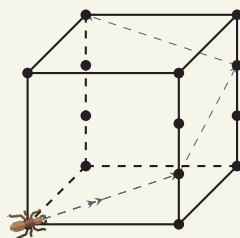
- A) I, II e V.
- B) III, IV e V.
- C) II, III e IV.
- D) II, IV e V.
- E) I, III e V.

Solução.

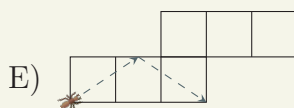
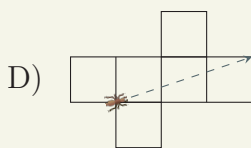
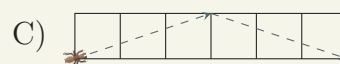
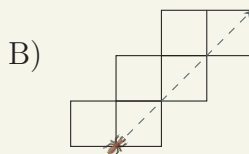
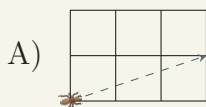
As planificações que podem formar um cubo são as numeradas por I, III e V. Logo, a alternativa correta é E).



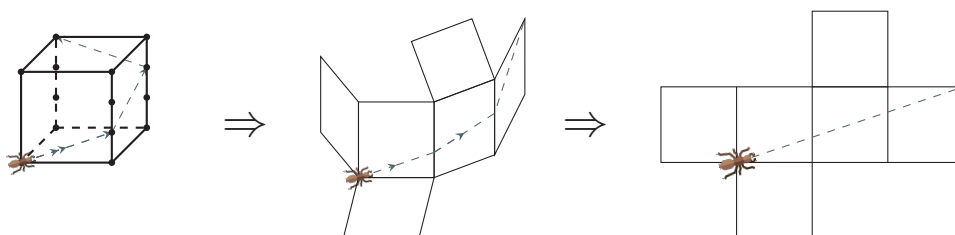
Questão 117 — SISEDU 2024. Uma formiga caminha sobre a superfície de um cubo, seguindo a trajetória indicada.



Se o cubo fosse planificado, a trajetória da formiga seria melhor representada por qual das seguintes figuras?



Solução. A planificação de um cubo envolve desenhar todas as suas faces em um plano bidimensional de modo que cada face seja conectada corretamente a suas adjacentes, permitindo uma visualização clara de como as faces se relacionam entre si. Assim, um cubo admite várias formas de planificação. A imagem a seguir busca ilustrar a trajetória percorrida pela formiga ao longo das faces do cubo enquanto estas são desdobradas em uma planificação.



Esta representação permite uma visualização clara do percurso da formiga em um plano bidimensional, facilitando a compreensão da sequência de movimentos através das diferentes faces do cubo. Concluímos que a alternativa correta é D).

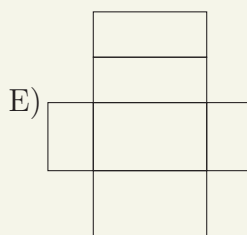
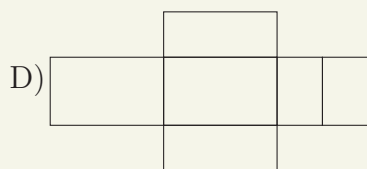
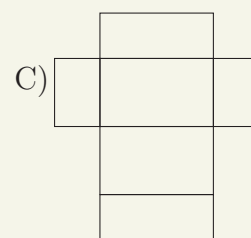
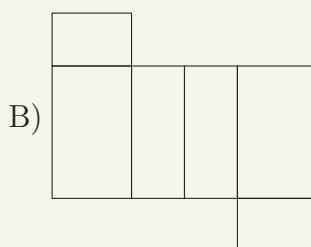
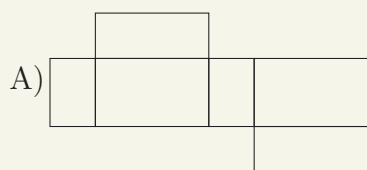


Questão 118 — SISEDU 2025. A embalagem de certa marca de sabão em pó tem a forma de um paralelepípedo retângulo com 8 centímetros de altura, 5 centímetros de largura e 25

centímetros de comprimento, conforme a seguinte figura.



Qual das seguintes figuras planas melhor representa uma planificação dessa embalagem?



 **Solução.** A planificação deve conter 6 faces, que mantenham a proporção entre as arestas comuns e possam ser “dobradas” de modo a formar o paralelepípedo. Ao analisar as alternativas, descartamos as letras B), C), D) e E), pois:

- B) Há confusão quanto às dimensões dos retângulos, levando à suposição incorreta de que a peça destacada na planificação representa a face superior ou inferior do paralelepípedo, embora não esteja posicionada corretamente em relação às demais faces.
- C) As faces laterais são inseridas de forma simétrica, porém duas delas são colocadas em lados opostos de maneira desconexa, o que inviabiliza a montagem tridimensional do paralelepípedo.
- D) Todas as faces necessárias estão presentes, mas as duas menores são organizadas de forma inadequada, resultando em uma configuração que não permite o fechamento correto da figura.
- E) As faces são distribuídas com base em uma tentativa de correspondência visual, mas há erro na posição relativa das faces superior e inferior, o que compromete a validade da planificação.

Portanto, a alternativa correta é letra A).

Questão 119 — SPAECE, Item M120706H6. Uma empresa fabricava caixas de papelão com formato de bloco retangular cujas dimensões internas da base eram 4 dm e 8 dm. Visando a economia de matéria-prima, essa empresa modificou essa caixa, mantendo o formato da caixa original e reduzindo apenas a medida da sua altura. Essa redução na altura resultou em uma nova caixa cuja capacidade de armazenamento é de 64 dm^3 .

Qual é a medida da altura dessa nova caixa?

- A) 2 dm. B) 4 dm. C) 8 dm. D) 12 dm. E) 32 dm.

Solução. A empresa fabrica uma caixa com formato de paralelepípedo retângulo. Como as medidas dos lados da base da caixa foram preservados (a saber, 4 dm e 8 dm), a área dessa base é dada por

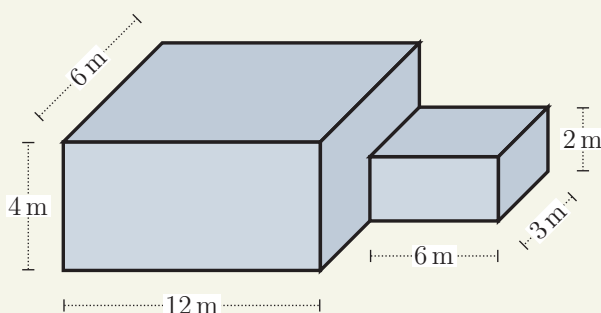
$$A = 4 \cdot 8 = 32 \text{ dm}^2.$$

Como a capacidade (volume) da caixa, após a alteração, é igual a 64 dm^3 , a altura da caixa na nova configuração é dada por

$$\frac{64}{32} = 2 \text{ dm},$$

resposta que corresponde à letra A).

Questão 120 Um sólido é formado pela justaposição de dois paralelepípedos retângulos, conforme ilustrado na figura a seguir.



Responda às seguintes questões.

I. Qual a área superficial do sólido?

- A) 342 m^2 . B) 348 m^2 . C) 354 m^2 . D) 360 m^2 . E) 372 m^2 .

II. Qual o volume, em litro, do sólido formado?

- A) 32.400 L. B) 43.200 L. C) 36.000 L. D) 324.000 L. E) 432.000 L.

Solução. Solução da parte I. O sólido é composto por dois paralelepípedos retângulos justapostos:

- **Bloco 1** (maior), com lados medindo 12 metros, 6 metros e 4 metros;
- **Bloco 2** (menor), com lados medindo 6 metros, 3 metros e 2 metros.

Podemos calcular a área superficial total somando as áreas de todas as faces de ambos os blocos e, em seguida, subtraindo a área da superfície de contato entre eles. Para o bloco maior, temos

- 2 faces com área igual a $12 \cdot 6$, o que totaliza $2 \cdot 72 = 144 \text{ m}^2$;
- 2 faces com área igual a $12 \cdot 4$, o que totaliza $2 \cdot 48 = 96 \text{ m}^2$;
- 2 faces com área igual a $6 \cdot 4$, o que totaliza $2 \cdot 24 = 48 \text{ m}^2$.

Concluimos, assim, que a área total do bloco maior: $144 + 96 + 48 = 288 \text{ m}^2$.

Como o bloco menor é geometricamente semelhante ao maior, com **razão de semelhança** $\frac{1}{2}$, a área de sua superfície é $\frac{1}{4} \cdot 288 = 72 \text{ m}^2$.

Somando as áreas dos dois blocos, obtemos 360 m^2 . Por sua vez, a face de contato entre os dois blocos tem área igual a $3 \cdot 2$, ou seja, área 6 m^2 . Como, no cálculo da soma das áreas dos dois blocos, essa área foi contada duas vezes (uma vez em cada bloco), devemos subtraí-la duas vezes, obtendo

$$\text{área superficial total} = 288 + 72 - 12 = 348 \text{ m}^2.$$

Certamente, é possível explorar com os estudantes outras estratégias para obter a área solicitada. Uma vez compreendido o procedimento, convém discutir a ideia de semelhança entre sólidos. O Princípio da Inclusão-Exclusão na Contagem contribui para ampliar o repertório do estudante estabelecer uma analogia com a propriedade de *subaditividade* da área.

Solução da parte II. O sólido é formado pela justaposição de dois paralelepípedos retângulos. O volume do bloco maior é dado pelo produto das medidas dos lados, isto é, por

$$12 \cdot 6 \cdot 4 = 288 \text{ m}^3.$$

Relembre que o bloco menor é semelhante ao maior, com razão de semelhança entre os lados igual a

$$\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como os sólidos são semelhantes e a razão linear é $\frac{1}{2}$, a razão entre os volumes é dada por

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Logo, o volume do bloco menor é igual a

$$\frac{1}{8} \cdot 288 = 36 \text{ m}^3.$$

Concluimos que o volume total do sólido é igual a

$$288 + 36 = 324 \text{ m}^3.$$

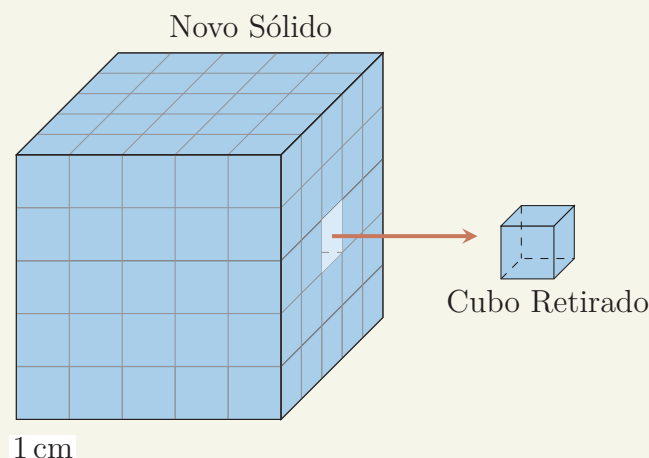
Convertendo essa medida para litros (lembrando que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$), temos

$$324 \cdot 1000 = 324\,000 \text{ L}.$$

Esta questão oferece outra excelente oportunidade para trabalhar a ideia de semelhança entre sólidos com os estudantes. A determinação da razão entre as dimensões dos paralelepípedos permite aplicar a propriedade de proporcionalidade de volumes, o que pode tornar o cálculo mais ágil e promover conexões com conteúdos de Geometria Espacial. Explorar com os estudantes a relação entre razão linear e volumétrica amplia a compreensão sobre escalas, unidades de medida, proporcionalidade e aplicações práticas da geometria.

■

Questão 121 Um cubo com arestas medindo 5 cm foi particionado em cubos menores, cada um com arestas medindo 1 cm. Em seguida, um desses cubos menores foi retirado, resultando em um novo sólido, conforme ilustrado a seguir.

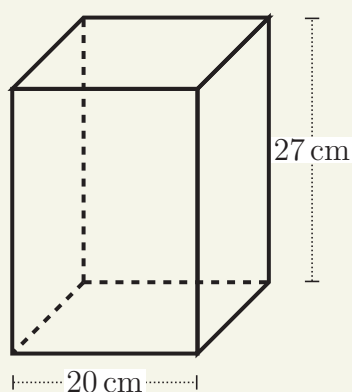


Em relação ao cubo original, a área da superfície total do novo sólido

- A) diminui 1 cm^2 . B) diminui 5 cm^2 . C) aumenta 2 cm^2 . D) aumenta 4 cm^2 . E) aumenta 6 cm^2 .

Solução. A retirada do cubo com lados medindo 1 centímetro *diminui* o volume em 1 centímetro cúbico. No entanto, aumenta a área superficial: de fato, esse cubo representava 1 centímetro quadrado da área superficial total do sólido (medida da face que ficava externa); com sua remoção, ficam aparentes 5 faces internas, cada uma medindo 1 centímetro quadrado. Logo, a retirada do cubo menor representa *aumento* de $5 - 1 = 4$ centímetros quadrados na área superficial do sólido. A resposta correta é D). ■

Questão 122 — SAEGO, Item M091739H6. Jéssica ganhou um peixe e precisou comprar um aquário para colocá-lo. Ela comprou um aquário no formato de um prisma reto de base quadrada com as dimensões internas indicadas na figura abaixo.



Dado: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$.

Após acrescentar alguns enfeites no interior desse aquário, restaram $\frac{3}{4}$ de seu volume interno, que foram preenchidos com água. Quantos mililitros de água Jéssica colocou nesse aquário?

A) 201 mL.

B) 405 mL.

C) 2220 mL.

D) 8100 mL.

**Solução.** O volume interno, ou melhor, a *capacidade* do aquário é igual ao produto

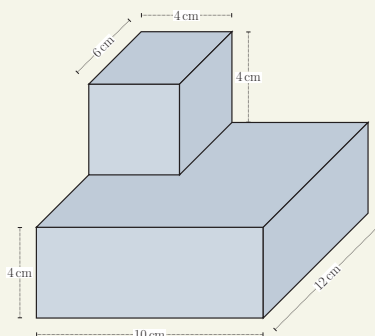
$$20 \cdot 20 \cdot 27$$

centímetros cúbicos. Portanto, $\frac{3}{4}$ dessa capacidade equivalem a

$$5 \cdot 20 \cdot 81 = 8\,100$$

centímetros cúbicos, ou seja, a 8 100 mililitros. A resposta correta é D). ■

Questão 123 — PAEBES, Item M090577B1. Para sustentar uma escultura, um artista construiu uma base de gesso composta por dois blocos retangulares, conforme representado na figura abaixo.



Qual é a medida do volume mínimo de gesso que esse artista utilizou?

A) 40 cm³.B) 144 cm³.C) 480 cm³.D) 576 cm³.**Solução.** O sólido é composto por dois paralelepípedos retângulos justapostos:

- **Bloco 1** (maior), com lados medindo 12 metros, 10 metros e 4 metros;
- **Bloco 2** (menor), com lados medindo 6 metros, 4 metros e 4 metros.

O volume do sólido é dado pela soma dos volumes dos dois blocos, ou seja, por

$$12 \cdot 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 4 = 480 + 96 = 576$$

centímetros cúbicos, resposta correspondente à alternativa D). ■



Podemos calcular a área superficial total do sólido somando as áreas de todas as faces de ambos os blocos e, em seguida, subtraindo a área da superfície de contato entre eles. As áreas superficiais dos blocos maior e menor são, respectivamente, iguais a

$$2 \cdot (12 \cdot 10 + 12 \cdot 4 + 10 \cdot 4)$$

e

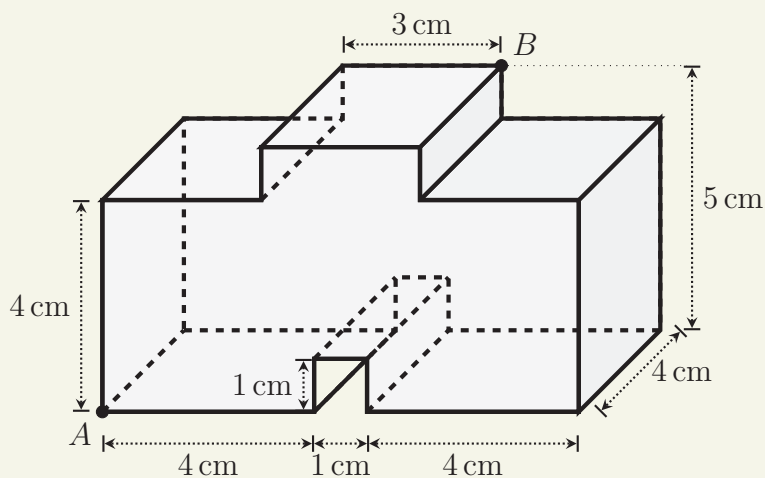
$$2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 4).$$

Logo, a área superficial do sólido é dada por

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (12 \cdot 10 + 12 \cdot 4 + 10 \cdot 4) + 2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 4) - 2 \cdot 6 \cdot 4 \\ & = 2 \cdot (12 \cdot 10 + 12 \cdot 4 + 10 \cdot 4) + 2 \cdot (6 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = 416 + 160 = 576 \end{aligned}$$

centímetros quadrados. ■

Questão 124 A imagem a seguir representa uma peça metálica sólida, esculpida a partir de um paralelepípedo retângulo. A peça apresenta um vão inferior e uma saliência superior, ambos também em forma de paralelepípedo retângulo.



Resolva os seguintes problemas.

- 1) Calcule o volume da peça.
- 2) Calcule sua área superficial total.

Solução. Solução da parte 1. A peça é a *justaposição* (união disjunta dos interiores dos sólidos geométricos) em um paralelepípedo retângulo (com lados medindo 9 cm, 4 cm e 4 cm) e outro paralelepípedo retângulo (com lados medindo 3 cm, 4 cm e 1 cm), da qual retira-se um terceiro paralelepípedo retângulo (com lados medindo 1 cm, 4 cm e 1 cm). Assim, o volume da peça é igual a

$$9 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = 152$$

centímetros cúbicos.

Solução da parte 2. A área superficial do paralelepípedo retângulo com lados medindo 9 cm, 4 cm e 4 cm é igual a

$$2 \cdot (2 \cdot 9 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = 44 \cdot 4 = 176$$

centímetros quadrados. A área superficial do paralelepípedo retângulo com lados medindo 3 cm, 4 cm e 1 cm é igual a

$$2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 38$$

centímetros quadrados. A justaposição dos dois teria, então, área superficial igual a

$$176 + 38 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 190,$$

centímetros quadrados, ou seja, igual à soma das áreas superficiais dos dois paralelepípedos, da qual subtraímos *duas* vezes a área da face comum (com lados medindo 3 cm e 4 cm), por ter sido contada uma vez no cálculo de cada uma das áreas superficiais dos dois paralelepípedos.

Por fim, consideramos o efeito da retirada do terceiro paralelepípedo retângulo, com lados medindo 1 cm, 4 cm e 1 cm. A partir do resultado parcial que já obtivemos, a saber, 190 centímetros quadrados, efetuamos as seguintes operações:

- adicionamos e subtraímos a área da face “horizontal” desse paralelepípedo com lados medindo 1 cm e 4 cm;

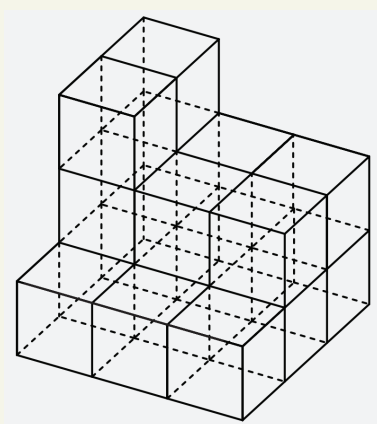
- em seguida, adicionamos as áreas de suas duas faces “verticais” com lados medindo 4 cm e 1 cm;
- por fim, subtraímos as áreas de suas duas faces “verticais” quadradas, com lados medindo 1 cm.

Desse modo, deduzimos que a área superficial da peça é igual a

$$190 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 196$$

centímetros quadrados. ■

Questão 125 — PAEBES, Item M080010E4, adaptado. O sólido representado no desenho abaixo é formado por cubos congruentes. Cada cubo que compõe esse sólido tem volume igual a 1 cm^3 .



Qual o volume desse sólido?

A) 7 cm^3 .

B) 9 cm^3 .

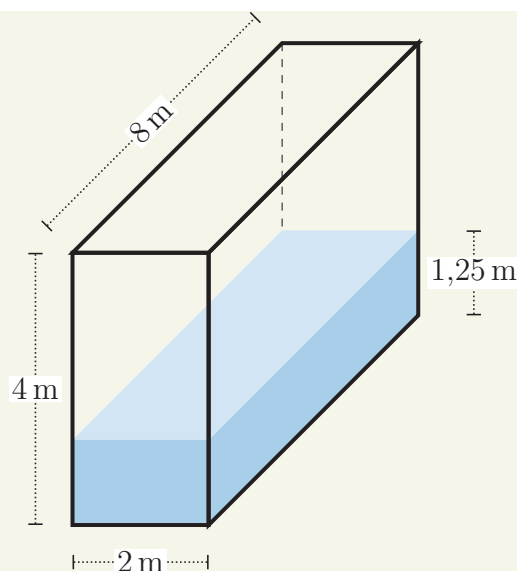
C) 17 cm^3 .

D) 23 cm^3 .

Solução. Uma solução meramente aritmética (enumeração simples) é a contagem direta de quantos cubos compõem a figura. Observando a figura, constata-se que é particionada em $9 + 6 + 2 = 17$ cubos, cada um dos quais com volume igual a 1 centímetro cúbico. Logo, a resposta é alternativa C).

Convém que o professor explore outras estratégias de resolução, baseadas em propriedades geométricas da noção de volume. Por exemplo, pode perguntar aos estudantes quantos cubos ainda seriam necessários para, a partir do sólido representado na figura, construir-se um cubo com lados medindo 3 centímetros. ■

Questão 126 Um paralelepípedo reto-retângulo com lados medindo 2 m, 4 m e 8 m está apoiado horizontalmente sobre a face cujos lados medem 2 m e 8 m e que contém água até a altura de 1,25 m, conforme mostra a figura a seguir.



Dadas essas informações, responda às seguintes questões.

- 1) Qual a área superficial total desse paralelepípedo?
- 2) Quantos litros de água estão contidos nesse prisma?
- 3) Se o paralelepípedo fosse apoiado sobre a face com lados medindo 2 m e 4 m, o nível da água estaria a qual altura?

Solução. Solução da parte 1. A área superficial total do paralelepípedo é dada por

$$2 \cdot (2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 4) = 112 \text{ m}^2.$$

Solução da parte 2. O volume do paralelepípedo retângulo é dado pelo produto da área de uma de suas bases pela altura relativa a essa base, ou seja, pelo produto

$$2 \cdot 8 \cdot 4 = 64 \text{ m}^3.$$

Da mesma forma, o volume preenchido pela água é igual a

$$2 \cdot 8 \cdot 1,25 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1,25 = 4 \cdot 5 = 20$$

metros cúbicos. Note que a razão entre esses volumes é igual à razão entre as alturas, isto é,

$$\frac{20}{64} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 1,25}{2 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{1,25}{4} = \frac{5}{16}$$

Solução da parte 3. Vimos O volume preenchido pela água é igual a

$$2 \cdot 8 \cdot 1,25$$

metros cúbicos. Esse volume é, obviamente, preservado por uma rotação do paralelepípedo de modo que as faces horizontais seja, agora, aquelas com lados medindo 2 metros e 4 metros. Sendo assim, a altura do nível de água seria

$$\frac{2 \cdot 8 \cdot 1,25}{2 \cdot 4} = 2 \cdot 1,25 = 2,5 \text{ m.}$$

■

Uma pergunta bastante pertinente no contexto da questão 126 é a seguinte:

Quanto mede a diagonal desse paralelepípedo?

Para respondê-la, podemos executar os seguintes procedimentos:

- 1) determinar a distância d_1 entre pontos extremos (P_1 e Q_1 , digamos) em uma diagonal de uma das faces (F_1 , digamos) do paralelepípedo retângulo;
- 2) considerar uma das faces perpendiculares a F_1 contendo uma das extremidades da diagonal de F_1 (por exemplo, o ponto Q_1);
- 3) determinar o comprimento d_2 da aresta dada pela intersecção de F_1 e F_2 (essa aresta tem Q_1 como uma de suas extremidades);
- 4) dada a aresta $\overline{Q_1Q_2}$ (em que $Q_2 \in F_1 \cap F_2$) da etapa precedente (cujo comprimento denotamos por d_2), observar que o segmento $\overline{P_1Q_2}$ é uma diagonal do paralelepípedo retângulo;
- 5) calcular o comprimento d dessa diagonal do paralelepípedo retângulo, usando o fato que os segmentos $\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ são perpendiculares e obtendo, por aplicação do Teorema de Pitágoras, a seguinte expressão,

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + c^2},$$

em que c é a medida de uma das arestas perpendiculares à face F_1 (por exemplo, $\overline{Q_1Q_2}$).

- 6) Observar, também usando o Teorema de Pitágoras, que

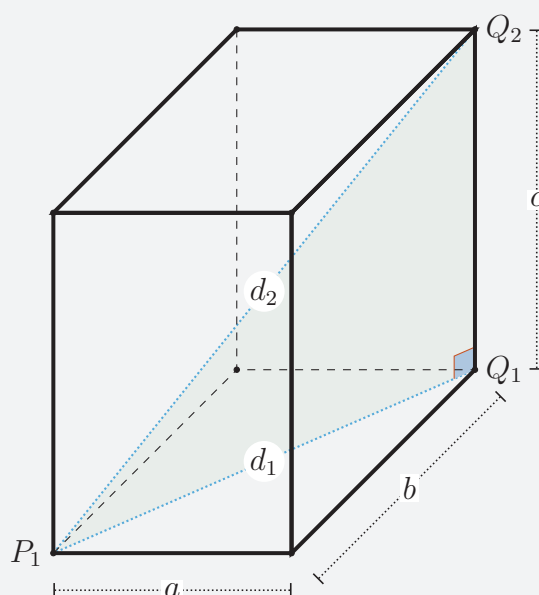
$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

em que a e b são as medidas dos lados da face F_1 e

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

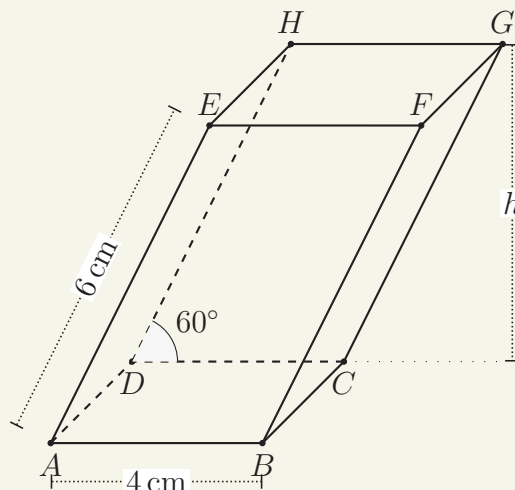
o que conclui os cálculos.

O procedimento descrito anteriormente é representado na seguinte figura.



Nas etapas 5) e 6) desse procedimento, utilizamos o **Teorema de Pitágoras**, a ser estudado na próxima seção.

Questão 127 Na imagem a seguir, temos um prisma oblíquo de base quadrada. O ângulo entre a face lateral $AEHD$ e o plano da base $ABCD$ mede 60° . As faces $BFGC$ e $AEHD$ são retângulos.



- I. Qual a medida, em centímetro, da altura h desse prisma?
- II. Qual o volume, em mililitro, desse prisma?
- III. Qual a área da superfície total desse sólido?

Solução. Solução da parte I. Note que a altura do paralelepípedo é a distância entre os planos que contêm as bases quadradas $ABCD$ e $EFGH$. Portanto, é incorreto afirmar que essa altura é igual a medida do segmento $\overline{AE}$, ou seja, a 6 centímetros. Na verdade, a altura é a medida da *projeção vertical* desse segmento, dada por

$$\overline{AE} \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

centímetros, ou seja, aproximadamente 5,2 centímetros. Para maiores detalhes sobre razões trigonométricas, referimos o leitor à seção 2.7.

Solução da parte II. Pelo Princípio de Cavalieri, o volume desse prisma oblíquo é *igual* ao volume do prisma reto com bases congruentes às bases do prisma oblíquo e mesma altura, conforme explicado e ilustrado mais adiante.

Intuitivamente, ao “aprumarmos” o prisma oblíquo, não alteramos seu volume.

Sendo assim, o volume do prisma oblíquo é dado por

$$4 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

centímetros cúbicos.

Solução da parte III. Diferentemente do que ocorre em relação ao volume, as áreas superficiais dos sólidos **não são** iguais. De fato, o prisma reto é uma “solução melhor”, pois contém o mesmo volume com menor área superficial que o prisma oblíquo.

Para demonstrar essa afirmação, observe que, no prisma reto com mesma altura que o prisma oblíquo,

- as bases são quadrados cujos lados medem 4 metros;
- a altura, ou seja, a distância entre os planos das bases, é igual a $3\sqrt{3}$ metros;
- as faces laterais são retângulos com lados medindo 4 metros e $3\sqrt{3}$ metros.

Sendo assim, a área superficial total desse prisma reto é igual à soma das áreas de suas seis faces retangulares, ou seja,

$$2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} = 32 + 48\sqrt{3}$$

centímetros quadrados. Por outro lado, as faces do prisma oblíquo são

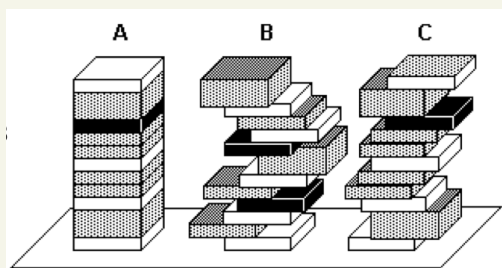
- dois quadrados cujos lados têm medidas iguais a 4 metros;
- dois retângulos cujos lados têm medidas iguais a 4 metros e 6 metros;
- dois paralelogramos (que não são retângulos) congruentes com base medindo 4 metros e altura $3\sqrt{3}$ metros.

Assim, a área superficial total do prisma oblíquo é

$$2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} = 32 + 48\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

centímetros quadrados. Concluimos, em particular, que o prisma oblíquo tem *maior* área superficial que o prisma reto com mesma área das bases e mesma altura.

Questão 128 — UFSM 2001. Três crianças estavam brincando na biblioteca da escola e resolveram fazer pilhas de mesma altura, com livros, conforme a figura.



A mais organizada fez a pilha A, e as outras duas fizeram as pilhas B e C. Considerando-se que todos os livros têm a mesma área de capa e que as pilhas têm a mesma altura, pode-se afirmar que

- A) o volume da pilha A é maior do que o volume da pilha C.
- B) os volumes das pilhas B e C são iguais e maiores do que o volume da pilha A.
- C) o volume da pilha A é menor do que o volume da pilha B que é menor do que o volume da pilha C.
- D) os volumes das três pilhas são iguais.
- E) não existem dados suficientes no problema para decidir sobre os volumes e compará-los.

Solução. A questão informa que as três pilhas (A, B e C) têm a mesma altura. Além disso, a informação de que todos os livros têm a mesma área de capa significa que os livros podem ser visto como paralelepípedos com bases quadrangulares (retangulares) de mesma área. Assim, onde quer que fizéssemos uma secção horizontal dessas pilhas, obteríamos três “páginas” de mesma área, ou seja, três paralelogramos (retângulos) de mesma área. Sendo assim, o Princípio de

Cavalieri nos permite afirmar que as três pilhas têm mesmo volume. Logo, a alternativa correta é D).

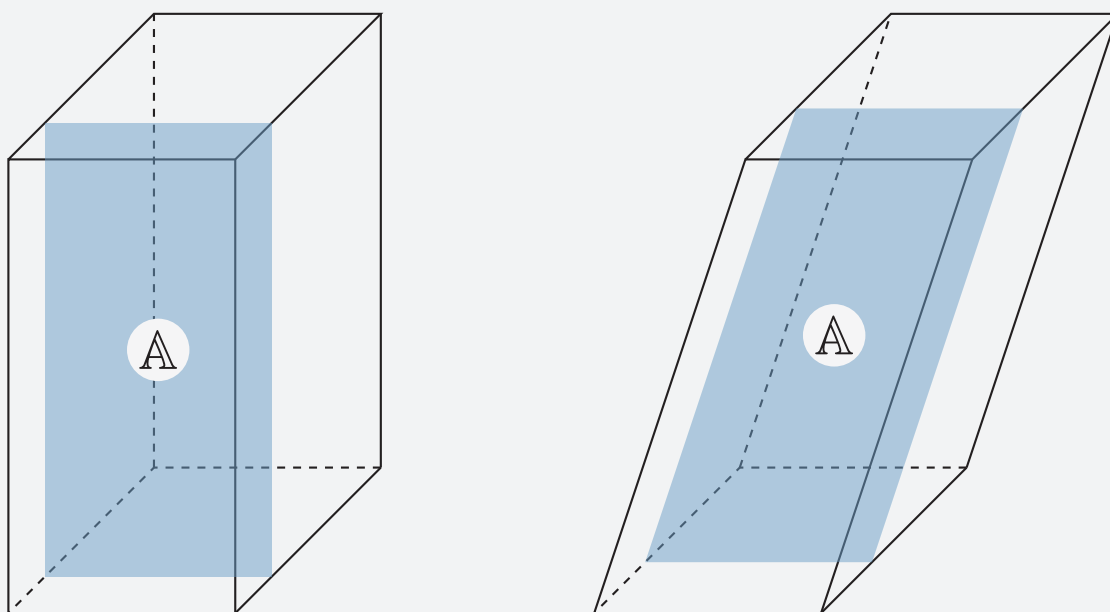
Obs

Na verdade, essa questão não tem por finalidade demonstrar ou aplicar com rigor o Princípio de Cavalieri, mas desenvolver intuição geométrica e física que ajudem a tornar esse princípio mais plausível, aceitável e natural.



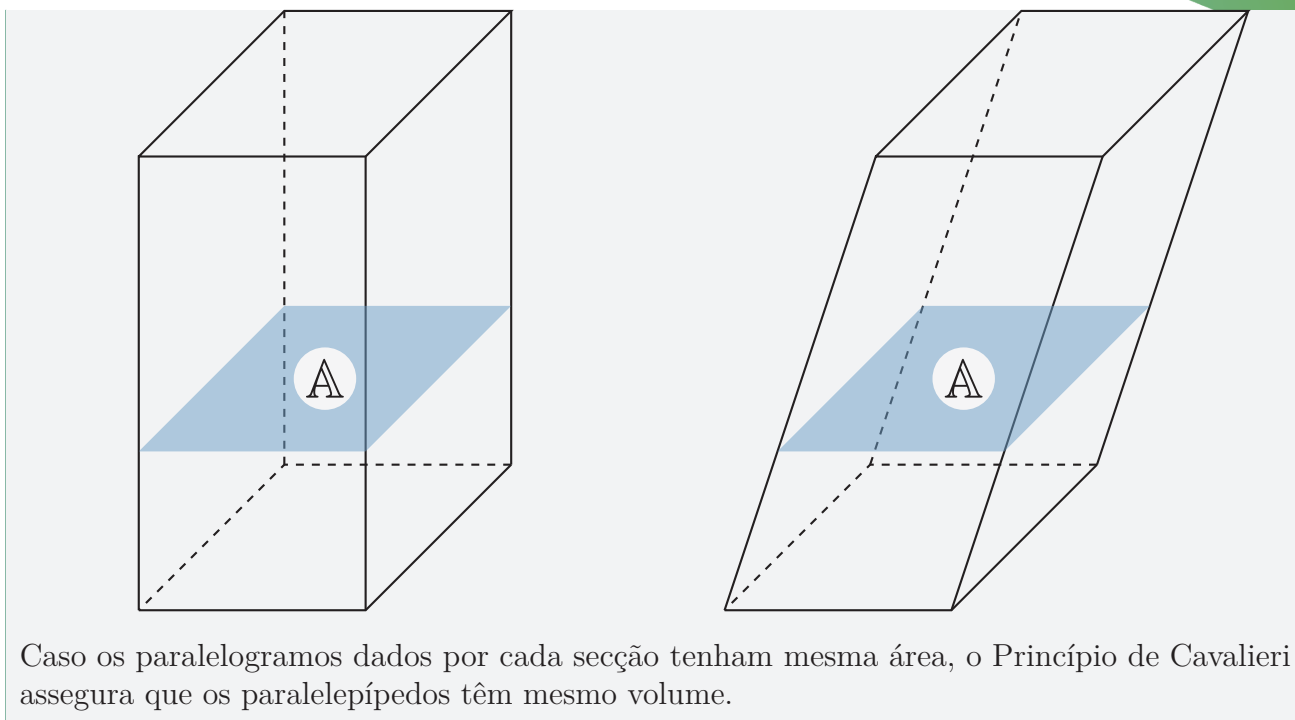
As questões 127 e 128 envolvem o que os livros-texto costumam denominar **Princípio de Cavalieri**. Esse princípio está relacionado à noção de *integral*, que aparece no Cálculo e na Teoria da Medida.

Para ilustrar esse princípio, observe, na seguinte figura, os dois paralelepípedos com bases retangulares congruentes, um dos quais é reto e o outro, oblíquo.



Seccionando os paralelepípedos por um plano vertical (por exemplo, perpendicular a um dos lados das bases de ambos os paralelepípedos), obtemos paralelogramos de mesma área. Esse fato é válido para todas as secções que produzirmos transladando esse plano ao longo da direção perpendicular a ele. Intuitivamente, o volume de cada paralelepípedo é aproximado pela soma dos volumes de uma “grande” quantidade de paralelepípedos retos com altura “muito pequena” e bases dadas pelas secções.

Alternativamente, podemos seccionar os paralelepípedos por planos paralelos ao plano que contém suas bases, obtendo, novamente, paralelogramos, conforme indicado na seguinte figura.

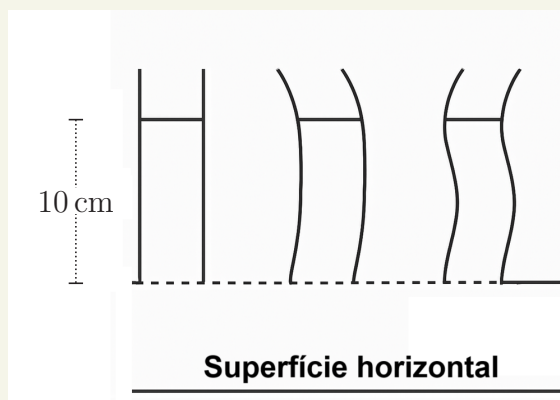


O seguinte exercício utiliza o **Princípio de Cavalieri** em uma situação mais geral do que aquelas das questões 127 e 128.

Exercício 2.12 No início do século XVII, *Bonaventura Cavalieri* dedicou-se ao estudo de áreas e volumes. Como resultado desse estudo, enunciou o seguinte princípio, conhecido como **Princípio de Cavalieri**:

“Sejam A e B dois sólidos tais que, ao seccioná-los por uma dada família de planos paralelos, obtemos, sempre, um par de figuras planas com áreas iguais. Sendo assim, o volume de A é igual ao volume de B.”

Como uma aplicação prática desse princípio, considere um sistema de vasos comunicantes formado por 3 tubos contendo água, cujas seções são círculos com 2 cm de diâmetro.



O volume do líquido armazenado nos tubos até 10 cm da superfície horizontal é

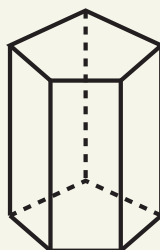
- A) $10 \pi \text{ cm}^3$.
- B) $40 \pi \text{ cm}^3$.
- C) $30 \pi \text{ cm}^3$.
- D) $120 \pi \text{ cm}^3$.
- E) $60 \pi \text{ cm}^3$.

 **Solução.** Novamente, temos uma questão com contextos abordando variações do Princípio de Cavalieri, o qual garante, na situação apresentada no enunciado, que os volumes preenchidos por água nos três tubos são iguais. Portanto, esse volume é dado por 10π centímetros cúbicos, o volume do tubo cilíndrico com raio medindo 1 centímetro e altura medindo 10 centímetros. A resposta correta, portanto, é C), o que corresponde à soma dos volumes dos 3 tubos. ■

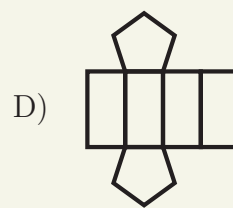
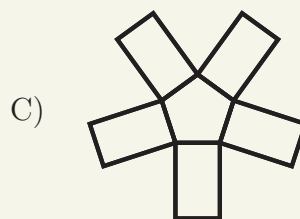
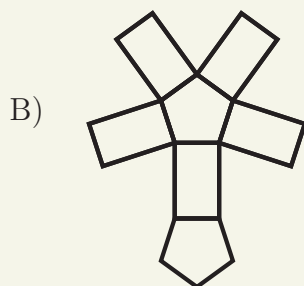
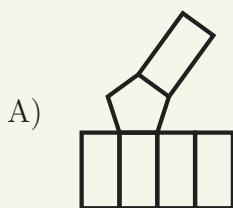
Obs

Na próxima sequência, consideramos fatos da geometria de **prismas** definidos por uma base dada por um polígono convexo e segmentos de reta paralelos, congruentes e transversais ao plano contendo o polígono. Abordamos possibilidades de planificação dessas figuras e, em alguns casos, cálculos de suas áreas superficiais e volumes.

Questão 129 — SAEGO, Item M090207H6. Observe o sólido geométrico abaixo.

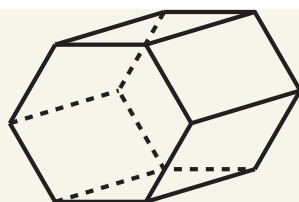


Uma planificação para esse sólido é

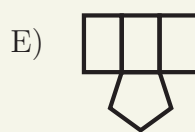
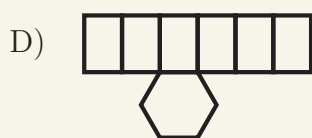
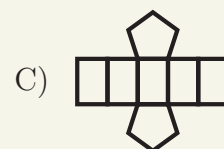
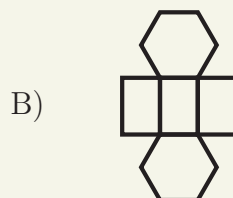
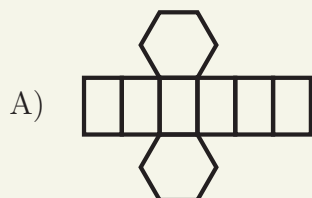


 **Solução.** Uma planificação válida de um prisma de base pentagonal deve conter duas faces pentagonais congruentes e cinco faces laterais em formato de paralelogramos (retângulos, caso o prisma seja reto). A alternativa correta é B). ■

Questão 130 — PAEBES, Item M120945E4. O desenho abaixo representa um prisma reto de base hexagonal.

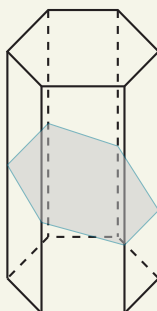


Uma das planificações desse prisma é



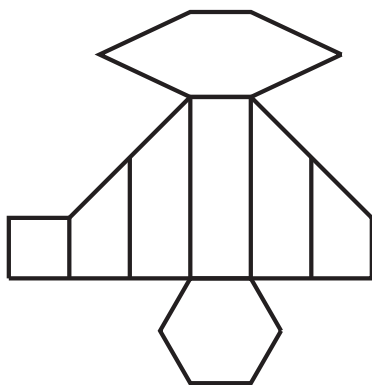
 **Solução.** Uma planificação válida de um prisma de base hexagonal deve conter duas faces hexagonais congruentes e seis faces laterais em formato de paralelogramos (retângulos, caso o prisma seja reto). A alternativa correta é A).

Questão 131 A figura a seguir apresenta um prisma reto de base hexagonal regular. Um plano, oblíquo em relação às bases, divide o prisma em dois outros sólidos, conforme ilustrado a seguir.

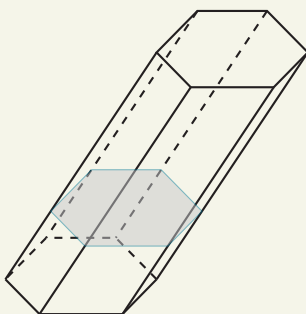


Desenhe uma planificação para cada um dos dois sólidos formados.

 **Solução.** O plano divide o prisma em dois sólidos. Uma planificação de um desses sólidos é ilustrada na seguinte figura.

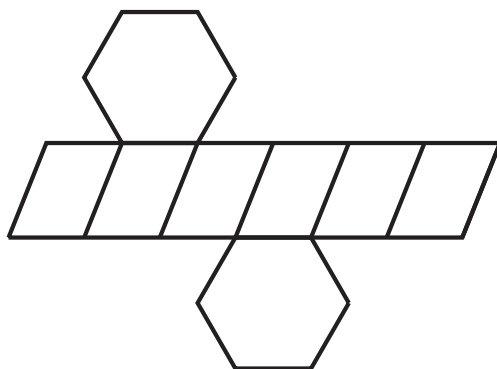


Questão 132 A figura a seguir apresenta um prisma oblíquo de base hexagonal regular. Um plano, paralelo às bases, divide o prisma em dois outros sólidos, conforme ilustrado a seguir.

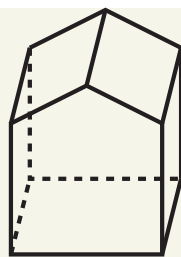


Desenhe uma planificação para cada um dos dois sólidos formados.

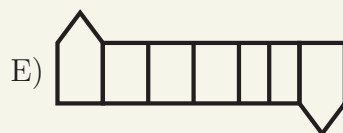
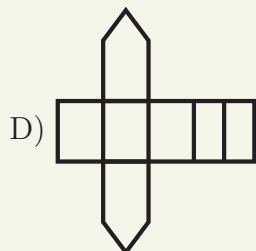
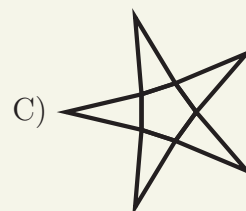
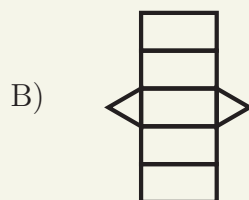
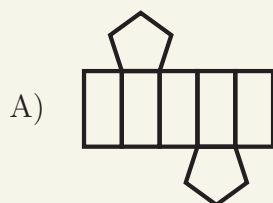
 **Solução.** O plano divide o prisma hexagonal em dois outros prismas hexagonais oblíquos. Logo, as faces são paralelogramos e as bases são hexágonos congruentes às bases do prisma original. Uma planificação de um dos sólidos formados desse modo é ilustrada na seguinte figura.



Questão 133 Observe o prisma representado abaixo.



Uma possível planificação dessa figura geométrica é



Solução. O sólido apresentado na figura é um prisma pentagonal reto, pois

- possui duas bases congruentes em forma de *pentágono irregular*;
- e cinco faces laterais em forma de retângulos.

Uma planificação correta para esse prisma deve conter:

- duas faces pentagonais irregulares, mas congruentes às bases do prisma;
- e cinco retângulos unidos lado a lado (as faces laterais).

Assim, a alternativa que representa corretamente a planificação do prisma pentagonal é a letra D).

Questão 134 Considere um prisma reto de base hexagonal regular. Esse prisma possui 12 cm de altura e está completamente preenchido com água, como mostrado na figura I.

Essa água será transferida para um segundo prisma, também reto e com base hexagonal regular, cujas arestas da base e da altura medem o dobro das do primeiro prisma, conforme ilustrado na figura II.

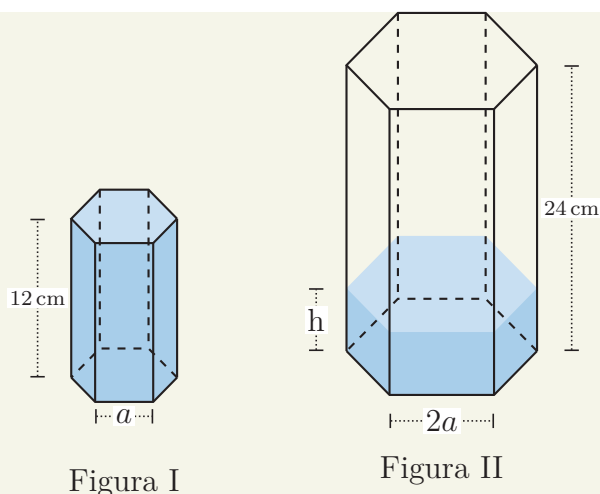


Figura I

Figura II

Responda às seguintes questões.

- 1) Qual o valor da altura h que a água atinge no prisma na figura II?
- 2) Quantas vezes a área superficial total do prisma na figura II é maior do que a área superficial total do prisma da figura I?
- 3) Qual a razão entre os volumes dos prismas representados nas figuras II e I, nessa ordem?

Solução. Solução da parte 1. O volume ocupado pela água no prisma representado na figura I é dado por

$$12A,$$

onde A é área da base desse prisma, dado pelo hexágono regular cujos lados medem a centímetros.

A medida dos lados da base hexagonal do prisma na figura II é 2. Logo, sua área dessa base é $4A$, ou seja, *quatro* vezes a área da base do prisma na figura I. Como o volume de água é preservado, o nível que ela atinge no prisma da figura II é dado por

$$\frac{12A}{4A} = 3 \text{ cm.}$$

Solução da parte 2. A área superficial do prisma na figura I é igual a

$$2A + 6 \cdot a \cdot 12$$

Já a área superficial do prisma na figura II é dada por

$$2 \cdot 4A + 6 \cdot 2a \cdot 24 = 4 \cdot (2A + 6 \cdot a \cdot 12).$$

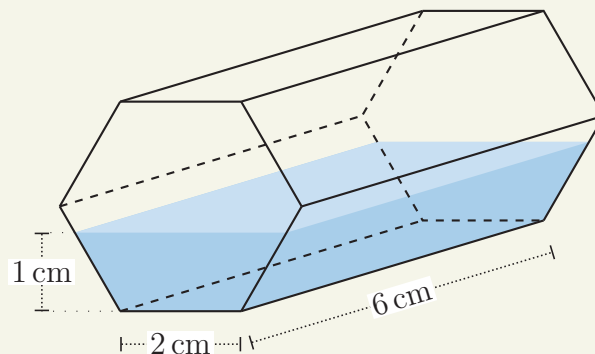
Portanto, a razão entre as áreas superficiais dos prismas nas figuras II e I, nessa ordem, é igual a 4.

Solução da parte 3. A razão entre os volumes dos prismas nas figuras II e I, nessa ordem, é igual a

$$\frac{4A \cdot 24}{A \cdot 12} = 8.$$

Isso finaliza a resolução da questão. ■

Exercício 2.13 Um prisma reto de base hexagonal regular está disposto horizontalmente, apoiado sobre uma de suas faces laterais. Esse prisma foi parcialmente preenchido com água até atingir a altura de 1 cm em relação à face de apoio, conforme ilustração a seguir.



- 1) Qual o volume, em mililitro, de líquido que o prisma contém?
- 2) Qual o volume, em mililitro, da parte vazia?
- 3) Se o prisma fosse apoiado horizontalmente sobre uma de suas faces hexagonais, qual a altura que o nível da água atingiria?

Solução. Solução da parte I. Considere a região preenchida pela água. Essa região tem a forma de um prisma com uma base dada por um trapézio e altura de 6 centímetros em relação a essa base. A fim de calcularmos a área da base trapezoidal, observamos, inicialmente, que o ângulo entre a face horizontal do prisma, apoiada no plano, e uma de suas faces oblíquas ao plano horizontal tem a mesma medida do ângulo externo do hexágono, ou seja, $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Como a altura do nível da água em relação ao plano horizontal é de 1 centímetro, segue que a projeção horizontal ℓ dos lados do trapézio oblíquos a suas bases satisfaz a seguinte razão trigonométrica (vide seção 2.7 para uma revisão acerca dessas razões)

$$\frac{1}{\ell} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3},$$

do que deduzimos que

$$\ell = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Portanto, o trapézio tem altura igual a 1 centímetro e lados paralelos medindo 2 centímetros e $2 + 2\ell$ centímetros. Logo, sua área é dada por

$$\frac{2 + (2 + 2\ell)}{2} \cdot 1 = 2 + \ell$$

centímetros quadrados. Concluimos que o volume preenchido pela água, ou seja, o volume do prisma com base trapezoidal e altura de 6 centímetros é igual a

$$(2 + \ell) \cdot 6 = 12 + \frac{6}{\sqrt{3}}$$

centímetros cúbicos.

Solução da parte 2. Um argumento similar pode ser aplicado para o caso em que a altura do trapézio é igual à metade da altura do hexágono regular. Nesse caso, teríamos

$$\ell = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \text{ cm}.$$

Além disso, a altura do trapézio (metade da altura da face hexagonal) seria

$$h = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

Portanto, nesse caso, o volume do prisma trapezoidal seria

$$\frac{2 + (2 + 2)}{2} \cdot h \cdot 6 = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}$$

centímetros cúbicos. Concluimos que a capacidade da parte vazia é igual a

$$36\sqrt{3} - \left(12 + \frac{6}{\sqrt{3}}\right) = 12 \cdot \left(3\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

centímetros cúbicos.

Solução da parte 3. O volume de água seria, obviamente, preservado nessa nova configuração. Se A denota a área do hexágono regular que é base do prisma, a altura h_0 do nível de água satisfaria, nessa nova disposição do prisma, dada por

$$Ah_0 = 12 + \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

No entanto, A é duas vezes a área do trapézio com altura igual à metade da altura da face hexagonal. Portanto,

$$A = 6\sqrt{3}$$

centímetros quadrados. Logo,

$$h_0 = \frac{12 + \frac{6}{\sqrt{3}}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

centímetros.



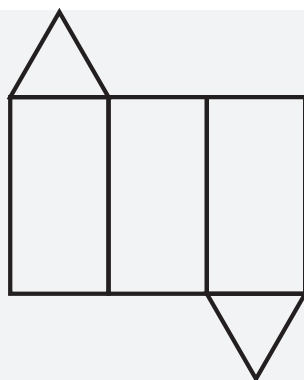
Considere um prisma reto com bases dadas por polígonos convexos (congruentes, portanto), contidos em planos paralelos à distância h um do outro. Caso a área de cada base poligonal seja igual a b , o **volume** do prisma é dado pelo produto

$$b \cdot h.$$

O mesmo vale, de acordo com o Princípio de Cavalieri, para prismas oblíquos com essas bases poligonais e mesma altura, conforme ilustrado na seguinte figura.



A **área superficial** de um desses prismas é dada pela soma das áreas de suas faces, ou seja, as áreas das bases poligonais e as áreas das faces laterais quadrangulares. A seguinte figura ilustra o caso de um prisma reto cujas bases são triângulos.



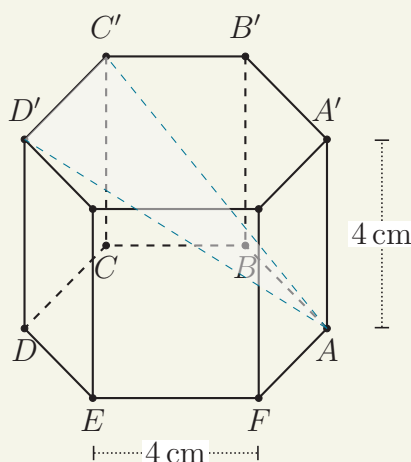
A figura nos ajuda a compreender que

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}},$$

em que

- A_{total} denota a área superficial total do prisma;
- A_{lateral} é a soma das áreas das faces laterais; e
- A_{base} representa a área de uma das bases poligonais.

Exercício 2.14 Um prisma reto de base hexagonal regular possui todas as suas arestas medindo 4 cm.



Resolva os seguintes problemas.

- 1) Determine o volume desse prisma.
- 2) Determine a área superficial total desse prisma.
- 3) Determine o comprimento das seguintes diagonais do prisma: $\overline{AD'}$ e $\overline{AC'}$.
- 4) O triângulo $AC'D'$ é retângulo? Justifique.
- 5) Os triângulos ADD' e $AC'D'$ são semelhantes? Em caso afirmativo, qual é a razão da semelhança? Em caso negativo, justifique por que não são semelhantes.
- 6) Qual a área do triângulo $AC'D'$?
- 7) Qual a distância do ponto C' ao segmento $\overline{AD'}$?



Solução. Solução da parte 1. Sabemos que o volume V de um prisma é dado pelo produto

da área A de uma de suas bases poligonais e da altura h relativa a essa base, isto é, por

$$V = A \cdot h$$

Em nosso caso, a base é um hexágono regular cujos lados medem $a = 4$ cm. Assim como no exercício 2.13, observamos que a área desse hexágono é o dobro da área de um trapézio cujas bases paralelas medem

$$a \quad \text{e} \quad a + 2a \cos \frac{\pi}{3} = 2a$$

e cuja altura é igual a

$$a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Logo, a área de uma das faces hexagonais do prisma é dada por

$$A = 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Em nosso caso, $a = 4$ cm e, portanto,

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 16 \text{ cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Concluimos que

$$V = 24\sqrt{3} \cdot 4 = 96\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Solução da parte 2. Vimos que cada uma das *duas* faces hexagonais (com lados medindo a) do prisma tem área igual a

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Considerando que cada uma das *seis* faces quadrangulares são retângulos cujos lados medem a e h , concluimos que a área superficial total do prisma é dada por

$$2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 6ah.$$

Substituindo os valores $a = h = 4$ cm, deduzimos que essa área superficial total é dada por

$$48\sqrt{3} + 96 = 48 \cdot (2 + \sqrt{3})$$

centímetros quadrados.

Solução da parte 3. A diagonal $\overline{AD'}$ mede

$$4 + 2 \cdot 4 \cos \frac{\pi}{3} = 8 \text{ cm}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADD' , com ângulo reto em D , deduz-se que o comprimento da diagonal espacial $\overline{AD'}$ é dado por

$$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm},$$

em que usamos o fato de o comprimento de DD' é a altura $h = 4$ cm do prisma.

Por outro lado, o segmento $\overline{AC}$ é uma diagonal de uma das bases hexagonais, cuja medida é dada por

$$2 \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}a \text{ cm},$$

visto que os ângulos internos do triângulo ABC medem $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$ radianos; em particular, o ângulo entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ mede $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Portanto, aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ACC' , com ângulo reto em C e cujo cateto $\overline{CC'}$ tem como medida a altura h do prisma, temos

$$\overline{AC'} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2} = \sqrt{3a^2 + h^2} = \sqrt{4 \cdot 4^2} = 8 \text{ cm}.$$

Solução da parte 4. Para demonstrar que o triângulo $AC'D'$ é retângulo, é suficiente verificar que as medidas de seus lados satisfazem o Teorema de Pitágoras (professor, verifique essa equivalência). A esse respeito, temos, usando os cálculos realizados anteriormente,

$$AC'^2 + C'D'^2 = 64 + 16 = 80 = AD'^2 =$$

Concluimos, assim, que o triângulo $AC'D'$ é retângulo com ângulo reto em C' .

Solução da parte 5. Os triângulos ADD' e $AC'D'$ são, realmente, semelhantes com razão de semelhança igual 1, ou seja, são *congruentes*. De fato, são retângulos nos vértices D e C' e os catetos DD' e $C'D'$ medem, ambos, 8 cm. Além disso, ambos os catetos AC' e AD também medem 8 cm. Concluimos que os dois triângulos retângulos ADD' e $AC'D'$ são isósceles e congruentes um ao outro.

Solução da parte 6. Sabemos que o triângulo $AC'D'$ é retângulo em C' . Assim, fixando $C'D'$ como base e AC' como altura relativa a essa base, deduzimos que sua área é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot AC' \cdot C'D' = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$$

centímetros quadrados.

Solução da parte 7. Seja h a altura do ponto C' em relação à hipotenusa AD' . Podemos determinar a área de $AC'D'$ também por

$$\frac{1}{2} \cdot AD' \cdot h$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot h = 16.$$

Logo,

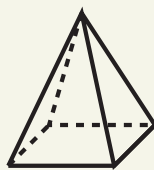
$$h = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

centímetros.

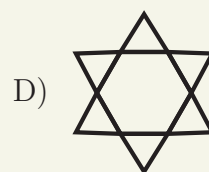
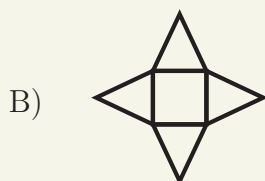
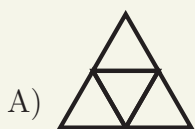
Obs

No próximo trecho do percurso, ampliamos nosso conjunto de formas geométricas no espaço, considerando, agora, **pirâmides**, isto é, figuras determinadas por segmentos de reta com uma das extremidades em pontos de um polígono convexo e a outra extremidade, o vértice da pirâmide, fora do plano contendo o polígono.

Questão 135 — PAEBES, Item M051660E4. Observe a pirâmide desenhada abaixo.

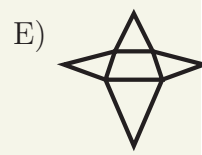
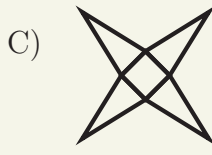
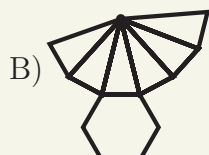
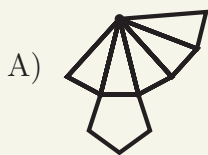


Qual é a planificação dessa pirâmide?



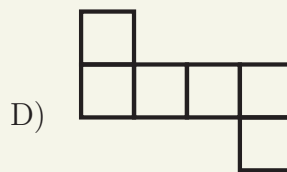
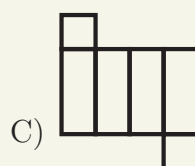
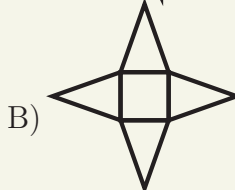
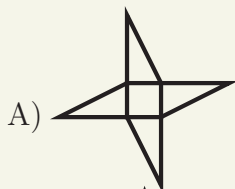
Solução. A pirâmide apresentada na figura tem uma base quadrangular e quatro faces laterais triangulares, todas tendo em comum um único vértice, o chamado vértice da pirâmide. Portanto, trata-se de uma *pirâmide de base quadrangular* (um tipo de **pentaedro**). A alternativa correta é B). ■

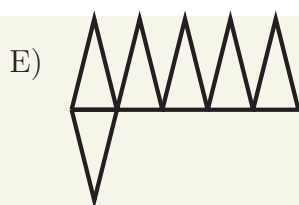
Questão 136 — SAEPI, Item M120003B1. O desenho que melhor representa uma das planificações de uma pirâmide reta de base quadrada é



Solução. Uma planificação correta dessa pirâmide deve conter a) um quadrado (a base); b) quatro triângulos isósceles com um lado em comum com a base, representando as faces laterais. Portanto, a alternativa correta é C) ■

Questão 137 — SAEPI, Item M120279B1, adaptado. O desenho que melhor representa a planificação de uma pirâmide reta de base quadrada é



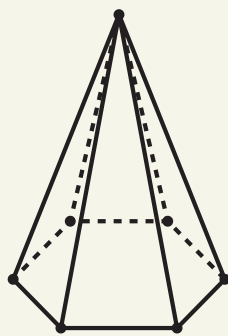


 **Solução.** Uma pirâmide reta de base quadrada possui a) uma base em forma de quadrado; b) quatro faces laterais triangulares isósceles congruentes, com um lado em comum a base. Sabendo disso, analisemos planificações nas alternativas:

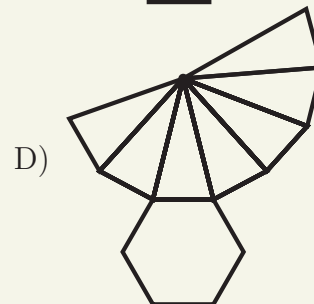
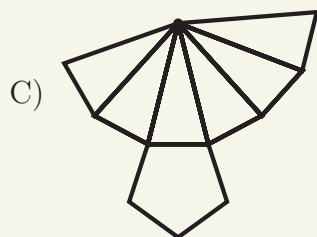
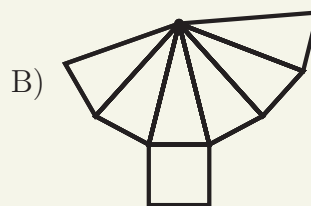
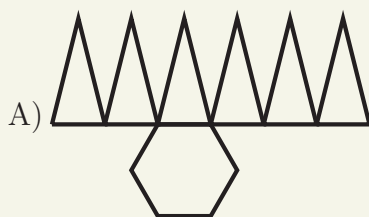
- A) apresenta quatro triângulos – retângulos – ao redor da base;
- B) Apresenta exatamente quatro triângulos ao redor de um quadrado — alternativa *correta*;
- C) representa a planificação de um paralelepípedo, pois contém apenas retângulos;
- D) também representa uma planificação de um paralelepípedo (um cubo, de fato);
- E) apresenta sete triângulos justapostos, um dos quais com lado comum com uma base triangular, em vez de quadrada.

Portanto, a alternativa correta é letra B).

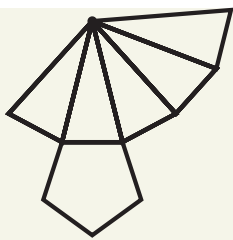
Questão 138 — PAEBES, Item M120310A9. Luiz, na aula de geometria, utilizou um molde para construir a pirâmide representada abaixo.



O molde usado por Luiz nessa construção foi



E)

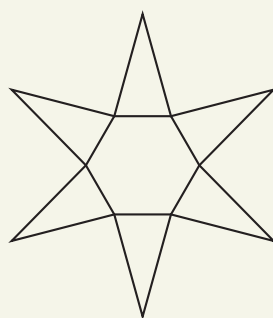


Solução. A pirâmide representada possui uma base hexagonal (6 lados) e 6 faces laterais triangulares, uma para cada lado da base. Portanto, o molde usado para construí-la deve conter a) um hexágono regular (a base); b) seis triângulos congruentes (as faces laterais). Esses triângulos devem estar dispostos de tal forma que uma dobradura, sem sobreposição ou lacuna, permita obter o sólido original. Sendo assim, analisemos as alternativas:

- A) possui 6 triângulos, horizontalmente distribuídos na reta suporte de um dos lados, a dobradura, sem sobreposição ou lacuna, permite obter o sólido original, o que torna a alternativa *correta*;
- B) possui 6 triângulos ligados a uma base quadrada;
- C) apresenta 6 triângulos congruentes conectados aos lados do pentágono;
- D) possui 7 triângulos — quantidade excedente;
- E) possui 5 triângulos — quantidade insuficiente — e um pentágono como base.

Logo, a planificação correta da pirâmide com base hexagonal é dada pela letra A). ■

Questão 139 A figura a seguir representa a planificação de certo sólido geométrico.



A figura geométrica espacial com essa planificação é um(a)

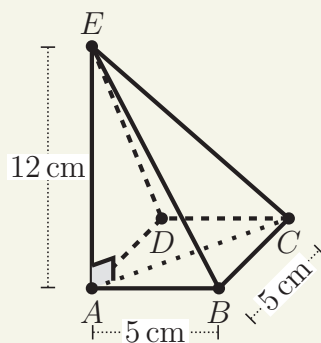
- A) hexaedro.
- B) prisma hexagonal.
- C) prisma triangular.
- D) pirâmide de base triangular.
- E) pirâmide de base hexagonal.

Solução. A figura apresenta uma planificação formada por um hexágono regular no centro e seis triângulos isósceles acoplados a cada lado do hexágono.

Essa configuração representa a planificação de uma pirâmide cuja base é *hexagonal* e cujas faces laterais são triangulares. Ao dobrar esse molde, os triângulos têm em comum um vértice, formando uma pirâmide.

Portanto, a figura geométrica espacial representada é uma pirâmide de base hexagonal. A alternativa correta é E).

Questão 140 A figura a seguir representa uma pirâmide de base quadrada cujo lado mede 5 cm. A aresta $\overline{AE}$ é perpendicular ao plano da base e mede 12 cm.



Determine:

- 1) o volume da pirâmide.
- 2) o comprimento das arestas $\overline{EB}$ e $\overline{EC}$.
- 3) a área dos triângulos ABE e ACE .

Solução. Solução da parte 1. Calculemos o volume da pirâmide. Para tanto, observe que sua base é um quadrado de lado 5, cuja área, portanto, é igual a $5^2 = 25 \text{ cm}^2$. A altura da pirâmide (a distância da base ao vértice) é dada pela medida de $\overline{AE}$, a saber, 12 cm. Sendo assim, o volume da pirâmide é dado por $1/3$ do produto da área pela altura, isto é, por

$$\frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 6 = 100 \text{ cm}^3$$

Solução da parte 2. Determinemos o comprimento das arestas $\overline{EB}$ e $\overline{EC}$. Uma vez que o segmento $\overline{AE}$ é perpendicular ao plano contendo a base da pirâmide, o triângulo BAE é retângulo em A . Assim, dado que $\overline{AB}$ mede 5 cm, o Teorema de Pitágoras implica que

$$\overline{EB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169.$$

Portanto, concluímos que $\overline{EB} = 13 \text{ cm}$. Para determinarmos a medida de $\overline{EC}$, observamos, inicialmente, que $\overline{AC}$ é uma diagonal da base. Logo, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo ABC assegura que

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Dado que o triângulo CAE é também retângulo em A , temos, por fim,

$$\overline{EC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 = 12^2 + (5\sqrt{2})^2 = 144 + 50 = 194,$$

o que implica $\overline{EC} = \sqrt{194} \text{ cm}$.

Solução da parte 3. Calculemos, finalmente, a **área dos triângulos ABE e ACE** . A área do triângulo ABE é dada por

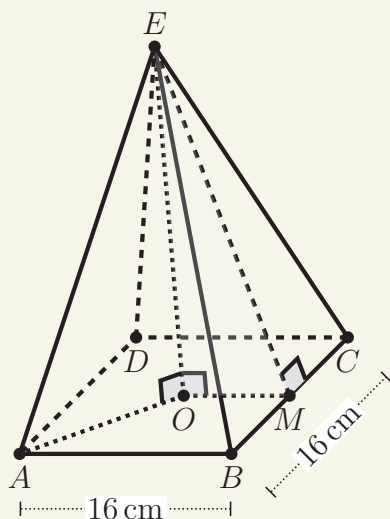
$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ cm}^2,$$

ao passo que a área do triângulo ACE é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ cm}^2$$



Exercício 2.15 A figura a seguir representa uma pirâmide de base quadrada, cujo lado mede 16 cm. Sabe-se que M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e sua distância ao vértice E mede 17 cm. O vértice E da pirâmide projeta-se ortogonalmente sobre o centro da base $ABCD$, ponto O^a .



Determine:

- I. a altura da pirâmide.
- II. o volume da pirâmide.
- III. a área total da superfície dessa pirâmide.
- IV. o comprimento da aresta $\overline{AE}$.

^aUma pirâmide é chamada de *regular* quando satisfaz as seguintes condições:

- sua base é um polígono regular (ou seja, com todos os lados e ângulos congruentes);
- a projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base coincide com o centro do polígono da base;
- todas as arestas laterais têm o mesmo comprimento.

Como consequência das propriedades acima, as faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles e congruentes entre si. Importante ressaltar que uma *pirâmide regular* não é um *poliedro regular*, já que, dentre outras razões, suas faces não são todas polígonos regulares congruentes.

Solução. Solução da parte I. O segmento $\overline{EM}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo EOM e mede 17 cm. Uma vez que $\overline{AB} = \overline{BC} = 16$ cm e M é o ponto médio de $\overline{BC}$, deduzimos que

$$\overline{BM} = \overline{MC} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm.}$$

Como O é o centro da base quadrada $ABCD$ (ou seja, é a intersecção das diagonais), a diagonal dessa base mede

$$\sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{512} = 16\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Assim,

- a distância de O ao ponto médio M é igual a 8 cm.
- a distância de O ao ponto médio A da diagonal da face é igual a

$$\overline{OA} = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo EOM , concluímos que a altura da pirâmide, dada pela medida de $\overline{EO}$, é igual a

$$\overline{EO} = \sqrt{EM^2 - OM^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm.}$$

Solução da parte II. Dado que a área da base da pirâmide é igual a $16^2 = 256 \text{ cm}^2$, concluímos que o volume da pirâmide é dado por

$$\frac{1}{3} \cdot 256 \cdot 15 = \frac{3840}{3} = \boxed{1280 \text{ cm}^3}$$

Solução da parte III. A pirâmide tem 4 faces laterais triangulares congruentes e uma base quadrada. Cada face lateral é um triângulo isósceles com base 16 cm e altura 17 cm (distância do vértice E ao ponto médio da base da face triangular). Sendo assim, a área de uma dessas faces triangulares é

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 17 = 136 \text{ cm}^2,$$

de modo que a área lateral total é igual a $4 \cdot 136 = 544 \text{ cm}^2$. Concluímos que a área total da pirâmide é igual a

$$256 + 544 = \boxed{800 \text{ cm}^2}$$

Solução da parte IV. Relembremos que $\overline{AO} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$ e $\overline{EO} = 15 \text{ cm}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AOE , com ângulo reto em O , concluímos que

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{EO}^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 15^2} = \sqrt{128 + 225} = \sqrt{353} \text{ cm.}$$

Portanto,

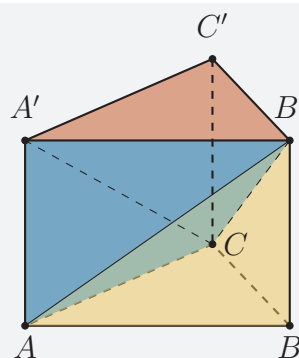
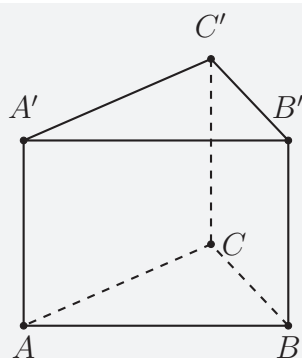
$$\boxed{AE = \sqrt{353} \text{ cm}}$$

■

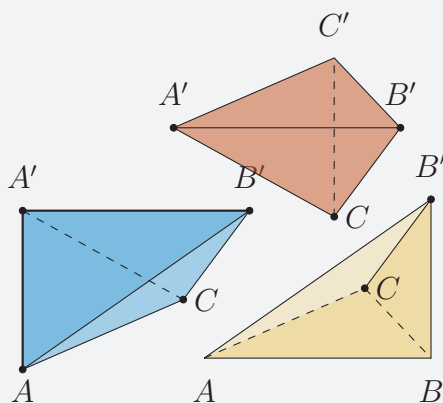
Considere uma pirâmide com base dada por um polígono convexo cuja área é b . A altura h dessa pirâmide é, por definição, a distância de seu vértice ao plano contendo a base. O **volume** dessa pirâmide é, então, dado por

$$\frac{1}{3}bh,$$

ou seja, $1/3$ do volume de um prisma com mesma base e mesma altura. Podemos adquirir alguma intuição sobre esse fato observando a seguinte figura, em que um prisma com base triangular é particionado em três pirâmides de mesmo volume.



A seguir, representamos o prisma $ABCC'A'B'$ decomposto em 3 pirâmides de mesmo volume.



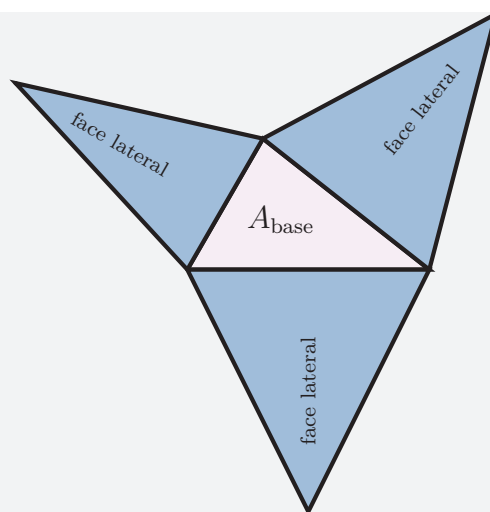
Como consequência do Princípio de Cavalieri, podemos demonstrar que quaisquer duas pirâmides que tenham a mesma área de base e a mesma altura possuem o mesmo volume. Desse modo, é imediato observar que, embora as três pirâmides $AA'B'C$, $A'B'C'C$ e $ABB'C$ não sejam necessariamente congruentes, elas são equivalentes, isto é, possuem o mesmo volume.

De fato, note que, para as pirâmides $A'B'C'C$ (vermelha) e $ABB'C$ (amarela), podemos estabelecer, respectivamente, os triângulos $A'B'C'$ e ABC como suas bases. Esses triângulos são congruentes devido à definição de prisma (são bases do prisma $ABCC'B'A'$). Ademais, como essas faces estão em planos paralelos, a distância entre elas — isto é, a altura das pirâmides — é a mesma.

Agora, comparemos as pirâmides $AA'B'C$ (azul) e $ABB'C$ (amarela). Observe que ambas possuem o vértice C em comum. As faces $A'B'A$ e $AB'B$, contidas no mesmo plano definido por $A'B'BA$, são congruentes. Tomando tais faces como bases das respectivas pirâmides, a altura dessas pirâmides, em relação a essas bases, é a distância do ponto C ao plano definido por $A'B'BA$. Logo, as pirâmides $AA'B'C$ (azul) e $ABB'C$ (amarela) também possuem volumes iguais.

Portanto, considerando que as três pirâmides possuem o mesmo volume, é imediato que o volume de cada uma seja $\frac{1}{3}$ do volume do prisma $ABCC'B'A'$.

Por sua vez, a **área superficial** total da pirâmide é igual à soma da área da base poligonal e das áreas das faces triangulares, conforme ilustrado pelo seguinte exemplo, em que apresentamos uma pirâmide de base triangular planificada.

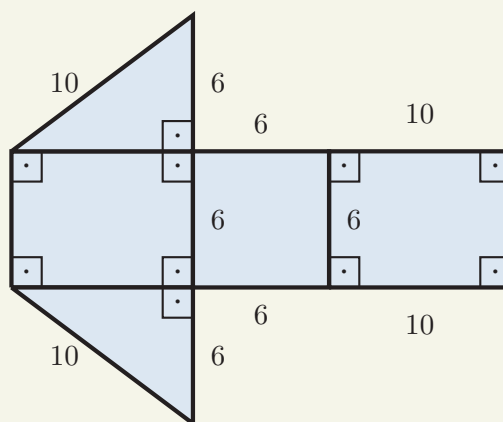


Portanto, a área A_{total} da superfície de uma pirâmide é igual à soma das áreas de suas faces: a base — um polígono convexo — e a as faces triangulares que compõe a superfície lateral da pirâmide^a, ou seja,

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}.$$

^aLembre-se de que a quantidade de faces laterais (triângulos) de uma pirâmide é sempre igual à quantidade de lados que o polígono da base possui.

Questão 141 — UFRGS 2014, adaptado. Na figura abaixo, encontra-se representada a planificação de um sólido de base quadrada cujas medidas estão indicadas.



O volume desse sólido, em unidades de medida de volume, é

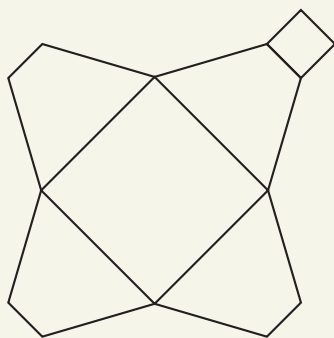
- A) 144. B) 180. C) 216. D) 288. E) 360.

 **Solução.** A figura geométrica espacial cuja planificação é representada no suporte da questão é um prisma triangular (com bases dados pelos triângulos retângulos com lados medindo 6, 8 e 10 unidades de medida) e altura, relativa a essa base, de 6 unidades de medida. Esse prisma é obtido pela secção de um paralelepípedo retângulo com lados medindo 6, 8 e 6 unidades de medida em duas partes congruentes. Portanto, o volume do prisma é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 6 = 144$$

unidades de volume, o que corresponde à alternativa A).

Questão 142 Observe a planificação de determinada figura geométrica espacial.

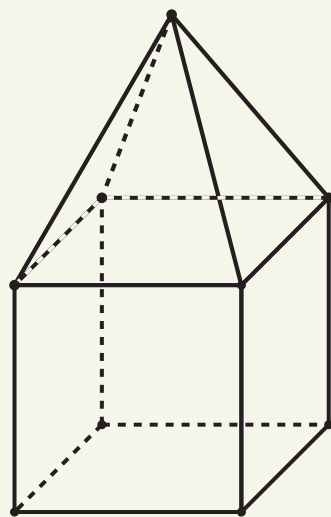


A figura geométrica espacial com essa planificação é um(a)

- A) hexaedro.
- B) prisma hexagonal.
- C) prisma triangular.
- D) pirâmide de base quadrangular.
- E) pirâmide de base hexagonal.

 **Solução.** Nota-se que o sólido possui 6 faces em forma de quadriláteros. Isso é suficiente para classificá-lo como um hexaedro (nome genérico dado a qualquer sólido com 6 faces). Nesse caso, em particular, a figura planificada corresponde a um *tronco* de pirâmide de base quadrangular. ■

Questão 143 — SPAECE, Item M110011A9. A figura abaixo foi formada pela junção de um paralelepípedo e uma pirâmide de base quadrangular.



Quantas arestas tem essa figura?

- A) 20.
- B) 16.
- C) 12.
- D) 9.
- E) 8.

 **Solução.** A figura apresenta 16 arestas, sendo 12 delas pertencentes ao paralelepípedo e as 4 adicionais, provenientes da pirâmide. A alternativa correta é B). ■

Obs

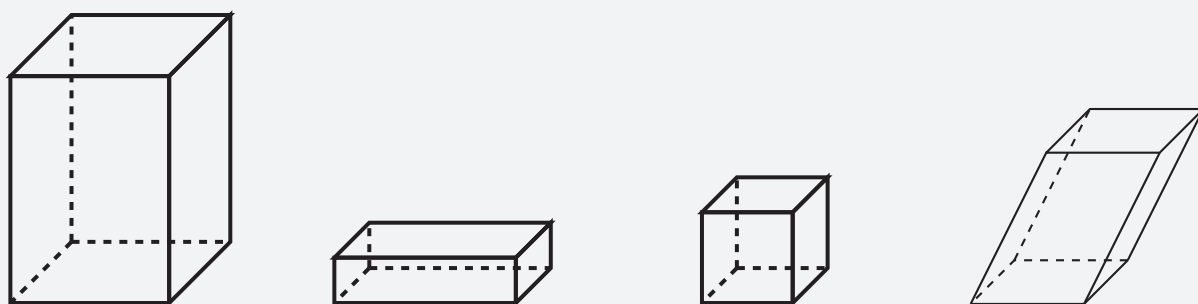
Na sequência, sugerimos algumas atividades que envolvem a chamada **relação de Euler** entre os números de vértices, arestas e faces de poliedros convexos.

Um dos mais importantes e belos teoremas vistos no Ensino Médio é a validade da **relação de Euler** entre o número V de vértices, o número A de arestas e o número F de faces de um poliedro *convexo* (mais geralmente, que possa ser “continuamente deformável” em uma esfera) no espaço, segundo a qual sempre temos

$$V - A + F = 2,$$

independentemente das medidas de lados e ângulos desse poliedro. Portanto, a relação de Euler é uma propriedade *topológica* dos poliedros convexos e não depende das grandezas geométricas desses objetos, mas apenas da *combinatória* de vértices, arestas e faces em sua construção.

A seguinte figura ilustra exemplos dessa relação e mostra como ela é preservada por deformações geométricas dos poliedros, uma vez que sua convexidade seja mantida por essas transformações.



Questão 144 — PAEBES, Item M120295ES. Uma indústria de confecção de caixas recebeu uma encomenda para confeccionar caixinhas com a forma de um poliedro convexo que tem 8 faces e 12 vértices.

O número de arestas do poliedro que representa cada caixinha é

- A) 12. B) 16. C) 18. D) 20. E) 22.



Solução. Podemos aplicar a **Relação de Euler** para poliedros convexos, dada por

$$V - A + F = 2,$$

em que

- V é o número de vértices,
- A é o número de arestas,
- F é o número de faces.

Dado que, para o poliedro descrito no enunciado, temos $V = 12$ e $F = 8$, concluímos que

$$A = V + F - 2 = 12 + 8 - 2 = 18,$$

resposta que corresponde à letra C).

Questão 145 — PAEBES, Item M110077H6. A molécula de metano é composta por um átomo de carbono e átomos de hidrogênio. O número de ligações simples entre o átomo de carbono e os átomos de hidrogênio define uma geometria molecular na forma de um poliedro convexo formado por 4 faces triangulares e cujos vértices são compostos pelos átomos de hidrogênio. Qual é o número de átomos de hidrogênio existentes na molécula de metano?

- A) 12. B) 10. C) 8. D) 4. E) 2.

 **Solução.** A geometria descrita no enunciado é a de um **tetraedro**, o qual possui:

- 4 faces triangulares,
- 4 vértices,
- 6 arestas.

Como os vértices representam os *átomos de hidrogênio* e o centro do tetraedro representa o átomo de carbono, concluímos que há 4 átomos de Hidrogênio. Portanto, a resposta correta é D).

Questão 146 — UNIFAP 2009. Um poliedro tem 7 faces, 7 vértices e 12 arestas. Desse modo, podemos inferir que esse poliedro pode ser:

- A) um prisma de base heptagonal.
B) um prisma de base hexagonal.
C) um prisma de base pentagonal.
D) uma pirâmide de base hexagonal.
E) uma pirâmide de base heptagonal.

 **Solução.** No caso do poliedro descrito no enunciado, temos

$$V - A + F = 7 - 12 + 7 = 2,$$

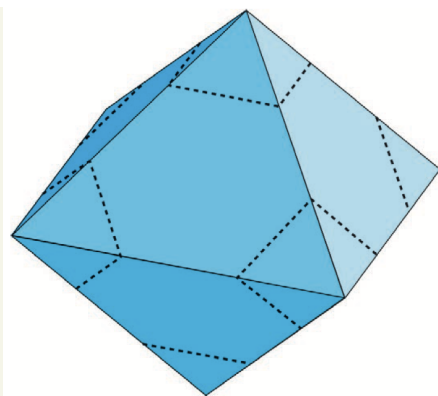
ou seja, a relação de Euler é satisfeita.

A descrição é consistente com a de uma pirâmide de base hexagonal, a qual possui

- 1 face hexagonal e 6 faces triangulares;
- 6 vértices na face hexagonal e um vértice que não pertence ao plano dessa face, o vértice da pirâmide;
- 6 arestas na face hexagonal e 6 arestas ligando os vértices dessa face ao vértice da pirâmide.

Sugerimos que o professor estimule os estudantes a descrever as configurações geométricas em cada uma das alternativas, exibindo modelos das figuras tridimensionais (em perspectiva, por exemplo) e de planificações suas. Em cada caso, convém contar os números de vértices, arestas e faces e verificar a validade da relação de Euler.

Questão 147 — ENEM 2024, PPL, Caderno Amarelo, questão 164. O processo de truncamento de um octaedro regular consiste em retirar, a partir de cada vértice, uma pirâmide obtida pelo seccionamento desse poliedro por um plano, conforme a figura.



Disponível em: www.matematicasvisuales.com. Acesso em: 21 out. 2019 (adaptado).

Não há interseção entre duas dessas secções.

Qual é a quantidade de vértices do octaedro truncado?

- A) 6. B) 8. C) 14. D) 24. E) 30.

 **Solução.** O octaedro possui 6 vértices. Ao realizar o truncamento indicado, cada vértice dá origem a 4 novos vértices, pois o corte é feito de forma a eliminar o vértice original e substituí-lo por uma face quadrangular. Note que, como cada vértice do octaedro é compartilhado por 4 arestas, ao cortá-lo, surgem 4 novos vértices na estrutura. Em resumo, temos:

$$\text{total de novos vértices} = 6 \cdot 4 = 24.$$

O resultado desse tipo de truncamento de um octaedro regular é conhecido como o **octaedro truncado**, um sólido *arquimediano* que possui:

- 8 faces regulares (6 quadrados e 8 hexágonos),
- 24 vértices,
- 36 arestas.

Portanto, concluímos que, após o truncamento

o poliedro resultante possui 24 vértices,

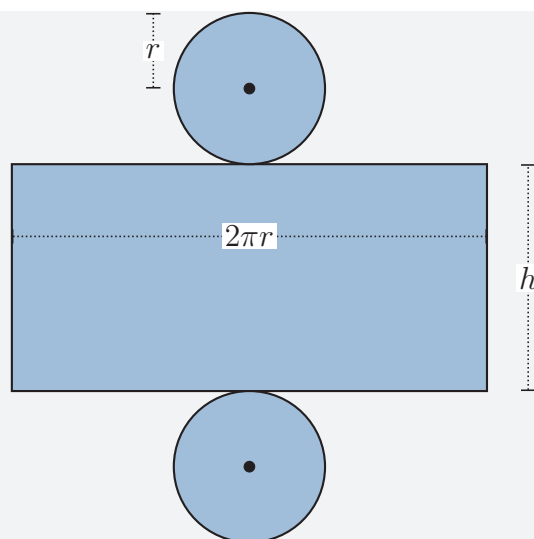
resposta que corresponde à letra D).



A partir deste ponto, incluímos os chamados “*corpos redondos*” em nosso estudo de formas geométricas no espaço euclidiano. Esses corpos têm algumas de suas superfícies curvas. Exemplos frequentemente estudados desses corpos são os **cilindros**, **cones** e **esferas**.

A área superficial total de um cilindro circular reto de raio r e altura h é dada pela soma das áreas das bases circulares e da área de sua superfície lateral (cuja área equivale a de um retângulo com medidas $2\pi r$ e h), ou seja,

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

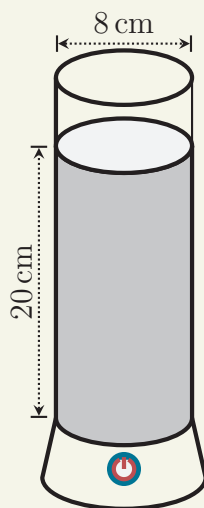


Por outro lado, o **volume** desse cilindro é dado pelo produto da área da base circular pela altura, isto é, por

$$\pi r^2 h.$$

Essa é também a expressão do volume de um cilindro com mesma base circular, mesma altura, mas oblíquo em relação ao plano da base. Uma vez mais, esse fato tem por fundamento o Princípio de Cavalieri.

Questão 148 — PAEBES 2023, Item M121649H6. Leonor está produzindo uma luminária cuja fonte luminosa é localizada abaixo de um compartimento cilíndrico que contém um líquido colorido iluminado por essa fonte. Observe, na figura abaixo, uma representação dessa luminária com esse compartimento destacado, em cinza, e a indicação das medidas internas do seu diâmetro e de sua altura.



Considere: $\pi \approx 3$.

Quantos centímetros cúbicos de líquido colorido cabem, ao todo, no compartimento dessa luminária?

- A) 68 cm^3 . B) 240 cm^3 . C) 480 cm^3 . D) 960 cm^3 . E) 3840 cm^3 .

 **Solução.** A capacidade desse recipiente na forma de cilindro circular reto é dada por

$$\pi \cdot 4^2 \cdot 20 \approx 3 \cdot 16 \cdot 20 = 960 \text{ cm}^3,$$

o que corresponde à alternativa D).

Questão 149 A figura I mostra um paralelepípedo reto-retângulo cuja base tem lados medindo 5 cm e 6 cm, parcialmente preenchido com água até a altura de 5,5 cm. Em seguida, um cilindro circular reto com 5 cm de altura é totalmente mergulhado nesse recipiente. Após a inserção do cilindro, o nível da água se eleva para 7,5 cm, como mostra a figura II.

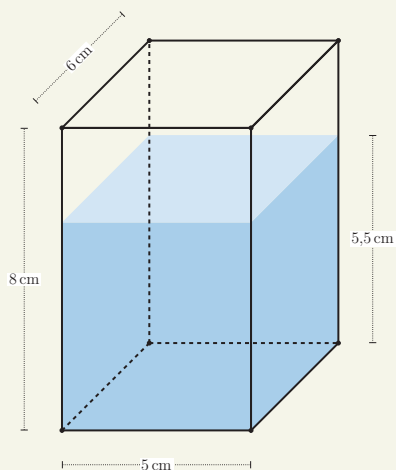


Figura I

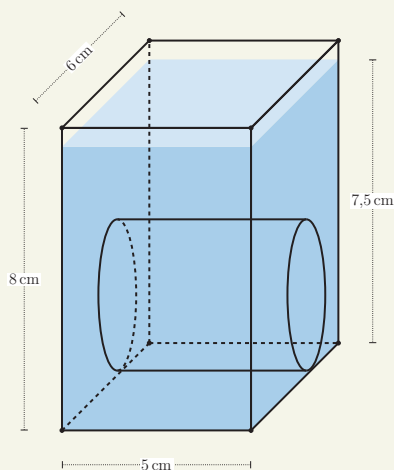


Figura II

Determine:

1. o volume do cilindro.

- A) 10 cm^3 . B) 30 cm^3 . C) 40 cm^3 . D) 60 cm^3 . E) 80 cm^3 .

2. a medida do raio do cilindro (adote $\pi \approx 3$).

- A) 1 cm. B) 2 cm. C) 3 cm. D) 4 cm. E) 5 cm.

 **Solução.** Solução da parte 1. O volume do cilindro é calculado, indiretamente, pela diferença

$$5 \cdot 6 \cdot 7,5 - 5 \cdot 6 \cdot 5,5 = 5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$$

centímetros cúbicos, o que corresponde à alternativa D).

Solução da parte 2. A altura do cilindro, relativa a suas bases circulares, é igual 5 centímetros. Logo, a área de uma de suas bases é igual a $12 = 60/5$ centímetros. Portanto, o raio r da base circular satisfaz

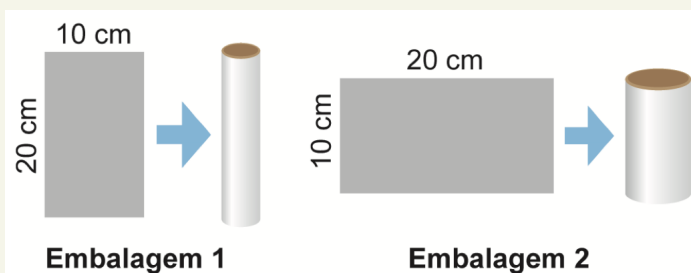
$$\pi r^2 = 12.$$

Utilizando a aproximação $\pi \approx 3$, deduzimos que $r^2 = 12/3 = 4$, ou seja, que $r = 2$ centímetros. Portanto, a alternativa correta é B).

Obs

A resposta da primeira parte do exercício *independe* da forma do objeto geométrico imerso no recipiente. De fato, esse experimento poderia ser usado, por exemplo, para determinar o volume de uma esfera (com raio suficientemente pequeno).

Questão 150 — ENEM 2024, Caderno Amarelo, questão 151. Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares. A figura ilustra, dependendo de qual das duas extensões será utilizada como altura, as duas opções para formar a possível embalagem.



Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetro cúbico, igual a

- A) 4000π B) 2000π C) $4000/\pi$ D) $1000/\pi$ E) $500/\pi$

Solução. Na embalagem 1, temos uma base circular com circunferência igual a 10 centímetros. Logo, o raio dessa base é igual a $\frac{5}{\pi}$ centímetros. Por outro lado, a altura da embalagem 1, relativa a essa base, é igual a 20 centímetros. Assim, a capacidade da embalagem cilíndrica 1 é dada por

$$\pi \frac{5^2}{\pi^2} \cdot 20 = \frac{500}{\pi} \text{ cm}^3.$$

Analogamente, deduzimos que o raio da base circular da embalagem 2 mede $\frac{10}{\pi}$ centímetros. Como essa embalagem tem altura, relativa às bases circulares, igual a 10 centímetros, sua capacidade é dada por

$$\pi \frac{10^2}{\pi^2} \cdot 10 = \frac{1000}{\pi} \text{ cm}^3$$

Portanto, a embalagem 2 tem o dobro da capacidade da embalagem 1. A resposta correta é D) ■

Questão 151 Considere um recipiente em formato de cilindro circular reto com altura de 1 dm e raio da base também medindo 1 dm (figura I). O recipiente está completamente cheio de óleo, que será totalmente transferido para um prisma reto cuja base é um quadrado com lado igual a 1 dm e cuja altura é 7 dm (figura II).

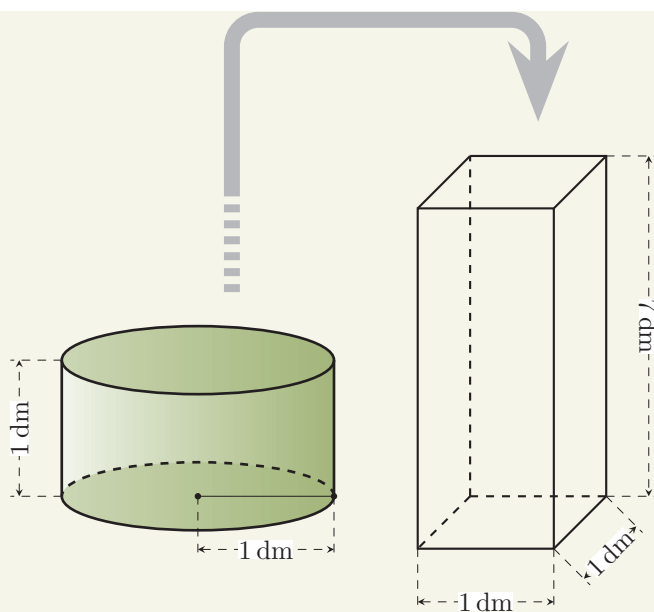


Figura I

Figura II

Após ser despejado, o líquido não preenche o prisma completamente.

Qual, dentre as alternativas a seguir, é a melhor aproximação para a altura do prisma que permanece vazia?

- A) 0,72 dm. B) 3,86 dm. C) 5,00 dm. D) 6,00 dm. E) 6,28 dm.

Solução. O volume do óleo presente no cilindro é dado por $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \text{ dm}^3$. Como a área da base do prisma é igual a 1 dm^2 , segue que a altura que o líquido atingirá, no prisma, é dada por

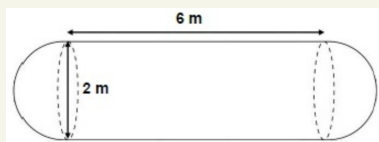
$$\frac{\pi}{1} = \pi \text{ dm}.$$

Usando a aproximação $\pi \approx 3,14$, conclui-se que a porção do prisma que permanece vazia tem altura igual, aproximadamente, a

$$7 - 3,14 = 3,86 \text{ dm}.$$

Concluimos que a alternativa correta é B).

Questão 152 — UFPR 2015, adaptado. Um tanque para armazenamento de produtos corrosivos possui, internamente, o formato de um cilindro circular reto com uma semiesfera em cada uma de suas bases, como indica a figura. Para revestir o interior do tanque, será usada uma tinta anticorrosiva. Cada lata dessa tinta é suficiente para revestir 8 m^2 de área.



Qual o número mínimo de latas de tinta que se deve comprar para revestir totalmente o interior desse tanque? (Use a aproximação $\pi \approx 3,14$)

- A) 3 latas. B) 4 latas. C) 5 latas. D) 7 latas. E) 10 latas.

 **Solução.** A área lateral do cilindro circular reto equivale à área de um retângulo cujas medidas são

- a medida da circunferência do círculo na base do cilindro;
- a altura do cilindro.

Assim, essa área lateral mede

$$2\pi \cdot 6 = 12\pi \text{ m}^2.$$

Por outro lado, conforme enunciaremos mais adiante nesta seção, a área superficial de uma esfera de raio r metros é igual a $4\pi r^2$ metros quadrados. Na situação ilustrada na figura, os dois hemisférios nas extremidades do tanque têm área superficial igual à área superficial de uma esfera de raio medindo 1 metro. Logo, a área dessas duas extremidades é igual a 4π metros quadrados.

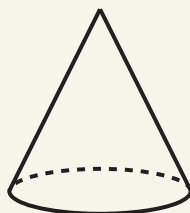
Concluimos que a área superficial total do tanque é igual a $12\pi + 4\pi$, ou seja, 16π metros quadrados.

Dividindo esse resultado por 8 e utilizando a aproximação $\pi = 3,14$, deduzimos que são necessárias, aproximadamente, $2 \cdot 3,14$ latas de tinta, uma quantidade maior que 6 e menor que 7. Portanto, a alternativa correta é D) ■

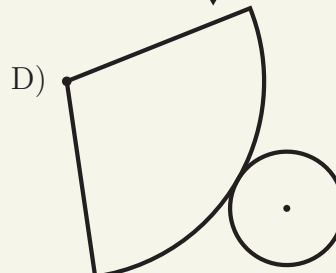
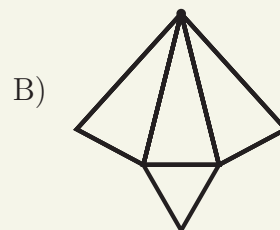
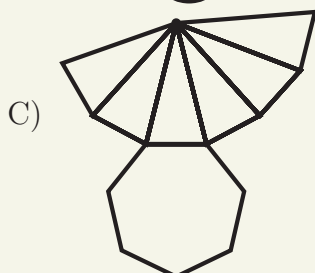
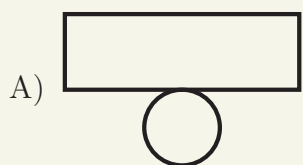
Obs

Ampliando ainda mais nossa família de exemplos de corpos redondos no espaço euclidiano, apresentamos, agora, algumas tarefas sobre a planificações, áreas e volumes de **cones**, figuras geradas por segmentos de reta com uma das extremidade em uma circunferência e outra em um ponto fora do plano contendo essa circunferência.

Questão 153 — SAEPI, Item M090023BH. Observe o sólido abaixo.

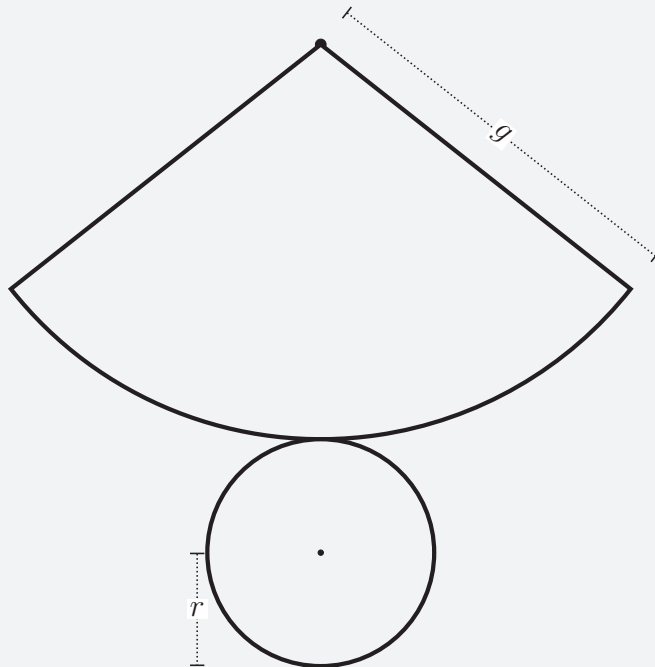


A planificação que representa esse sólido é



 **Solução.** A alternativa correta é D). Sugerimos que o professor possa propor a construção de modelos (eventualmente com o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica) para que os estudantes desenvolvam intuição a respeito dessa planificação e possam considerá-la plausível. ■

Considere a seguinte planificação de um cone circular reto de raio r e altura h



Podemos usar essa planificação para deduzir que a área superficial total desse cone é dada pela soma da área da base circular e da área de sua superfície lateral (que equivale a área de um setor circular com raio igual a g e comprimento de arco igual a $2\pi r$), ou seja,

$$\pi r^2 + \frac{1}{2}g^2\theta,$$

onde

$$\theta = \frac{2\pi r}{g}$$

é a medida, em radianos, do ângulo determinado pelo arco. Assim, a área superficial do cone é igual a

$$\pi r^2 + \frac{1}{2}g^2 \frac{2\pi r}{g} = \pi r(r + g).$$

Note que, usando razões trigonométricas, deduzimos que o comprimento da geratriz

$$\frac{r}{g} = \sin \alpha,$$

em que α é a medida, em radianos, do ângulo entre a geratriz do cone e seu eixo. Logo, a área superficial do cone pode também ser calculada como

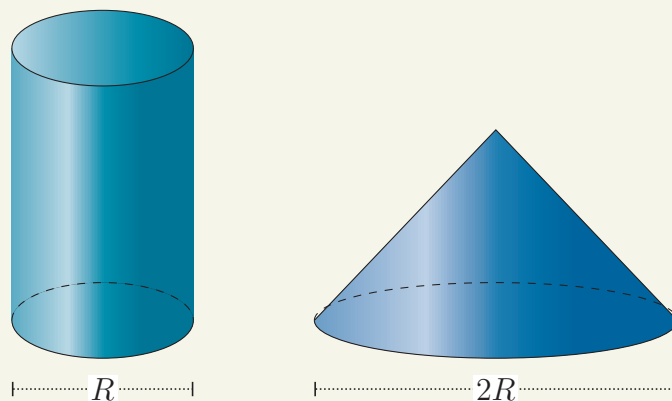
$$\pi r^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Além disso, a exemplo do que ocorre com prismas e pirâmides com bases congruentes e mesma altura, o **volume** do cone circular reto é dado por $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro circular reto correspondente, isto é, por

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Essa é também a expressão do volume de um cone com mesma base circular, mesma altura, mas oblíquo em relação ao plano da base. Uma vez mais, esse fato tem por fundamento o Princípio de Cavalieri.

Questão 154 — UNICAMP 2011. Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escoou, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a

- A) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.
- B) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.
- C) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro.
- D) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

 **Solução.** O volume V do cilindro circular reto preenchido pela areia é igual a $\pi \frac{R^2}{4} H$, onde H é altura desse cilindro, relativamente a suas bases circulares. Como a areia (e, portanto, o volume) é preservada ao ser derramada, o volume do cone circular reto formado é também igual a V . Denotando a altura desse cone por h , temos

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

uma vez que seu raio mede R . Deduzimos que

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi \frac{R^2}{4} H,$$

ou, mais abreviadamente,

$$\frac{1}{3}h = \frac{1}{4}H.$$

Portanto,

$$h = \frac{3}{4}H.$$

Logo, a alternativa correta é A).

Obs

Finalizamos nossa discussão sobre corpos redondos com o exemplo das **esferas**. Por definição, a esfera de raio $r > 0$ com centro em um ponto P_0 é o conjunto de pontos no espaço cuja distância a P_0 é menor ou igual a r , conforme ilustrado no suporte da questão 155.

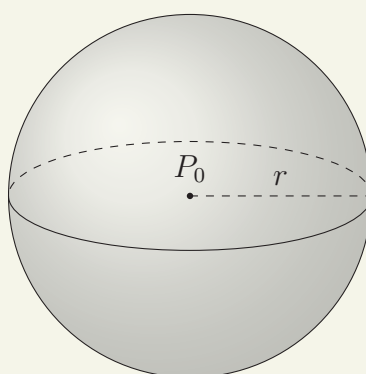
O **volume** de uma esfera de raio r (independentemente de seu centro) é dado pela expressão

$$\frac{4}{3}\pi r^3,$$

ao passo que sua área superficial é dada por

$$4\pi r^2.$$

Questão 155 A seguinte figura representa uma esfera de raio r centrada no ponto P_0 .



- 1) Se a área superficial da esfera é igual a $144\pi \text{ m}^2$, qual a medida de seu volume, em metros cúbicos?

A) 12π B) 216π C) 288π D) 864π E) 1728π

- 2) Suponha que o raio da esfera aumenta em 10%.

Dado esse aumento do raio, qual o percentual de aumento da área superficial da esfera?

A) 10% B) 11% C) 20% D) 21% E) 33%

 **Solução.** Solução da parte 1. Sabemos que a área da superfície de uma esfera é dada pela expressão quadrática $A = 4\pi r^2$. Dado que $A = 144\pi$, deduzimos que

$$r^2 = \frac{144\pi}{4\pi} = 36,$$

o que implica que $r = 6 \text{ m}$.

Com esse dado, podemos calcular o volume da esfera por meio da expressão $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Posto que $r = 6 \text{ m}$, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 288\pi \text{ m}^3.$$

Solução da parte 2. A área superficial da esfera depende do quadrado do raio segundo a seguinte expressão:

$$A = 4\pi r^2$$

Se o raio aumenta 10%, passando a $r' = 1,1r$, a área da esfera com esse raio aumentado é dada por

$$A' = 4\pi(1,1r)^2 = 4\pi \cdot 1,21r^2 = 1,21 \cdot 4\pi r^2 = 1,21A,$$

em que A é a área superficial da esfera com o raio original. Assim, o aumento da área superficial, resultante do aumento do raio, é de 21%.



2.7 – Geometria analítica e trigonometria em círculos

Nesta seção, propomos atividades envolvendo conhecimentos e habilidades relativos ao uso de coordenadas cartesianas em expressões quadráticas que permitem calcular a distância entre pontos no plano e descrever circunferências como lugares geométricos dados pelas soluções de equações quadráticas em duas variáveis.

Na sequência, usamos a geometria de circunferências no plano para definirmos razões e funções trigonométricas fundamentais como o seno e o cosseno. Partimos da definição dessas razões para ângulos internos (agudos) em triângulos retângulos e estudamos como estendê-las para ângulos quaisquer. Essa extensão, baseada em propriedades de simetria por reflexões e periodicidade, nos permite definir as funções trigonométricas seno e cosseno, cujas representações gráficas são estudadas em diversas questões.

Em resumo, os conteúdos e atividades nesta seção permitem consolidar conhecimentos e habilidades associados aos seguintes descritores, presentes na Matriz de Referência do SAEB:

- D10 - Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.
- D2 - Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
- D5 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
- D30 - Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

No seguinte plano cartesiano, representamos pontos P_0 e P cujas coordenadas são, respectivamente, (x_0, y_0) e (x, y) com $x_0 \neq x$ e $y_0 \neq y$. Note que $\overline{P_0P}$ é a **hipotenusa** do triângulo retângulo $P_0P'P$, onde $P' = (x, y_0)$. Os **catetos** desse triângulo retângulo (com ângulo reto em P') são os segmentos $\overline{P_0P'} = (x - x_0, y_0)$ e $\overline{P'P} = (x, y - y_0)$. A **relação de Pitágoras**, aplicada ao triângulo $P_0P'P$, garante que as medidas da hipotenusa e dos catetos são relacionadas pela expressão

$$\overline{P_0P}^2 = \overline{P_0P'}^2 + \overline{P'P}^2.$$

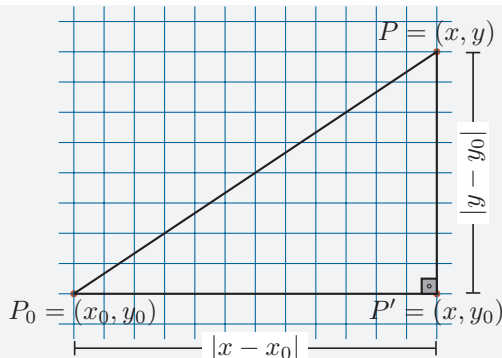
Em termos de coordenadas, temos

$$\overline{P_0P'}^2 = (x - x_0)^2$$

e

$$\overline{P'P}^2 = (y - y_0)^2$$

de acordo com a seguinte figura



Assim, deduzimos que a distância entre os pontos P_0 e P , ao quadrado, é dada por

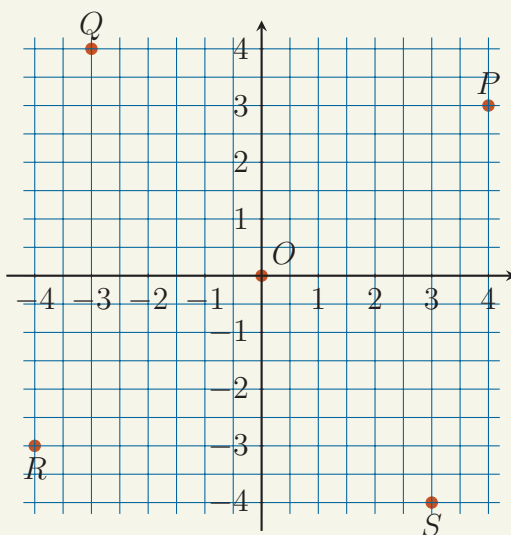
$$\overline{P_0P}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad (2.13)$$

em que $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$.

Obs

Nessas expressões, cometemos alguns abusos de notação ao identificar segmentos com suas medidas. Esse relaxamento do rigor na notação deve ser explicado aos estudantes e tem por finalidade evitar dificuldades adicionais na leitura do texto e em sua compreensão. Mais adiante, cometemos imprecisão similar ao não distinguir entre um ângulo e sua medida, em radianos ou graus.

Questão 156 Calcule as distâncias entre pontos, para cada par escolhido dentre os pontos O, P, Q, R e S , representados no seguinte plano cartesiano:



Solução. Antes de efetuar cálculos, é relevante orientar os estudantes a perceberem que os pontos P, Q, R e S equidistam da origem O . Cabe traçar uma circunferência centrada em O que os contenha e argumentar que qualquer um desses pontos é levado em outro por uma rotação em torno de O , a qual preserva a circunferência.

Essa primeira observação torna necessário calcular apenas a distância de O a P , por exemplo, dada por

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{5^2} = 5.$$

unidades de comprimento.

Outra observação que evita cálculos desnecessários é a de que os pontos P e R estão alinhados a uma reta que contém O , assim como os pontos Q e S . Isso se deve ao fato de que os segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OR}$ são simétricos em relação a O , assim como os segmentos $\overline{OQ}$ e $\overline{OS}$. Assim a distância de P a R , assim como a distância de Q a S , é igual a $2 \cdot 5 = 10$ unidades de comprimento, o que pode ser também verificado diretamente recorrendo-se à relação de Pitágoras

$$\sqrt{(4 - (-4))^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{2^2 \cdot (4^2 + 3^2)} = 2 \cdot 5.$$

Por fim, para calcular a distância de Q a R , podemos tanto utilizar a expressão

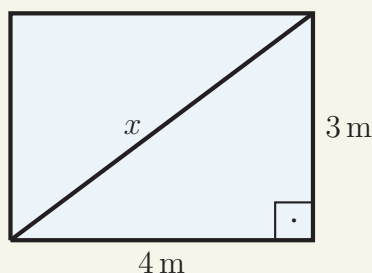
$$\sqrt{(-4 - (-3))^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{1 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

unidades de comprimento, quanto observar que os segmentos $\overline{OQ}$ e $\overline{OR}$ são perpendiculares um ao outro, o que significaria que o triângulo QOR é retângulo em O e, portanto, que

$$\overline{QR}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 = 5^2 + 5^2.$$

Em todos esses procedimentos, é fundamental que o professor observe se os estudantes efetuam corretamente os cálculos aritméticos envolvendo sinais, potências e raízes. ■

Questão 157 — PAEBES, Item M090214G5. Um serralheiro confeccionou um portão no formato retangular com medidas de comprimento e altura indicadas no desenho abaixo. Para uma melhor sustentação desse portão, uma viga de aço foi colocada na diagonal desse portão.



Qual é a medida do comprimento x da viga desse portão?

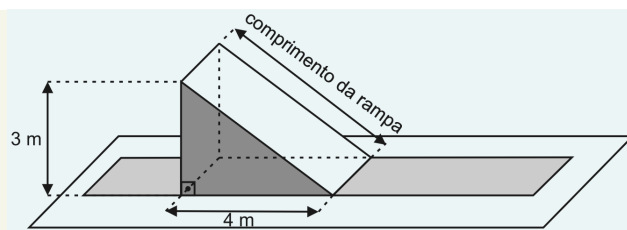
- A) $\sqrt{7}$ m. B) 5 m. C) 7 m. D) $25/2$ m.

Solução. Uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras nos permite deduzir que

$$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

metros, o que corresponde à alternativa B). ■

Questão 158 — SAEGO 2016, Item M090100H6. Observe abaixo o esquema de uma rampa inflável para um parque infantil. Essa rampa possui o formato de um prisma reto de base triangular.

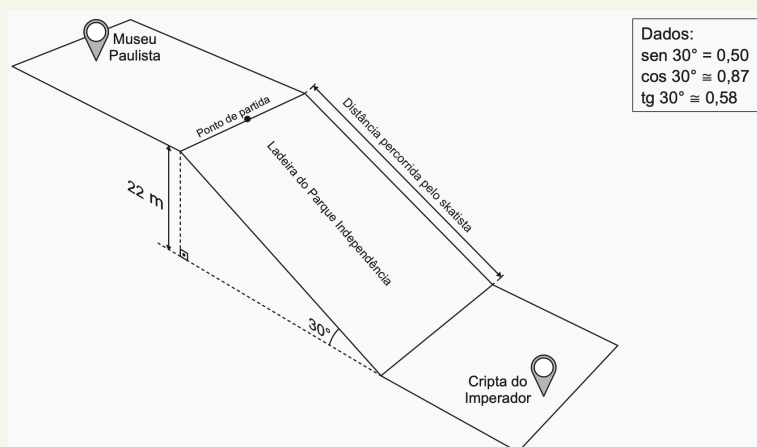


De acordo com esse desenho, qual é a medida do comprimento dessa rampa inflável?

- A) 5 m. B) 7 m. C) 14 m. D) 25 m.

 **Solução.** Trata-se da mesma aplicação do Teorema de Pitágoras que na questão 157, em um diferente contexto. A resposta correta é a alternativa A). ■

Questão 159 — SPAECE, Item M120709H6. A Ladeira do Parque da Independência em São Paulo é considerada a pista de skate predileta dos praticantes dessa modalidade esportiva. Essa pista foi construída para interligar o Museu Paulista e a Cripta do Imperador, pontos turísticos da cidade. O ponto de partida dos skatistas nessa pista está localizado a aproximadamente 22 metros de altura. A figura abaixo representa um esboço dessa ladeira e traz algumas medidas.



Quantos metros, no mínimo, um skatista percorre ao descer essa ladeira em linha reta?

- A) 11,0. B) 25,3. C) 30,8. D) 37,9. E) 44,0.

 **Solução.** Observamos que a medida desejada é a da hipotenusa de um triângulo retângulo em que um de seus catetos, oposto ao ângulo que mede 30° , mede 22 metros. Logo, a medida da hipotenusa deve ser maior que 22 metros.

Para determinarmos essa medida mais precisamente, usamos as *razões trigonométricas* que estudamos mais adiante no texto. Por exemplo, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida 30° e a medida x da hipotenusa é o seno de 30° , ou seja,

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{22}{x}$$

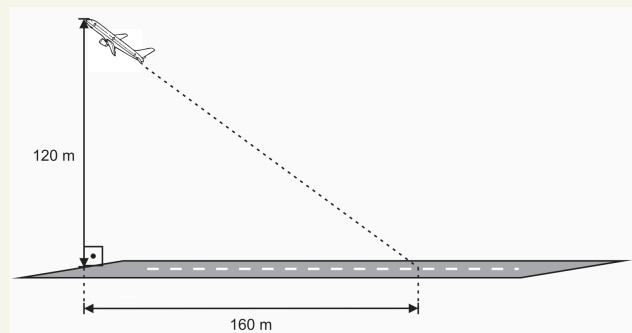
Portanto, usando os dados disponíveis no suporte da questão, concluímos que

$$x = \frac{22}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{22}{0,50} = 44 \text{ m,}$$

resposta que corresponde à letra E).

Obs Mais adiante, voltamos ao tema das razões trigonométricas seno e cosseno, calculando, inclusive, essas razões para ângulos com medidas dadas por 30° , 45° e 60° .

Questão 160 — PAEBES, Item M090289H6. No processo de decolagem, um avião saiu do chão sob um determinado ângulo e se manteve em linha reta até atingir a cabeceira da pista, conforme o desenho abaixo.



De acordo com esse desenho, quantos metros esse avião percorreu do momento em que saiu do chão até o momento em que atingiu a cabeceira da pista de decolagem?

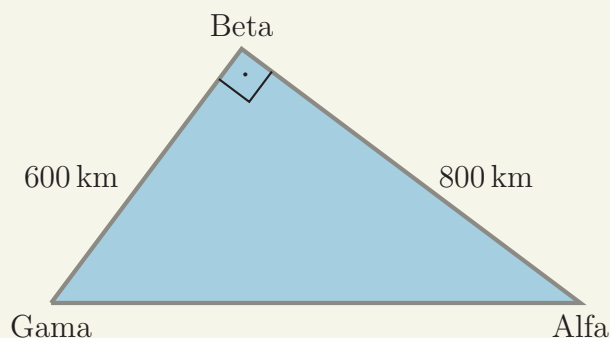
- A) 200 metros. B) 280 metros. C) 9 600 metros. D) 40 000 metros.

Solução. Constatamos, inicialmente, que a distância a ser determinada é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 160 metros e 120 metros. Assim, similarmente ao que fizemos na resolução das questões 157 e 158, aplicamos o Teorema de Pitágoras para concluir que a medida da hipotenusa é dada por

$$\sqrt{160^2 + 120^2} = \sqrt{16^2 \cdot 10^2 + 12^2 \cdot 10^2} = 10\sqrt{16^2 + 12^2} = 10 \cdot 4\sqrt{4^2 + 3^2} = 40 \cdot 5 = 200$$

metros, o que corresponde à alternativa A).

Questão 161 — PAEBES, Item M090624ES. Um avião decola da cidade Alfa, faz escala nas cidades Beta e Gama e retorna à cidade Alfa, realizando a trajetória ilustrada no desenho abaixo.



Qual é a distância mínima percorrida pelo avião da cidade Gama até a cidade Alfa?

A) 37,4 km.

B) 52,9 km.

C) 1 000 km.

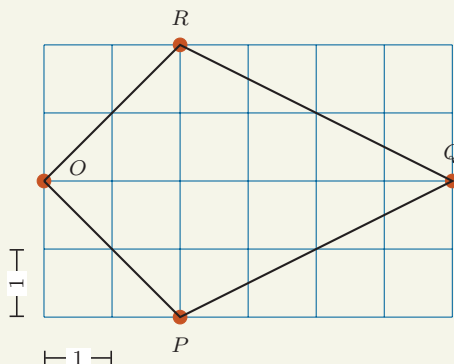
D) 1 400 km.

Solução. A distância de Gama a Alfa é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 800 metros e 600 metros. Sendo assim, essa distância é dada por

$$\sqrt{800^2 + 600^2} = \sqrt{8^2 \cdot 100^2 + 6^2 \cdot 100^2} = 100\sqrt{8^2 + 6^2} = 100 \cdot 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 200 \cdot 5 = 1\,000$$

metros, o que corresponde à alternativa C).

Questão 162 — SISEDU 2024. Na figura, representamos o quadrilátero $OPQR$ em uma malha quadriculada cujos quadrados têm lados medindo uma unidade de comprimento.



A medida do perímetro do quadrilátero $OPQR$ é igual, em unidades de comprimento, a

A) 20.

B) 12.

C) $2\sqrt{2} + \sqrt{20}$.D) $4\sqrt{2} + 2\sqrt{20}$.E) $2\sqrt{40}$.

Solução. Utilizando o Teorema de Pitágoras, deduzimos que os segmentos $\overline{OR}$ e $\overline{RQ}$ medem, respectivamente

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ unidades de comprimento}$$

e

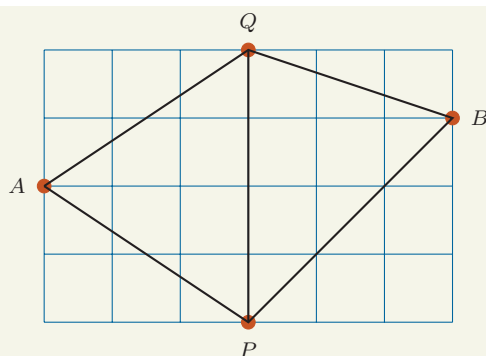
$$\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{2^2 + 1} = 2\sqrt{5} \text{ unidades de comprimento.}$$

Uma vez que $\overline{OR}$ e $\overline{OP}$ são congruentes e, da mesma forma, que $\overline{RQ}$ e $\overline{PQ}$ têm mesma medida, concluímos que o perímetro de $OPQR$ é dado por

$$2 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{5}) = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{20}$$

unidades de comprimento, o que corresponde à alternativa D).

Questão 163 — SISEDU 2024. Na figura a seguir, representamos dois triângulos APQ e BPQ .



A respeito desses triângulos, é correto afirmar que

- A) têm áreas com mesma medida e perímetros iguais.
- B) têm áreas com mesma medida, mas o perímetro de BPQ é maior do que o perímetro de APQ .
- C) têm áreas com mesma medida, mas o perímetro de BPQ é menor do que o perímetro de APQ .
- D) têm perímetros iguais, mas a medida da área de BPQ é maior do que a medida da área de APQ .
- E) têm perímetros iguais, mas a medida da área de BPQ é menor do que a medida da área de APQ .

Solução. Observe que os triângulos APQ e BPQ têm mesma área. De fato, o segmento PQ pode ser tomado como uma base comum aos dois triângulos, em relação a qual ambos teriam alturas também de mesma medida, dadas pelas distâncias dos pontos A e B , respectivamente, ao segmento PQ .

No entanto, como o triângulo APQ é isósceles (ou seja, simétrico com relação a altura relativa a base PQ), tem perímetro menor que o perímetro de BPQ . Isso finaliza a resolução da questão.

Caso o estudante queira constatar isso com cálculos explícitos, pode determinar as medidas dos lados distintos de PQ , considerando a medida dos lados dos quadrados (das quadrículas) na malha quadriculada como sendo a unidade de medida. Assim, calcularia

$$\overline{AP} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \overline{AQ}$$

ao passo que

$$\overline{BP} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \text{ e } \overline{BQ} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Note que

$$\sqrt{18} + \sqrt{10} > 2\sqrt{13}$$

se, e somente se,

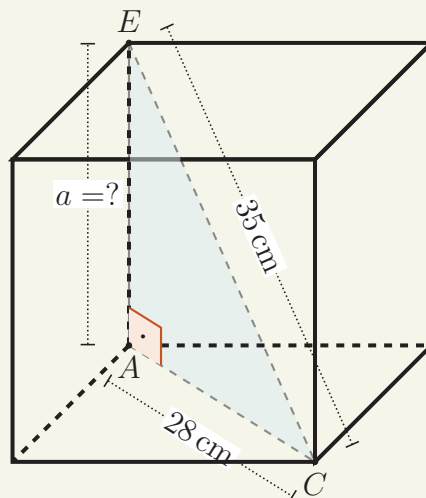
$$18 + 10 + 2\sqrt{18}\sqrt{10} > 4 \cdot 13.$$

Essa desigualdade é verdadeira, pois

$$2\sqrt{18}\sqrt{10} > 2 \cdot 4 \cdot 3 = 52 - 28 = 24.$$

Concluimos desse modo que, de fato, o perímetro de BPQ é maior que o perímetro de APQ . ■

Questão 164 — SPAECE, Item M120328ES, adaptada. O desenho abaixo é um paralelepípedo em que foram traçados uma de suas diagonais (EC medindo 35 cm e uma diagonal da face de base, AC , medindo 28 cm).



Qual é a medida da aresta AE desse sólido?

- A) 21 cm. B) 28 cm. C) 35 cm. D) 63 cm. E) 84 cm.

Solução. A figura representa um paralelepípedo em que são conhecidos dois segmentos:

- a diagonal de uma das faces retangulares, que mede 28 cm;
- a diagonal do paralelepípedo, que mede 35 cm.

A partir da figura, nota-se que o triângulo formado pela aresta a , a diagonal da base e a diagonal do sólido é retângulo. Logo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 28^2 = 35^2$$

$$a^2 + 784 = 1225$$

$$a^2 = 1225 - 784 = 441$$

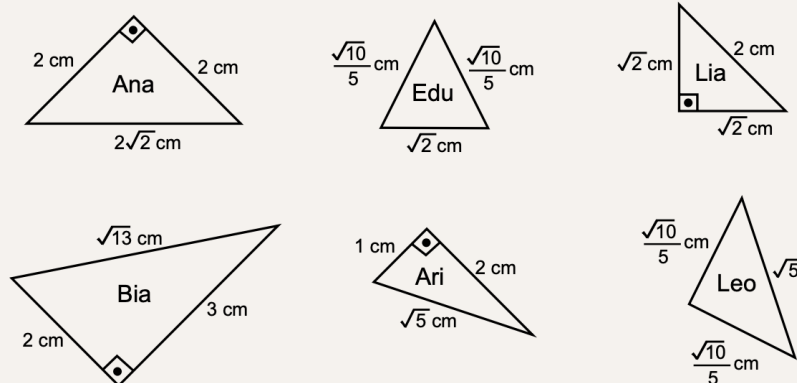
$$a = \sqrt{441} = \boxed{21 \text{ cm}}$$

Letra A).

Obs

Para mais detalhes, consulte os comentários após a resolução da questão 126.

Questão 165 — PAEBES, Item M120007D3. Os triângulos representados abaixo foram desenhados por alguns estudantes.



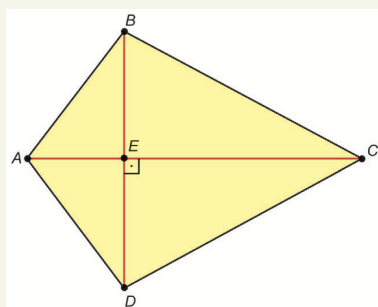
Quais desses alunos desenharam triângulos semelhantes?

- A) Ana e Ari. B) Ana e Edu. C) Ana e Lia. D) Ana e Bia. E) Edu e Leo.

Solução. Os triângulos desenhados por Ana, Ari, Bia e Lia são retângulos. Para que dois deles fossem semelhantes um ao outro, as medidas dos catetos correspondentes deveriam ser proporcionais. Isso ocorre apenas para os triângulos desenhados por Ana e Lia, uma vez que ambos são retângulos e isósceles e, portanto, as razões entre as medidas de seus catetos são, ambas, iguais a 1.

O triângulo desenhado por Edu *não* é retângulo, pois a hipotenusa tem medida necessariamente maior que as medidas de cada um dos catetos. Portanto, esse triângulo não é semelhante a nenhum dos outros, que são retângulos. Logo, a resposta correta é a alternativa C). ■

Questão 166 — ENEM 2024, Caderno Amarelo, questão 161. Uma microempresa pretende fabricar pipas para vender no próximo verão. Um modelo de pipa está representado pelo quadrilátero ABCD.



Nessa representação, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CE}$ medem, respectivamente, 20 cm, 34 cm e 30 cm. Além disso, E pertence ao segmento $\overline{AC}$ e é ponto médio do segmento $\overline{BD}$.

A medida da área, em centímetro quadrado, desse modelo de pipa é

- A) 58. B) 96. C) 108. D) 184. E) 672.

Solução. O triângulo BEC é retângulo com ângulo reto em E . Assim,

$$\begin{aligned}\overline{BE}^2 &= \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2 = 34^2 - 30^2 \\ &= 2^2 \cdot (17^2 - 15^2) = 2^2 \cdot 64 = 2^2 \cdot 8^2.\end{aligned}$$

Logo, $\overline{BE} = 16$ cm. Por simetria, concluímos que $\overline{BD} = 32$ cm. Portanto, a área do triângulo BCD é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 30 = 480$$

centímetros quadrados.

Prosseguimos, determinando a medida de $\overline{AE}$. Como o triângulo AEB é retângulo em E , temos

$$\begin{aligned}\overline{AE}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = 20^2 - 16^2 = 4^2 \cdot 5^2 - 4^2 \cdot 4^2 \\ &= 4^2 \cdot (5^2 - 4^2) = 4^2 \cdot 3^2.\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{AE} = 12$ cm. Sendo assim, por simetria, a área do triângulo BAD é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 12 = 192$$

centímetros quadrados.

Concluímos que a área total da pipa é igual a

$$480 + 192 = 672$$

centímetros quadrados.

Recomendamos ao professor que estimule seus estudantes a encontrar soluções alternativas para essa questão, baseadas em outras possíveis partições da pipa. ■

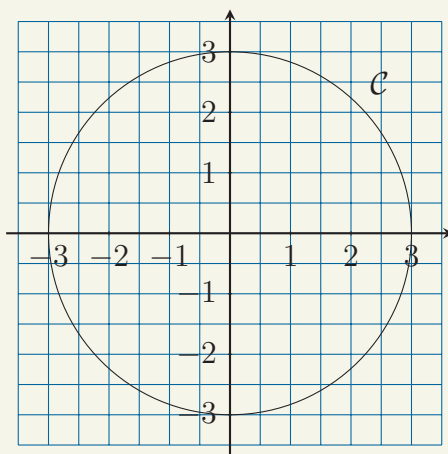
Dados um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e um número real positivo $r > 0$, a **circunferência** $\mathcal{C}$ com centro P_0 e raio r é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que a distância de P_0 a P é igual a r . Assim, P pertence à circunferência $\mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\overline{P_0P}^2 = r^2,$$

ou seja, se e somente se, suas coordenadas (x, y) satisfazem a equação quadrática

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (2.14)$$

Questão 167 A seguinte figura representa a circunferência $\mathcal{C}$ com centro na origem $O = (0, 0)$ e raio 3.



Essa circunferência é dada pela equação

- A) $x^2 + (y - 3)^2 = 0$.
- B) $(x - 3)^2 + y^2 = 3$.
- C) $x^2 + y^2 = 3$.
- D) $x^2 + y^2 = 9$.
- E) $(x + y)^2 = 9$.

 **Solução.** A circunferência é centrada na origem e tem raio 3. Logo, pode ser descrita algebricamente pela equação quadrática

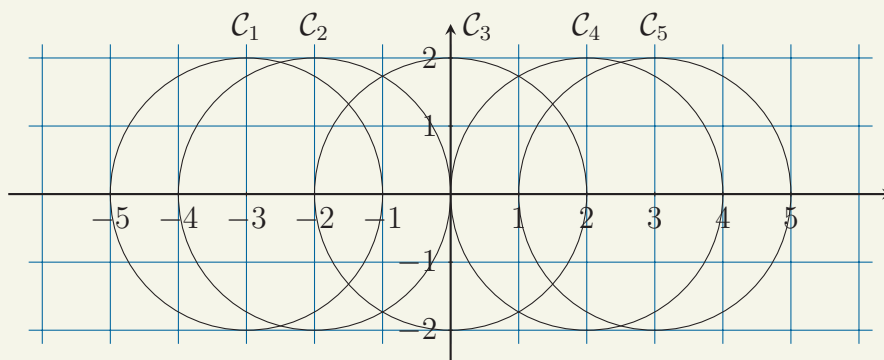
$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2,$$

ou seja, por

$$x^2 + y^2 = 9,$$

o que corresponde à alternativa D). ■

Exercício 2.16 Observe as circunferências C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 na seguinte figura.



Em qual das seguintes alternativas a equação corresponde corretamente à circunferência?

- A) $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 4$
- B) $C_2 : x^2 + (y - 2)^2 = 4$
- C) $C_3 : x^2 + y^2 = 2$
- D) $C_4 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- E) $C_5 : (x - 3)^2 + y^2 = 4$

 **Solução.** As circunferências C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 representadas na figura têm raios iguais a 2 unidades de medida e centros em pontos do eixo horizontal, respectivamente dados por

$$(-3, 0), (-2, 0), (0, 0), (2, 0) \text{ e } (3, 0).$$

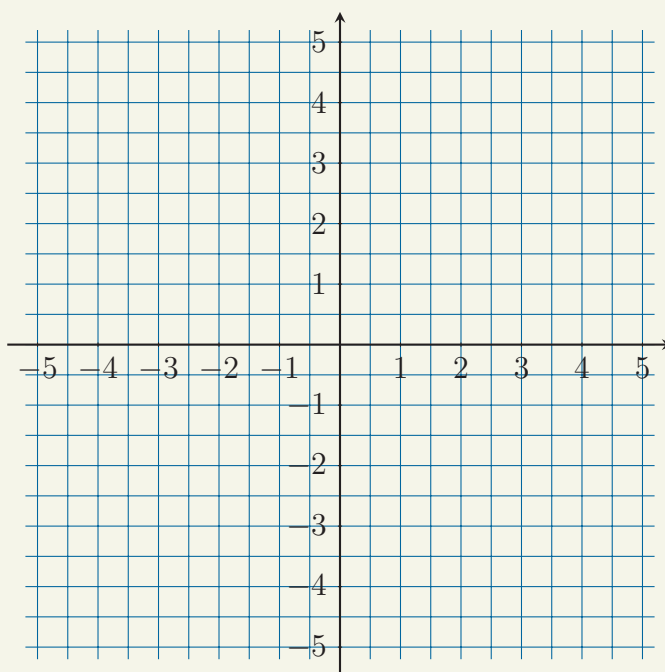
Portanto, essas circunferências são, respectivamente, descritas pelas equações quadráticas

$$(x + 3)^2 + y^2 = 4, (x + 2)^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 4, (x - 2)^2 + y^2 = 4 \text{ e } (x - 3)^2 + y^2 = 4.$$

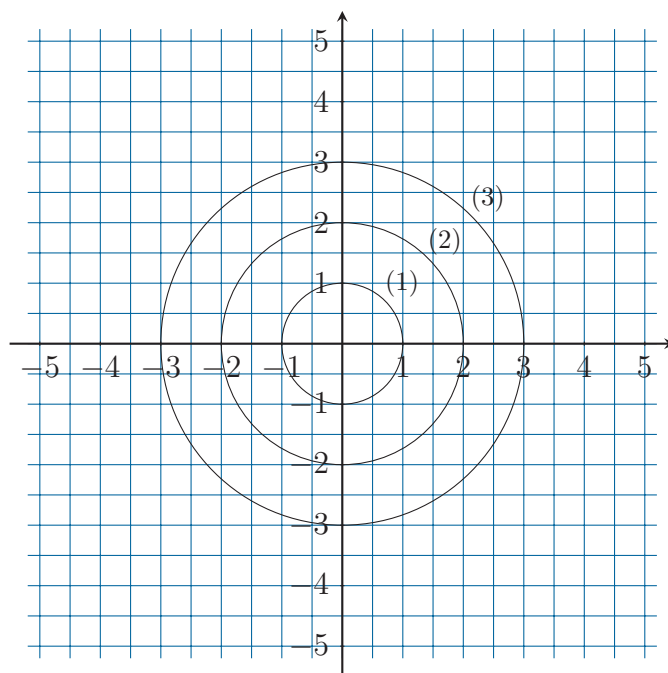
Logo, a alternativa correta é E). ■

Questão 168 Esboce, no plano cartesiano, as circunferências dadas pelas seguintes equações:

1) $x^2 + y^2 = 1$	2) $x^2 + y^2 = 4$	3) $x^2 + y^2 = 9$
4) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$	5) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$	6) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
7) $(x + 2)^2 + y^2 = 1$	8) $(x + 2)^2 + y^2 = 4$	9) $(x + 2)^2 + y^2 = 9$
10) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$	11) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$	12) $x^2 + (y - 2)^2 = 9$
13) $x^2 + (y + 2)^2 = 1$	14) $x^2 + (y + 2)^2 = 4$	15) $x^2 + (y + 2)^2 = 9$
16) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$	17) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$	18) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$
19) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$	20) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$	21) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$
22) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$	23) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$	24) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$
25) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$	26) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$	27) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$

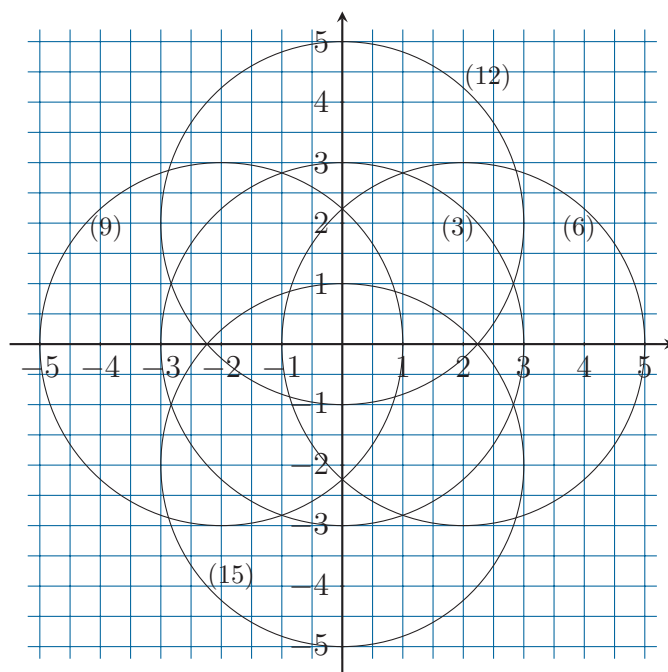


 **Solução.** As circunferências correspondentes às equações quadráticas de (1) a (3) estão representadas na seguinte figura.



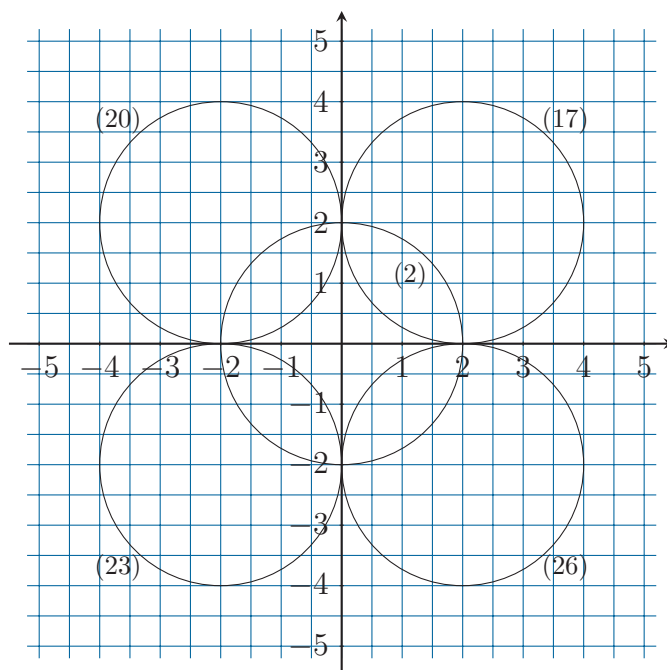
Nessa sequência de circunferências, temos um mesmo centro, a origem, e raios crescentes.

As circunferências correspondentes às equações quadráticas de (3), (6), (9), (12) e (15) estão representadas na seguinte figura.



Nessa sequência de circunferências, transladamos o centro ora ao longo do eixo horizontal, ora ao longo do eixo vertical, mantendo o raio constante e igual a 3. Os demais casos são similares.

As circunferências correspondentes às equações quadráticas de (2), (17), (20), (23) e (26) estão representadas na seguinte figura.



Dessa vez, temos uma família de circunferências de raio igual a 2, obtidas ao transladarmos o centro ao longo das bissetrizes dos eixos horizontal e vertical. Os demais casos são similares. ■

Exercício 2.17 Escreva equações que definem as seguintes circunferências:

- 1) a circunferência com centro em $(2, 0)$ com raio 3;
- 2) a circunferência com centro em $(2, 0)$ e tangente ao eixo vertical;
- 3) a circunferência com centro em $(0, -2)$ com raio 1;
- 4) a circunferência com centro em $(0, -2)$ e tangente ao eixo horizontal;
- 5) a circunferência com centro em $(3, 2)$ e tangente ao eixo horizontal;
- 6) a circunferência com centro em $(3, 2)$ e tangente ao eixo vertical;
- 7) uma circunferência com raio 2, tangente ao eixo horizontal e centro no eixo vertical;
- 8) uma circunferência com raio 2 e tangente ao eixo vertical e centro no eixo horizontal;
- 9) a circunferência tangente a ambos os eixos com centro $(2, 2)$;
- 10) uma circunferência tangente a ambos os eixos com raio 2.

Em seguida, esboce as circunferências no plano cartesiano.

Solução. Vejamos, a seguir, cada um dos casos.

- 1) Centro em $(2, 0)$ e raio 3:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9.$$

- 2) Centro em $(2, 0)$ e tangente ao eixo vertical (ou seja, distância do centro ao eixo y é o raio, a saber, $r = 2$):

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

- 3) Centro em $(0, -2)$ e raio 1:

$$x^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

- 4) Centro em $(0, -2)$ e tangente ao eixo horizontal (isto é, ao eixo x , com distância 2 do centro ao eixo):

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

- 5) Centro em $(3, 2)$ e tangente ao eixo horizontal (nesse caso, $r = 2$):

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

- 6) Centro em $(3, 2)$ e tangente ao eixo vertical (nesse caso $r = 3$):

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

- 7) Raio 2 e tangente ao eixo horizontal: assim, o centro tem ordenada $y = \pm 2$; uma vez que o centro pertence ao eixo vertical, então sua abscissa é zero, o que implica:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \text{ou} \quad x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

- 8) Raio 2 e tangente ao eixo vertical: assim, o centro tem abscissa $x = \pm 2$; uma vez que o centro pertence ao eixo horizontal, então sua ordenada é zero, o que implica:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad \text{ou} \quad (x + 2)^2 + y^2 = 4.$$

- 9) Tangente a ambos os eixos com centro em $(2, 2)$, o que implica $r = 2$ e

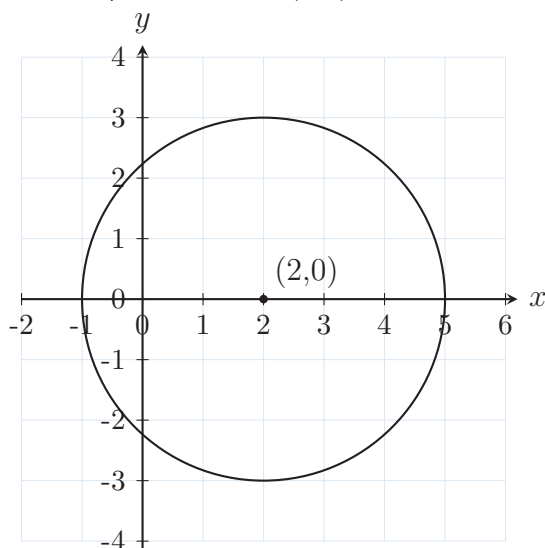
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

- 10) Há quatro possibilidades para o centro da circunferência que é tangente a ambos os eixos coordenados, com raio igual a 2. Esses centros estão localizados nos quatro quadrantes do plano cartesiano, resultando nos seguintes pares de coordenadas: $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ e $(2, -2)$. Assim, as equações das respectivas circunferências são:

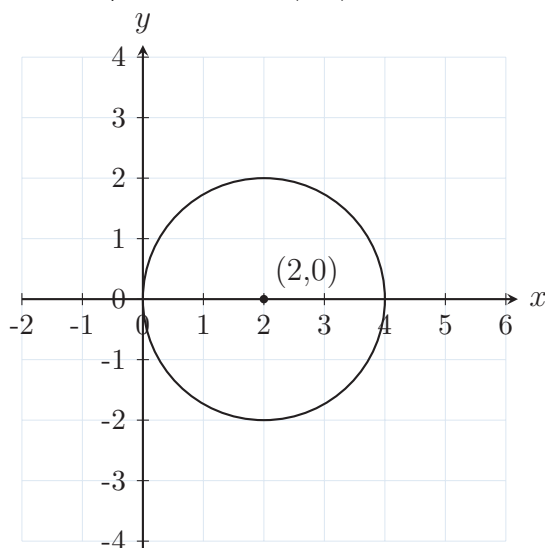
I) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$	(centro em $(2, 2)$)
II) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$	(centro em $(-2, 2)$)
III) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$	(centro em $(-2, -2)$)
IV) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$	(centro em $(2, -2)$)

A seguir, apresentamos os esboços das circunferências descritas nos enunciados de 1 a 10. Note que, em alguns desses casos, há mais de uma possibilidade.

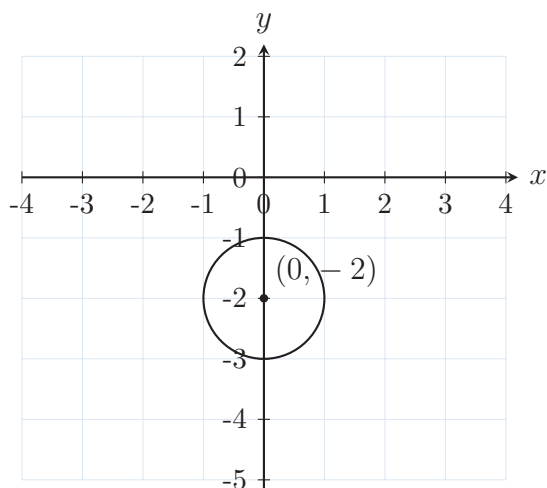
1) Centro em $(2, 0)$ e raio 3



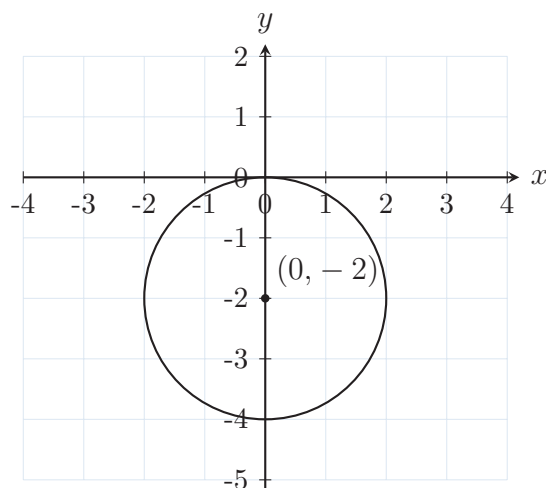
2) Centro em $(2, 0)$ e raio 2



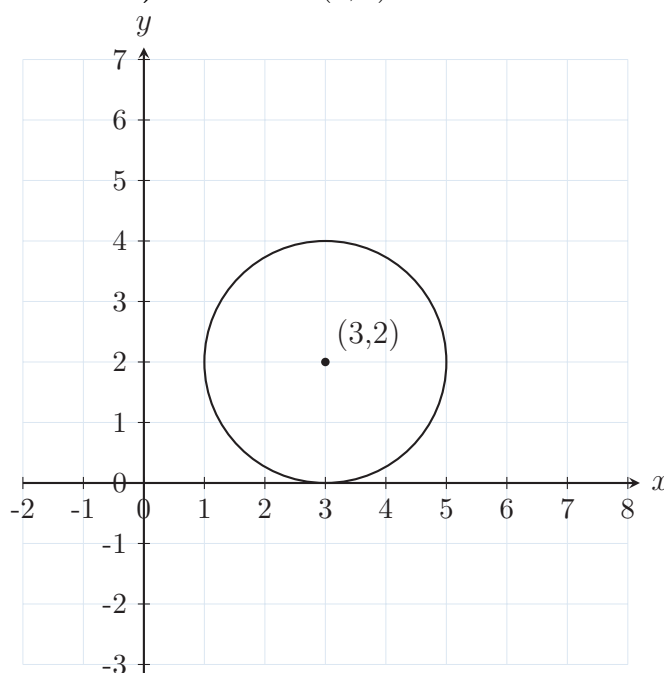
3) Centro em $(0, -2)$ e raio 1



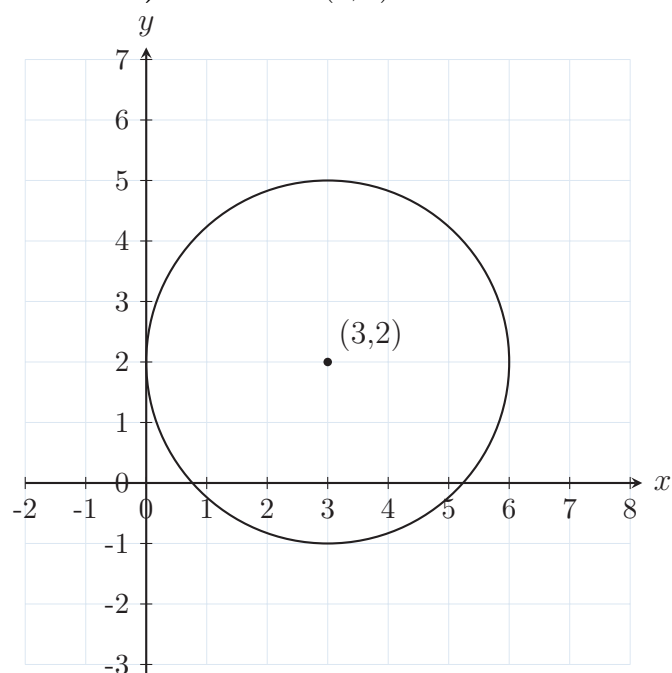
4) Centro em $(0, -2)$ e raio 2



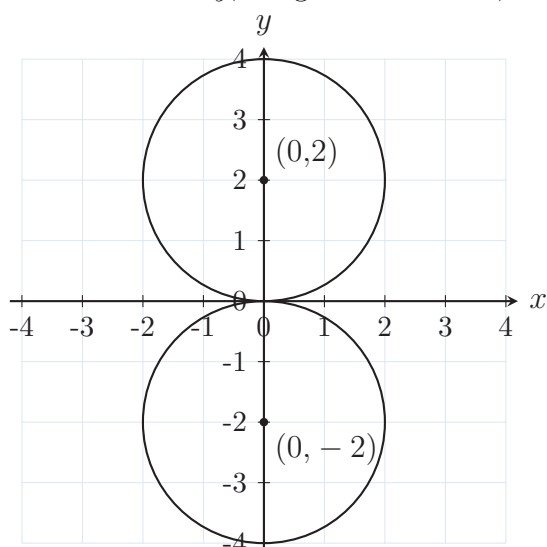
5) Centro em $(3, 2)$ e raio 2



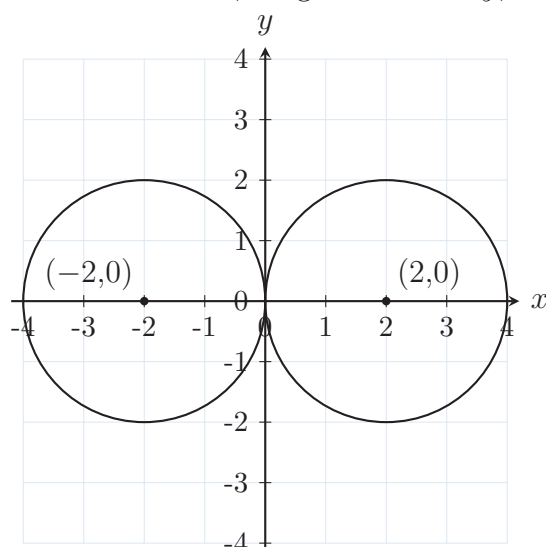
6) Centro em $(3, 2)$ e raio 3



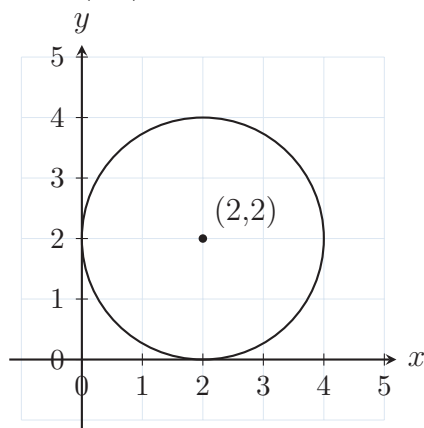
7) Centro no eixo y , tangente ao eixo x , raio 2



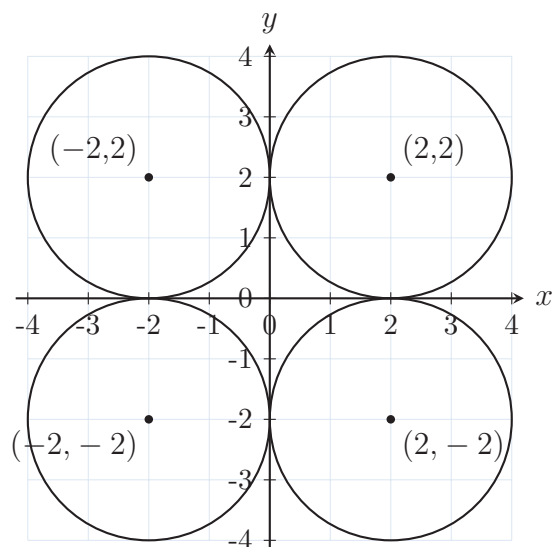
8) Centro no eixo x , tangente ao eixo y , raio 2



9) Centro (2,2) tangente a ambos os eixos



10) 4 centros tangentes aos eixos, raio 2



Vimos, anteriormente, que a circunferência de centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio $r > 0$ é dada pela equação quadrática

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Expandindo os quadrados em cada uma das parcelas na soma do lado esquerdo, temos

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2.$$

Organizando os termos, reescrevemos essa equação como

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0, \quad (2.15)$$

em que

$$c = -2x_0, \quad d = -2y_0, \quad e = x_0^2 + y_0^2 - r^2. \quad (2.16)$$

Reciprocamente, dada uma equação quadrática da forma 2.15, podemos “completar quadrados”, obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + cx + dy + e = x^2 + cx + y^2 + dy + e \\ &= x^2 + 2\frac{c}{2}x + \frac{c^2}{4} + y^2 + 2\frac{d}{2}y + \frac{d^2}{4} + e - \frac{c^2}{4} - \frac{d^2}{4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - e$$

Portanto,

$$x_0 = -\frac{c}{2}, \quad y_0 = -\frac{d}{2}, \quad r^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - e. \quad (2.17)$$

Obs

Resumamos o seguinte **procedimento prático** para determinar uma equação correspondente a uma dada circunferência, e vice-versa.

- Dada uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0,$$

obtenha as coordenadas $x_0 = -c/2$ e $y_0 = -d/2$;

- Calcule $x_0^2 + y_0^2 - e$: se esse número for positivo, a equação descreve uma circunferência.
- Nesse caso, o centro da circunferência é

$$\left(-\frac{c}{2}, -\frac{d}{2}\right)$$

e seu raio é

$$\sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - e}.$$

Exercício 2.18 Faça o que se pede.

- 1) Expanda as seguintes equações quadráticas:

- $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
- $x^2 + (y - 2)^2 = 9$
- $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Por exemplo, a expansão da equação quadrática

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

é realizada do seguinte modo:

$$(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) + (y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2) = 16,$$

o que resulta, agrupando termos, em

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 + 4 - 16 = 0,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0.$$

- 2) Escreva as seguintes equações quadráticas como somas de quadrados:

- $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$
- $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$
- $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

Por exemplo, podemos reescrever a equação quadrática

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0,$$

usando **completamento de quadrados**, como

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 8x + y^2 + 4y - 5 \\ &= x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y - 5 \\ &= x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2 + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 - 2^2 - 5 \\ &= (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 16 - 4 - 5 \\ &= (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 25, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25,$$

a equação usual da circunferência com centro em $(4, -2)$ e raio 5.



Solução. A seguir, expomos as soluções dos vários casos.

1) Expansão das equações quadráticas:

- $(x - 2)^2 + y^2 = 9$

$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

- $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

- $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$$

2) Completamento de quadrados:

- $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$

$$x^2 - 4x + y^2 = 12 \Rightarrow (x - 2)^2 - 4 + y^2 = 12 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 16$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 16$$

- $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

$$x^2 + (y + 3)^2 - 9 = 7 \Rightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 16$$

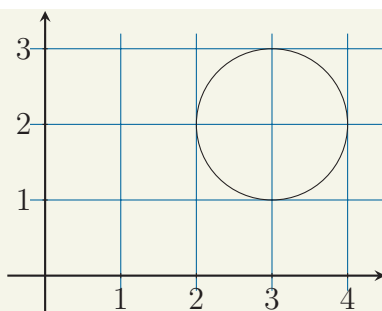
- $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

■

Exercício 2.19 Observe a seguinte circunferência representada no plano cartesiano.



Qual das seguintes equações representa essa circunferência?

- A) $x^2 + y^2 = 1$
- B) $(x - 3)^2 + y^2 = 1$
- C) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$
- D) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
- E) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Solução. Observando a figura, identificamos que a circunferência:

- está centrada no ponto $(3, 2)$;
- tangencia as retas de equação $x = 2$, $x = 4$, $y = 1$ e $y = 3$, ou seja, tem raio $r = 1$.

A equação geral de uma circunferência com centro em (a, b) e raio r é:

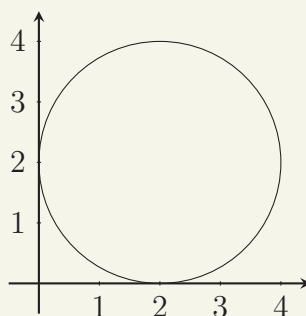
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Substituindo os valores encontrados:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Logo, a alternativa correta é D).

Questão 169 Observe a seguinte circunferência representada no plano cartesiano.



Qual das seguintes equações representa essa circunferência?

- A) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0$.
- B) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$.
- C) $x^2 + y^2 = 4$.

D) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

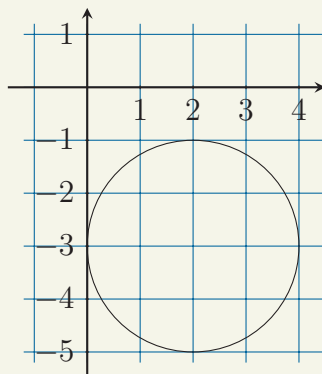
E) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

 **Solução.** De acordo com a configuração representada na figura, a circunferência tem raio 2 e centro no ponto $(2, 2)$. Portanto, pode ser descrita pela equação quadrática

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2,$$

o que corresponde à alternativa D). ■

Questão 170 Observe a seguinte circunferência representada no plano cartesiano.



Qual das seguintes equações representa essa circunferência?

A) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

C) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

E) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$

 **Solução.** De acordo com a configuração representada na figura, a circunferência tem raio 2 e centro no ponto $(2, -3)$. Portanto, pode ser descrita pela equação quadrática

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 2^2,$$

ou seja,

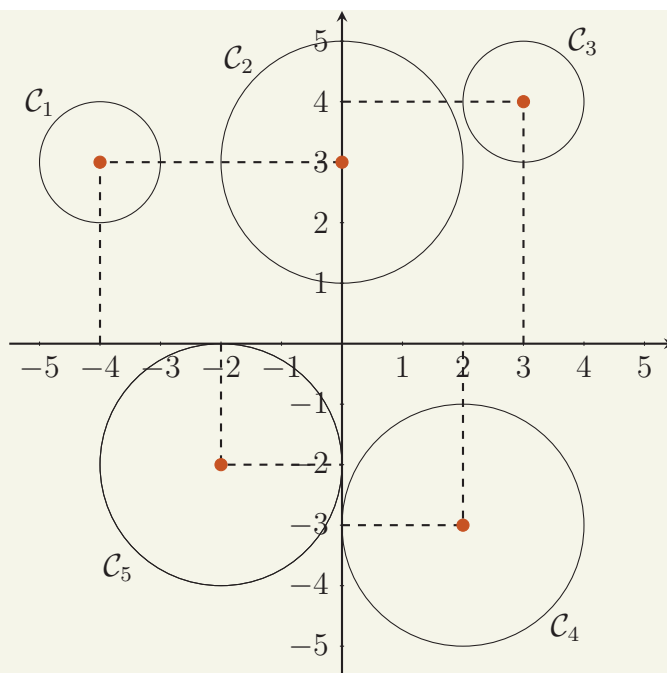
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4,$$

equação que equivale a

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0.$$

Portanto, a alternativa correta é A). ■

Questão 171 Observe as circunferências C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 na seguinte figura.



Em qual das alternativas há a correspondência correta entre a circunferência e a equação que a representa?

- A) $C_1 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$.
- B) $C_2 : x^2 + y^2 - 6y + 7 = 0$.
- C) $C_3 : x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$.
- D) $C_4 : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.
- E) $C_5 : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$.

Solução. As circunferências podem ser representadas pelas seguintes equações:

- $C_1 : (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$.
- $C_2 : x^2 + (y - 3)^2 = 2^2$ ou $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$.
- $C_3 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$.
- $C_4 : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ ou $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.
- $C_5 : (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$ ou $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

Portanto, a alternativa correta é D).

Questão 172 — SPAECE, Item M120364H6, adaptado. Considere as equações abaixo.

- I. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$
- II. $x^2 - y^2 - 16 = 0$
- III. $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$
- IV. $x^2 + y^2 - 9 = 0$
- V. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

Quais dessas equações representam circunferências?

- A) I, IV e V.
- B) I e V.

- C) II e III.
D) II, III e IV.
E) II e IV.

 Solução.

Analisemos as equações nos casos I a V.

I. Reescrevemos $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$ como

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8 - 1 \\ &= (x + 1)^2 + y^2 - 9, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x + 1)^2 + y^2 = 9,$$

equação que descreve a circunferência com centro em $(-1, 0)$ e raio 3.

II. A equação $x^2 - y^2 - 16 = 0$ não descreve uma circunferência, dado que os coeficientes dos termos x^2 e y^2 têm sinais diferentes na equação.

III. A equação $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$ não descreve uma circunferência, dado que os coeficientes dos termos x^2 e y^2 são diferentes.

IV. A equação $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ou, equivalentemente, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$ descreve uma circunferência com centro em $(0, 0)$ e raio 3.

V. Reescrevemos a equação $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ como

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 - 3 - 1 \\ &= x^2 + (y - 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

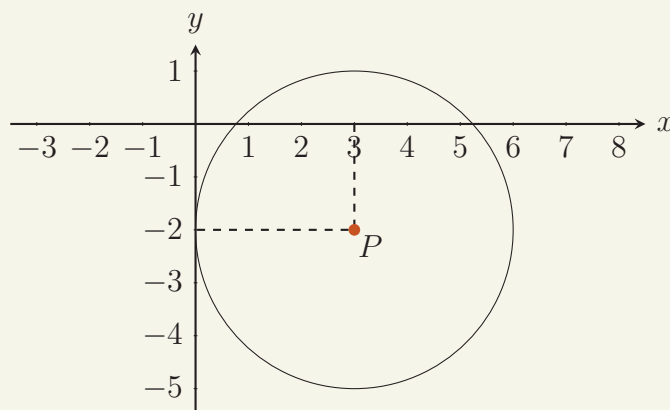
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

equação que descreve a circunferência como centro em $(0, 1)$ e raio 2.

Concluimos que apenas as equações **I**, **IV** e **V** representam circunferências. A resposta correta é, portanto, A).



Questão 173 — PAEBES, Item M120179G5, adaptada. João construiu, utilizando um programa de computador, a circunferência de centro P , conforme representado no plano cartesiano abaixo.



Qual é a representação algébrica dessa circunferência construída por João?

- A) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$
- B) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$
- C) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$
- D) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$
- E) $x^2 + y^2 + 4 = 0$

 **Solução.** A circunferência tem raio 3 e centro no ponto $(3, -2)$. Portanto, pode ser representada pela equação quadrática

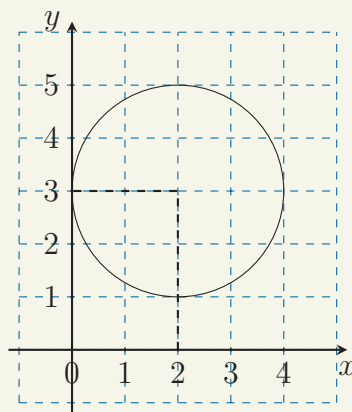
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 3^2,$$

equação equivalente a

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0,$$

o que corresponde à alternativa A).

Questão 174 — PAEBES, Item M120020ES. Observe abaixo a representação gráfica de uma circunferência.



Qual é a equação que representa essa circunferência?

- A) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0.$
- B) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0.$
- C) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0.$
- D) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0.$
- E) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$

 **Solução.** A circunferência tem raio 2 e centro no ponto $(2, 3)$. Portanto, pode ser representada pela equação quadrática

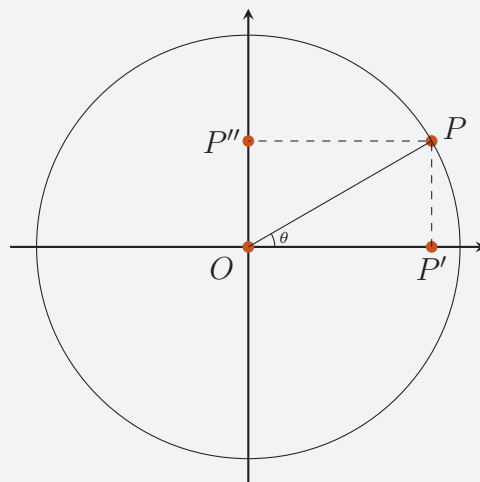
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2,$$

equação equivalente a

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0,$$

o que corresponde à alternativa E).

Na seguinte figura, representamos a circunferência $\mathcal{C}$ centrada na origem $(0,0)$ com raio $r > 0$. Dado um ponto P em $\mathcal{C}$, o segmento $\overline{OP}$ determina um ângulo com o eixo horizontal, cuja medida em radianos é θ , conforme indicado na figura.



Observemos que as projeções ortogonais do ponto P (ou do segmento $\overline{OP}$) sobre os eixos horizontal e vertical são dadas, respectivamente, por

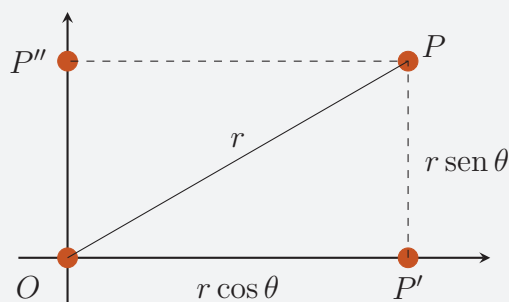
$$\overline{OP'} = \overline{OP} \cos \theta \quad \text{e} \quad \overline{OP''} = \overline{OP} \sin \theta,$$

ou seja,

$$\cos \theta = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP}},$$

expressões que definem as **razões trigonométricas** $\cos \theta$ e $\sin \theta$ associadas ao ângulo θ .

Observação: aqui, abusamos da notação, identificando o ângulo com sua medida em radianos.



Note que $\overline{OP} = r$ é o raio da circunferência. Dado que as projeções ortogonais $\overline{OP'} = x$ e $\overline{OP''} = y$ definem as coordenadas (x, y) do ponto P , deduzimos que

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta.$$

Observe que a **relação de Pitágoras**, aplicada ao triângulo retângulo $OP'P$ com ângulo reto em P' , implica que

$$\overline{OP'}^2 + \overline{OP''}^2 = \overline{OP}^2.$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

Assim, deduzimos a **identidade trigonométrica fundamental**

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (2.18)$$

Por fim, cabe mencionar a **tangente** do ângulo θ , definida como a razão trigonométrica

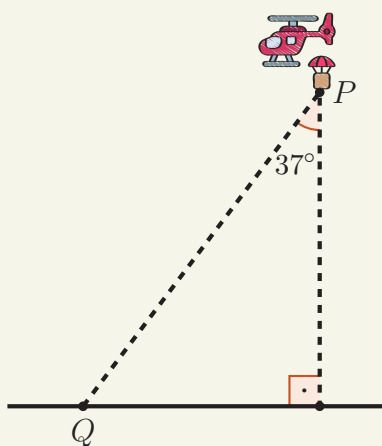
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP'}}$$

entre as medidas do cateto oposto a θ e do cateto adjacente a θ no triângulo retângulo $OP'P$. Observe que a tangente de θ pode ser também expressa como

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

o que permite definir a tangente para *qualquer* medida de ângulo diferente de múltiplos de $\pi/2$ (quando o cosseno é nulo).

Questão 175 — PAEBES 2023, Item (M121648H6). Durante um treinamento, uma caixa de suprimentos foi lançada de um helicóptero pairando a 1 800 metros de altitude em relação ao solo. Observe, na figura abaixo, uma representação dessa situação em que P indica o ponto de lançamento e Q , o local de aterrissagem dessa caixa.



Considere:

$$\sin 37^\circ = 0,6$$

$$\cos 37^\circ = 0,8$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = 0,75$$

Nesse treinamento, qual foi a distância, em metro, entre o local de aterrissagem da caixa de suprimentos e o ponto de lançamento?

A) 1350 m.

B) 1440 m.

C) 2250 m.

D) 2400 m.

E) 3000 m.

Solução. Por definição, a *razão* entre o cateto adjacente ao ângulo no vértice P e a hipotenusa $\overline{PQ}$ é o cosseno desse ângulo, ou seja,

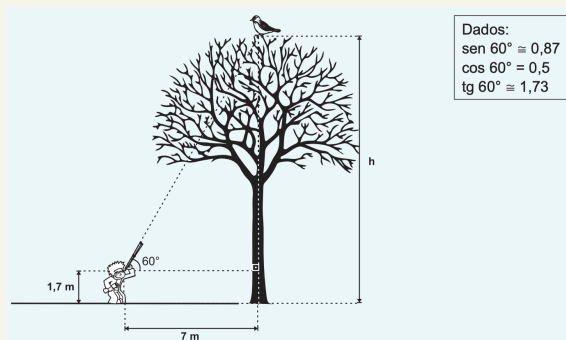
$$\frac{1\,800}{\overline{PQ}} = \cos 37^\circ.$$

Assim,

$$\overline{PQ} = \frac{1\,800}{\cos 37^\circ} = \frac{1\,800}{0,8} = 225 \cdot 10 = 2\,250$$

metros, o que corresponde à alternativa C).

Questão 176 — SAEGO, Item M120284H6. Com um binóculo, um observador avista um pássaro no topo de uma árvore sob um ângulo de 60° , conforme representado na figura abaixo.



Qual é a altura aproximada desse pássaro em relação ao solo, em metros?

- A) 13,81 B) 12,11 C) 10,41 D) 7,79 E) 6,09

Solução. Por definição da tangente do ângulo com medida igual a 60° , temos

$$\frac{h - 1,7}{7} = \text{tg } 60^\circ.$$

Assim,

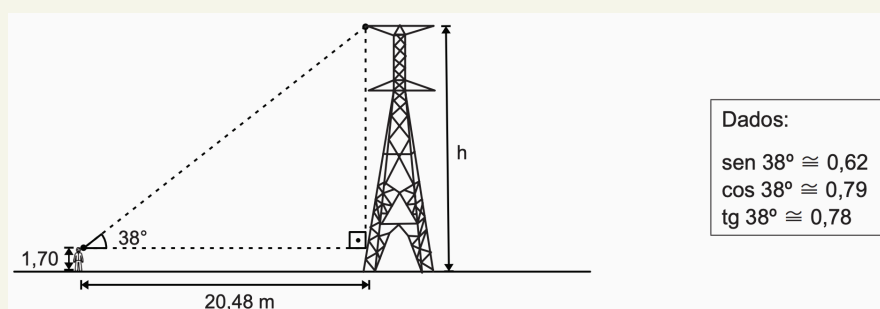
$$h - 1,7 = 7 \cdot \text{tg } 60^\circ = 7 \cdot 1,73 = 12,11$$

metros. Logo,

$$h = 1,7 + 12,11 = 13,81$$

metros, o que corresponde à alternativa A).

Questão 177 — SAEGO, Item M100113E4. Observe abaixo o esquema que um observador montou para estimar a altura de uma torre de energia.



Qual é a altura h aproximada dessa torre de energia?

- A) 15,97 m B) 17,67 m C) 26,25 m D) 27,62 m E) 34,73 m

Solução. Similarmente ao que efetuamos na resolução da questão 176, observe que, por definição da tangente do ângulo com medida igual a 38° , temos

$$\frac{h - 1,7}{20,48} = \text{tg } 38^\circ.$$

Assim,

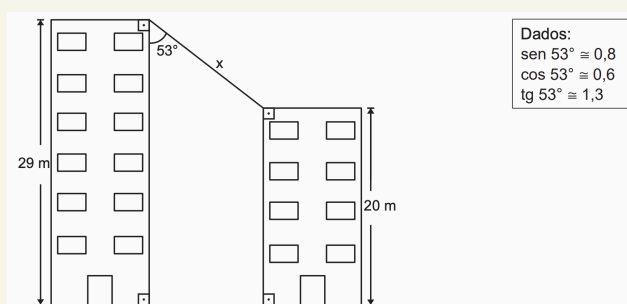
$$h - 1,7 = 20,48 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ = 20,48 \cdot 0,78 \approx 15,97$$

metros. Logo,

$$h = 1,7 + 15,97 = 17,67$$

metros, o que corresponde à alternativa B).

Questão 178 — PAEBES, Item M120293H6, adaptado. Um telhado será instalado entre dois prédios de um condomínio, de forma que sua inclinação em relação ao prédio maior será de 53° , conforme representado no desenho abaixo.



Qual será o comprimento x desse telhado?

- A) 5,4 m B) 6,9 m C) 9,0 m D) 11,2 m E) 15,0 m

Solução. Temos

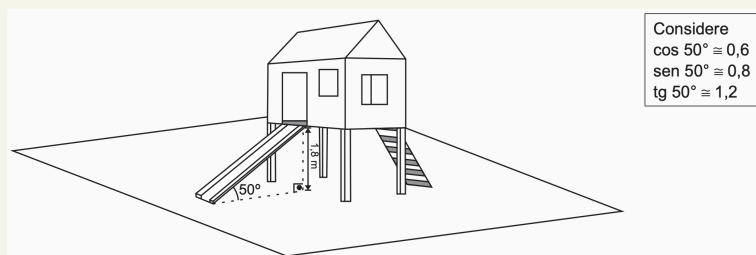
$$\frac{29 - 20}{x} = \operatorname{cos} 53^\circ.$$

Assim,

$$x = \frac{9}{\operatorname{cos} 53^\circ} = \frac{9}{0,6} = 15$$

metros. Logo, a alternativa correta é E).

Questão 179 — PAEBES, adaptado. O desenho abaixo representa o projeto de um escorregador que será instalado em uma praça. Nesse projeto, estão indicados a medida da altura do escorregador (a saber, 1,8 m) e o ângulo de inclinação em relação ao solo.



O comprimento do escorregador é

- A) 1,44 m. B) 1,5 m. C) 2,16 m. D) 2,25 m. E) 3,0 m.

Solução. Seja x o comprimento do escorregador. Assim,

$$\frac{1,8}{x} = \sin 50^\circ.$$

Assim,

$$x = \frac{1,8}{\sin 50^\circ} = \frac{1,8}{0,8} = 2,25$$

metros. Logo, a alternativa correta é D).

Questão 180 — PAEBES, Item M120203G5. O caminho percorrido diariamente por Davi para ir e voltar do trabalho está indicado a seguir pelos segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{PQ}$, que compõem as laterais de um parque, já que os portões do parque, situados nos pontos P e Q , nesses horários, sempre se encontram fechados. Davi resolveu reivindicar que esses portões deveriam ser abertos mais cedo e, para isso, demonstrou a diferença entre o percurso que faz diariamente e a distância percorrida caso usasse o caminho por dentro do parque, justificando seu pedido com o desenho abaixo.



O caminho percorrido diariamente por Davi, indicado pelas setas, e o caminho que percorreria entre os portões P e Q se passasse pelo parque formam um triângulo retângulo.

Quantos metros Davi andaria a menos se passasse por dentro do parque?

- A) 330 m B) 400 m C) 600 m D) 750 m E) 800 m

Solução. Temos

$$\frac{\overline{QR}}{1000} = \cos 37^\circ.$$

e, da mesma forma,

$$\frac{\overline{PR}}{1000} = \cos 53^\circ = \sin 37^\circ$$

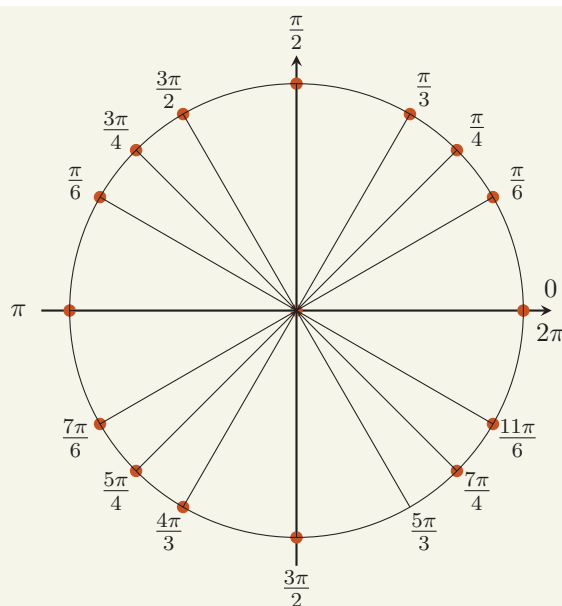
Assim,

$$\overline{QR} + \overline{PR} = 1000 \cdot (\cos 37^\circ + \sin 37^\circ) = 1000 \cdot 1,4 = 1400$$

metros. Portanto, a alternativa correta é B).

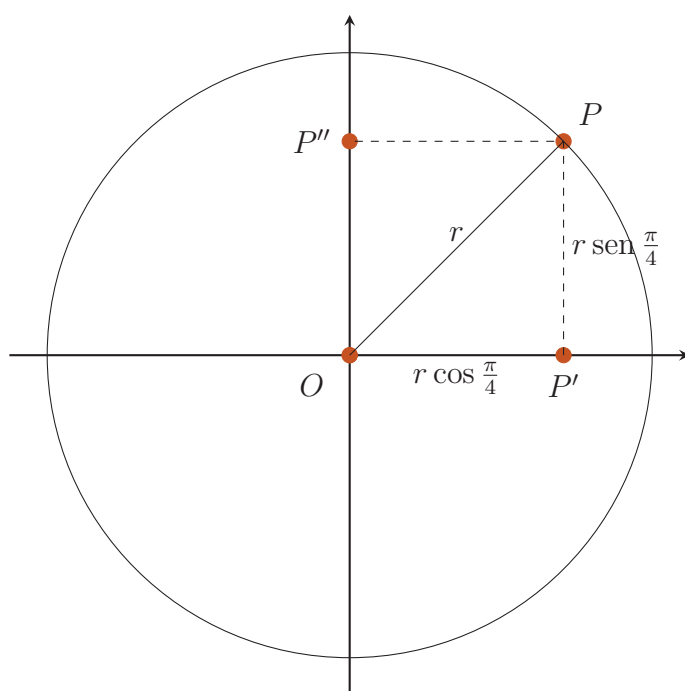
Questão 181 Determine as razões trigonométricas $\cos \theta$ e $\sin \theta$ para os seguintes ângulos, medidos sobre o círculo de raio 1 centrado na origem, conforme representado na figura a seguir:

1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (ou $\theta = 30^\circ$)	2) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ou $\theta = 45^\circ$)	3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ou $\theta = 60^\circ$)	4) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ou $\theta = 90^\circ$)
5) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (ou $\theta = 120^\circ$)	6) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (ou $\theta = 135^\circ$)	7) $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (ou $\theta = 150^\circ$)	8) $\theta = \pi$ (ou $\theta = 180^\circ$)
9) $\theta = \frac{7\pi}{6}$ (ou $\theta = 210^\circ$)	10) $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (ou $\theta = 225^\circ$)	11) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ (ou $\theta = 240^\circ$)	12) $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (ou $\theta = 270^\circ$)
13) $\theta = \frac{5\pi}{3}$ (ou $\theta = 300^\circ$)	14) $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (ou $\theta = 315^\circ$)	15) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ (ou $\theta = 330^\circ$)	16) $\theta = 2\pi$ (ou $\theta = 360^\circ$)



 **Solução.** Iniciamos determinando as razões trigonométricas $\cos \frac{\pi}{4}$ e $\sin \frac{\pi}{4}$ (lembre-se que $\pi/4$ radianos equivale a 45°).

Para tanto, observe, na seguinte figura, o triângulo retângulo $OP'P$ determinado pelo ângulo em O cuja medida é $\frac{\pi}{4}$. Uma vez que as medidas dos ângulos em O e P devem somar $\frac{\pi}{2}$ (pois o ângulo em P' mede $\frac{\pi}{2}$, por construção), concluímos que cada um deles mede $\frac{\pi}{4}$. Logo, o triângulo $OP'P$ é também *isósceles*.



Portanto,

$$\underbrace{\overline{OP'}}_{=x} = \underbrace{\overline{P'P}}_{=y},$$

ou seja,

$$r \cos \frac{\pi}{4} = r \sin \frac{\pi}{4}.$$

Assim, a relação de Pitágoras implica que

$$r^2 = r^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + r^2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2r^2 \cos^2 \frac{\pi}{4}.$$

Concluimos que

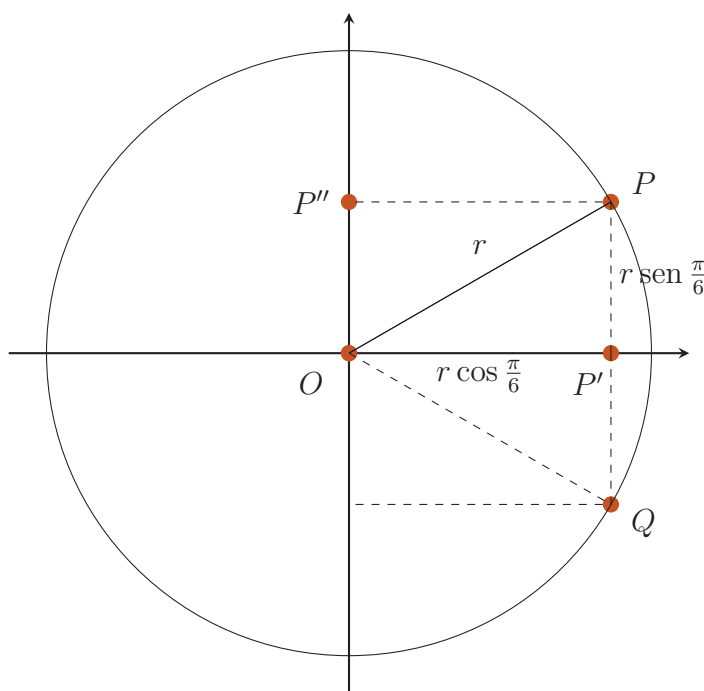
$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como $\cos \frac{\pi}{4} > 0$, deduzimos que

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Agora, calculemos as razões trigonométricas dos ângulos cujas medidas, em radianos, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ (ou seja, 30° e 60° , respectivamente). Para tanto, observe, na seguinte figura, o triângulo retângulo $OP'P$ determinado pelo ângulo em O cuja medida é $\frac{\pi}{6}$. Uma vez que as medidas dos ângulos em O e P devem somar $\frac{\pi}{2}$ (pois o ângulo em P' mede $\frac{\pi}{2}$, por construção), concluimos que o ângulo em P mede $\frac{\pi}{3}$.

Na figura, *refletimos* o triângulo $OP'P$ em relação ao eixo horizontal, construindo, desse modo, o triângulo OQP cujos ângulos internos são congruentes e têm medidas iguais a $\frac{\pi}{3}$ radianos. Logo, o triângulo OQP é *equilátero*.



Como os lados de OQP são congruentes, segue, em particular, que

$$\overline{PQ} = \overline{OP} = r.$$

Logo,

$$\underbrace{\overline{P'P}}_{=y} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{r}{2}.$$

Assim, a relação de Pitágoras, aplicada ao triângulo retângulo $OP'P$, implica que

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{P'P}^2,$$

ou seja,

$$r^2 \cos^2 \frac{\pi}{6} = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}.$$

Concluimos que

$$\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}.$$

Como $\cos \frac{\pi}{6} > 0$, deduzimos que

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo,

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

De modo similar, podemos deduzir que

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

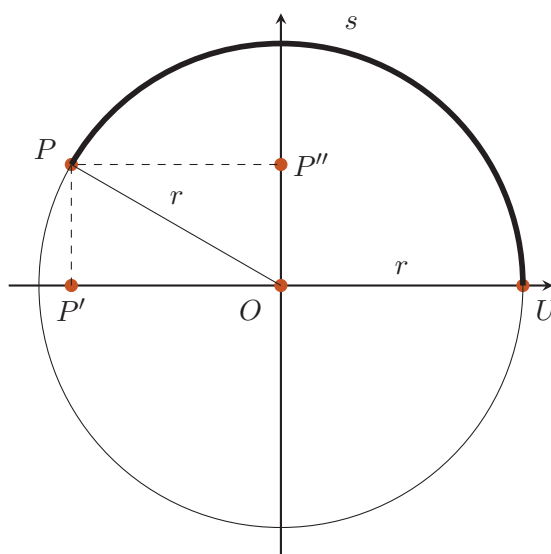
As razões trigonométricas dos demais ângulos podem ser calculadas utilizando-se figuras similares às que construímos nos cálculos anteriores.

É importante que os professores possam fazer uso dessas construções para evidenciar as simetrias e propriedades das razões trigonométricas quando *estendidas* a ângulos determinados por arcos quaisquer do círculo, não necessariamente agudos.

Obs

Expomos, agora, uma explicação sobre como determinar a medida de um ângulo em radianos.

Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio $r > 0$ e centro O , considere um dos arcos determinados por dois de seus pontos, U e P , conforme destacado na seguinte figura. Seja s a medida desse arco em unidades de comprimento.

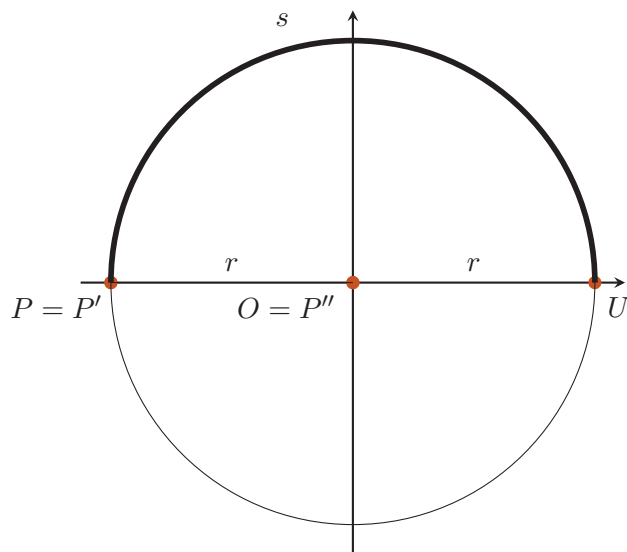


Os segmentos $\overline{OU}$ e $\overline{OP}$ definem dois ângulos, um dos quais corresponde ao arco destacado na figura. A medida desse ângulo, em radianos, é dada por

$$\theta = \frac{s}{r},$$

ou seja, pela **razão** entre o comprimento do arco e o raio do círculo.

Em particular, dados U e P como na seguinte figura, os segmentos $\overline{OU}$ e $\overline{OP}$ definem um *ângulo raso* e um arco com metade do comprimento C da circunferência.



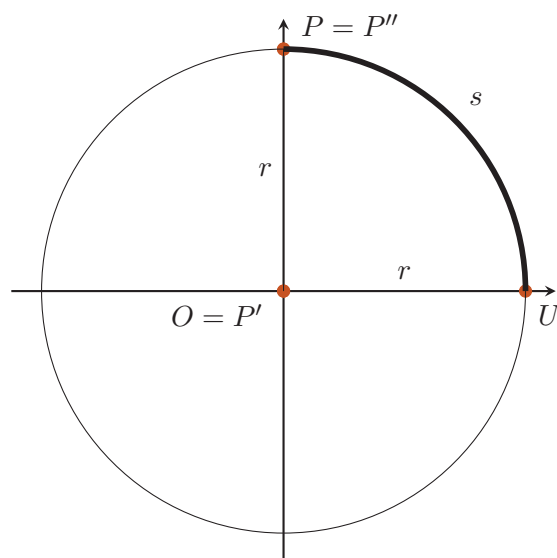
Sendo assim, a medida do ângulo raso, em radianos, é dada por

$$\frac{C}{2r}.$$

Denotamos essa razão por π . Logo, o comprimento C da circunferência $\mathcal{C}$, cujo raio é r , é dado por

$$C = 2\pi r.$$

Da mesma forma, um ângulo reto corresponde a $1/4$ do comprimento da circunferência, conforme a seguinte figura.



Logo, a medida de um ângulo reto, em radianos, é dada por

$$\frac{C}{4r},$$

ou seja, por $\frac{\pi}{2}$ radianos.

A constante π é um número irracional e uma de suas primeiras aproximações racionais, historicamente, é dada pela fração $\frac{22}{7}$, ou seja,

$$\pi \approx 3,142857 \dots$$

Há várias apresentações bastante interessantes de aproximações do número π . Recomendamos que o leitor curioso consulte, por exemplo, os seguintes vídeos:



Recomendamos o vídeo **Isto é Matemática T01E09 O Pi Existe** que trata sobre o π e da forma em que o mesmo se encontra no nosso dia a dia.

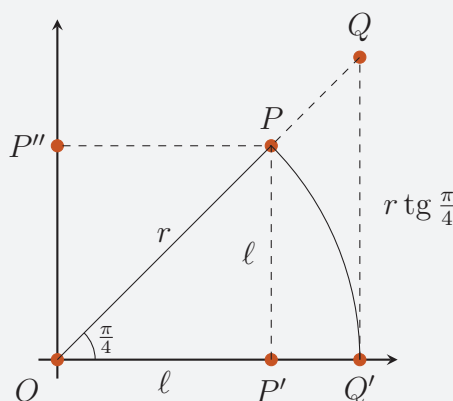


Recomendamos o vídeo **A resposta mais inesperada para um quebra-cabeça de contagem** que ilustra um resultado inusitado entre o número π e um experimento teórico de colisão entre objetos.



Como consequência dos argumentos e cálculos na solução da questão 181, reunimos os seguintes fatos sobre triângulos isósceles e, em particular, equiláteros.

Inicialmente, considere o triângulo isósceles $OP'P$. Escolha eixos cartesianos no plano de modo a representá-lo como na seguinte figura.



A partir de nossa discussão anterior, deduzimos os seguintes fatos a respeito do triângulo $OP'P$ e de seus ângulos internos em O e P (ambos com medida igual a $\pi/4$ radianos):

Cossenos	Senos	Tangentes	Área	Perímetro
$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$	$\frac{1}{2}l^2$	$(2 + \sqrt{2})l$

Essas informações podem ser deduzidas como consequência da relação de Pitágoras

$$\ell^2 + \ell^2 = r^2,$$

o que implica a seguinte razão entre as medidas dos lados do triângulo:

$$r = \sqrt{2}\ell.$$

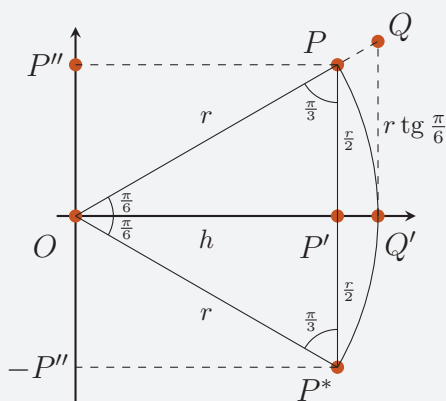
Note, ainda, que os triângulos $OP'P$ e $OQ'Q$ são **semelhantes** e que, sendo assim,

$$\frac{\overline{Q'Q}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}},$$

o que implica a interpretação geométrica da tangente de $\frac{\pi}{4}$ em termos da medida do segmento $\overline{Q'Q}$, tangente ao círculo no ponto Q' , isto é,

$$\overline{Q'Q} = r \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

Analogamente, escolhemos eixos cartesianos de modo a representar, desta vez, um triângulo equilátero OP^*P como na seguinte figura.



Utilizando essa figura e nossa discussão anterior, deduzimos os seguintes fatos a respeito do triângulo equilátero OP^*P e de seus ângulos internos em O e P (com medidas iguais a $\pi/3$ radianos):

Cossenos	Senos	Tangentes
$\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$	$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{h}{r/2} = \sqrt{3}$

• **Área:** $\frac{1}{2}hr = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

• **Perímetro:** $3r$

Essas informações podem ser deduzidas como consequência da relação de Pitágoras (no triângulo retângulo $OP'P$, que é congruente ao triângulo retângulo $OP'P^*$)

$$h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2,$$

o que implica a seguinte razão entre a altura h e a medida r do lado do triângulo equilátero:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} r.$$

Note, ainda, que os triângulos $OP'P$ e $OQ'Q$ são **semelhantes** e que, sendo assim,

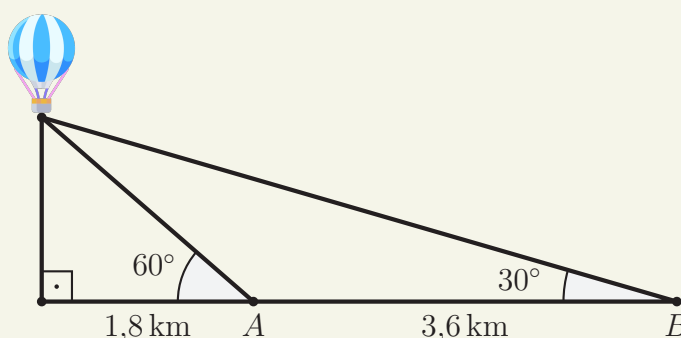
$$\frac{\overline{Q'Q}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}},$$

o que implica a interpretação geométrica da tangente de $\frac{\pi}{6}$ em termos da medida do segmento $\overline{Q'Q}$, tangente ao círculo no ponto Q' , isto é,

$$\overline{Q'Q} = r \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}} = \frac{r/2}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} r = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}.$$

De modo similar, deduz-se que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{h}{r/2} = \sqrt{3}$

Questão 182 — ENEM 2010, Caderno Amarelo, questão 160, adaptada. Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 milhas a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. Os artistas fazem parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.



Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. Acesso em: 02 maio 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas viram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,4 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira e no mesmo sentido, e o avistou sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- A) 1,8 km. B) 1,9 km. C) 3,1 km. D) 3,7 km. E) 5,5 km.

 **Solução.** Denote por h a altura do ponto em que estava o balão, em relação ao solo, no instante em que foi detectado. De acordo com a configuração geométrica na figura, temos

$$\frac{h}{1,8} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \frac{h}{1,8 + 3,6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6},$$

ou seja,

$$h = 1,8 \cdot \sqrt{3}$$

e, equivalentemente,

$$h = (1,8 + 3,6) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 5,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

De um modo ou de outro, calculamos

$$h \approx 3,12,$$

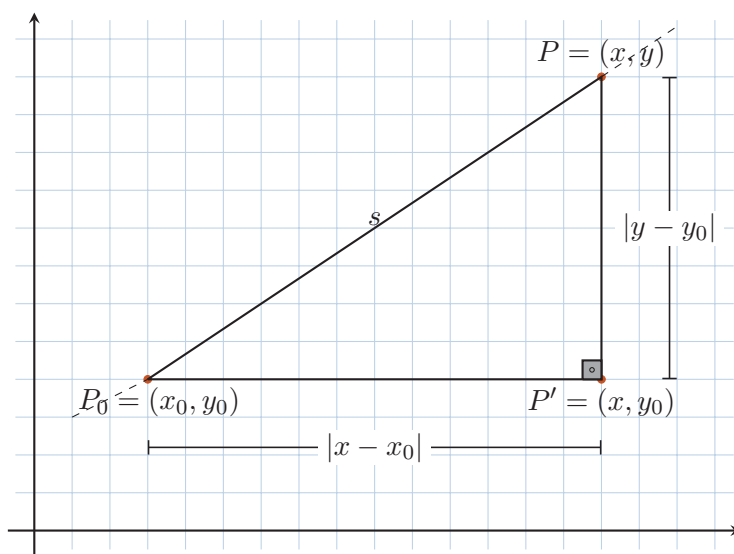
usando a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,73$. Portanto, a alternativa correta é C). ■

Obs

A noção de tangente que acabamos de definir coincide com a medida de inclinação de retas no plano cartesiano. Relembre que, dados pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$, com $x \neq x_0$, a inclinação da reta s determinada por esses pontos, em relação ao eixo coordenado horizontal, é dada pela *taxa de variação* definida por

$$a \doteq \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Essa taxa de variação é, de fato, a *tangente* do ângulo θ definido pelo eixo horizontal e pela reta s , conforme representado na seguinte figura.



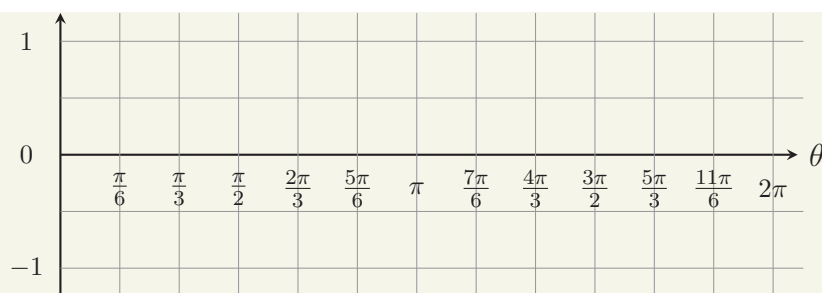
Em resumo, temos

$$a = \operatorname{tg} \theta.$$

Lembre que a é *coeficiente angular* na expressão algébrica de y como função afim de x , dada por

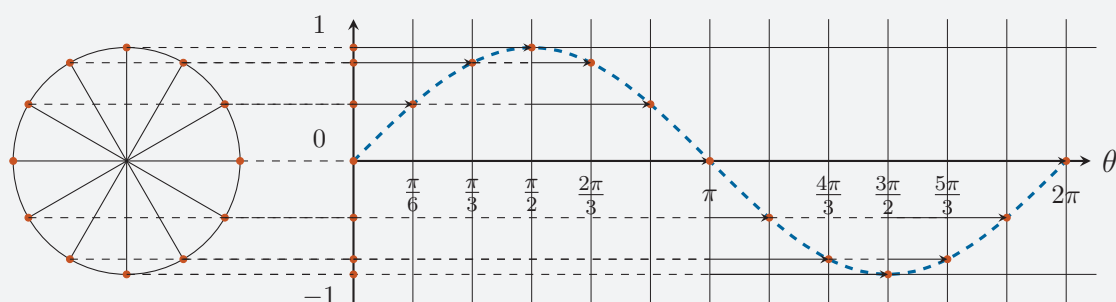
$$y = ax + \underbrace{(y_0 - ax_0)}_{=b}$$

Questão 183 Tendo em conta que $\pi \approx 3$, esboce, no seguinte plano cartesiano, curva que contenha os pontos cujas coordenadas são $(\theta, \operatorname{sen} \theta)$, em que θ são as medidas dos ângulos, em radianos, especificados na questão 181.

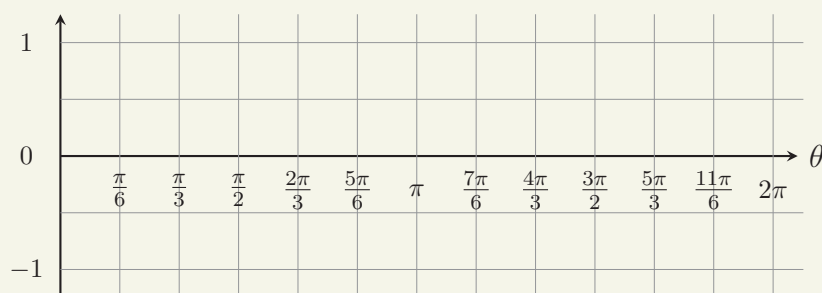


A curva que esboçamos na questão 183 seria, de fato, uma representação do gráfico da **função seno**, uma das funções trigonométricas estudadas no Ensino Médio. Essa função associa, a cada ângulo com medida θ , em radianos, o valor do seu seno, ou seja, $\text{sen } \theta$.

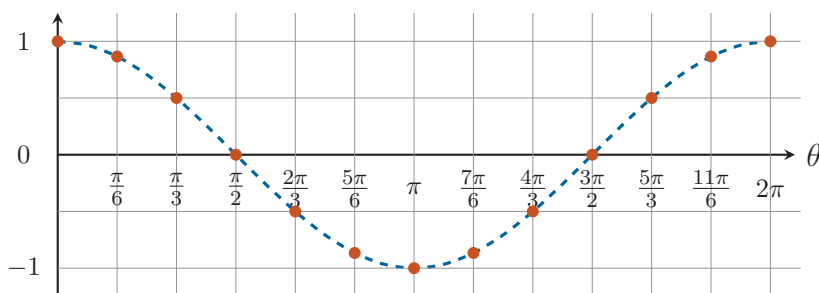
Podemos interpretar a função seno $f(\theta) = \text{sen } \theta$, em que $\theta \in \mathbb{R}$, como a descrição do **movimento harmônico simples** realizada pela projeção P'' no eixo vertical, a medida em que o ponto P desloca-se (no sentido anti-horário, digamos) sobre o círculo com velocidade angular constante de *uma volta inteira por segundo*.



Questão 184 Tendo em conta que $\pi \approx 3$, esboce, no seguinte plano cartesiano, curva que contenha os pontos cujas coordenadas são $(\theta, \cos \theta)$, em que θ são as medidas dos ângulos, em radianos, especificados na questão 181. Em seguida, compare essa curva com aquela obtida na questão 183.



 **Solução.** Acompanhe o gráfico.



θ	$0^\circ (0)$	$30^\circ (\frac{\pi}{6})$	$60^\circ (\frac{\pi}{3})$	$90^\circ (\frac{\pi}{2})$	$120^\circ (\frac{2\pi}{3})$	$150^\circ (\frac{5\pi}{6})$	$180^\circ (\pi)$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Tabela 2.1: Valores de $\cos(\theta)$ para ângulos de 0° a 180°

θ	$210^\circ (\frac{7\pi}{6})$	$240^\circ (\frac{4\pi}{3})$	$270^\circ (\frac{3\pi}{2})$	$300^\circ (\frac{5\pi}{3})$	$330^\circ (\frac{11\pi}{6})$	$360^\circ (2\pi)$
$\cos(\theta)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tabela 2.2: Valores de $\cos(\theta)$ para ângulos de 210° a 360°

Os gráficos das funções *seno* e *cosseno* são idênticos, exceto por uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

■

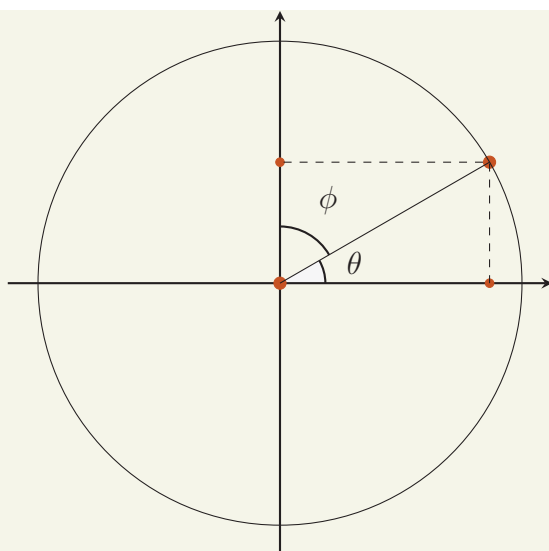
Desta vez, a curva que esboçamos na questão 184 representaria o gráfico da **função cosseno**, que associa, a cada ângulo com medida θ , em radianos, o valor do seu cosseno, ou seja, $\cos \theta$. Podemos interpretar a função cosseno $f(\theta) = \cos \theta$, em que $\theta \in \mathbb{R}$, como a descrição do **movimento harmônico simples** realizada pela projeção P' no eixo horizontal, a medida em que o ponto P desloca-se (no sentido anti-horário, digamos) sobre o círculo com velocidade angular constante de *uma volta inteira por segundo*.

Exercício 2.20 1) Utilize a seguinte figura para mostrar que, dados dois ângulos cujas medidas, em radianos, satisfazem

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2},$$

temos

$$\cos \phi = \sin \theta \quad \text{e} \quad \sin \phi = \cos \theta.$$

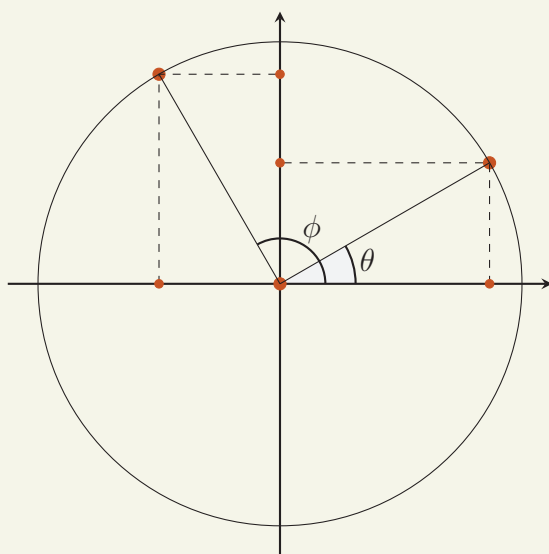


2) Utilize a seguinte figura para mostrar que, dados dois ângulos cujas medidas, em radianos, satisfazem

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2},$$

temos

$$\cos \phi = -\sin \theta \quad \text{e} \quad \sin \phi = \cos \theta.$$

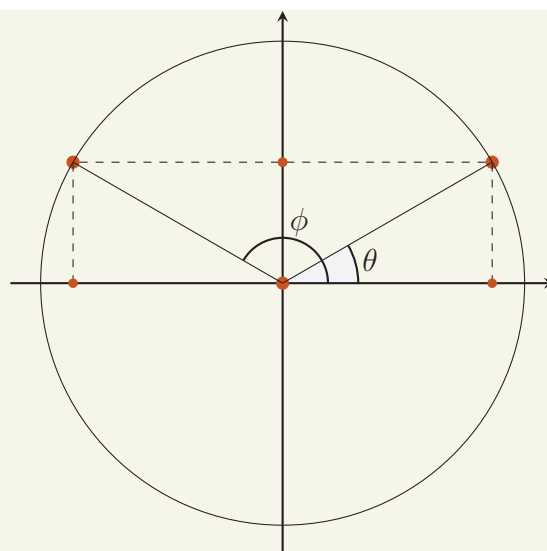


3) Utilize a seguinte figura para mostrar que, dados dois ângulos cujas medidas, em radianos, satisfazem

$$\phi + \theta = \pi,$$

temos

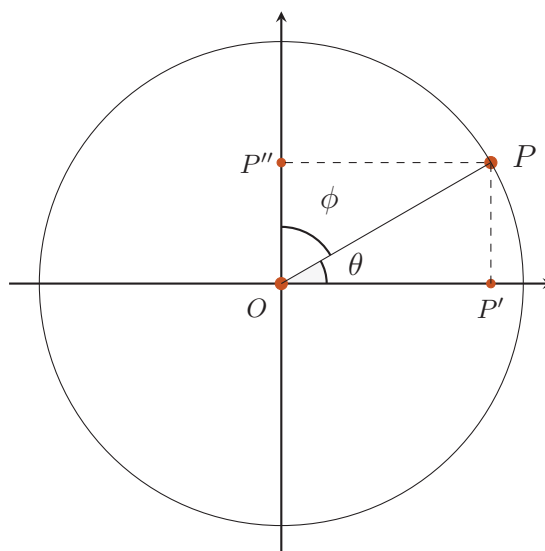
$$\cos \phi = -\cos \theta \quad \text{e} \quad \sin \phi = \sin \theta.$$



Solução. Analisemos, a seguir, as simetrias e relações representadas nas figuras. Sem perda de generalidade, considere que, nessas figuras, os círculos centrados na origem têm raio igual a 1.

Solução da parte 1. Considere ângulos cujas medidas satisfazem $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Observe, na seguinte figura, que a união dos ângulos θ e ϕ é um dos ângulos (retos) no retângulo $OP'PP''$ determinado pelas projeções horizontal e vertical do ponto P (extremidade do arco determinado pelo ângulo θ) sobre os eixos coordenadas. Assim, constatamos que

$$\cos \theta = OP' = PP'' = \sin \phi \quad \text{e} \quad \sin \theta = P'P = OP'' = \cos \phi.$$

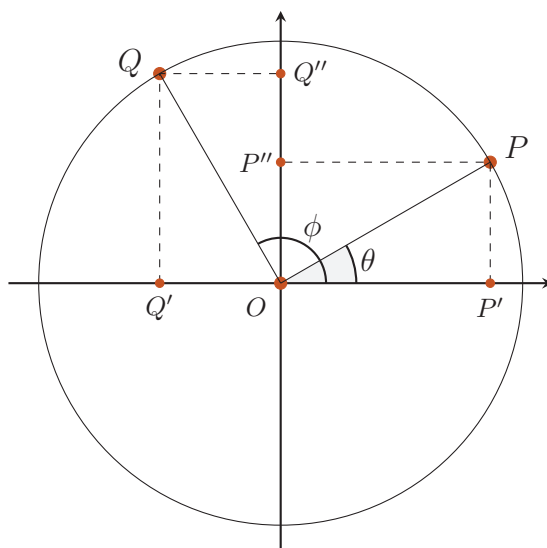


Solução da parte 2. Temos $\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$. A seguinte figura mostra os pontos P e Q , extremidades dos arcos determinados pelos ângulos com medidas θ e ϕ , respectivamente. Note que o segmento OQ resulta da rotação do segmento OP , em torno da origem O , por um ângulo reto, no sentido anti-horário. Na verdade, o retângulo $OQ''QQ'$ é obtido, a partir do retângulo $OP'PP''$, pela mesma rotação. Em particular, são retângulos congruentes e, portanto,

$$\cos \theta = OP' = OQ'' = \sin \phi$$

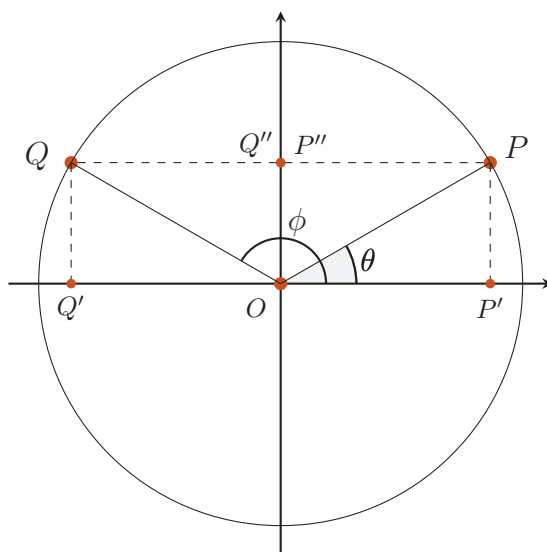
e

$$\sin \theta = P'P = Q''Q = -\cos \phi.$$



Solução da parte 3). Agora, temos $\phi + \theta = \pi$, ou seja, $\phi = \pi - \theta$. Podemos observar que os arcos definidos por θ e ϕ têm como extremidades pontos simétricos (P e Q , respectivamente) em relação ao eixo vertical. Na verdade, o retângulo $OQ''QQ'$ é obtido, a partir do retângulo $OP''PP'$ por reflexão em torno do eixo vertical. Em particular, temos

$$\cos \theta = OP' = OQ' = -\cos \phi \quad \text{e} \quad \sin \theta = P'P = Q'Q = \sin \phi.$$



Exercício 2.21 Use as relações e simetrias discutidas no exercício 2.20 para esboçar os gráficos das seguintes funções, definidas para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1) f_1(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$2) f_2(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$3) f_3(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4) f_4(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$5) f_5(\theta) = \sin(\theta + \pi)$$

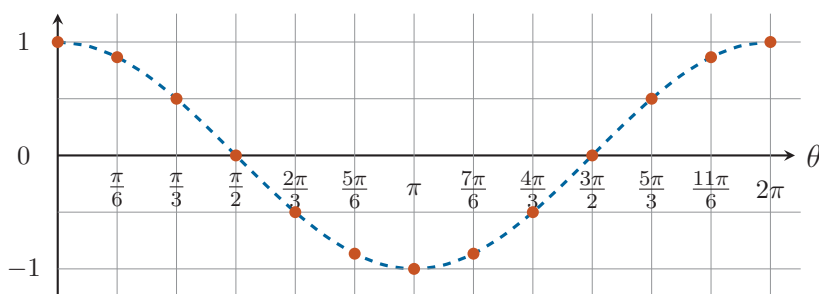
$$6) f_6(\theta) = \cos(\theta + \pi)$$

Solução. Discutimos, a seguir, cada um dos casos.

1) Como vimos no exercício 2.20,

$$f_1(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).$$

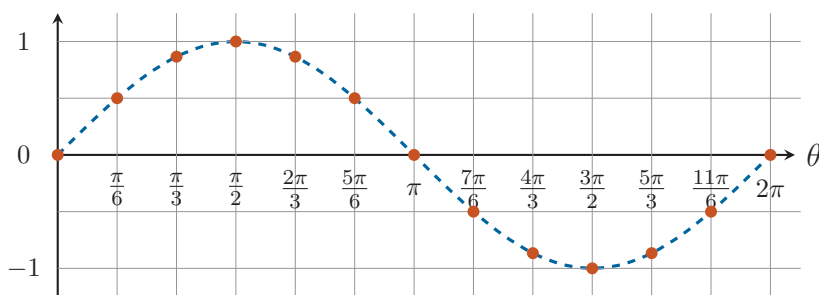
Logo, o gráfico de f_1 é o gráfico da função cosseno $g(\theta) = \cos(\theta)$, representado a seguir (para valores de θ entre 0 e 2π).



2) Da mesma forma, temos

$$f_2(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta).$$

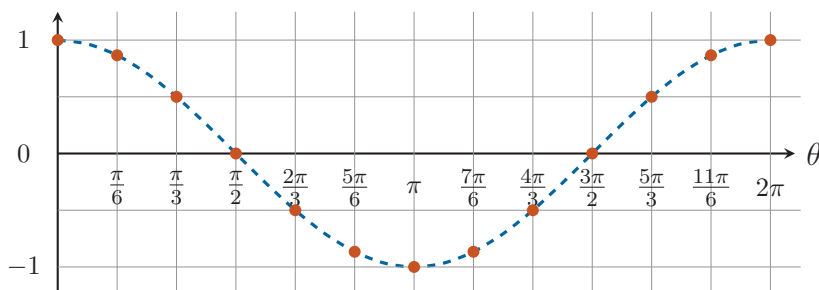
Logo, o gráfico de f_2 é o gráfico da função seno $f(\theta) = \sin(\theta)$, representado a seguir (para valores de θ entre 0 e 2π).



3) Baseando-se nos casos anteriores e nas simetrias das funções seno e cosseno, temos

$$f_3(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$

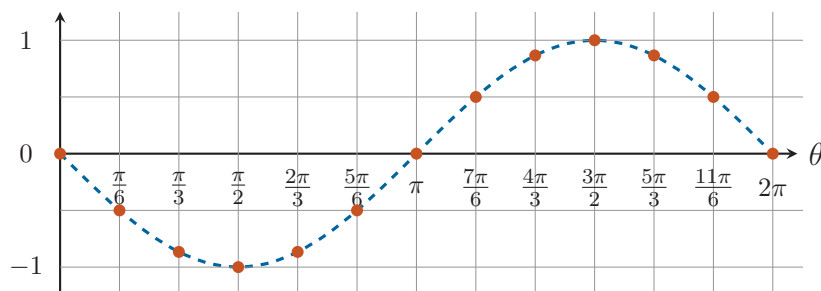
Logo, o gráfico de f_3 é o gráfico da função cosseno $g(\theta) = \sin(\theta)$. Outro modo de obter a representação gráfica de f_3 é considerar que seu gráfico é obtido a partir do gráfico da função seno por uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ radianos para a *esquerda*: o valor da função f_3 em um ângulo θ equivale ao valor da função seno no ângulo $\theta + \frac{\pi}{2}$. De um modo ou de outro, o gráfico de f_3 , restrita aos valores de θ entre 0 e 2π , é representado na seguinte figura.



4) Similarmente, observamos que

$$f_4(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

Logo, o gráfico de f_4 é o gráfico da função $-f(\theta) = -\sin(\theta)$. Outro modo de obter a representação gráfica de f_4 é considerar que seu gráfico é obtido a partir do gráfico da função cosseno por uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ radianos para a *esquerda*: o valor da função f_4 em um ângulo θ equivale ao valor da função cosseno no ângulo $\theta + \frac{\pi}{2}$. De um modo ou de outro, o gráfico de f_4 , restrita aos valores de θ entre 0 e 2π , é representado na seguinte figura.

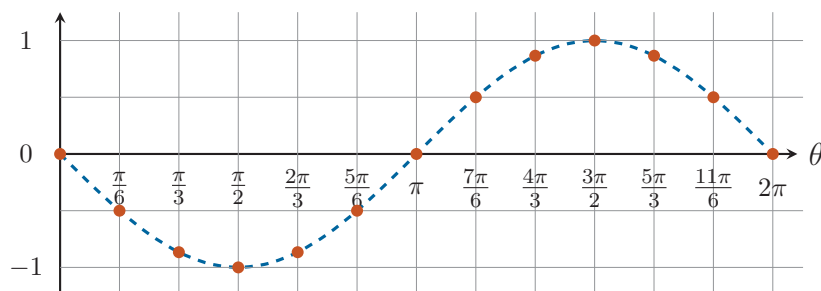


5) Podemos, novamente, utilizar as simetrias e relações estudadas no exercício 2.20, bem como os casos anteriores, para escrevermos

$$f_5(\theta) = \sin(\theta + \pi) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta).$$

Sendo assim, o gráfico de f_5 é o gráfico da função $-f(\theta) = -\sin(\theta)$. De fato, em termos geométricos a mudança de variável $\theta \mapsto \theta + \pi$ corresponde a uma rotação em torno da origem de π radianos, ou seja, a uma reflexão em torno da origem.

Outro modo de obter a representação gráfica de f_5 é considerar que seu gráfico é obtido a partir do gráfico da função seno por uma translação horizontal de π radianos para a *esquerda*: o valor da função f_5 em um ângulo θ equivale ao valor da função seno no ângulo $\theta + \pi$. De um modo ou de outro, o gráfico de f_5 , restrita aos valores de θ entre 0 e 2π , é representado na seguinte figura.

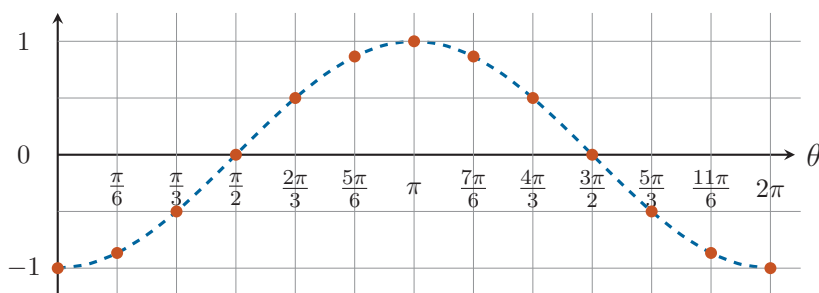


6) Analogamente ao caso 5), temos

$$f_6(\theta) = \cos(\theta + \pi) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta).$$

Sendo assim, o gráfico de f_6 é o gráfico da função $-g(\theta) = -\cos(\theta)$. De fato, como já mencionamos, a mudança de variável $\theta \mapsto \theta + \pi$ corresponde a uma rotação em torno da origem de π radianos, ou seja, a uma reflexão em torno da origem.

Outro modo de obter a representação gráfica de f_6 é considerar que seu gráfico é obtido a partir do gráfico da função cosseno por uma translação horizontal de π radianos para a *esquerda*: o valor da função f_6 em um ângulo θ equivale ao valor da função cosseno no ângulo $\theta + \pi$. De um modo ou de outro, o gráfico de f_6 , restrita aos valores de θ entre 0 e 2π , é representado na seguinte figura.



Questão 185 1) Deduza as seguintes relações envolvendo as funções trigonométricas seno e cosseno:

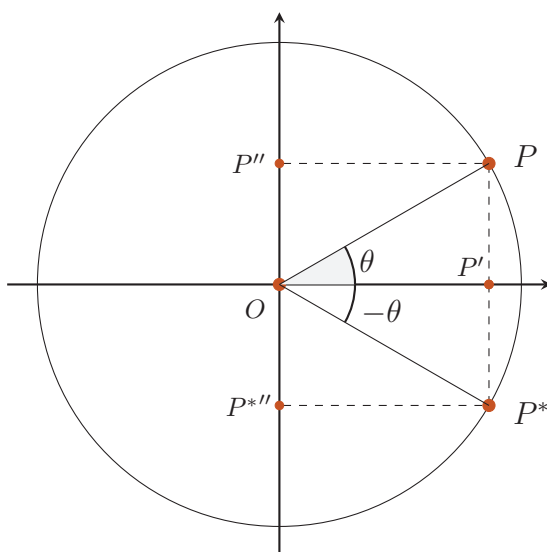
- 1) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, propriedade de paridade da função cosseno.
- 2) $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
- 3) $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$.
- 4) $\sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$.
- 5) $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, propriedade de periodicidade da função cosseno.
- 6) $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.

2) Em seguida, explique essas relações utilizando gráficos das funções seno e cosseno.

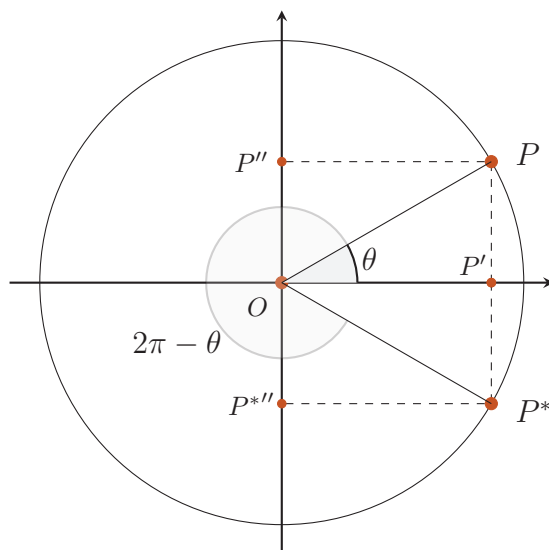
Solução. 1) Em cada caso, observemos a interpretação geométrica das mudanças de variável em termos das medidas de ângulos que determinam arcos em círculo centrado na origem (cujo raio consideramos igual a 1, sem perda de generalidade). Em especial, analisemos com atenção as coordenadas dos pontos correspondentes a esses arcos (e ângulos) e exploremos as simetrias em relação aos eixos coordenados e à origem.

1-1) e 1-2). Observe que a mudança de ângulo $\theta \mapsto -\theta$ corresponde à reflexão em torno do eixo horizontal (ou, equivalentemente, a percorrer o círculo no sentido horário em vez do sentido anti-horário). Na seguinte figura, vemos que

$$\cos(\theta) = OP' = \cos(-\theta) \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = OP'' = OP^{*''} = -\sin(-\theta).$$



1-3) e 1-4) Esses casos reduzem-se aos casos 1-1) e 1-2) se observarmos que o ângulo com medida $2\pi - \theta$ determina os mesmos arcos no círculo que o ângulo com medida $-\theta$, conforme ilustrado na seguinte figura.

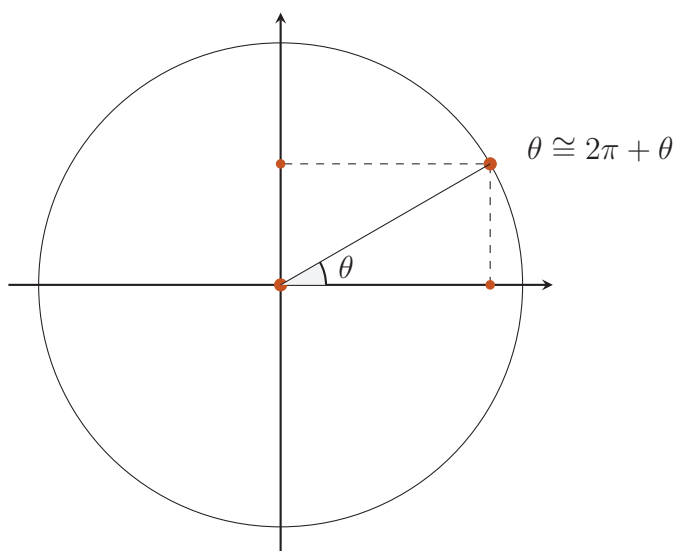


Portanto, temos

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{e} \quad \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$

1-5) e 1-6). Desta vez, basta observar que ângulos cujas medidas diferem em 2π radianos (digamos, θ e $\theta + 2\pi$) determinam o mesmo ponto no círculo. Portanto, temos as mesmas projeções horizontal e vertical, ou seja,

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \sin(2\pi + \theta) = \sin(\theta).$$



2) Agora, passamos a explicar essas simetrias e relações em termos do comportamento e do gráfico das funções seno e cosseno.

1-1) A função cosseno $g(\theta) = \cos(\theta)$ é uma função *par*, ou seja, $g(-\theta) = g(\theta)$. Por conta disso, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo coordenado vertical.

1-2) A função seno $f(\theta) = \sin(\theta)$ é uma função *ímpar*, ou seja, $f(-\theta) = -f(\theta)$. Por conta disso, a parte de seu gráfico correspondente ao semi-eixo horizontal em que $\theta < 0$ é obtida refletindo-se a parte correspondente ao semi-eixo horizontal em que $\theta > 0$ primeiro em relação ao eixo vertical e, em seguida, em relação ao eixo horizontal.

1-3) e 1-4) Conforme discutimos, essas propriedades equivalem às propriedades de paridades que discutimos nos casos 1-1) e 1-2) anteriores.

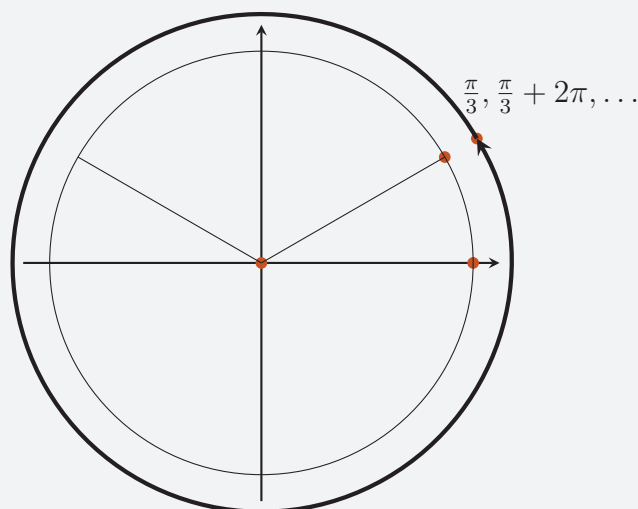
1-5) e 1-6) Uma translação horizontal de 2π radianos, em qualquer sentido, não altera o gráfico das funções seno e cosseno. Isso ilustra a propriedade de periodicidade dessas funções; mais precisamente, o fato de ambas serem *periódicas* com período igual a 2π radianos.



As funções seno e cosseno são **periódicas** com *período* dado por 2π , ou seja,

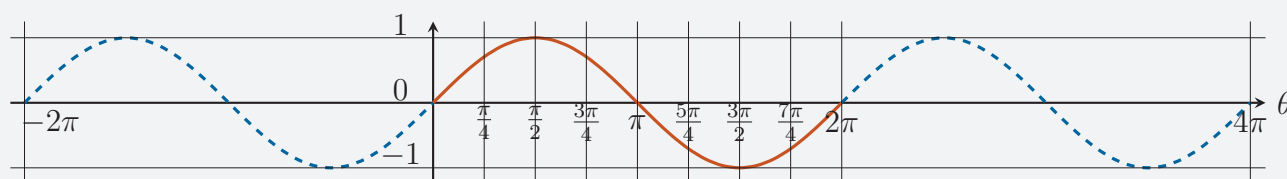
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta,$$

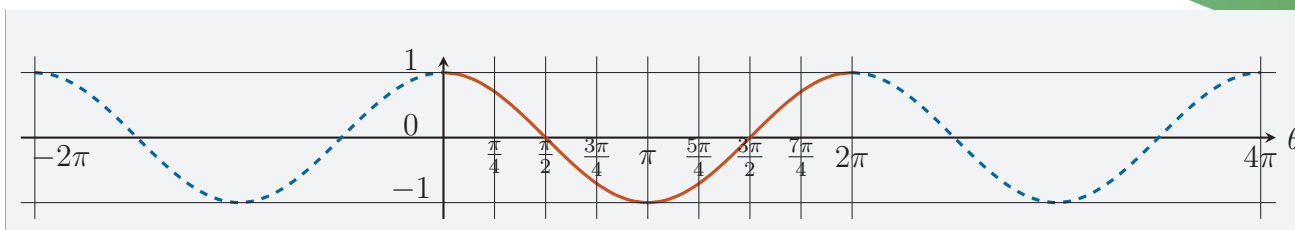
para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Essa periodicidade pode ser explicada recorrendo-se à seguinte figura.



Na verdade, é a propriedade de periodicidade que nos permite *estender* as funções seno e cosseno do intervalo $[0, 2\pi]$ (que corresponde a uma volta inteira na circunferência) para toda a reta real $\mathbb{R}$.

Nas seguintes figuras, vemos esse comportamento periódico quando percebemos que os gráficos das funções seno e cosseno são obtidos “copiando-se” periodicamente, à esquerda e à direita (em intervalos horizontais de comprimento 2π), as curvas destacadas, definidas no intervalo de 0 a 2π .



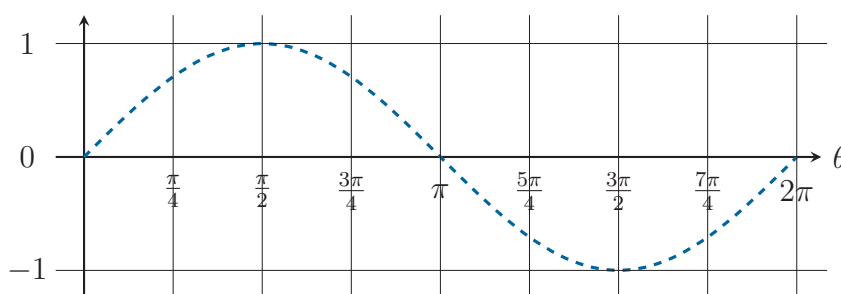


Questão 186 Esboce os gráficos das funções

1) $g(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$.

2) $h(\theta) = \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$.

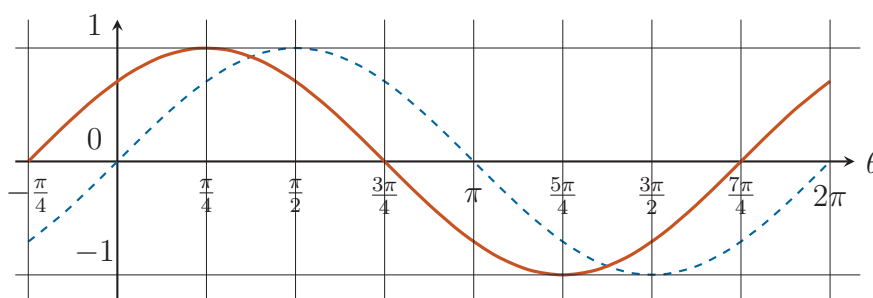
 **Solução.** A seguinte figura representa o gráfico da função $f(\theta) = \sin \theta$, restrita aos valores de θ entre 0 e 2π .



Na figura a seguir, representamos os gráficos de f e da função

$$g(\theta) = f(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$$

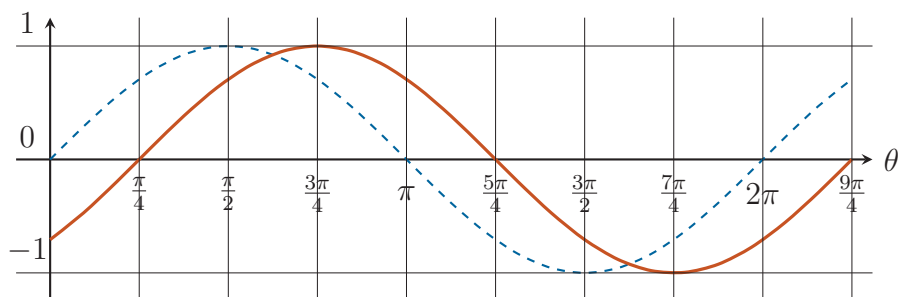
Note que o valor da função g para um dado θ corresponde ao valor de f para $\theta + \frac{\pi}{4}$; equivalentemente, o valor de f para um dado θ corresponde ao valor de g para $\theta - \frac{\pi}{4}$. Isso explica por que o gráfico de f parece “adiantado” ou relação ao gráfico de g . Os gráficos estão “defasados” um em relação ao outro.



Por sua vez, na seguinte figura, representamos os gráficos de f e da função

$$h(\theta) = f(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sin(\theta - \frac{\pi}{4}).$$

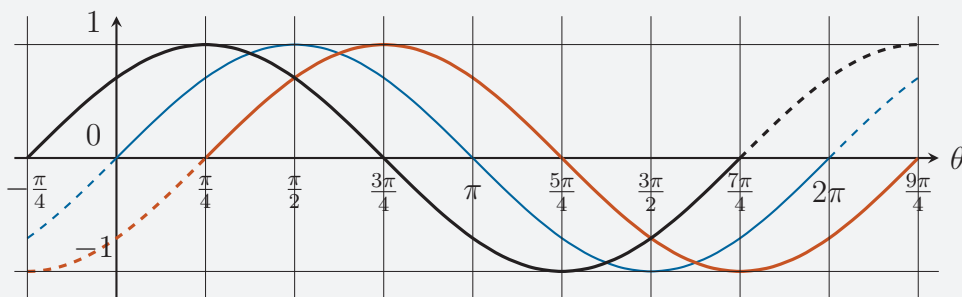
Note que o valor da função h para um dado θ corresponde ao valor de f para $\theta - \frac{\pi}{4}$; equivalentemente, o valor de f para um dado θ corresponde ao valor de h para $\theta + \frac{\pi}{4}$. Isso explica por que o gráfico de f parece “atrasado” ou relação ao gráfico de g . Também nesse caso, os gráficos estão “defasados” um em relação ao outro.



Em geral, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, diferente de 0, o gráfico da função

$$f(\theta) = \text{sen}(\theta + \alpha)$$

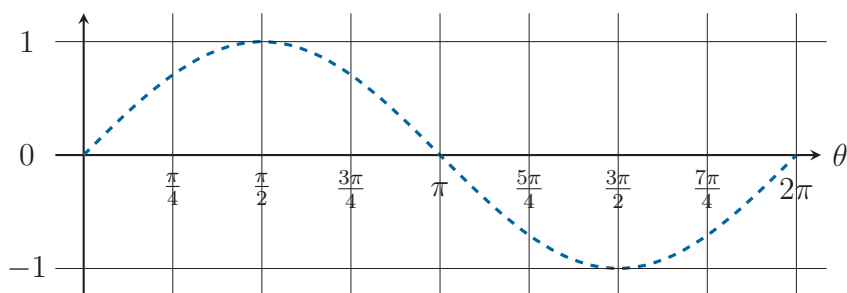
é obtido **transladando-se** o gráfico da função cosseno α unidades de comprimento para a esquerda (respectivamente, direita), caso $\alpha > 0$ (respectivamente, caso $\alpha < 0$). Veja a seguinte figura para visualizar essas translações: cada um dos gráficos descreve uma oscilação completa das funções.



Questão 187 Esboce os gráficos das funções

- 1) $g(\theta) = \text{sen}(2\theta)$.
- 2) $h(\theta) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$.

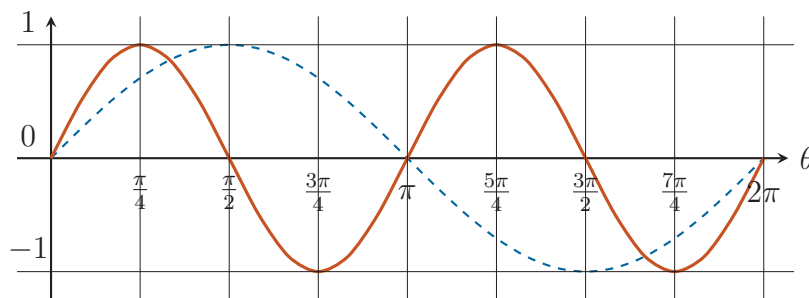
Solução. A seguinte figura representa o gráfico da função $f(\theta) = \text{sen } \theta$, restrita aos valores de θ entre 0 e 2π .



Na figura a seguir, representamos os gráficos de f e da função

$$g(\theta) = f(2\theta) = \text{sen}(2\theta).$$

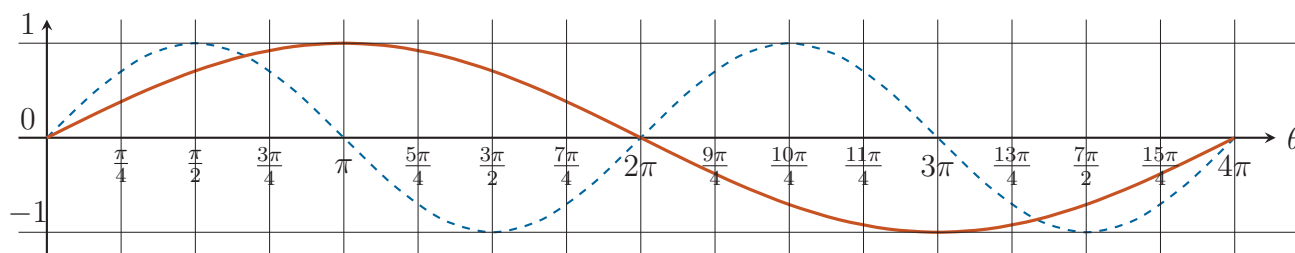
Note que o valor da função g para um dado θ corresponde ao valor de f para 2θ ; equivalentemente, o valor de f para um dado θ corresponde ao valor de g para $\frac{1}{2}\theta$. Isso explica por que o gráfico de f parece “dilatado” em relação ao gráfico de g .



Por sua vez, na seguinte figura, representamos os gráficos de f e da função

$$h(\theta) = f\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right).$$

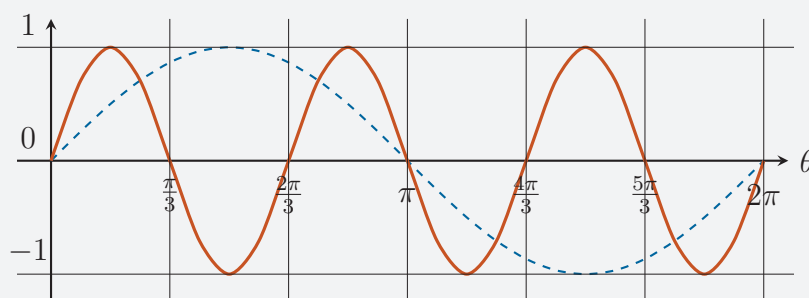
Note que o valor da função h para um dado θ corresponde ao valor de f para $\frac{1}{2}\theta$; equivalentemente, o valor de f para um dado θ corresponde ao valor de h para 2θ . Isso explica por que o gráfico de f parece “contraído” em relação ao gráfico de g .



Em geral, dado $k \in \mathbb{N}$, diferente de 0, o gráfico da função

$$g(\theta) = \text{sen}(k\theta)$$

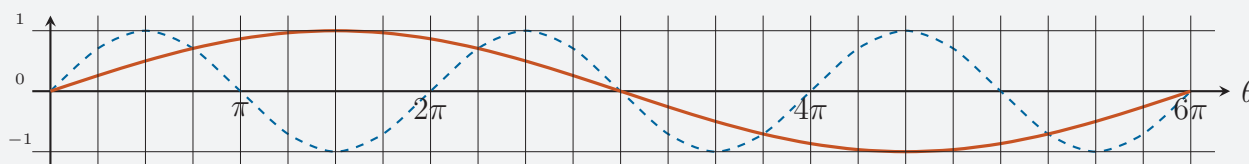
é obtido **modificando-se a unidade de medida** no eixo horizontal. O caso $k = 3$ é ilustrado na seguinte figura. Neste caso, note que o gráfico de g completa uma oscilação a cada intervalo de comprimento $\frac{2\pi}{3}$. Podemos interpretar isso como uma mudança de escala em que a nova unidade de medida passa a ser $\frac{2\pi}{3}$ em vez de 2π .



Similarmente, o gráfico da função

$$h(\theta) = \sin\left(\frac{1}{k}\theta\right)$$

é obtido **modificando-se a unidade de medida** no eixo horizontal, conforme ilustrado na seguinte figura no exemplo em que $k = 3$ (em que usamos escalas menores para o sistema de coordenadas).



Da análise desses gráficos, percebemos que, no caso da função $g(\theta) = \sin(k\theta)$, temos k oscilações no intervalo de 0 a 2π ; da mesma forma, vemos que, no caso da função $h(\theta) = \cos\left(\frac{1}{k}\theta\right)$, temos exatamente uma oscilação completa, no intervalo de 0 a $2\pi k$.

Isso significa que a função $g(\theta) = \sin(k\theta)$ tem uma **frequência** de k oscilações no intervalo de 0 a 2π , ou seja, uma oscilação completa no intervalo de 0 a $\frac{2\pi}{k}$. Dizemos que essa função tem **período** igual a $\frac{2\pi}{k}$.

Em suma, a função $g(\theta) = \cos(k\theta)$ descreve um movimento harmônico simples cujo período é $\frac{2\pi}{k}$, ou seja, cuja frequência é k oscilações em 2π segundos.

No círculo, as funções

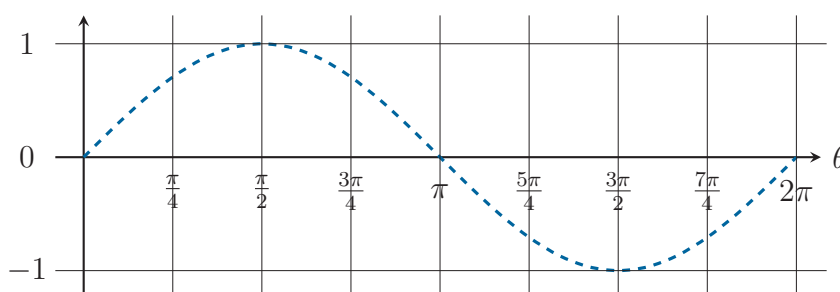
$$u(\theta) = \cos(k\theta) \quad \text{e} \quad g(\theta) = \sin(k\theta)$$

definem as coordenadas de um ponto que se descola em **movimento circular uniforme** a uma velocidade angular constante de k voltas por segundo.

Questão 188 Esboce os gráficos das funções

- 1) $g(\theta) = 2 \sin(\theta)$.
- 2) $h(\theta) = \frac{1}{2} \sin(\theta)$.

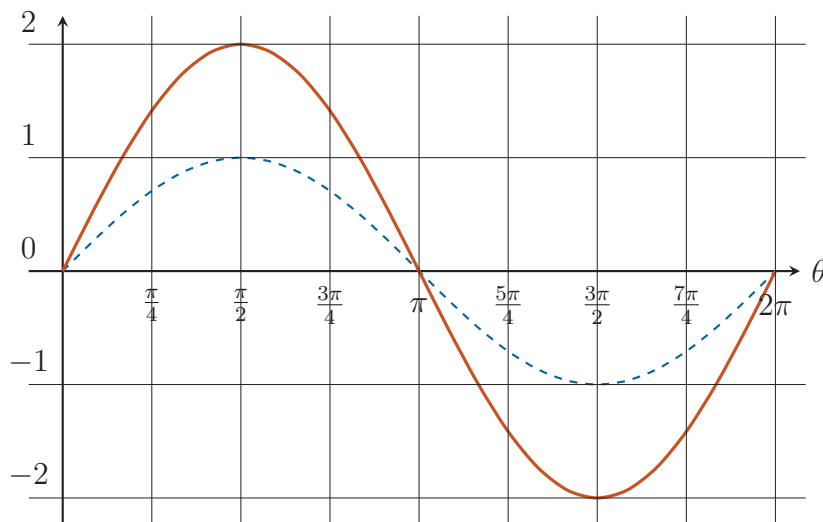
Solução. A seguinte figura representa o gráfico da função $f(\theta) = \cos \theta$, restrita aos valores de θ entre 0 e 2π .



Na figura a seguir, representamos os gráficos de f e da função

$$g(\theta) = 2f(\theta) = 2 \cos(\theta).$$

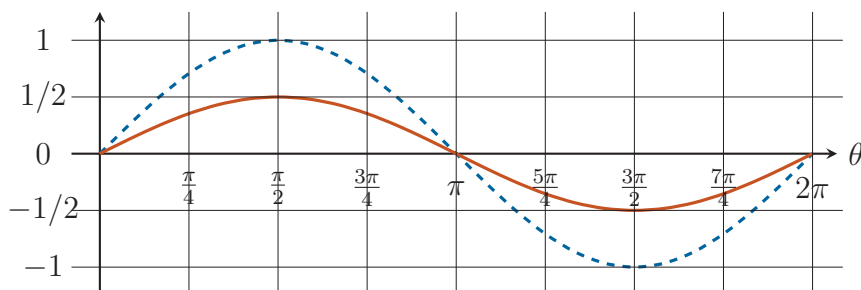
Note que o valor da função g para um dado θ corresponde a duas vezes o valor de f para θ ; equivalentemente, o valor de f para um dado θ corresponde à metade do valor de g para θ . Isso explica por que o gráfico de g parece verticalmente “dilatado” em relação ao gráfico de f .



Por sua vez, na seguinte figura, representamos os gráficos de f e da função

$$h(\theta) = \frac{1}{2}f(\theta) = \frac{1}{2}\cos(\theta).$$

Note que o valor da função h para um dado θ corresponde à metade do valor de f para θ ; equivalentemente, o valor de f para um dado θ corresponde ao dobro do valor de h para θ . Isso explica por que o gráfico de h parece verticalmente “contraído” em relação ao gráfico de f .



Em funções trigonométricas da forma

$$g(\theta) = A \cos(k\theta + \alpha) + \beta \quad \text{ou} \quad g(\theta) = A \sin(k\theta + \alpha) + \beta, \quad (2.19)$$

os coeficientes ou **parâmetros** têm as seguintes interpretações:

- α é a **fase** da função, o que corresponde a **translações** do gráfico na direção *horizontal*.
- β corresponde a **translações** do gráfico na direção *vertical*.
- k determina o **período** (no caso, $\frac{2\pi}{k}$) da função, ou seja, o número de oscilações completas, dada uma variação de 2π radianos na medida do ângulo θ ; geometricamente, a variação do parâmetro k corresponde a **dilatações** ou **contrações** do gráfico na direção horizontal.
- A é, em módulo, a **amplitude** da função, o que corresponde a **dilatações** ou **contrações** do gráfico na direção vertical; quando $A < 0$, temos, ainda, uma **reflexão** do gráfico em

relação ao eixo horizontal.

Questão 189 Esboce os gráficos das seguintes funções trigonométricas:

1) $g_1(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$	2) $g_2(\theta) = \sin(-\theta)$	3) $g_3(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$
4) $g_4(\theta) = \sin(\theta + 2\pi)$	5) $g_5(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$	6) $g_6(\theta) = \sin(3\theta)$
7) $g_7(\theta) = \sin(2\theta + \frac{\pi}{3})$	8) $g_8(\theta) = 2\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$	9) $g_9(\theta) = 2\sin(\frac{1}{3}\theta - \pi)$
10) $g_{10}(\theta) = -2\sin(3\theta - \frac{\pi}{2})$	11) $g_{11}(\theta) = \frac{1}{2}\sin(3\theta + \frac{\pi}{4}) - 1$	12) $g_{12}(\theta) = 2\sin(\frac{1}{3}\theta + \frac{\pi}{4}) + 1$

 **Solução.** A seguir, analisamos cada um dos casos.

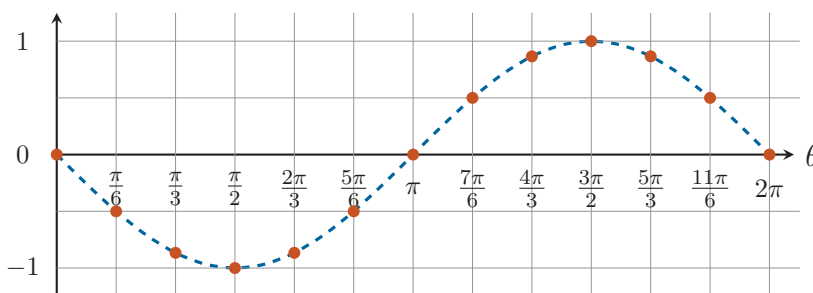
1) A função

$$g_1(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

é, meramente, a função seno defasada em $\frac{\pi}{2}$ radianos; portanto, o gráfico de g_1 é o gráfico da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ radianos para a esquerda. A mudança de variáveis $\theta \mapsto \theta + \frac{\pi}{2}$ pode ser interpretada geometricamente como uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido anti-horário, em um círculo centrado na origem. Outra forma de traçar o gráfico de g_1 é, simplesmente, observar que

$$g_1(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

Portanto, o gráfico de $g_1(\theta)$ é idêntico ao da função $g(\theta) = \cos(\theta)$, o qual representamos a seguir, restringindo a variável θ ao intervalo $[0, 2\pi]$.



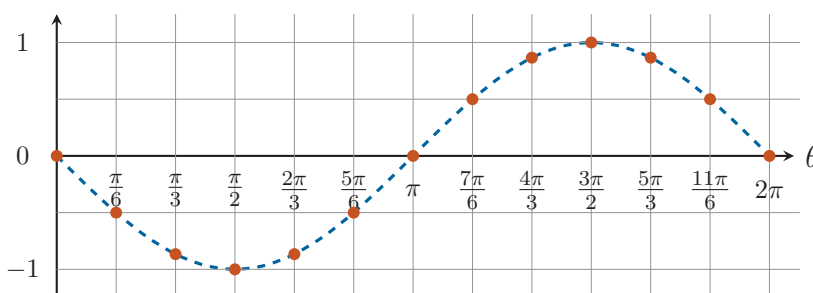
2) A função

$$g_2(\theta) = \sin(-\theta)$$

é definida pela mudança de variáveis $\theta \mapsto -\theta$, o que corresponde, em um círculo centrado na origem, à reflexão em torno do eixo horizontal. Uma vez que a função seno é *ímpar* (veja discussão da questão 185), temos

$$g(\theta) = -\sin(\theta).$$

Essa relação implica que o gráfico de g_2 é obtido, simplesmente, refletindo-se o gráfico da função seno em torno do eixo horizontal, conforme representado a seguir.



3) A função

$$g_3(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

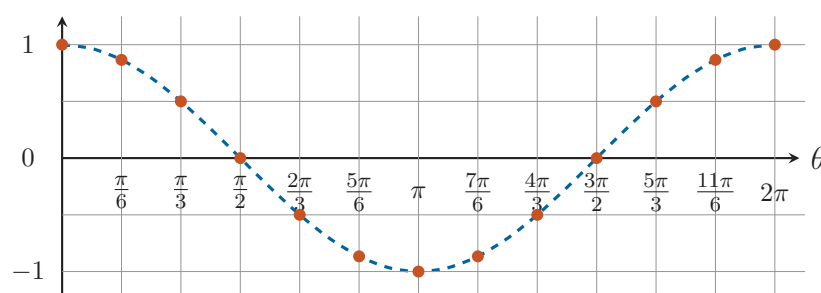
pode ser escrita como

$$g_3(\theta) = -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

o que corresponde à mudança de variáveis $\theta \mapsto \theta - \frac{\pi}{2}$. Portanto, o gráfico de g_3 pode ser obtida transladando-se o gráfico da função seno em $\frac{\pi}{2}$ para a *direita* e, então, refletindo-o em torno do eixo horizontal. Uma forma mais direta de obter o gráfico de g_3 é, meramente, observar que

$$g_3(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta),$$

ou seja, $g_3(\theta)$ é exatamente a função cosseno, cujo gráfico, sobre o intervalo $[0, 2\pi]$, representamos a seguir.



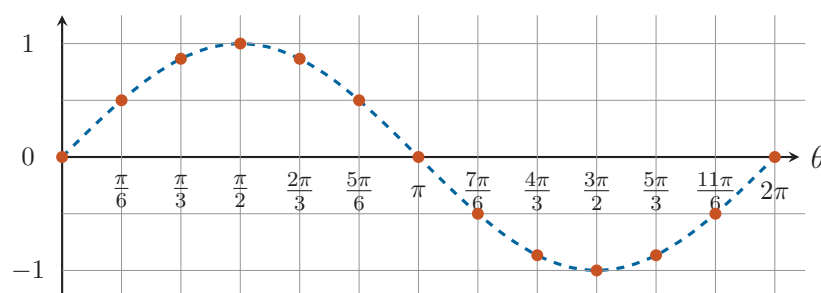
4) Para analisar a função

$$g_4(\theta) = \sin(\theta + 2\pi),$$

basta considerar que a função seno é periódica, com período igual a 2π , ou seja,

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

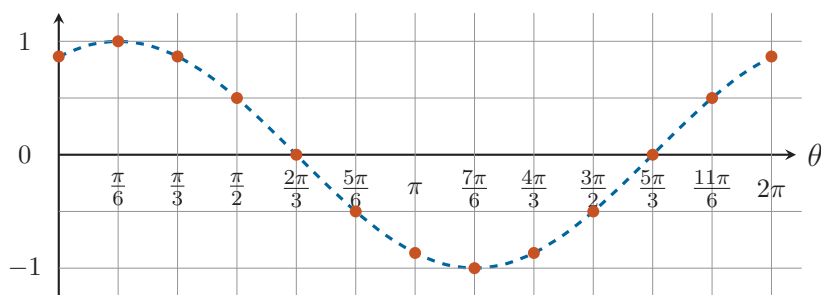
A mudança de variáveis $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ é interpretada, geometricamente, em termos de uma volta inteira (de 2π radianos) em um círculo centrado na origem. Representamos, a seguir, o gráfico de g_4 restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$.



5) A função

$$g_5(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

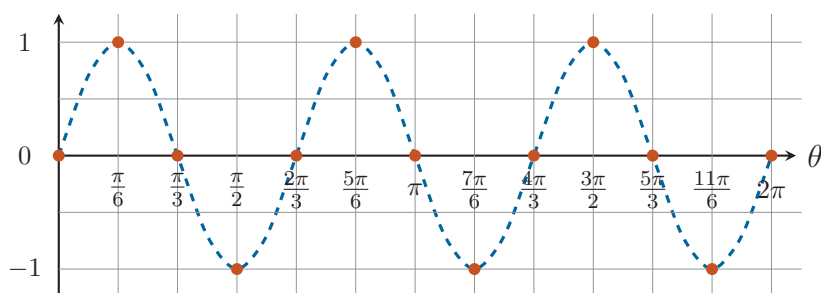
é obtida a partir da função seno pela mudança de variáveis $\theta \mapsto \theta + \frac{\pi}{3}$, o que corresponde à translação do gráfico da função seno ao longo do eixo horizontal em $\frac{\pi}{3}$ radianos para a *esquerda*. Representamos, a seguir, o gráfico de g_5 restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$.



6) A função $g_6(\theta) = \text{sen}(3\theta)$ tem *amplitude* igual a 1 e período $\frac{2\pi}{3}$, visto que

$$g_6\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(3\theta + 2\pi\right) = \text{sen}(3\theta) = g_6(\theta)$$

e $\frac{2\pi}{3}$ é o menor número real positivo com essa propriedade. Isso implica que, no intervalo de 0 a 2π , a função g_6 descreve 3 oscilações completas, como representado no gráfico a seguir.



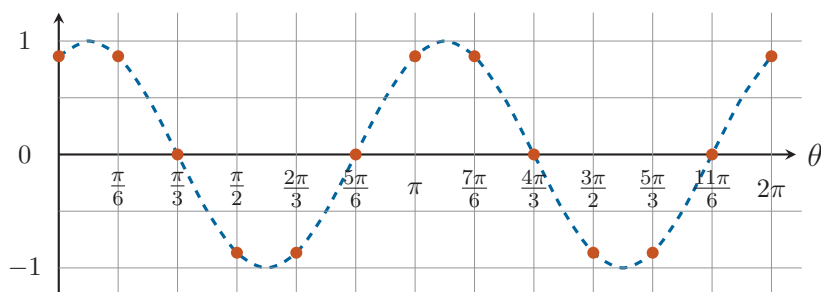
7) No caso da função

$$g_7(\theta) = \text{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right),$$

combinamos os casos 5) e 6) anteriores: de fato, temos *duas mudanças* de variável, a saber,

- a) $\theta \mapsto \phi = 2\theta$, o que corresponde à mudança de *período* da função seno, que passa a ser $\frac{2\pi}{2} = \pi$ radianos;
- b) $\phi \mapsto \phi + \frac{\pi}{3}$, o que corresponde à translação do gráfico ao longo do eixo horizontal em $\frac{\pi}{3}$ radianos para a *esquerda*.

Dadas essas alterações da função seno, o gráfico da função g_7 , restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$, é representado a seguir.

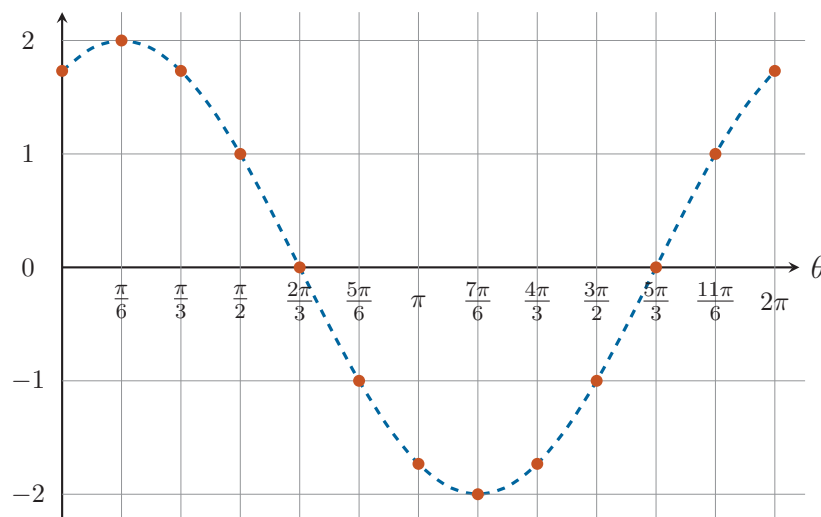


8) No caso da função

$$g_8(\theta) = 2 \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),$$

não há alterações no período e, sim, na amplitude da função seno, que passa a ser 2 em vez de 1. Isso pode ser interpretado como o efeito de mudança de escalas ou unidades

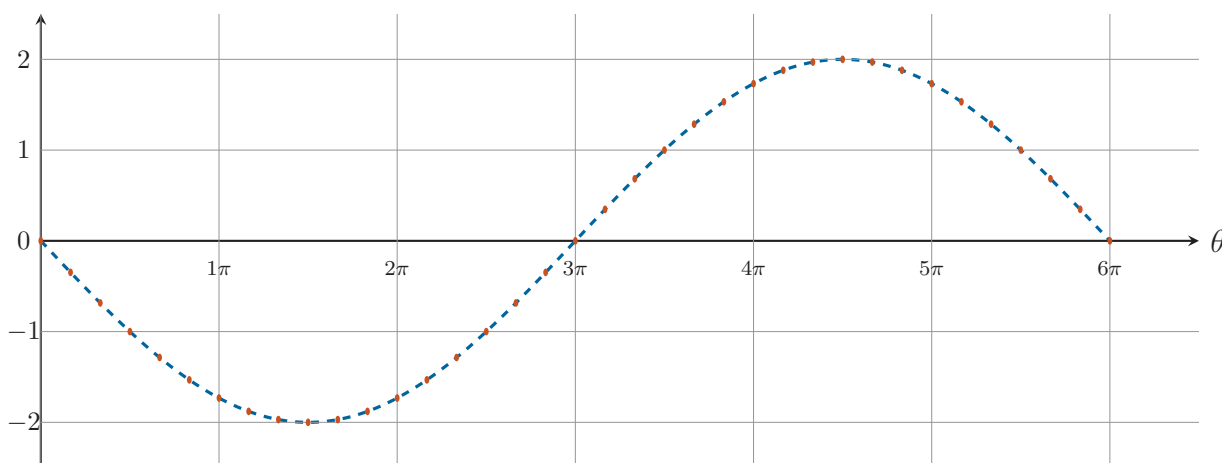
de medida no eixo vertical. Portanto, g_8 é obtido a partir da função seno por meio de duas transformações: a) a mudança de variável $\theta \mapsto \theta + \frac{\pi}{3}$, o que corresponde à translação do gráfico ao longo do eixo horizontal em $\frac{\pi}{3}$ radianos para a esquerda; b) uma homotetia (dilatação) do eixo vertical, transformando segmentos de comprimento 1 em segmentos de comprimento 2. Representamos, a seguir, parte do gráfico da função g_8 .



9) A função

$$g_9(\theta) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3}\theta - \pi \right)$$

é uma transformação da função seno resultante das seguintes alterações: a) mudança de *amplitude*, de 1 para 2; b) mudança de variável $\theta \mapsto \phi = \frac{1}{3}\theta$, que corresponde à mudança de período de 2π para $3 \cdot 2\pi = 6\pi$ radianos; c) segunda mudança de variável $\phi \mapsto \phi - \pi$, o que tem por efeito transladar o gráfico horizontalmente em π radianos para a *direita*. Representamos, a seguir, parte do gráfico de g_9 .



10) A função

$$g_{10}(\theta) = -2 \operatorname{sen} \left(3\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

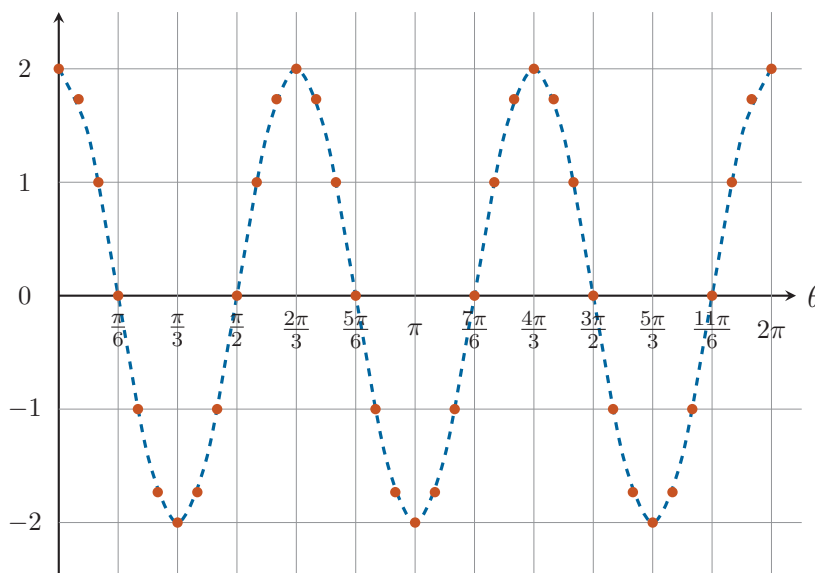
é uma transformação da função seno resultante das seguintes alterações:

a) mudança de *amplitude*, de 1 para 2;

- b) mudança de variável $\theta \mapsto \phi = 3\theta$, que corresponde à mudança de período de 2π para $\frac{2\pi}{3}$ radianos;
- c) segunda mudança de variável $\phi \mapsto \phi - \frac{\pi}{2}$, o que tem por efeito transladar o gráfico horizontalmente em $\frac{\pi}{2}$ radianos para a *direita*;
- d) reflexão do gráfico em torno do eixo horizontal, correspondente à mudança de sinal

$$2 \sin \left(3\theta - \frac{\pi}{2} \right) \mapsto -2 \sin \left(3\theta - \frac{\pi}{2} \right).$$

Representamos, a seguir, parte do gráfico de g_{10} .



11) A função

$$g_{11}(\theta) = \frac{1}{2} \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{4} \right) - 1$$

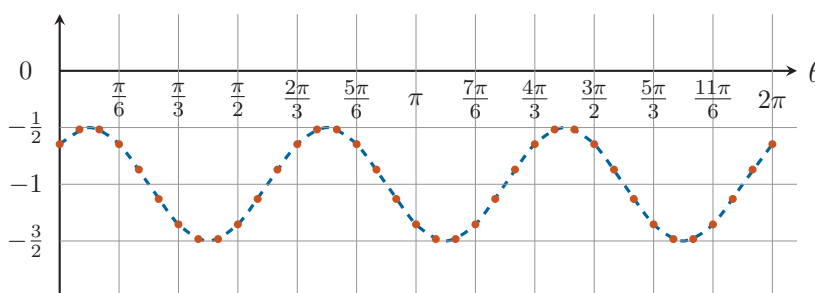
é uma transformação da função seno resultante das seguintes alterações:

- a) mudança de *amplitude*, de 1 para $1/2$;
- b) mudança de variável $\theta \mapsto \phi = 3\theta$, que corresponde à mudança de período de 2π para $\frac{2\pi}{3}$ radianos;
- c) segunda mudança de variável $\phi \mapsto \phi + \frac{\pi}{4}$, o que tem por efeito transladar o gráfico horizontalmente em $\frac{\pi}{4}$ radianos para a *esquerda*;
- d) uma translação do gráfico ao longo do eixo vertical em 1 unidade de medida para *baixo*, correspondente à mudança

$$\frac{1}{2} \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{4} \right) \mapsto \frac{1}{2} \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{4} \right) - 1$$

na expressão algébrica da função.

Representamos, a seguir, parte do gráfico de g_{11} .



12) A função

$$g_{12}(\theta) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3}\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 1$$

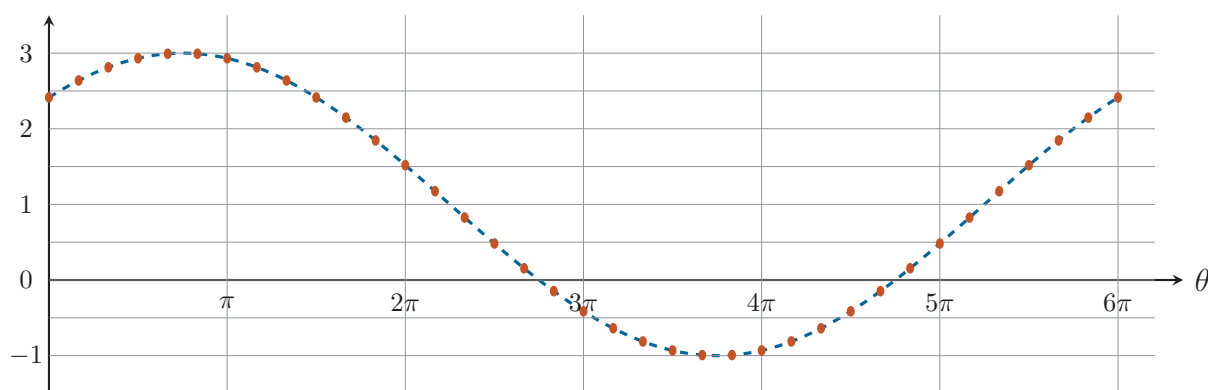
é uma transformação da função seno resultante das seguintes alterações:

- mudança de *amplitude*, de 1 para 2;
- mudança de variável $\theta \mapsto \phi = \frac{1}{3}\theta$, que corresponde à mudança de período de 2π para $3 \cdot 2\pi = 6\pi$ radianos;
- segunda mudança de variável $\phi \mapsto \phi + \frac{\pi}{4}$, o que tem por efeito transladar o gráfico horizontalmente em $\frac{\pi}{4}$ radianos para a *esquerda*;
- uma translação do gráfico ao longo do eixo vertical em 1 unidade de medida para *cima*, correspondente à mudança

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(3\theta + \frac{\pi}{4} \right) \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(3\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 1$$

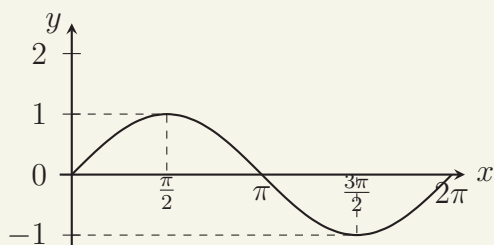
na expressão algébrica da função.

Representamos, a seguir, parte do gráfico de g_{12} .

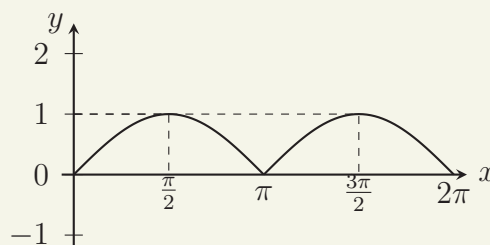


Questão 190 — SAEPE, adaptada. Qual a representação gráfica da função trigonométrica $f(x) = 1 + \operatorname{sen}(x)$ cujo domínio é o intervalo $[0, 2\pi]$?

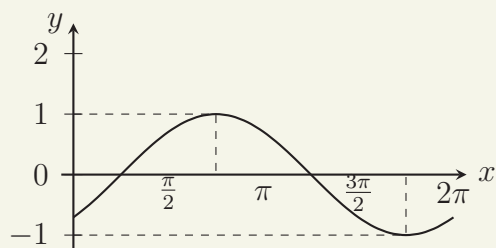
A)



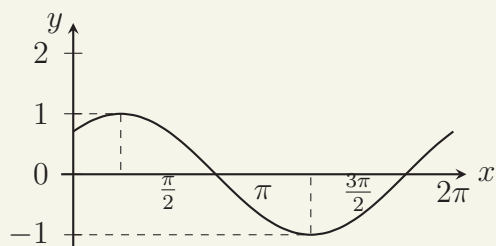
B)



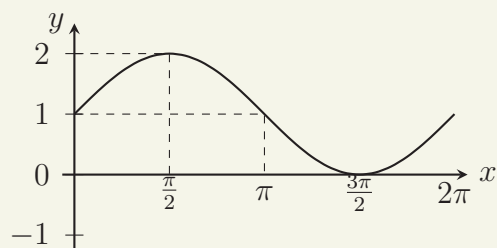
C)



E)



D)



Solução. O gráfico da função f é obtido a partir do gráfico da função seno pela translação em uma unidade de medida no sentido positivo do eixo coordenado vertical (eixo das ordenadas). Logo, a alternativa correta é D).

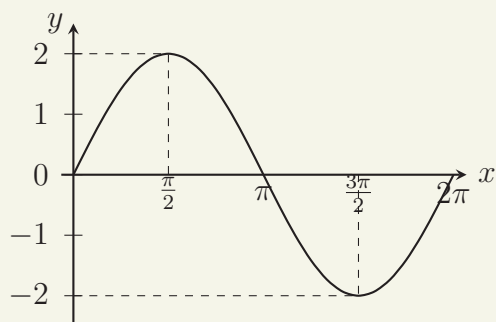
Sugerimos que o professor possa estimular e acompanhar os estudantes na dedução de quais funções são representadas pelos gráficos nas demais alternativas. Podemos constatar, pela análise dos gráficos, que

- em A), temos o gráfico da própria função seno $\phi(x) = \sin x$, restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$;
- em B), temos o gráfico da função $\psi(x) = |\sin(x)|$ no intervalo $[0, 2\pi]$;
- em C), temos o gráfico da função seno defasado em $\frac{\pi}{4}$ radianos, ou seja, da função $\zeta(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$;
- por fim, em E), temos o gráfico da função cosseno, defasada em $\frac{\pi}{4}$ radianos, ou seja, da função $\eta(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

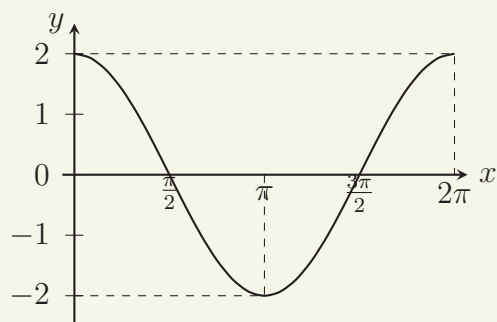
■

Questão 191 Um esboço do gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2 \cos x$, é

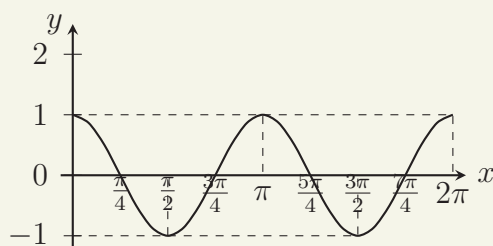
A)



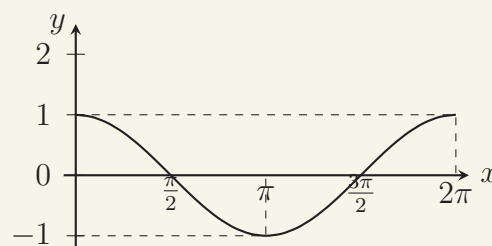
B)



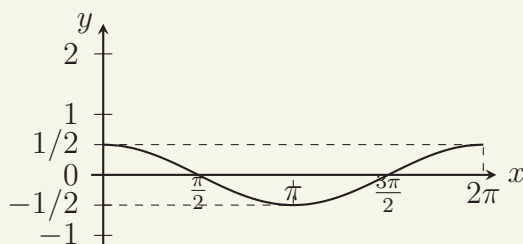
C)



D)



E)

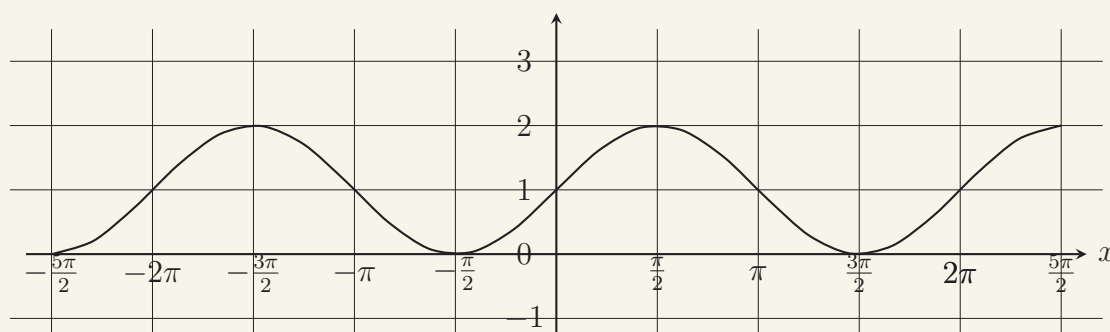


Solução. O gráfico da função f é obtido a partir do gráfico da função cosseno pela alteração da unidade de medida no eixo horizontal de modo que segmentos de medida 1 são deformados, por homotetia, em segmentos de medida 2 no eixo coordenado vertical (eixo das ordenadas). Logo, a alternativa correta é B).

Sugerimos que o professor possa estimular e acompanhar os estudantes na dedução de quais funções são representadas pelos gráficos nas demais alternativas. Podemos constatar, pela análise dos gráficos, que

- em A), temos o gráfico da modificação da função seno com amplitude igual a 2, ou seja, $\phi(x) = 2 \sin x$, restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$;
- em C), temos o gráfico da função seno com período igual à metade do período usual (ou seja, com duas oscilações completas em um intervalo de 2π radianos), dada por $\psi(x) = \cos(2x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$;
- em D), temos o gráfico da própria função cosseno, restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$;
- por fim, em E), temos o gráfico da função cosseno com amplitude $1/2$, ou seja, da função $\eta(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$.

Questão 192 — PAEBES, Item M120349G5, adaptado. Observe abaixo o gráfico de uma função trigonométrica f .



Qual é a lei de formação da função representada nesse gráfico?

- A) $f(x) = \sin(x)$ B) $f(x) = \sin(x + 1)$ C) $f(x) = \sin(x) + 1$
D) $f(x) = \cos(x + 1)$ E) $f(x) = \cos(x) + 1$

 **Solução.** O gráfico em questão tem pontos de ordenada máxima (respectivamente, mínima) em $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e demais ângulos da forma $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (respectivamente, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$), em que n é um número inteiro. Além disso, o gráfico tem *amplitude* (metade da diferença entre valores máximo e mínimo da ordenada) igual a 1. Observamos, ainda, que o *período* da função representada é 2π . Assim, o gráfico é obtido a partir do gráfico da função seno por uma translação de uma unidade de medida no sentido positivo do eixo vertical (das ordenadas). Por fim

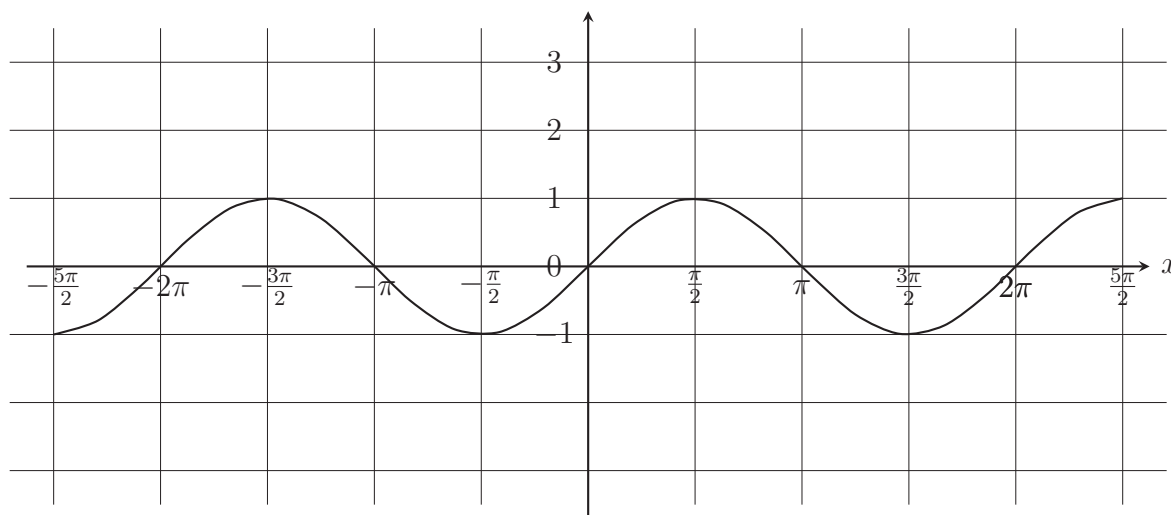
Logo, deduzimos que f é dada por

$$f(x) = \sin(x) + 1,$$

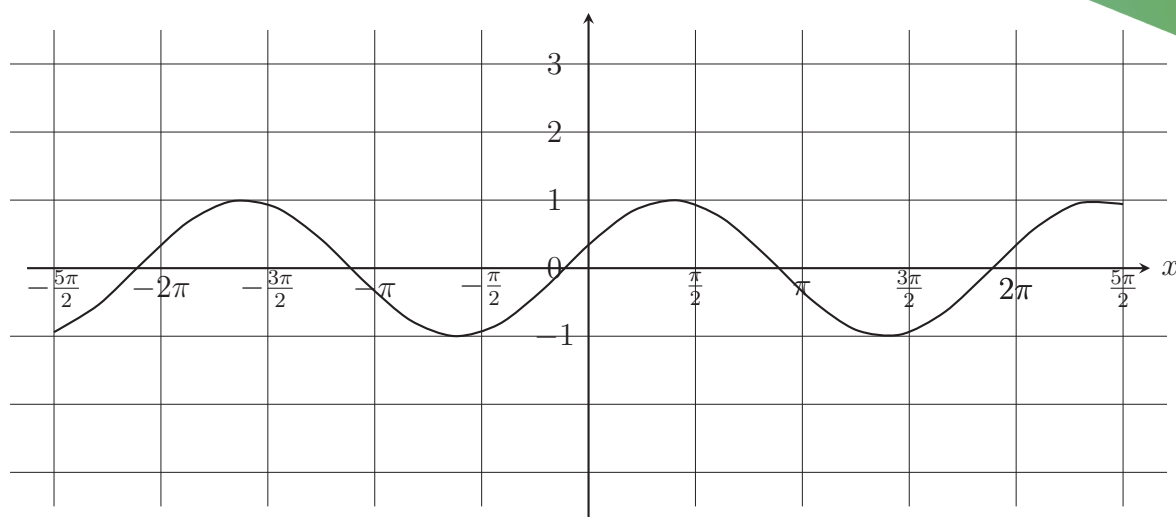
o que corresponde à alternativa C).

Sugerimos que o professor possa orientar seus estudantes na dedução de quais gráficos representam as funções expressas nas demais alternativas. Temos, a esse respeito, os seguintes fatos:

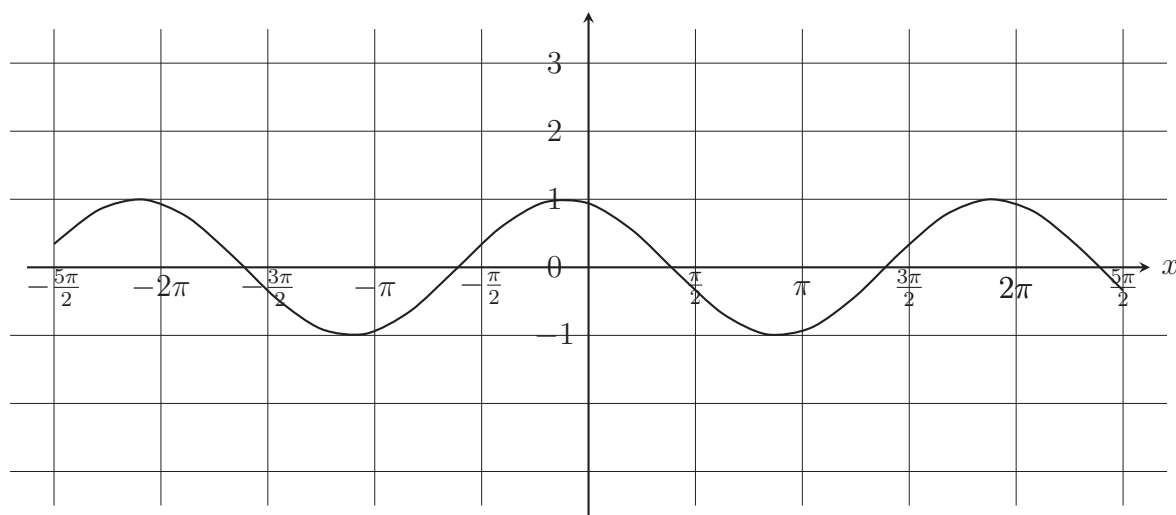
- A) sabemos, da nossa análise anterior, que o gráfico da função seno pode ser representado como na seguinte figura.



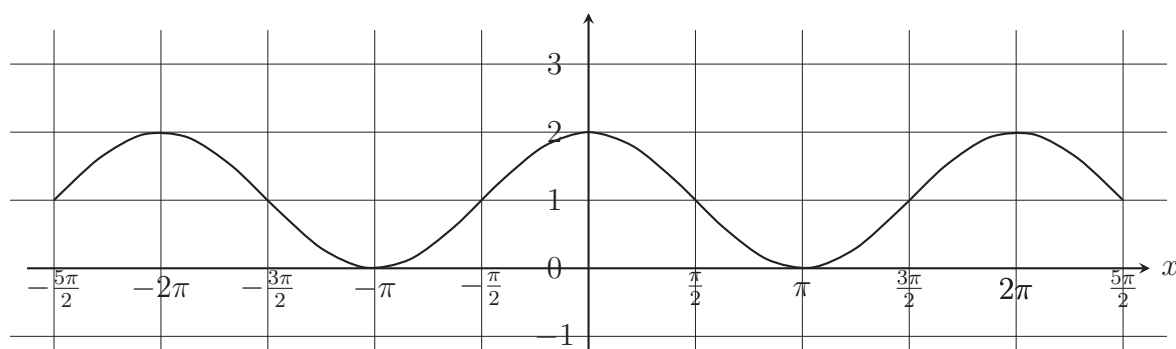
- O gráfico da função $g(x) = \sin(x + 1)$ é obtido transladando-se o gráfico da função seno, em uma unidade de medida para a esquerda, ao longo do eixo coordenado horizontal (eixo das abscissas), conforme representado na seguinte figura.



- Similarmente, a figura seguinte representa o gráfico da função $h(x) = \cos(x + 1)$, obtido a partir do gráfico da função cosseno por translação, em uma unidade de medida, no sentido negativo do eixo coordenado horizontal.



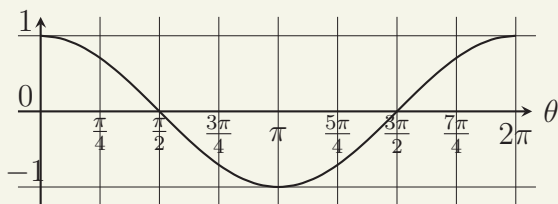
- A seguinte figura representa o gráfico da função $m(x) = \cos(x) + 1$, obtido transladando-se o gráfico da função cosseno, em uma unidade de medida, no sentido positivo do eixo coordenado vertical.



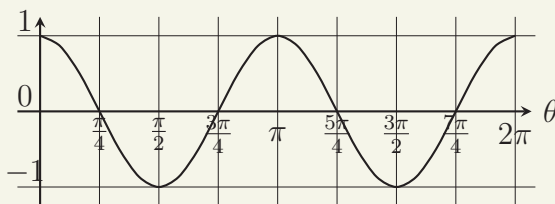
■

Questão 193 — PAEBES, Item M12003B1, adaptado. Qual gráfico representa a função real $f(x) = \cos(2x)$, com $x \in [0, 2\pi]$?

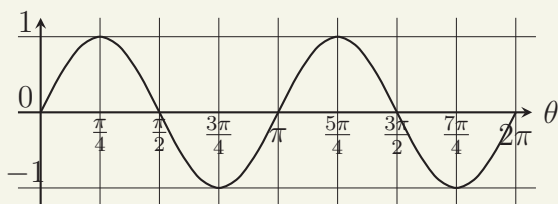
A)



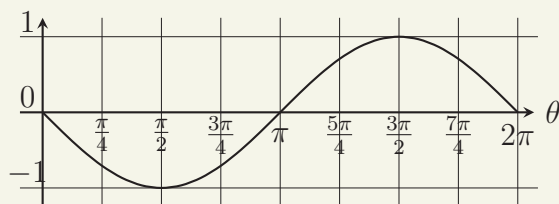
B)



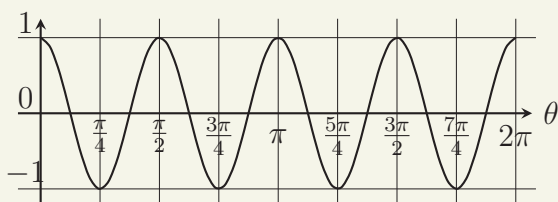
C)



D)

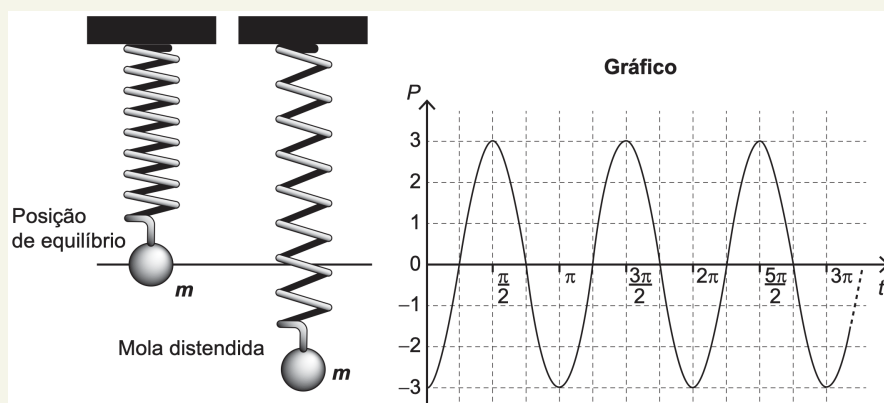


E)



Solução. A alternativa correta é B), pois representa um gráfico com duas oscilações completa em um intervalo de 2π radianos no eixo coordenado horizontal; além disso, o gráfico tem amplitude 1 e pontos de máxima (respectivamente, mínima) ordenada em ângulos da forma $\pi + \pi n$ (respectivamente $\frac{\pi}{2} + n\pi$), em que n é um número inteiro. ■

Questão 194 — ENEM 2021, Caderno Amarelo, questão 161. Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A \sin(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m , ao longo do tempo, no gráfico, é

A) $-3 \cos(2t)$.

B) $-3 \sin(2t)$.

C) $3 \cos(2t)$.

D) $-6 \cos(2t)$.

E) $6 \sin(2t)$.

 **Solução.** No gráfico da função, vemos duas oscilações completas em um intervalo de 2π radianos no eixo coordenado horizontal. Logo, o *período* da função é π , ou seja, sua frequência é igual a $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ oscilações em um intervalo de 2π radianos. Constata-se, ainda, que a diferença entre as ordenadas máxima e mínima no gráfico é igual a 6, o que significa que a *amplitude* da função é 3 (em módulo). Deduzimos, assim, que a função é dada por

$$P(t) = -3 \cos(2t),$$

uma vez que se anula em ângulos da forma $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, atinge valores máximos em ângulos da forma $\frac{\pi}{2} + n\pi$ e valores mínimos em ângulos da forma $\pi + n\pi$ (aqui, n é um número inteiro). Logo, a resposta correta é alternativa A). ■

Questão 195 1) Esboce o gráfico da função trigonométrica tangente $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, restrita ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

2) Por que não estendemos o domínio da função tangente aos ângulos $x = -\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$?

3) Como estender a função tangente a intervalos da forma $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ou $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$? Esboce o gráfico dessas extensões.